CORSO: **Analisi Matematica 3**
ANNO ACCADEMICO: **2020-21**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CODICE ESAME: **547AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **60**
CORSO DI STUDIO: **Matematica triennale (MAT-L) e magistrale (WMA-LM)**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: spazi L^p e spazi di Hilbert, serie e trasformata di Fourier (in L^1 e L^2) e relative applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali fondamentali, funzioni armoniche, superfici in $\mathbb{R}^d$ e integrazione su superfici.

Programma del corso [versione: 19 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. RICHIAMO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE (fuori programma)
   - *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   - *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   - *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile.*

2. SPAZI L^p
   - Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   - Norma L^p di una funzione; spazi L^p; completezza degli spazi L^p.
   - Confronto tra le varie nozioni di convergenza per una successione di funzioni.
   - Approssimazione con funzioni continue; teorema di Lusin.

3. CONVOLUZIONE
   - Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   - Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   - Approssimazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$; approssimazione con funzioni C^∞ a supporto compatto.

4. SPAZI DI HILBERT
   - Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi); rappresentazione di un elemento dello spazio di Hilbert H in termini di una base.
   - Proiezione ortogonale di un vettore di H su un sottospazio chiuso V e caratterizzazione in termini di distanza; rappresentazione di H come $H = V + V^\perp$.
   - Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo su H tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

5. SERIE DI FOURIER
   - Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Serie di Fourier di una funzioni in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$; identità di Parseval.
   - Relazione tra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier; convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   - Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione con il nucleo di Dirichlet; convergenza della serie di Fourier nei punti di continuità Hölderiana.

6. SERIE DI FOURIER: APPLICAZIONI E VARIANTI
   - *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.*
   - Risoluzione di equazioni alle derivate parziali lineari con condizioni di periodicità al bordo tramite la serie di Fourier (in primis l'equazione del calore e delle onde).

- Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
- Varianti della serie di Fourier: serie di Fourier in d variabili, serie di Fourier reale, rappresentazione in serie di seni (per le funzioni in $L^2(0, \pi)$). Applicazione alla risoluzione di EDP con diverse condizioni al bordo.
- Operatori autoaggiunti; esempi di basi di Hilbert di autovettori di operatori autoaggiunti.

7. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
   - Proprietà elementari della TdF; trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1; trasformata della derivata e derivata della trasformata.
   - Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.
   - La TdF preserva il prodotto scalare e la norma L^2 a meno di un fattore costante (identità di Plancherel). Definizione della TdF di funzioni in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$; trasformata del prodotto di funzioni in L^2.
   - Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La TdF di una funzione con supporto compatto è analitica (teorema di Paley-Wiener).
   - *Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.*

8. Funzioni armoniche
   - Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Regolarità C^∞ delle funzioni armoniche.
   - Principio del massimo per la funzioni armoniche. Unicità e principio del confronto per le soluzioni dell'equazione e di Poisson con condizioni al bordo di Dirichlet.
   - Relazioni tra le funzioni armoniche in dimensione due e le funzioni olomorfe. Analiticità delle funzioni armoniche (solo in dimensione due).
   - Risoluzione dell'equazione di Poisson con termine noto polinomiale e dato al bordo polinomiale su una palla o su un ellissoide (in dimensione qualunque). Risoluzione dell'equazione di Laplace con condizione di Dirichlet sul disco unitario tramite (rappresentazione e della soluzione come Fourier e tramite il nucleo di Poisson).

9. Integrazione su superfici
   - *Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni regolari e caratterizzazione come luogo di zeri, cioè in termini di equazioni. Spazio tangente ad una superficie. Mappe regolari tra superfici, differenziale di una mappa regolare. Superfici con bordo.*
   - Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Definizione di $|\det T|$ per un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali con prodotto scalare; formule alternative per $|\det T|$ per un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$.
   - Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$; formule alternative per lo Jacobiano. Costruzione della misura di volume su una superficie tramite parametrizzazioni regolari; integrazione di funzioni su una superficie tramite parametrizzazioni anche non regolari (formula dell'area).
   - Applicazioni k-lineari alternanti (k-covettori) su uno spazio vettoriale V; prodotto esterno, pull-back tramite un'applicazione lineare. Base dello spazio dei k-covettori su V associata ad una base di V. Formula di Binet generalizzata.
   - *Orientazione di uno spazio vettoriale V, orientazione di una superficie e orientazione del bordo. Forme differenziali (su un aperto di $\mathbb{R}^d$), pull-back, derivata esterna (differenziale). Integrazione di una k-forma su una superficie k-dimensionale orientata. Teorema di Stokes (solo enunciato).*

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Serve in particolare una solida conoscenza delle nozioni di base di:

- algebra lineare,
- topologia in spazi metrici,

- derivazione ed integrazione per funzioni in più variabili,
- convergenza uniforme e totale per successioni e serie di funzioni,
- funzioni olomorfe e metodo dei residui per il calcolo degli integrali.

Le nozioni di base della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue verranno richiamate all'inizio del corso, ma non fanno parte del programma.

Mailing list e pagina web del corso. Le comunicazioni riguardanti corso ed esami vengono inviate alla mailing list del corso, e pubblicizzate sulla pagina web del docente:
`http://pagine.dm.unipi.it/alberti/didattica/didattica.html`.
In questa pagina si trovano altresì le istruzioni per iscriversi alla mailing list e il materiale didattico del corso, inclusi i testi e le soluzioni delle prove scritte svolte nell'anno in corso e in quelli passati.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso ma sono disponibili gli appunti opportunamente rieditati e le registrazioni delle lezioni. Molti degli argomenti sono coperti dai testi elencati sotto, ma si tenga presente che la presentazione di questi testi differisce a volte significativamente da quella data a lezione.

- R. Courant e F. John. *Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2.* Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1974.
- A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin. *Introductory real analysis.* Dover Publications, New York, 1975. Traduzione italiana: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Editori Riuniti, Roma, 2012.
- T.W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill 1974. Traduzione italiana: *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, 1974.

Struttura dell'esame. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale, che vanno sostenute nello stesso appello. La prova scritta consiste di 8 esercizi di varia difficoltà a cui dare risposte dettagliate in tre ore.
Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri di testo o appunti.
Per l'ammissione all'orale è necessario aver superato lo scritto.
Il voto delle prove scritte varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).
In linea di massima il voto finale viene definito durante l'orale all'interno della fascia di voti determinata dal risultato dello scritto: QS $\to 18-21$, S $\to 18-24$, D $\to 21-27$, B $\to 24-30$, MB $\to 27-30$ e lode.

Appelli. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre) e due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta (una a metà corso ed una a inizio gennaio); chi è ammesso all'orale con i compitini può scegliere in quale appello fare l'orale.
Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami: `https://esami.unipi.it/`.
Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.

Per via dell'epidemia in corso alcuni appelli si svolgeranno completamente o parzialmente online.

Istruzioni per le prove scritte online. Gli scritti online si svolgono in aule virtuali sulla piattaforma Teams. Il link all'aula verrà comunicato con un messaggio di posta elettronica inviato all'indirizzo di posta istituzionale di ogni studente iscritto all'esame.

Per la prova scritta serve quanto segue:

- carta e penna;
- un computer (o altro strumento) per inquadrare lo studente durante la prova;
- un cellulare (o un tablet) per fotografare lo scritto alla fine della prova e spedirlo;
- un documento da usare in caso di problemi con l'identificazione online.

All'inizio della prova:

- viene verificata l'identità di ogni studente e l'inquadratura: se quest'ultima non dovesse essere adeguata (vedere sotto) lo studente potrebbe non essere ammesso all'esame;
- il testo della prova viene condiviso con Teams e dettato; lo studente deve copiare il testo di ogni esercizio su un foglio diverso dove poi aggiungerà lo svolgimento;

- alla fine della dettatura lo studente si allontana dal computer e non lo guarda per tutta la durata della prova; il computer viene usato solo per la sorveglianza.

Durante la prova:

- la posizione del computer deve essere scelta in modo tale che lo studente sia inquadrato di lato (e non di fronte come durante le chiamate) e da lontano, cosicché si possa vedere anche il tavolo e lo spazio davanti allo studente; quando lo studente scrive non ha il computer in vista davanti a sé;
- non è consentito usare né libri né appunti; sul tavolo devono esserci solo carta, penna e cellulare;
- lo studente deve essere sempre visibile e non può allontanarsi;
- nessun altro può essere presente nella stessa stanza.

Alla fine della prova:

- lo studente ha 10 minuti di tempo per fotografare i fogli delle soluzioni con il telefono (o il tablet) realizzando un unico file pdf (esistono diverse applicazioni per fare questo, alcune già presenti di default nei sistemi operativi Android e iOS);
- lo studente carica il file nel modulo Google per le consegne, il cui link è stato inviato per posta insieme all'indirizzo dell'aula; una volta conclusa l'operazione viene inviata un'email di conferma;
- attenzione: per aprire il modulo Google è necessario autenticarsi con le credenziali di ateneo; il problema più frequente è che il cellulare imposta di default le credenziali dell'account Google privato e in tal caso l'accesso al modulo viene negato: per aggirare questo problema di solito basta aprire il link in una pagina anonima del browser.

Prima di ogni prova scritta verrà organizzato un incontro su Teams per verificare le inquadrature, fare una prova di consegna dello scritto, e chiarire eventuali dubbi pratici.

Istruzioni per le prove orali online. Gli orali online si svolgono in aule virtuali sulle piattaforme Teams o Meet. Il link all'aula verrà comunicato per posta elettronica insieme al calendario delle prove.

Per l'orale serve quanto segue:

- un computer per inquadrare lo studente durante la prova;
- un tablet su cui scrivere, oppure carta, penna e un cellulare per inquadrare dall'alto il foglio su cui si scrive;
- un documento da usare in caso di problemi con l'identificazione online.

Durante la prova:

- La posizione del computer deve essere scelta in modo tale che lo studente venga inquadrato di lato e da lontano, cosicché si possa vedere anche il tavolo e lo spazio davanti allo studente;
- in mancanza di un tablet lo studente scrive su un foglio e monta il cellulare su un supporto (per esempio una lampada da tavolo) in modo da inquadrare il foglio su cui scrive;
- lo studente deve essere sempre visibile e nessun altro può essere presente nella stessa stanza.