Versione: 9 settembre 2022

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica 3 (547AA), a.a. 2021-22

Testi

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi 3 consistono di otto domande a cui dare una risposta articolata. Di queste, le prime sono solitamente più semplici, nel senso che possono essere facilmente ricondotte a fatti o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.
Questa raccolta contiene i testi degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2021-22, incluse le prove in itinere.

Programma del corso [versione: 10 gennaio 2022]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. Richiamo di teoria dell'integrazione (fuori programma)
   - *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   - *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   - *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile.*

2. Spazi L^p
   - Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   - Norma L^p di una funzione; spazi L^p; completezza degli spazi L^p.
   - Confronto tra le varie nozioni di convergenza per una successione di funzioni.
   - Approssimazione con funzioni continue; teorema di Lusin.

3. Convoluzione
   - Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   - Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   - Approssimazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$; approssimazione con funzioni C^∞ a supporto compatto.

4. Spazi di Hilbert
   - Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi); rappresentazione di un elemento dello spazio di Hilbert H in termini di una base.
   - Proiezione ortogonale di un vettore di H su un sottospazio chiuso V e caratterizzazione in termini di distanza; rappresentazione di H come $H = V + V^\perp$.
   - Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo su H tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

5. Serie di Fourier
   - Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Serie di Fourier di una funzioni in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$; identità di Parseval.
   - Relazione tra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier; convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   - Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione con il nucleo di Dirichlet; convergenza della serie di Fourier nei punti di continuità Hölderiana.

6. Serie di Fourier: applicazioni e varianti
   - *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.*
   - Risoluzione di equazioni alle derivate parziali lineari con condizioni di periodicità al bordo tramite la serie di Fourier (in primis l'equazione del calore e delle onde).
   - Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

- Varianti della serie di Fourier: serie di Fourier in d variabili, serie di Fourier reale, rappresentazione in serie di seni (per le funzioni in $L^2(0,\pi)$). Applicazione alla risoluzione di EDP con diverse condizioni al bordo.
- Operatori autoaggiunti; esempi di basi di Hilbert di autovettori di operatori autoaggiunti.

7. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
   - Proprietà elementari della TdF; trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1; trasformata della derivata e derivata della trasformata.
   - Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.
   - La TdF preserva il prodotto scalare e la norma L^2 a meno di un fattore costante (identità di Plancherel). Definizione della TdF di funzioni in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$; trasformata del prodotto di funzioni in L^2.
   - Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La TdF di una funzione con supporto compatto è analitica (teorema di Paley-Wiener).
   - *Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.*

8. Integrazione su superfici
   - Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni regolari e caratterizzazione come luogo di zeri di una mappa. Definizione di spazio tangente ad una superficie. *Mappe regolari su superfici e tra superfici, differenziale di queste mappe.*
   - Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Definizione di $|\det T|$ per un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali con prodotto scalare; formule alternative per $|\det T|$ per un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$.
   - Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$; formule alternative per lo Jacobiano. Costruzione della misura di volume su una superficie tramite parametrizzazioni regolari; caratterizzazione della misura di volume in termini di quasi-isometrie. Integrazione di funzioni su una superficie tramite parametrizzazioni anche non regolari (formula dell'area).
   - Applicazioni k-lineari alternanti (k-covettori) su uno spazio vettoriale V; prodotto esterno, pull-back tramite un'applicazione lineare. Base dello spazio dei k-covettori su V associata ad una base di V. Formula di Binet generalizzata.
   - *Forme differenziali (su un aperto di $\mathbb{R}^d$), pull-back, derivata esterna (differenziale). Integrazione di una k-forma su una superficie k-dimensionale orientata. Teorema di Stokes (solo enunciato).*

TESTI

1. Sia X il sottospazio di $L^2([0,1])$ generato dalle funzioni x e x^2. Trovare la proiezione ortogonale della funzione x^3 su X.

2. Calcolare i coefficienti di Fourier reali e complessi della funzione $u(x) := \sin^3 x$.

3. Sia $u : [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $u(-\pi) = u(\pi)$. Scrivere $\|u\|_2$ e $\|\dot{u}\|_2$ in termini dei coefficienti della serie di Fourier *reale* di u.

4. Dato $a > 0$, sia f_a la funzione su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ data da
$$f_a(x) := \frac{1}{\big(|x_1| + \cdots + |x_d|\big)^a \big(1 + |\log(|x|)|\big)} \,.$$
Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione f_a appartiene a $L^p(B(0,1))$.

5. Data $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ funzione continua con coefficienti di Fourier c_n^0 sommabili, consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 2u_{xx} + u - \varphi(x)$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le solite condizioni di periodicità al bordo e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$.

   a) Dimostrare che (P) ammette una soluzione definita per ogni $t \geq 0$ e discuterne la regolarità.

   b) Discutere il comportamento asintotico della soluzione per $t \to +\infty$.

6. Sia X l'insieme delle funzioni $f \in C(\mathbb{R})$ tali che $(1 + |x|)\, f(x)$ è limitata. Dimostrare che:

   a) se $f \in X$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f * g$ è ben definita in ogni punto e appartiene a $C_0(\mathbb{R})$;

   b) se $f \in X$ e g è tale che $(1 + |x|)\, g(x) \in L^1$, allora $f * g$ appartiene a X.

7. Sia X l'insieme delle $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ con media nulla, e sia Y l'insieme delle $v \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ tali che $v(\pi) = v(-\pi) = 0$. Per ogni $u \in X$ consideriamo la funzione $Tu : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ data da
$$Tu(x) := \int_{-\pi}^{x} u(t)\, dt \,.$$

   a) Dimostrare che Tu appartiene a Y.

   b) Scrivere i coefficienti della serie di Fourier complessa di Tu in termini di quelli di u e della quantità $m := \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, x\, dx$.

   c) Dimostrare che $T(X)$ coincide con l'insieme Z delle $v \in Y$ tali che $\sum_n n^2 |c_n(v)|^2 < +\infty$.

   d) Dimostrare che $T(X)$ è denso in Y.

8. Data u nella classe C^1_{per} delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^1 e 2π-periodiche, pongo
$$E(u) := \int_{-\pi}^{\pi} \dot{u}^2 + \sin^3 x\, u\, dx \,.$$

   a) Scrivere $E(u)$ in termini dei coefficienti della serie di Fourier *reale* di u.

   b) Dimostrare che esiste una funzione $u \in C^1_{\text{per}}$ per cui il valore di $E(u)$ è minimo.

   c) Data $\varphi \in L^2([-\pi, \pi])$, definisco $E_\varphi(u)$ come sopra, sostituendo la funzione $\sin^3 x$ con φ; discutere l'esistenza del minimo di $E_\varphi(u)$ tra tutte le funzioni in C^1_{per}.

1. Calcolare la TdF di $u(x) := e^{-|x|}\cos^2 x$.

2. Sia $\omega := dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4$. Calcolare $\omega \wedge \omega$.

3. Sia H lo spazio di Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{C})$, sia D il sottospazio formato dalle funzioni u di classe C^1 tali che $u(0) = u(1) = 0$, e dato $\lambda \in \mathbb{C}$ sia $T : D \to H$ l'operatore lineare dato da $T := \lambda\dot{u}$. Dire per quali λ questo operatore è autoaggiunto, e se, in tal caso, è definito positivo.

4. Sia $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e 2π-periodica con coefficienti di Fourier c_n sommabili, e sia $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Dimostrare che
$$\widehat{uv}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\widehat{u}(y-n) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

5. Sia I un intervallo e sia $u : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che $u(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $t \in I$ e $u(\cdot,x)$ è di classe C^1 per ogni $x \in \mathbb{R}$, e sia $\widehat{u} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione ottenuta prendendo la TdF di u rispetto alla seconda variabile x. Dimostrare che
   a) se esiste $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $|u(t,x)| \le g(x)$, allora $\widehat{u}$ è continua;
   b) se inoltre esiste $h \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $|u_t(t,x)| \le h(x)$, allora $\widehat{u}$ è C^1 in t e $(\widehat{u})_t = \widehat{u_t}$;
   c) se si richiede solo che $\|u(t,\cdot)\|_1$ sia limitata in t, non è detto che $\widehat{u}$ sia continua.

6. Sia Σ l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tali che $|x| = 2$ e $|x-y| = 1$.
   a) Dimostrare che Σ è una superficie (senza bordo) di dimensione 2, compatta e di classe C^∞.
   b) Trovare una parametrizzazione di Σ e calcolarne l'area.

7. Data $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in $L^1 \cap L^2$, e $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in C^1_c, consideriamo il problema (P) dato dalla condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ e dall'equazione $u_t = u * \rho$.[1] Dimostrare che:
   a) (P) ammette una soluzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to C$ continua, C^∞ in t, con $u(t,\cdot)$ limitata per ogni t;
   b) Data $u : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soluzione di (P) continua, C^1 in t, e tale che $\|u(t,\cdot)\|_2$ è localmente limitata in t, allora vale la stima alla Gronwall $\|u(t,\cdot)\|_2 \le \|u_0\|_2 \exp(\|\rho\|_1|t|)$.[2]

[1] Qui $*$ rappresenta la convoluzione nella variabile x.

[2] Potrebbe essere utile la seguente variante del lemma di Gronwall: data $v : [0,a] \to \mathbb{R}$ continua e $m \in \mathbb{R}$ tale che $v(t) \le v(0) + m\int_0^t v(s)\,ds$ per ogni t, allora $v(t) \le v(0)\exp(mt)$ per ogni t.

1. Scrivere la funzione $u_0(x) := \sin x\, \cos^2 x$ in serie di seni su $[0,\pi]$.

2. Sia $R := [-1,1] \times [0,1]$ e sia V il sottospazio di $L^2(R)$ generato dalle funzioni $x_1 x_2$, x_1^2, x_2^2. Determinare la proiezione ortogonale su V della funzione costante 1.

3. Data u in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ dimostrare che la funzione $v(x_1,x_2) := u(x_1+x_2)\, u(x_1-x_2)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ e calcolarne la TdF in termini di quella di u.

4. Sia Σ l'insieme del punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la curva nel piano xy di equazione $y(1+x^4) = 1$ attorno all'asse x.
   a) Dimostrare che Σ è una superficie senza bordo di classe C^∞.
   b) Dire per quali $p \in [1,+\infty)$ la funzione $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ appartiene a $L^p(\Sigma)$.

5. Sia $H := L^2([0,1])$, e per ogni $k = 0,\dots,3$ sia D_k il sottospazio delle funzioni $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^4 tali che $u(0) = u(1) = 0$ e $D^k u(0) = D^k u(1) = 0$, e sia $T : D_k \to H$ l'operatore lineare dato da $Tu := D^4 u$.
   a) Dire per quali $k = 0,\dots,3$ l'operatore T è autoaggiunto.
   b) Per tali k, dire se T è (semi-) definito (positivo o negativo), o altro.

6. Dato $k = 0,1,\dots$, sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e sia ρ una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ con supporto compatto. Dimostrare che:
   a) il prodotto di convoluzione $\rho * u$ è ben definito e appartiene a C^k;
   b) se $\int_{\mathbb{R}} x^h \rho(x)\, dx = 0$ per $h = 0,\dots,k-1$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che
$$\lim_{\delta \to 0^+} \tfrac{1}{\delta^k} \sigma_\delta \rho * u(x) = m\, D^k u(x) \quad \text{dove} \quad m := \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k \rho(x)\, dx = 0\,.$$

7. Sia (P) il problema dato dall'equazione $u_t = -D_x^4 u$ sull'intervallo spaziale $[0,\pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0$, dove u_0 è data nell'esercizio 1.
   a) Trovare una soluzione u.
   b) Discutere l'unicità di tale soluzione. [*Suggerimento: considerare il problema con la condizione al bordo aggiuntiva* $D_x^2 u(t,0) = D_x^2 u(t,\pi) = t$.]

8. a) Dimostrare che per ogni $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale $\|\widehat{u}\|_4^4 = \|(\widehat{u})^2\|_2^2 = 2\pi \|u * u\|_2^2$.
   b) Dimostrare che per ogni $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale $\|\widehat{u}\|_4 \le \sqrt[4]{2\pi}\, \|u\|_{4/3}$.
   c) Definire la TdF per le funzioni in $L^{4/3}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

1. Sappiamo che $\|\widehat{u}\|_\infty \le \|u\|_1$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Far vedere che questa stima è ottimale, cioè che non esiste alcuna costante $c < 1$ tale che $\|\widehat{u}\|_\infty \le c\|u\|_1$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

2. Dato $a > 0$, sia $u_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$u_a(x) := \frac{1}{1 + |x|^2 + |x|^a} \, .$$
Dire per quali $a > 0$ e $p \ge 1$ la funzione u_a appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d)$.

3. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) := \dfrac{1}{4x^2 + 4x + 2}$.

4. Sia $I := [0, 1]$ e sia D lo spazio delle funzioni $u : I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.
   a) Dimostrare che D è denso in $L^p(I)$ per ogni $p \in [1, \infty)$.
   b) Determinare la chiusura di D nello spazio $C(I)$ delle funzioni continue su I.

5. a) Calcolare i coefficienti di Fourier $c_n(x)$ della funzione x.
   b) Determinare la funzione $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ i cui coefficienti di Fourier sono
$$c_0(u) := 0 \, , \quad c_n(u) := \frac{i(-1)^n}{n(1 + n^2)} \text{ per } n \ne 0. \tag{1}$$
   [*Suggerimento: osservare che per ogni intero n vale $(1 + n^2)\, c_n(u) = a\, c_n(x)$ con a costante da determinare; dedurne che u deve soddisfare un'opportuna equazione differenziale.*]

6. Dati $R, r > 0$, sia Σ l'insieme dei punti in $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la circonferenza di raggio r e centro $(0, R)$ nel piano xy attorno all'asse x.
   a) Dimostrare che Σ è una superficie senza bordo di classe C^∞ se $R > r$.
   b) Dimostrare che Σ non è una superficie se $R = r$.
   c) Per $R > r$ trovare una parametrizzazione di Σ e calcolarne l'area.

7. Dati $a > 0$ e una funzione continua $u_0 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tale che $\sum n^2 |c_n(u_0)| < +\infty$, consideriamo il problema (P_a) dato dall'equazione alle derivate parziali $u_t = (1 + \cos(at))\, u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$, dalle condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)$ e $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi)$, e dalla condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$.
   a) Dimostrare che (P_a) ha una soluzione u_a definita per $t \ge 0$, di classe C^1 in t e C^2 in x.
   b) Dimostrare che, per $a \to +\infty$, u_a converge puntualmente alla soluzione dell'equazione del calore con le stesse condizioni al bordo e la stessa condizione iniziale.
   c) Dire se la convergenza al punto b) è uniforme, specificando dove.

8. Sia $H := L^2([0, \pi])$, sia D il sottospazio di H dato dalle funzioni $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che $u(0) = 0$ e $\dot{u}(\pi) = 0$, e sia infine $T : D \to H$ l'operatore lineare dato da $Tu := \ddot{u} - u$.
   a) Dimostrare che T è autoaggiunto.
   b) Dire se T è (semi-) definito positivo/negativo o altro.
   c) Determinare gli autovalori di T e i corrispondenti autospazi.
   d) È possibile trovare una base di Hilbert di H costituita da autovettori di T?

1. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $u(x) := e^{|x|}$ (ristretta all'intervallo $[-\pi, \pi]$).

2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := \begin{cases} e^{-2x} & \text{se } x \geq 0, \\ -e^{2x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

3. Sia X il sottospazio di ℓ^2 formato dagli elementi $x = (x(0), x(1), \dots)$ tali che $x(m) = 0$ definitivamente in m. Dimostrare che X è denso in ℓ^2, e dedurne che X non è uno spazio di Hilbert.

4. Sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y^4(1 + x^6) \leq 1$. Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione $f(x, y) := 1 + x^2$ appartiene a $L^p(E)$.

5. Sia $I := [-1, 1]$, sia $a \in L^\infty(I)$, e infine sia $T : L^2(I) \to L^2(I)$ l'operatore lineare dato da
$$[Tu](x) := a(x)\, u(-x)\,.$$
a) Dimostrare che T è continuo.

b) Caratterizzare le funzioni a tali che T è autoaggiunto.

c) Esistono funzioni a tali che T è autoaggiunto e definito positivo?

6. Sia v una funzione continua su $[-\pi, \pi]$ i cui coefficienti di Fourier c_n^0 soddisfano $\sum |n|\, |c_n^0| < +\infty$. Consideriamo quindi il problema (P) dato dall'equazione $u_{tt} = u_{xx} - 2u$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$, dalle solite condizioni di periodicità al bordo, e dalle condizioni iniziali $u(0, \cdot) = 0$ e $u_t(0, \cdot) = v(\cdot)$. Discutere l'intervallo temporale di esistenza e la regolarità della soluzione di (P) (l'unicità può essere data per scontata).

7. Per ogni $n = 0, 1, \dots$ sia X_n il sottospazio di ℓ^2 formato dagli $x = (x(0), x(1), \dots)$ tali che $x(m) = 0$ per $m > n$, e sia X il sottospazio formato dagli x tali che $x(m) = 0$ definitivamente in m. Sia infine e_0 un vettore unitario in $\ell^2 \setminus X$ con $e_0(0) \neq 0$.

a) Fare vedere che per ogni $n = 1, 2, \dots$ esistono $e_n \in X_n$ tali che $\mathscr{F} := \{e_n : n = 0, 1, \dots\}$ è un sistema ortonormale in ℓ^2.

b) Dimostrare che $\mathscr{F}$ è una base di Hilbert di ℓ^2.

c) Dimostrare che $\mathscr{F}^* := \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ è un sistema ortonormale massimale in X, il cui span non è denso in X.[1]

8. Dato $d = 2\dots$, sia d' l'esponente coniugato di d e sia $f(x) := 1/|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$.

a) Dato $p > d'$, trovare $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che $f * g(x) = +\infty$ per ogni x.

b) Trovare $g \in L^{d'}(\mathbb{R}^d)$ tale che $f * g(x) = +\infty$ per ogni x.

c) Sia A l'insieme dei $p \in [1, +\infty)$ tali che $f * g(x)$ è ben definito e finito per q.o. x e per ogni $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dimostrare che l'insieme A non è vuoto, e se possibile determinarlo. [*Suggerimento: scomporre f come $f = f_1 + f_2$ dove f_1 è la restrizione di f alla palla $B = B(0,1)$ e f_2 è la restrizione al complementare di B, e considerare separatamente $f_1 * g$ e $f_2 * g$.*]

[1] Questo esempio mostra che, in uno spazio X con prodotto scalare, non è vero che ogni sistema ortonormale massimale è anche completo, contrariamente a quello che succede se X è uno spazio di Hilbert.

1. Dati $a_1, \dots, a_d$ numeri reali, consideriamo i covettori $\omega \in \wedge^1(\mathbb{R}^d)$ e $\omega' \in \wedge^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ definiti da
$$\omega := \sum_{i=1}^d a_i \, dx_i \ , \quad \omega' := \sum_{i=1}^d a_i \, \omega_i \quad \text{dove} \quad \omega_i := \bigwedge_{j \neq i} dx_j \, .$$
Calcolare $\omega \wedge \omega'$.

2. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $v(x) := e^{2x} + e^{-2x}$.

3. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $u(x) = O(|x|^{-4})$ per $x \to \pm\infty$. Cosa si può dire sulla regolarità di $\widehat{u}$?

4. Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|^2$, sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ data dal grafico di f, e sia infine $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$u(x,y) := \frac{1}{1+y^2} \, .$$
Dire per quali p la funzione u appartiene a $L^p(\Sigma)$.

5. Sia X il sottospazio di $L^2 = L^2([-1,1])$ formato dalle funzioni $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u(1) = 0$, e sia infine $T : X \to L^2$ l'operatore definito da $[Tu](x) := \dot{u}(-x)$.
Dire se T è a) continuo; b) autoaggiunto.

6. Sia $p \in [1, +\infty)$, sia E insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$, e sia $u_n : E \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili. Dimostrare che:
a) $\liminf \|u_n\|_p \geq \|u\|_p$ se $u_n \to u$ q.o.;
b) $\liminf \|u_n\|_p \geq \|u\|_p$ se $u_n \to u$ in $L^q(E)$ con $1 \leq q \leq \infty$;
c) non è sempre vero che $\lim \|u_n\|_p = \|u\|_p$ se $u_n \to u$ q.o.

7. Sia v la funzione definita nell'esercizio 2. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx} + v$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)$ e $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi)$, e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$.
Dimostrare che (P) ammette una soluzione u definita per $t \geq 0$, e discuterne la regolarità.

8. Dimostrare i seguenti enunciati, dove $L^p = L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $C_0 = C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$:
a) se $u \in L^1$ e $\widehat{u} \in L^2$ allora $u \in L^2$ [*suggerimento: approssimare* u *con* $u * \sigma_\delta \rho$ *dove* $\rho \in L^1 \cap L^2$];
b) $\|\widehat{u}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_2$ per ogni $u \in L^1$; [1]
c) la Trasformata di Fourier è iniettiva su $L^1 \cup L^2$;
d) è possibile definire la Trasformata di Fourier da $L^1 + L^2$ a $C_0 + L^2$, ed è iniettiva.

[1] Identità dimostrata a lezione solo per $u \in L^1 \cap L^2$

1. Calcolare la serie di Fourier complessa di $f(x) := 16\cos^2 x \sin^2 x$.

2. Dato $a > 0$, calcolare la Trasformata di Fourier della funzione indicatrice $u := \mathbf{1}_{[-a,a]}$.

3. Al solito, siano $b_n(u)$ i coefficienti della serie in seni di una funzione $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.
   a) Esprimere $b_n(\ddot{u})$ in funzione di $b_n(u)$ ed a quando u è di classe C^2 e $u(0) = u(\pi) = a$.
   b) Calcolare $b_n(u)$ per $u(x) := x(\pi - x)$.

4. Sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^d$ una mappa "conforme", cioè una mappa di classe C^1 tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $d_x u$ coincide a meno di una costante $a(x)$ con un'isometria (da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^d$).
   a) Dimostrare che i vettori $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)$ sono ortogonali e hanno lunghezza $|a(x)|$.
   b) Esprimere lo Jacobiano $Ju(x)$ in termini di $a(x)$.

5. Dimostrare che la funzione $f(x) := \dfrac{\sin x}{x \log(e + |x|)}$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $p > 1$.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx} + x(\pi - x)$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$, dalle condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, e dalla condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$. Discutere l'esistenza e la regolarità della soluzione.

7. Sia $\rho : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una funzione continua, e per ogni $u \in L^1 := L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ sia
$$\Phi(u) := \left(\int_{\mathbb{R}} \big|\widehat{u}(y)\big|^2 \rho(y)\, dy \right)^{1/2} ;$$
   sia inoltre $X := \{u \in L^1 \colon \Phi(u) < +\infty\}$.
   a) Dimostrare che Φ è una norma su X indotta da un prodotto scalare complesso.
   b) Dimostrare che $\Phi(u * v) \leq \Phi(u) \cdot \|v\|_1$ per ogni $u \in X$, $v \in L^1$.
   c) Sia $k = 0, 1, \dots$; trovare delle condizioni sul comportamento asintotico di ρ a $\pm\infty$ che implicano che X contiene tutte le funzioni di classe C^k con supporto compatto.
   d) Cosa si può dire sulla completezza di Φ?

8. Sia $L^p := L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $C_0 := C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Dimostrare che la Trasformata di Fourier $\mathscr{F} : L^1 \to C_0$ non è surgettiva completando la seguente traccia di dimostrazione: supponendo per assurdo che lo sia, allora esiste $\varphi \in L^1$ tale che
$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{\log(e + |y|)} ;$$
   posto $u := \mathbf{1}_{[-1,1]}$, dimostrare che $\widehat{\varphi * u} \in L^2 \setminus L^1$, e poi che $\varphi * u \in C_0 \setminus \mathscr{F}(L^1)$.
   [*Se serve si può dare per acquisito che la TdF è iniettiva su* $L^1 \cup L^2$.]