Versione: 12 settembre 2022

Università di Pisa
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica I (158AA), a.a. 2021-22

Testi

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2021-22, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2021]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
   - Funzioni continue.

3. Derivate
   - Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazioni (parziali) dei teoremi di de L'Hôpital e dello sviluppo di Taylor.
   - Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.

- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Integrali impropri
   - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
   - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - Integrali impropri non semplici.

6. Serie numeriche e serie di potenze
   - *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
   - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
   - Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
   - Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta.
   - Serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie. *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
   - Serie di potenze e raggio di convergenza, calcolo del raggio di convergenza con il criterio del rapporto e della radice.

7. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee; ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.

T E S T I

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni della disequazione trigonometrica $\sin(\pi x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 - 9}}$.

3. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) := 2x^3 \log x$ relativi alla semiretta $x > 0$.

4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{9^{x-1}}{3^{x-1}}$ nel punto $x = 1$.

5. Scrivere la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^5 + 1}$.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x + \log x}{x^3 + x^5}}_{a}\ , \quad \underbrace{\frac{4^x + 1}{2^x - 1}}_{b}\ , \quad \underbrace{2^x \log x}_{c}\ , \quad \underbrace{\frac{x - x^3}{3 + x^2}}_{d}\ .$$

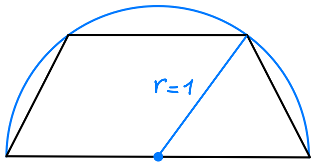
7. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 7 in $x = 0$ di $f(x) := \left(x + 2x^4\right)\left(1 + 2x^3\right)^{1/3}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $|x^3 - 1| \le y \le 1 - x$.

Seconda parte (prima variante)

1. Trovare per quali numeri reali a vale la disuguaglianza $x - 2 \leq ae^{x/2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Tra tutti i trapezi iscritti nella semicirconferenza di raggio 1 come nella figura sotto, trovare quello di perimetro massimo.



3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\big(x^3\cos(x + x^3)\big) - 3\log x\,.$$
a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare la parte principale di $f(x) + ax^2$ per $x \to 0^+$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (dati in coordinate cartesiane), scegliendo l'angolo nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $(0, -3)$; b) $(-3, -\sqrt{3})$; c) $(-4, 4)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{(\sin x)^4}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\cos(2^x)$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^8+2^x}{x^{10}+1}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (2-3x^4)\exp(x^2)$.

4. Calcolare la velocità *scalare* e la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto che si muove con legge oraria $P(t) := \big(\sin(3t^3)\,,\,-\cos(3t^3)\big)$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{(x-7)(x-2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta finito il seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-a})}{x^{2a}+4}\,dx$

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t\,(4x^2+1)$ che soddisfa $x(0) = \frac{1}{2}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2} \le y \le -\arctan x$.

SECONDA PARTE (prima variante)

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Dire se la disequazione $(x^2+1)^5 \geq x^{10}+16$ vale per ogni $x \geq 1$.

   b) Dire per quali $m > 0$ vale che $(x^2+1)^5 \geq m(x^{10}+16)$ per ogni $x \geq 1$.

2. Un punto P si muove con legge oraria $P(t) = \big(\rho(t)\cos t,\, \rho(t)\,\sin t\big)$ con $\rho(t) := 4\cos^2\Big(\frac{\sqrt{3}}{4}t\Big) - 1$.

   a) Calcolare la distanza percorsa da P nell'intervallo di tempo $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

   b) Disegnare la traiettoria di P nello stesso intervallo di tempo.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
   $$\ddot{x} + 4a\dot{x} + a^3 x = t \tag{*}$$
   Determinare la soluzione generale di (*), facendo particolare attenzione al caso $a = 0$.

4. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq y \leq e^x$ e $-1 \leq x \leq 1$, sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse $y = 1$, e sia V' il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse $y = e$.

   a) Disegnare A, V e V'.

   b) Calcolare il volume di V.

   c) Calcolare il volume di V'.

5. Dire dove è improprio il seguente integrale, e studiarne il comportamento:
   $$I = \int_0^{+\infty} \exp\big(\tfrac{1}{x} - x\big)\, dx\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere la formula dell'inversa $g(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(ax^3 + x^2 + 3ax)$ è crescente.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^6 + \log x}{x^3 + x^4}}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{2x \log x}{x^3 + 1}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{4}{x^2 + 1}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x^6 - 1}{1 + x^3}}_{d}\,.$$

4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := \dfrac{\exp(x^2) - 1}{1 + x^2}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^5}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + n^4) \sin\left(\tfrac{1}{n^a}\right)$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2x + 4e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\left|e^{-x} - 1\right| \le y \le x^5 - 1$.

Seconda parte (prima variante)

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(\cos(2x)) - \log(1 + ax^2)\,.$$
Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, facendo particolare attenzione al caso $a = -2$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \le y \le \sqrt{1 + x^4}$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A e di V.
   b) Dire se l'area di A è finita o infinita.
   c) Dire se il volume di V è finito o infinito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2)\,dt\,. \tag{*}$$
   a) Determinare il dominio di definizione di $f(x)$ e studiarne il segno.
   b) Trovare il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$.
   c) Tracciare il grafico di $f(x)$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Dire per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ vale l'identità $\cos(x - \alpha) = \sin\big(x - \frac{\pi}{6}\big)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\exp(x^4) - 1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{e^x \sin x}{\cos x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3^x \sqrt{1 + x^4}$.

3. Dire se esistono i valori di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) := \arctan(x^5 - 45\,x)$ relativamente alla semiretta $x \geq -2$ e calcolarli; se non esistono calcolare l'estremo inferiore e superiore dei valori.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x \log x}{x^4 + x^3} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

5. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 + 4)$.

6. Dire per quali $a > 0$ il seguente integrale improprio è finito: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4 \log\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)}{x^{2a} + x^a}\, dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t \log t}{x}$ tale che $x(1) = 1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\frac{\pi}{2} + \arctan x \leq \log(1 - x)$.

Seconda parte (prima variante)

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := e^x \Big(\frac{1}{x} + 6\Big) .$$
a) Disegnare il grafico $y = f(x)$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.
c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ (se ce n'è almeno una): calcolare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$ e trovare una funzione elementare $g(a)$ asintoticamente equivalente a $x(a)$ per $a \to +\infty$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine
$$\dot{x} + \big(2at + \tfrac{1}{t}\big)\, x = \exp(t^2) . \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*), facendo particolare attenzione al caso $a = -1$.
b) Dire per quali a vale che *tutte* le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ poer $t \to +\infty$.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} .$$
Dire dove è improprio l'integrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$, e discuterne il comportamento.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (espressi in coordinate cartesiane), *scegliendo l'angolo nell'intervallo* $(-\pi, \pi]$: a) $(0, -3)$; b) $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$; c) $(-2\sqrt{3}, 2)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^3 + ax^2 + 2x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2) \exp(3x^2)$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n n!}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{(1-x^2)^{2a}}\, dx$ è finito.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = at^b$ risolve l'equazione differenziale $t^2 \ddot{x} + x = t^6$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \geq \dfrac{1}{(x+1)^4}$ e $y \geq 2 - e^{-x}$.

Seconda parte (prima variante)

1. Dire per quali valori del parametro reale a l'equazione
$$\frac{x}{x+1} = ae^{x/2}$$
ammette esattamente due soluzioni.

2. Consideriamo le funzioni
$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,, \quad g(x) := 1 - \frac{1}{x+2}$$
e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > -1$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$.
a) Disegnare i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, e l'insieme A.
b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

3. Consideriamo la funzione $f(x) := \log(2e^x + 1)$, e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
a) Trovare $g(x)$.
b) Calcolare il limite di $f(x) - g(x)$ per $x \to +\infty$.
c) Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ax + b + ce^{-x} + O\big(e^{-2x}\big)$ per $x \to +\infty$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Risolvere la disequazione $2\cos(\pi x) \geq \sqrt{2}$ per $-2 \leq x \leq -1$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, facendo le dovute semplificazioni:
   a) $\arcsin\left(\sqrt{1-x}\right)$; b) $\dfrac{3^{3x-1}}{9^{x-2}}$; c) $\log\left(\dfrac{x^2}{1-x^3}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel corretto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0^+$:
$$\underbrace{\frac{1}{x^2+x^3}}_{a}\ ,\quad \underbrace{xe^x}_{b}\ ,\quad \underbrace{x\sin x}_{c}\ ,\quad \underbrace{\frac{1+\log x}{x^2}}_{d}\ .$$

4. Dire se esistono i valori massimi e minimi della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ per $x \leq 2$, e in caso affermativo dire quanto valgono.

5. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\cos(x^2)\log(1+x^3)}{e^{x^2}-1}$.

6. Dire per quali $a > 0$ è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-2a})}{1+x^a}\,dx$.

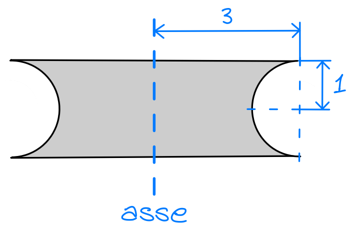
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{t+2}}$ tale che $x(-1) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|e^x - 1| \leq y \leq \sqrt{1-x}$.

Seconda parte

1. Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 2e^t \,. \tag{*}$$
   a) Risolvere (*) per $a \neq 1; 5$.
   b) Risolvere (*) per $a = 5$.
   c) Risolvere (*) per $a = 1$.

2. Calcolare il volume della ruota R la cui sezione (rispetto ad un piano passante per l'asse) è riportata nel disegno sotto.



3. Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{1}{1+4x^2}$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
   b) Trovare i punti del grafico di f che sono più vicini all'origine.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \dfrac{1}{1-\sqrt{e^x-1}}$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\log(1+3x)}{\exp(x^2)-1}$; b) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{e^x+1}{\sin(\pi x)}$; c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log(\log x)}{\log x}$.
3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := 2\sin(3x^2)\sqrt{1+2x^4}$.
4. Calcolare la velocità vettore e la velocità scalare di un punto nel piano che si muove con legge oraria: $x(t) = 1 + e^t \cos t$; $y(t) = -2 + e^t \sin t$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4x = 8$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a^x+1}{3^x+2}\, dx$ converge.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|\cos(x/2)| \le y \le -x$.

SECONDA PARTE

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp\bigl(1 - \sqrt{1 + 3x^2}\bigr) - 1$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.
   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + g(x)$ con $g(x) := \exp\bigl(\frac{3}{2}x^2\bigr) - 1$

2. Consideriamo l'insieme A dato dai punti (x, y) tali $f(x) \le y \le g(x)$, dove
   $$f(x) := \sqrt[5]{x^4 + 4}\,, \quad g(x) := \sqrt[5]{x^4 + x^2}\,.$$
   Disegnare l'insieme A e dire se ha area finita o meno.

3. Si vuole costruire una strada che congiunge due paesi rappresentati dai punti $P_1 := (-2, 0)$ e $P_2 := (2, 0)$ del piano cartesiano. Nel farlo, bisogna tenere conto che all'interno della zona A rappresentata dei punti del piano (x, y) tali che $y \le |x| - 1$, il costo unitario della strada è la metà che all'esterno. Trovare il percorso meno costoso che congiunge i due paesi (si può dare per buono che tale percorso è simmetrico rispetto all'asse delle y).

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$.

2. Trovare i valori massimi e minimi di $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ relativamente all'intervallo $1 < x \le 4$. In caso non esistano, specificare gli estremi superiori e inferiori dei valori.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (1+3x^4)\exp(2x^2)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $xe^{2x} + 2^x = O(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} 2^{2x}\,dx$.

6. Dire dove è improprio il seguente integrale, e per quali $a > 0$ risulta finito: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 6t$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x^3+1| \le y \le 1 - \dfrac{x}{2}$.

Seconda parte (prima variante)

1. Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t^2 \,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per ogni $a > 0$.
b) Per quali $a > 0$ esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{4t}$ per $t \to +\infty$?

2. Discutere al variare di $a > 0$ il comportamento dell'integrale improprio
$$I := \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + \cos(\pi x))^a} \,.$$

3. Consideriamo la funzione $f(x)$ data da
$$f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3t^2(1 - t^4)}{t^4 + 1} \, dt \,.$$
a) Calcolare la derivata di $f(x)$.
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.
b) Disegnare il grafico di $f(x)$.
[*L'integrale che definisce $f(x)$ non può essere calcolato esplicitamente (o perlomeno non è facile farlo); l'esercizio va quindi affrontato senza un'espressione esplicita per $f(x)$.*]