AM3 20/21

lezione 15

26/10/2020

Serie di Fourier

Scopo: scrivere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica come

coeff. di Fourier di f

$$(*) \qquad \underbrace{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}}_{\text{serie di Fourier di } f}.$$

- Motivazioni: dopo.
- cosa significa $\sum_{-\infty}^{\infty} \dots$? $\lim_{N \to +\infty} \sum_{-N}^{N} \dots$
- Come si trovano i coefficienti c_n, e che senso ha la formula $(*)$?

Teorema 1

$\mathcal{Y} := \left\{ e_n(x) := \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ è una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Dato per buono questo enunciato, e presa $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ vale

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f ; e_n \rangle \cdot e_n$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}} \, dx \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right)}_{c_n} e^{inx}$$

Definizione

Data $f \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, i coeff. di Fourier di f sono:

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Corollario 2

Data $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ allora:

(0) f è univoc. determinata dai coeff. di Fourier c_n

(i) $\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$,

(ii) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ converge in L^2 a f

(cioè $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \xrightarrow[N\to+\infty]{} f$ in L^2);

(iii) $\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\cdot \overline{c_n(g)}$ (ident. di Parseval)

Dim. Applicare il Teorema 1 e il teorema della base.

Osserv.

- L'applicazione $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \longmapsto \sqrt{2\pi}\,(c_n(f)) \in \ell^2_{\mathbb{C}}$ è un'isometria (surgettiva).

- La serie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge incondizionatamente cioè $\forall \varepsilon\ \exists N$ t.c. $\forall I \subset \mathbb{Z}$ finito con $I \supset \{-N,\dots,N\}$ vale che
$$\Big\| f - \sum_{n\in I} c_n e^{inx} \Big\|_2 \le \varepsilon.$$

- Da (ii) segue che esiste una sottosucc. (N_k) t.c.

$$\sum_{n=N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x) \quad \text{per q.o. } x$$

- Teorema di Carleson (1966):

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x) \quad \text{per q.o. } x.$$

Risultato molto complesso, non segue dal Corollario 2.

Passo ora alla dim. del Teorema 1: cioè a) $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale; b) $\mathcal{F}$ è completo.

Dimostrazione di (a)

Dati $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_m ; e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \overline{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx$$

$$= \begin{cases} \text{se } n=m & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 1 \\ \text{se } n\neq m & = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{cases}$$

Per dimostrare la completezza uso il Stone-Weierstrass (altra dimostr. più tardi)

Sia K spazio topologico compatto T_2 ($\simeq K$ sp. metrico comp.)
$\mathcal{C}(K) := \{ g : K \to \mathbb{R} \}$ dotato della norma del sup;
$\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) := \ldots\ldots$

Dato $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$ (opp. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K; \mathbb{C})$), dico che $\mathcal{A}$ è una (sotto-) algebra se è un sottospazio vettoriale chiuso rispetto al prodotto (di funzioni);
$\mathcal{A}$ separa i punti se $\forall x_1, x_2 \in K$ con $x_1 \neq x_2$ $\exists f \in \mathcal{A}$ t.c. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Teorema 3 (Stone-Weierstrass)

Versione reale: se $\mathcal{A}$ è una sotto-algebra di $\mathcal{C}(K)$ che separa i punti e contiene le costanti, allora $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K)$

Versione complessa: se $\mathcal{A}$ è una sotto-algebra di $\mathcal{C}(K; \mathbb{C})$ che separa i punti, contiene le costanti, è chiusa per coniugio, allora $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K; \mathbb{C})$.

Non dimostro questo risultato.

Osserv.

- Caso particolare (Weierstrass): i polinomi sono densi in $\mathcal{C}([a,b])$.

- L' ipotesi che $\mathcal{A}$ separi i punti è necessaria: dati $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$, t.c. $f(x_1) = f(x_2)$ $\forall f \in \mathcal{A}$ allora lo stesso vale $\forall f \in \bar{\mathcal{A}} \implies \bar{\mathcal{A}} \neq \mathcal{C}(K)$;

- l' ipotesi che $\mathcal{A}$ contiene le cost. è necessaria: dato $x_0 \in K$, sia $\mathcal{A} := \{ f \in \mathcal{C}(K) : f(x_0) = 0 \}$, allora $\mathcal{A}$ separa i punti, è un'algebra, ma $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \neq \mathcal{C}(K)$.

- l' ipotesi che $\mathcal{A}$ sia chiuso per coniugio è necessaria: sia $K = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$, e $\mathcal{A} = \{ \text{polinomi complessi} \} = \{ f(z) = \sum a_n z^n \}$: $\mathcal{A}$ è un' algebra, $\mathcal{A}$ separa i punti (basta usare z) e contiene le costanti, ma non è chiuso per coniugio

$$\bar{\mathcal{A}} = \left\{ f \in \mathcal{C}(K;\mathbb{C}) : \begin{array}{l} f \text{ olomorfa all'} \\ \text{interno di } K \end{array} \right\} \subsetneq \mathcal{C}(K;\mathbb{C})$$

Corollario 4

Sia $\mathcal{A}$ sottoalgebra di $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$ che contiene le costanti ed è chiusa per coniugio. Pongo

$$x_1 \sim x_2 \overset{}{\underset{def}{\iff}} f(x_1) = f(x_2) \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Allora $\bar{\mathcal{A}} = \{ f \in \mathcal{C}(K;\mathbb{C}) : f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2 \}$.

Dim. E' chiaro che $\mathcal{A} \subseteq X := \{ f : f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2 \}$.
Data $g \in X$, definisco $\tilde{g} : K/\sim \to \mathbb{C}$ in modo che $g = \tilde{g} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ K/\sim \arrow[ur, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Osservo che $K/\sim$ è compatto e T_2 (attenzione alla separazione) e che $\tilde{\mathcal{A}} := \{ \tilde{f} : f \in \mathcal{A} \}$ soddisfa le ipotesi di S.-W., quindi $\overline{\tilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{C}(K/\sim ; \mathbb{C})$, quindi $\forall g \in X \ \exists \ \tilde{g}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ t.c. $\tilde{g}_n \to \tilde{g}$ unif.
e quindi $g_n \to g$ unif. $\square$

Dimostrazione della completezza di $\mathcal{F}$

Sia

$$\mathcal{A} := \operatorname{Span} \mathcal{F} = \Big\{ \sum_n a_n e^{inx} \Big\}$$

Combin. lineari finite!

$$= \{ p(e^{ix}) : p \text{ polinomio con esp. in } \mathbb{Z} \}$$

(queste funzioni si chiamano polinomi trigonometrici),

Allora $\mathcal{A}$ è una sotto-algebra di $\mathcal{C}([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ che contiene le costanti ed è chiusa per coniugio $\left(\overline{e^{inx}} = e^{-inx} \ \forall n \right)$

$\mathcal{A}$ separa i punti di $[-\pi,\pi]$ (uso e^{ix}) tranne $-\pi$ e π, cioè $[x]=\{x\}$ $\forall x\in(-\pi,\pi)$, $[\pi]=[-\pi]=\{\pm\pi\}$.

Per il Corollario 4:

chiusura rispetto alla norma del sup

$$\overline{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \{ g\in\mathcal{C}([-\pi,\pi];\mathbb{C}) : g(-\pi)=g(\pi)\}$$

$$\Downarrow$$

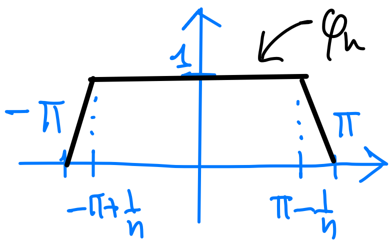
chiusura rispetto alla norma L^2.

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{ g\in\mathcal{C}(\dots) : g(-\pi)=g(\pi)\}$$

$$\Downarrow$$

data $g\in\mathcal{C}(\dots)$

prendo $g_n := g\cdot\varphi_n$



allora $g_n \to g$ in L^2.

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \mathcal{C}([-\pi,\pi];\mathbb{C})$$

$$\Downarrow$$

densità di $\mathcal{C}$ in L^2

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} = L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C}).$$

$\square$

Esempi di calcolo dei coeff. di Fourier

- $f(x) = \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ← serie di F. di f

$$\Longrightarrow \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n=\pm 1 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

- $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\dfrac{e^{2ix}}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-2ix}}{4}$

$$\Longrightarrow \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n=0 \\ -\frac{1}{4} & \text{se } n=\pm 1 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

- $f(x) = x$. Allora $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx \overset{x \text{ è dispari}}{=} 0$

e per $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{inx}\,dx \overset{\text{per parti}}{=} \frac{i(-1)^n}{n}$$

Se applico Parseval a $f(x)=x$ ottengo:

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \|x\|_2^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Eulero...)

AM3 20/21 lezione 16

28/10/2020

Relazione tra regolarità di f e comport. dei coeff. di F.

Prop. 1

Sia $f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c.

(H) $\quad f \in C^1$ e $f(-\pi) = f(\pi)$.

Allora

(*) $$c_n(f') = in\, c_n(f).$$

Derivazione (formale) di (*) : se derivo l'identità

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx} \quad \text{ottengo} \quad f'(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} in\, c_n(f)\, e^{inx}$$

quindi $in\, c_n(f) = c_n(f')$.

Dim.

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx$$

integro per parti

$$= \frac{1}{2\pi}\cancel{\Big|f(x)\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(-in e^{-inx}\right) dx$$

$\cancel{\ldots} = 0$ per (H)

$$= in\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = in\, c_n(f).$$

$\square$

Variante "avanzata"

Prop. 1'

Sia $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c.

(H') $\quad f$ è continua, $f(-\pi) = f(\pi)$ ed esiste $g \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ t.c. $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$.

Allora $c_n(g) = in\, c_n(f)$.

Traccia dim. $\quad$ per $n \neq 0$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt\right) e^{-inx}\,dx$$

$$= \cancel{\frac{f(-\pi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx}_{\;\overset{!!}{=}\,0} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x} g(t)\,e^{-inx}\,dx\,dx$$

Fubini $\longrightarrow$ $$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{t}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right) g(t)\,dt$$

$$= \dots\dots = \frac{1}{in}\, c_n(g)$$

Per $n = 0$, $$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ f(-\pi)=f(\pi)}}{=} 0.$$

$\square$

Osserv.

(H') è soddisfatta se f è continua, $f(-\pi)=f(\pi)$, e f è C^1 a tratti (cioè ....), in tal caso $g = f'$ (nei punti punti dove f' esiste).

Prop. 2

Se $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ soddisfa (H) allora

(i) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty$; $\leftarrow$ informaz. sul comp. asintotico di $|c_n|$ per $n \to \pm\infty$

(ii) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$ se $\alpha < \frac{1}{2}$.

Lo stesso vale se f soddisfa (H') con $g \in L^2(-\pi,\pi)$ ($\|f'\|_2$ va sostituita con $\|g\|_2$).

Dim.

(i) segue dalla formula $c_n(f') = in\, c_n(f)$ + Parseval + $f' \in L^\infty \subset L^2$.

(ii)
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| = \sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|c_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|^{1-\alpha}}$$

Cauchy-Schw per ℓ^2 $\longmapsto$
$$\leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^2 |c_n(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

la serie converge se $2-2\alpha > 1$ cioè $\alpha < \frac{1}{2}$. $\square$

Corollario 3

Se $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ soddisfa (H) oppure (H') allora la serie di Fourier di f converge totalmente cioè $\sum \| c_n e^{inx} \|_\infty < +\infty$.

Dim. Uso che $\| c_n e^{inx} \|_\infty = |c_n|$ e $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$ per la Prop. 2 (ii) con $\alpha = 0$. $\square$

Prop. 4

Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ t.c. $f \in C^k$ con $k = 0, 1, 2, \dots$ e vale

$$\text{(CB)} \qquad D^h f(-\pi) = D^h f(\pi) \quad \forall\, h < k.$$

Allora

(i) $$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2k} |c_n(f)|^2 = \frac{\| D^k f \|_2^2}{2\pi} < +\infty \,;$$

(ii) $$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{\alpha} |c_n(f)| < +\infty \quad \forall\, \alpha < k - \tfrac{1}{2}.$$

Dim. Per induzione su k. Usate che:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2k} |c_n(f)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2k-2} |c_n(f')|^2$$

$c_n(f') = in\, c_n(f)$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{a} |c_n(f)| = \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{a-1} |c_n(f')|$$

$\square$

Lo stesso risultato vale se f è C^{k-1}, soddisfa (CB) e $D^{k-1}f$ soddisfa (H').

Cor. 5

Se f soddisfa le ipotesi della Prop. 4 allora la serie di F. di f converge totalmente con tutte le derivate di ordine $< k$.

Cioè $\sum_{-\infty}^{\infty} \| D^h (c_n e^{inx}) \|_\infty = \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^h |c_n| < +\infty$.

Osservaz.

Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ è C^{k-1} e soddisfa (CB) cioè $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ per $h = 1, \dots, k-1$, allora estendendo f a $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodi. (per periodicità), f risulta C^{k-1} su $\mathbb{R}$.

E viceversa!

Quindi è più naturale pensare a f come funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ (di classe C^{k-1}) oppure come funzione in $C^{k-1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq S^1)$.

Prop. 6

Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e $\sum |n|^h |c_n| < +\infty$ con $h = 0, 1, \dots$ allora $f \in C^h$ e soddisfa (CB): $D^j f(-\pi) = D^j f(\pi)$ per $j = 0, \dots, h$.

Dim

la serie di F. di f converge tot.
con tutte le derivate di ordine $\leq k$. $\square$

Osserv.

Non ho una caratt. delle funzioni $C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ in termini dei coeff. $c_n(f)$.

Ma vale questa caratterizz.:

$$f \in C^{k-1} + (CB) \quad e \quad D^{k-1}f \text{ soddisfa } (H')$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2k} |c_n|^2 < +\infty$$

Queste sono esattamente le funzioni nello spazio di Sobolev $H^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Convergenza puntuale della serie di F.

Prendo $f \in L^1(-\pi,\pi)$ estesa a $\mathbb{R}$ per periodicità e per ogni $N = 0,1,\dots$ pongo

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{inx}$$

Allora

$$S_N f(x) = \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy\right) e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{-N}^{N} e^{in(x-y)}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, D_N(x-y)\, dy$$

dove $D_N(t) := \sum_{-N}^{N} e^{int}$.

Allora ponendo $x-y=t$, cioè $y = x-t$,

$$(*) \qquad S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_N(t)\, dt$$

(uso che l'integrale di una funzione 2π-per. su ogni intervallo di lungh. 2π è lo stesso).

<u>Nota</u> $S_N f = f * D_N$ dove $*$ è il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Le funzioni D_N si chiamano "nucleo di Dirichlet".

Noto che $\forall N = 0, 1, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1 \quad , \qquad D_N(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Dim.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = \sum_{-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi$$

$$D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{int} = e^{-iNt} \sum_{0}^{2N} \left(e^{it}\right)^n$$

$$= e^{-iNt} \cdot \frac{\left(e^{it}\right)^{2N+1} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \frac{e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-i\frac{t}{2}}} \; \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$\square$

Teorema 7

Se $f \in L^1(-\pi, \pi)$ estesa per periodicità, $\bar{x} \in \mathbb{R}$, e f è α-Hölderiana in $\bar{x}$ con $\alpha > 0$ cioè $\exists\, M < +\infty$, $\delta > 0$ t.c.

$$|f(\bar{x}+t) - f(\bar{x})| \leq M\,|t|^{\alpha} \quad \text{per } |t| \leq \delta$$

Allora $\quad S_N f(\bar{x}) \longrightarrow f(\bar{x})$.

Convergenza puntuale della serie di Fourier (continuazione)

Data $f \in L^1([-\pi,\pi])$ estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$.
Allora per $N = 0, 1, 2, \ldots$

$$S_N f := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \cdot e^{inx}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot D_N(t)\, dt$$

dove

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = 1$$

Teorema 7

Se $f \in L^1(-\pi,\pi)$ estesa per periodicità, $\bar{x} \in \mathbb{R}$, e f è α-Hölderiana in $\bar{x}$ con $\alpha > 0$
cioè $\exists\, M < +\infty$, $\delta > 0$ t.c.

$$(*) \qquad |f(\bar{x}+t) - f(\bar{x})| \leq M\, |t|^{\alpha} \quad \text{per } |t| \leq \delta$$

Allora $S_N f(\bar{x}) \longrightarrow f(\bar{x})$.

Dim.

$$S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}-t)\, D_N(t)\, dt - f(\bar{x})\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})\big)\, D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}}_{g(t)} \cdot \operatorname{sen}\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right) dt$$

Lemma di Riemann-Lebesgue

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g\, dt\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt\right)}_{=0} = 0$$

Per applicare il lemma devo verificare che $g \in L^1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g|\, dt = \int_{|t|\leq\delta} |g|\, dt + \int_{\delta<|t|\leq\pi} |g|\, dt$$

uso $(*)$,

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| \geq \frac{|t|}{\pi}$$

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| \geq \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{se} \quad \delta \leq |t| \leq \pi$$

$$\leq \int_{|t|\leq\delta} \frac{M|t|^{\alpha}}{|t|/\pi}\, dt + \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{|f(\bar{x}+t)| + |f(\bar{x})|}{\operatorname{sen}(\delta/2)}$$

$$= 2\pi M \underbrace{\int_0^{\delta} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}}_{\text{finito}} + \frac{\|f\|_1 + |f(\bar{x})|}{\operatorname{sen}(\delta/2)} < +\infty$$

$\square$

Osserv.

- Esistono f continua e 2π-periodiche e D denso in $\mathbb{R}$ tali che $\sup_N |S_N f(x)| = +\infty \quad \forall x \in D \Rightarrow S_N f(x) \not\to f(x)$ per ogni $x \notin D$.

- Data f come nel Teorema 7 e $\bar{x}$ t.c. in $\bar{x}$ f ha i limiti destro $f(\bar{x}^+)$ e sinistro $f(\bar{x}^-)$ e $\exists\, M, \delta$ t.c.
$$|f(\bar{x}+t) - f(\bar{x}^+)| \leq M|t|^\alpha \quad \text{per } t \in (0,\delta]$$
$$|f(\bar{x}+t) - f(x^-)| \leq M|t|^\alpha \quad \text{per } t \in [-\delta, 0)$$
allora $S_N f(\bar{x}) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(f(\bar{x}^+) + f(\bar{x}^-)\right)$.
(Verificatelo per esercizio)

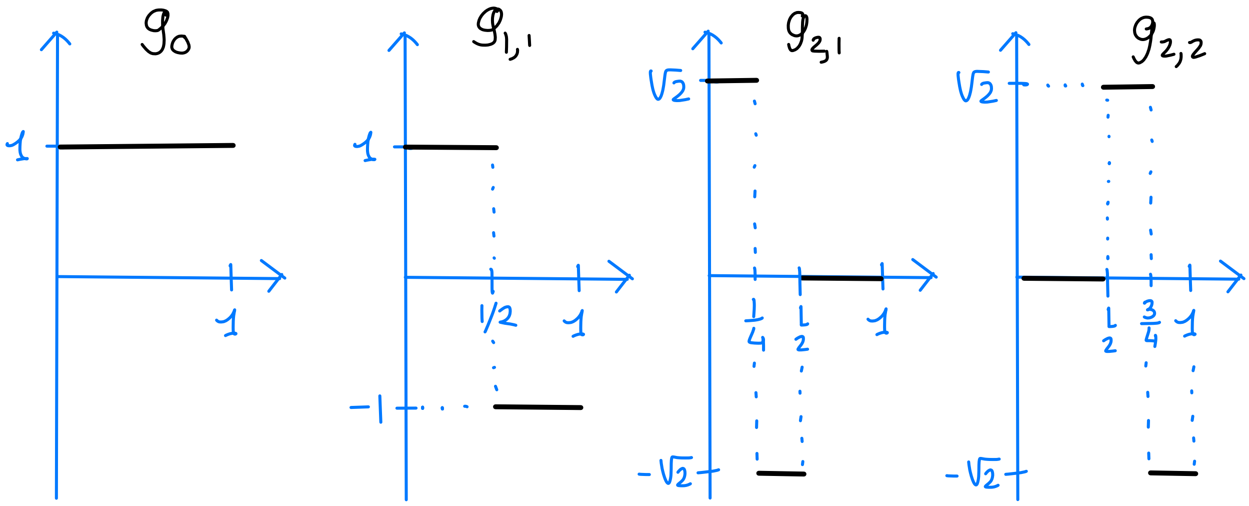
- Posso usare il Teorema 7 per un'altra dim. che $\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ è una base di H. di $L^2([-\pi,\pi])$.

Sia infatti $X := \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$. Per il teorema della base, $\forall u \in L^2$, $S_N u \longrightarrow \bar{u}$ in L^2 dove $\bar{u}$ è la proiezione ortogonale su X.
In particolare $\exists\, N_k$ t.c. $S_{N_k} u \rightarrow \bar{u}$ q.o. in $[-\pi,\pi]$.
Inoltre se $f \in C^1_{per} := \{\dots\}$, allora per il teor. 7 $S_N u \longrightarrow u$ ovunque, quindi $u = \bar{u}$ q.o., cioè $C^1_{per} \subset X$. Ma C^1_{per} è denso in $L^2([-\pi,\pi])$ quindi $X = L^2([-\pi,\pi])$.

Esercizi

1. Base di Haar di $L^2(I)$ con $I = [0,1]$.

Prendo



$$g_0 = 1, \quad g_{1,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} \quad \dots$$

per $n = 1, 2, \dots$ e $k = 1, \dots, 2^{n-1}$

$$g_{n,k} = 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Allora

$$\mathcal{Y} = \{g_0\} \cup \{g_{n,k} : n = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, 2^{n-1}\}$$

è una base di Hilbert di $L^2(I)$.

Dimostrazione

- $\|g_0\|_2 = \|g_{n,k}\|_2 = 1 \quad \forall n,k$: facile
- $\langle g_0, g_{n,k} \rangle = \int_0^1 g_{n,k} \, dx = 0$, cioè $g_0 \perp g_{n,k} \; \forall n,k$.

- presi n,k e n',k' con $n \leq n'$,
  se $n < n'$ allora $g_{n,k} =$ costante sul supporto di $g_{n',k'}$ e quindi
  $\langle g_{n,k} ; g_{n',k'} \rangle = \text{cost.} \int_0^1 g_{n',k'} \, dx = 0$.

  se $n = n'$ e $k \neq k'$, $g_{n,k}$ e $g_{n',k'}$ hanno supporti disgiunti $\Rightarrow \langle g_{n,k} ; g_{n',k'} \rangle = 0$.

- Sia $X = \overline{\text{span}(\mathcal{F})}$. Allora:

  - $\mathbb{1}_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]} \in X \quad \forall\, n = 1, 2, \dots \ \forall\, k = 1, \dots, 2^n$.

    (questo è il punto chiave!)

  - $\mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k'}{2^n}\right]} \in X \quad \forall\, n = 1, 2, \dots \ \forall\, 1 \leq k < k' \leq 2^n$.

  - $\mathbb{1}_{[a,b]} \in X \quad \forall\, 0 \leq a < b \leq 1$. (Verificare!)

  - $\mathbb{1}_A \in X \quad \forall\, A$ aperto in $[0,1]$. " "

  - $\mathbb{1}_E \in X \quad \forall\, E$ misurabile in $[0,1]$.

  - $\mathcal{S} = \{\text{funzioni semplici}\} \subset X$.

$X = L^2$ perché $\mathcal{S}$ è denso in L^2. $\square$

2. Base di Haar di $L^2(\mathbb{R})$.

Prendo $g_{n,k}$ come sopra con $n,k \in \mathbb{Z}$ e pongo

$$\mathcal{Y} = \{ g_{n,k} : n,k \in \mathbb{Z} \}$$

Allora $\mathcal{Y}$ è una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$.

La dimostrazione è in tre passi:

- $X := \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{Y})}$ contiene tutte le funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ con supporto in $[0,1]$ e integrale 0 (usate l'ex. precedente)
- X contiene tutte le funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ con supporto compatto e integr. 0
- Le funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ con supporto compatto e integr. 0 sono dense in $L^2(\mathbb{R})$.

3. Sia $X := \{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \int_0^2 u\, dx = 0 \}$.

Far vedere che X è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R})$ e trovare $X^\perp$, P_X, $P_{X^\perp}$.

Osservo che $X = \mathrm{Ker}\, \Lambda$ con $\Lambda : u \mapsto \int_0^2 u\, dx$.

Λ è ben definito, lineare, e continuo e per la precisione $\Lambda(u) = \langle u ; \mathbb{1}_{[0,2]} \rangle$.

Quindi $X = \mathrm{Ker}\, \Lambda$ è chiuso.

Inoltre

$$X = \operatorname{Ker} \Lambda = \{ u : \langle u ; \mathbb{1}_{[0,2]} \rangle = 0 \} = (\mathbb{1}_{[0,2]})^{\perp}$$

Quindi $X^{\perp} \overset{\boxed{\text{Ex. 4}}}{=} ((\mathbb{1}_{[0,2]})^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{Span}\{\mathbb{1}_{[0,2]}\}}$

$$= \{ c\, \mathbb{1}_{[0,2]} : c \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ u : \begin{array}{l} u = \text{cost. q.o. su } [0,2], \\ u = 0 \quad \text{q.o. su } \mathbb{R} \setminus [0,2] \end{array} \right\}$$

Inoltre, siccome $X^{\perp} = \operatorname{Span}\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{[0,2]} \}$ ← elemento unitario

Quindi

$$P_{X^{\perp}} u = \langle u ; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{[0,2]} \rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{[0,2]}$$

$$= \left(\int_0^2 u \, dx \right) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}$$

$$P_X u = u - P_{X^{\perp}} u .$$

4. Dimostrare che, dato $\mathcal{Y} \subset H$ spazio di Hilbert, $(\mathcal{Y}^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{Span} \mathcal{Y}}$.

5. Sia $X_p := \{ u \in L^2([-1,1]) \ : \ u \text{ è pari} \}$

cioè $u(x) = u(-x)$ per q.o. $x \in [-1,1]$

Dimostrare che X_p è un sottospazio chiuso di $L^2([-1,1])$, determinare $X_p^\perp$, P_{X_p}, $P_{X_p^\perp}$.

Pongo $T: \underset{L^2}{\underset{\cap}{u}} \mapsto \underset{L^2}{\underset{\cap}{u(x) - u(-x)}}$.

T è lineare e continuo $(\|Tu\|_2 \leq 2\|u\|_2)$

Quindi $X_p = \operatorname{Ker} T$ è un sottospazio chiuso.

Calcolo di $X_p^\perp$, versione 1:

mi ricordo della scomposizione

$$u(x) = \underset{X_p}{\underset{\cap}{\frac{u(x)+u(-x)}{2}}} + \underset{X_d}{\underset{\cap}{\frac{u(x)-u(-x)}{2}}}$$

dove $X_d := \{ u \in L^2 : u \text{ è dispari} \}$.

Quindi

$$L^2 = X_p + X_d$$

se $X_p \perp X_d$ allora concludo che $X_d = X_p^\perp$.

e $P_{X_p} : u \mapsto \dfrac{u(x)+u(-x)}{2}$; $P_{X_d} : u \mapsto \dfrac{u(x)-u(-x)}{2}$.

In effetti date $u \in X_p$, $v \in X_d$,

$$\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx + \int_{-1}^{0} u(x)\, v(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx + \int_0^1 \underbrace{u(-t)}_{\shortparallel \atop u(t)}\, \underbrace{v(-t)}_{\shortparallel \atop -v(-t)}\, dt$$

$$= 0 .$$

Esercizi (continuo dalla lezione precedente)

6. Sia H spazio di Hilbert, e siano V, W sottospazi di H t.c. $V \perp W$ e $H = V + W$. Allora V e W sono chiusi.

In effetti $V = W^\perp$ e $W = V^\perp$ e $V^\perp, W^\perp$ sono chiusi.

Far vedere che la conclusione non vale sapendo solo che $H = V + W$ e $V \cap W = \{0\}$.

Def. Dato $T : H \to \tilde{H}$ lineare e continuo, l'aggiunta $T^* : \tilde{H} \to H$ è definita da:

$$\langle Tx ; y \rangle_{\tilde{H}} = \langle x ; T^* y \rangle_H \qquad \forall x \in H, y \in \tilde{H}$$

Cioè, $\forall y \in \tilde{H}$, $T^* y$ è il vettore di x che rappresenta il funzionale lineare (e continuo)

$$\underset{\substack{\cap \\ H}}{x} \longmapsto \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{\langle Tx ; y \rangle}$$

7. Dati $H, \tilde{H}$ spazi di Hilbert e $T: H \to \tilde{H}$ lineare e continuo, allora $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

e quindi $(\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} T^*}$.

Infatti $\operatorname{Ker} T = \{ x : Tx = 0 \}$

$$= \{ x : \langle Tx; y \rangle = 0 \ \forall y \}$$

$$= \{ x : \langle x, T^* y \rangle = 0 \ \forall y \}$$

$$= (\operatorname{Im} T^*)^\perp.$$

Inoltre se $\tilde{H} = H$ e $T^* = T$ (cioè T è autoagg.) e $T^2 = T$ (cioè $T = Id$ su $\operatorname{Im} T$) allora $\operatorname{Im} T$ è chiusa e $T = P_{\operatorname{Im} T}$, $I - T = P_{\operatorname{Ker} T}$.

Infatti $H = \operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T$, $T = 0 = P_{\operatorname{Im} T}$ su $\operatorname{Ker} T$

$T = Id = P_{\operatorname{Im} T}$ su $\operatorname{Im} T$, quindi $T = P_{\operatorname{Im} T}$.

Riprendo l'esercizio 5 della lezione precedente.

8. Sia $X_p := \{ u \in L^2([-1,1]) : u \text{ è pari} \}$

cioè $u(x) = u(-x)$ per q.o. $x \in [-1,1]$

Dimostrare che X_p è un sottospazio chiuso di $L^2([-1,1])$, determinare $X_p^\perp$, P_{X_p}, $P_{X_p^\perp}$.

Definisco $T: H \to H$, $T: u \longmapsto u(x) - u(-x)$.

T è lineare e continuo ($\|Tu\|_2 \leq 2\|u\|_2$) e $\operatorname{Ker} T = X_p$.

Allora, per l'ex. 7, $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T^*}$.

Cerco una formula esplicita per T^*:

$$\langle T^* u; v \rangle = \langle u; Tv \rangle$$

$$= \int_{-1}^{1} u(x)\,(v(x) - v(-x))\,dx$$

voglio riscrivere l'integrale nella forma $\int_{-1}^{1} v(x) \cdot (\dots)\,dx$.

$$= \int_{-1}^{1} u(x)\,v(x)\,dx - \int_{-1}^{1} u(x)\,v(-x)\,dx$$

cambio di var. $t = -x$ $\longmapsto$ $= \quad " \quad " \quad - \int_{-1}^{1} u(-t)\,v(t)\,dt$

$$= \int_{-1}^{1} (u(x) - u(-x))\,v(x)\,dx = \langle Tu, v \rangle$$

Dunque $\langle T^* u; v \rangle = \langle Tu; v \rangle$ $\forall u, v$, e quindi $T^* = T$ e T è autoaggiunto.

Quindi $X_p^\perp = (\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T} = \overline{X_d} = X_d$.

Inoltre $\frac{1}{2}T = Id$ su X_d, e quindi $P_{X_d} = \frac{1}{2}T$,

e $P_{X_p} = Id - \frac{1}{2}T$ cioè $P_{X_p} u = \frac{u(x) + u(-x)}{2}$.

9. Sia $V \subset L^2([-1,1])$, $V := \mathrm{Span}\{x, x^2, x^3\}$.
Determinare le proiezioni di $u \in L^2$ su V e $V^\perp$.

Approccio 1

Trovo $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormale di V applicando Gram-Schmidt a $\{x, x^2, x^3\}$.

Quindi $$P_V u := \sum_{i=1}^{3} \langle u; e_i \rangle e_i .$$

In particolare $e_1 := \frac{x}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$.

$$\tilde{e}_2 := x^2 - \langle x^2; e_1 \rangle e_1 \, ; \qquad e_2 := \frac{e_2}{\|e_2\|_2}$$

$$\tilde{e}_3 := x^3 - \langle x^3; e_1 \rangle e_1 - \langle x^3; e_2 \rangle e_2 \, ; \quad e_3 := \frac{e_3}{\|e_3\|_2} .$$

I calcoli sono lunghi e noiosi.

Approccio 2

Sia v la proiezione (ortogonale) di u su V.
Allora $v = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ e $u - v \perp V$, cioè $u - v \perp x^i$ per $i = 1, 2, 3$, cioè

$$\begin{cases} 0 = \langle u - v; x \rangle = \langle u; x \rangle - \int_{-1}^{1} x \left(a_1 x + \cancel{a_2 x^2} + a_3 x^3\right) dx \\ 0 = \langle u - v; x^2 \rangle = \langle u; x^2 \rangle - \int_{-1}^{1} x^2 \left(\cancel{a_1 x} + a_2 x^2 + \cancel{a_3 x^3}\right) dx \\ 0 = \langle u - v; x^3 \rangle = \langle u; x^3 \rangle - \int_{-1}^{1} x^3 \left(a_1 x + \cancel{a_2 x^2} + a_3 x^3\right) dx \end{cases}$$

questo sistema 3×3 permette di ricavare a_1, a_2, a_3 in funzione di $\langle u; x \rangle$, $\langle u; x^2 \rangle$, $\langle u; x^3 \rangle$.

Osserv.: se u è pari, $P_V u$ è data dalla proiezione di u su $W := \mathrm{span}\{x^2\}$.

Giustificare questa affermazione.

10. Data $f \in C^1([-\pi,\pi])$, calcolare $c_n(f')$ in funzione di $c_n(f)$.

Attenzione: non ho che $f(-\pi) = f(\pi)$.

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx$$

integro per parti $\longmapsto$
$$= \frac{1}{2\pi} \Big| f(x)\, e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(-in)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi} \big(f(\pi) - f(-\pi)\big) + in\, c_n(f)$$

11. Calcolare $c_n(x^2)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Uso che $(x^2)' = 2x$ e $(2x)' = 2$.

Per $n \neq 0$, $c_n(2) = 0$ e per l'ex. 10,

$$c_n(2) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \big(2\pi - (-2\pi)\big) + in\, c_n(2x)$$

e quindi $c_n(2x) = \dfrac{2i(-1)^n}{n}$.

Inoltre $c_n(2x) = in\, c_n(x^2)$ e quindi

$$c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

Infine $c_0(x^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{\pi^2}{3}$

Usando Parseval:

$$\| x^2 \|_2^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (c_n(x))^2$$

$$\frac{2}{5}\pi^5 \qquad\qquad 2\pi\left(\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4}\right)$$

alla fine ottenete $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Equazione del calore

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u: [0,T) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$

per $d=3$, Ω rappresenta un solido di materiale conduttore (del calore) omogeneo.

$u(t,x)$ rappresenta la temperatura all'istante t nel punto x.

Se non ci sono sorgenti di calore interne al solido allora u soddisfa:

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

costante del materiale:

$c = \frac{c_1}{c_2}$ $\leftarrow$ conducib. $\leftarrow$ capacità (termica)

La soluzione u è univocamente determinata conoscendo il valore di u al tempo $t=0$ cioè u soddisfa la condizione iniziale

$$u(0,x) = u_0(x)$$

con u_0 data, e imponendo delle opportune condizioni al bordo

Per esempio:

Condizione di Neumann: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $[0,T) \times \partial\Omega$

ν = normale esterna a $\partial\Omega$

Questo corrisponde a non avere scambio di calore attraverso $\partial\Omega$ (per. es., il solido è sospeso nel vuoto)

Condizione di Dirichlet: $u = v_0$ su $[0,T) \times \partial\Omega$

Questo corrisponde ad avere temperatura assegnata su $\partial\Omega$ (per es., il solido è immerso in un serbatoio di calore mantenuto a temperatura costante).