CORSO: **Analisi Matematica 3**
ANNO ACCADEMICO: **2021-22**
DOCENTI: **Giovanni Alberti, Maria Stella Gelli**
CODICE ESAME: **547AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **60**
CORSO DI STUDIO: **Matematica triennale (MAT-L) e magistrale (WMA-LM)**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: spazi L^p e spazi di Hilbert, serie e trasformata di Fourier (in L^1 e L^2) e relative applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali fondamentali, superfici k-dimensionali in $\mathbb{R}^d$ e integrazione su superfici.

Programma del corso [versione: 10 gennaio 2022]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. RICHIAMO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE (fuori programma)
   - *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   - *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   - *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile.*

2. SPAZI L^p
   - Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   - Norma L^p di una funzione; spazi L^p; completezza degli spazi L^p.
   - Confronto tra le varie nozioni di convergenza per una successione di funzioni.
   - Approssimazione con funzioni continue; teorema di Lusin.

3. CONVOLUZIONE
   - Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   - Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   - Approssimazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$; approssimazione con funzioni C^∞ a supporto compatto.

4. SPAZI DI HILBERT
   - Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi); rappresentazione di un elemento dello spazio di Hilbert H in termini di una base.
   - Proiezione ortogonale di un vettore di H su un sottospazio chiuso V e caratterizzazione in termini di distanza; rappresentazione di H come $H = V + V^\perp$.
   - Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo su H tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

5. SERIE DI FOURIER
   - Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Serie di Fourier di una funzioni in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$; identità di Parseval.
   - Relazione tra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier; convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   - Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione con il nucleo di Dirichlet; convergenza della serie di Fourier nei punti di continuità Hölderiana.

6. SERIE DI FOURIER: APPLICAZIONI E VARIANTI
   - *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.*

- Risoluzione di equazioni alle derivate parziali lineari con condizioni di periodicità al bordo tramite la serie di Fourier (in primis l'equazione del calore e delle onde).
- Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
- Varianti della serie di Fourier: serie di Fourier in d variabili, serie di Fourier reale, rappresentazione in serie di seni (per le funzioni in $L^2(0, \pi)$). Applicazione alla risoluzione di EDP con diverse condizioni al bordo.
- Operatori autoaggiunti; esempi di basi di Hilbert di autovettori di operatori autoaggiunti.

7. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
   - Proprietà elementari della TdF; trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1; trasformata della derivata e derivata della trasformata.
   - Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.
   - La TdF preserva il prodotto scalare e la norma L^2 a meno di un fattore costante (identità di Plancherel). Definizione della TdF di funzioni in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$; trasformata del prodotto di funzioni in L^2.
   - Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La TdF di una funzione con supporto compatto è analitica (teorema di Paley-Wiener).
   - *Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.*

8. Integrazione su superfici
   - Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni regolari e caratterizzazione come luogo di zeri di una mappa. Definizione di spazio tangente ad una superficie. *Mappe regolari su superfici e tra superfici, differenziale di queste mappe.*
   - Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Definizione di $|\det T|$ per un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali con prodotto scalare; formule alternative per $|\det T|$ per un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$.
   - Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$; formule alternative per lo Jacobiano. Costruzione della misura di volume su una superficie tramite parametrizzazioni regolari; caratterizzazione della misura di volume in termini di quasi-isometrie. Integrazione di funzioni su una superficie tramite parametrizzazioni anche non regolari (formula dell'area).
   - Applicazioni k-lineari alternanti (k-covettori) su uno spazio vettoriale V; prodotto esterno, pull-back tramite un'applicazione lineare. Base dello spazio dei k-covettori su V associata ad una base di V. Formula di Binet generalizzata.
   - *Forme differenziali (su un aperto di $\mathbb{R}^d$), pull-back, derivata esterna (differenziale). Integrazione di una k-forma su una superficie k-dimensionale orientata. Teorema di Stokes (solo enunciato).*

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Serve in particolare una solida conoscenza delle nozioni di base di:

- algebra lineare,
- topologia in spazi metrici,
- derivazione ed integrazione per funzioni in più variabili,
- convergenza uniforme e totale per successioni e serie di funzioni,
- equazioni differenziali ordinarie lineari,
- funzioni olomorfe e metodo dei residui per il calcolo degli integrali.

Le nozioni di base della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue verranno richiamate all'inizio del corso, ma non fanno parte del programma.

Comunicazioni e materiale didattico. La pagina del corso su MS Teams viene usata per lo streaming delle lezioni (per gli studenti collegati online), per l'archiviazione delle registrazioni delle lezioni, per i ricevimenti, per tutti gli avvisi riguardanti lezioni ed esami, e infine per pubblicare

il materiale didattico del corso (testi e soluzioni delle prove scritte, appunti delle lezioni, eventuali raccolte di esercizi). Avvisi e materiale didattico verranno pubblicati anche sulla pagina web del titolare del corso: `http://pagine.dm.unipi.it/alberti/didattica/didattica.html`.
In questa pagina si trovano inoltre i testi e le soluzioni degli esami scritti degli anni passati, e gli appunti delle lezioni del corso del 2020-21.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso ma sono disponibili gli appunti opportunamente e le registrazioni delle lezioni. Molti degli argomenti sono coperti dai testi elencati sotto, ma si tenga presente che la presentazione di questi testi differisce a volte significativamente da quella data a lezione.

- R. Courant e F. John. *Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2.* Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1974.
- A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin. *Introductory real analysis.* Dover Publications, New York, 1975. Traduzione italiana: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Editori Riuniti, Roma, 2012.
- T.W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill 1974. Traduzione italiana: *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, 1974.

Struttura dell'esame. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale, che vanno sostenute nello stesso appello. La prova scritta consiste di 8 esercizi di varia difficoltà a cui dare risposte dettagliate in tre ore; durante la prova non è consentito l'uso di libri di testo o appunti.
Per l'ammissione all'orale è necessario aver superato lo scritto.
Il voto dello scritto varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).
In linea di massima il voto finale viene definito durante l'orale all'interno della fascia di voti determinata dello scritto: QS $\to$ $18-21$, S $\to$ $18-24$, D $\to$ $21-27$, B $\to$ $24-30$, MB $\to$ $27-30$ e lode.

Appelli. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre) e due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta (una a metà corso ed una a inizio gennaio); chi è ammesso all'orale con i compitini può scegliere in quale appello fare l'orale.
Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami: `https://esami.unipi.it/`.
Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.

Esami online. Per via dell'epidemia ancora in corso alcuni appelli potrebbero svolgersi almeno parzialmente online. Le istruzioni per gli esami online sono disponibili sulla pagina web del titolare del corso: `http://pagine.dm.unipi.it/alberti/didattica/didattica.html`.