## Limiti di successioni di numeri reali

Una successione di numeri è una sequenza infinita.

Esempi a) 1, 2, 3, 4, ....
b) 1, 4, 9, 16, ....
c) 1/2, 1/4, 1/8, ...

Indico una successione generica come $x_1, x_2, x_3, \dots$
(i numeri 1, 2, 3 sono indici; $x_n$ = termine n-esimo).
In particolare gli esempi precedenti si scrivono come

a) $x_n := n$.

b) $x_n := n^2$.

c) $x_n := \frac{1}{2^n}$.

**Definizione**

Data una successione $x_1, x_2, \dots$ (con termine n-esimo $x_n$) e $L \in \mathbb{R}$, dico che $x_n$ tende a $L$ per $n \to +\infty$, e scrivo

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \quad \text{oppure} \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L,$$

se

"per ogni margine di errore $\varepsilon > 0$, $x_n$ approssima $L$ con errore inferiore a $\varepsilon$ per $n$ abbastanza grande,"

e più precisamente

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon \text{ t.c. } |x_n - L| \leq \varepsilon \text{ per } n \geq n_\varepsilon.}$$

Inoltre dico che $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ se

"per ogni soglia $M$, $x_n$ è maggiore di $M$ per $n$ abbastanza grande,"

ovvero

$$\boxed{\forall M \ \exists\, n_M \text{ t.c. } x_n \geq M \text{ se } n \geq n_M.}$$

Scrivete voi la definizione di $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

## Esempi

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \log n = +\infty \quad \Leftarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty.$

  (Attenzione: uso la lettera $n$ per indicare numeri interi, $x$ per indicare numeri reali.)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{e^n + 1} = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

- $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

  non segue da un limite di funzioni ma dalla disuguaglianza $n! \geq n$.

- $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(\pi n) = 0$

  perché $\operatorname{sen}(\pi n) = 0$ $\forall n$ intero; notare che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$ non esiste ....

- $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} n$ non esiste.

  La dimostrazione non è semplice.

## Serie (o somme infinite)

Data una successione (cioè una famiglia infinita) di addendi

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots$$

voglio definirne la somma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .$$

Per farlo definisco le somme parziali

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

cioè $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ per $N = 1, 2, \ldots$, e prendo il limite di $S_N$ per $N \to +\infty$.

Riassumendo definisco

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{"serie (o somma infinita) degli addendi } a_n\text{"}} = \lim_{N \to +\infty} \underbrace{S_N}_{\text{"somma parziale della serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{"}} = \lim_{N \to +\infty} \underbrace{\left( \sum_{n=1}^{N} a_n \right)}_{} .$$

## Possibili comportamenti di una serie

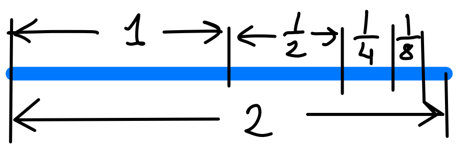
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$ esiste ed è finito (diciamo che la serie converge);
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (la serie diverge a $+\infty$);
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ (la serie diverge a $-\infty$);
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non esiste.

## Esempi

- $1+2+3+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$

  segue dal fatto che $S_N = 1+\cdots\cdots+N \geq N$ e quindi $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$.

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$



# Esempio fondamentale (serie geometrica)

Preso $a \in \mathbb{R}$,

(1) $$\underset{\substack{\| \\ a^0}}{1} + \underset{\substack{\| \\ a^1}}{a} + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1, \\ +\infty & \text{se } a \geq 1, \\ \text{N.E.} & \text{se } a \leq -1. \end{cases}$$

per esempio

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} .$$

Per dimostrare la (1) mi serve la seguente formula: per $a \neq 1$ vale che

(2) $$\sum_{n=0}^{N} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^N = \frac{a^{N+1} - 1}{a - 1}$$

verifico che $(a-1)(1 + a + \cdots + a^N) = a^{N+1} - 1$.

In effetti

$$(a-1)(1 + a + \cdots + a^N) =$$

$$= a(1 + a + \cdots + a^N) - (1 + a + \cdots + a^N)$$

$$= \cancel{a} + \cancel{a^2} + \cdots + \cancel{a^N} + \underbrace{a^{N+1} - 1} - \cancel{a} - \cancel{a^2} - \cdots - \cancel{a^N}$$

$$= a^{N+1} - 1 .$$

Osservo che

(3) $$\lim_{N \to +\infty} a^{N+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Usando (2) e (3) ottengo che per $a \neq 1$

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} a^n\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{a^{N+1}-1}{a-1} = \begin{cases} \frac{+\infty-1}{a-1} = +\infty & \text{se } a>1 \\ \frac{0-1}{a-1} = \frac{1}{1-a} & \text{se } -1<a<1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

Per $a=1$

$$\lim_{N\to+\infty}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N} a^n\right)}_{\substack{\text{somma di } N+1 \\ \text{addendi } =1}} = \lim_{N\to+\infty}(N+1) = +\infty.$$

$\square$

Esempio

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Infatti $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{N(N+1)} =$

$$= \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\tfrac{1}{N}}-\frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{N+1}$$

e $\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$ perché $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = 1+\frac{1}{\infty} = 1.$

In generale non si sa calcolare il valore di una serie in modo esatto neanche se gli addendi sono dati da formule molto semplici!!

Per esempio, il valore esatto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$ non è noto.

Quello che si può fare è studiare il comportamento delle serie, come abbiamo fatto per gli integrali impropri (in effetti le due teorie sono molto simili e collegate).

Notazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Significa che le due serie hanno lo stesso comportamento (ma possono avere valori diversi).

Criteri per studiare il comportamento delle serie

(Notare la somiglianza con i criteri per lo studio del comportamento degli integrali impropri a $+\infty$.)

Nel seguito $a_1, a_2, \dots$ indica una generica successione di addendi.

**Prop. 1**

Per ogni $n_0$ intero, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Idea della dim.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n}_{\text{numero finito}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Siccome $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ differiscono per un numero finito, devono avere lo stesso comportam.

$\square$

## Prop. 2

(1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste ed è finito (la serie converge)

allora $a_n \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$.

(2) Se esiste $L := \lim_{n\to+\infty} a_n \in [-\infty, +\infty]$ allora

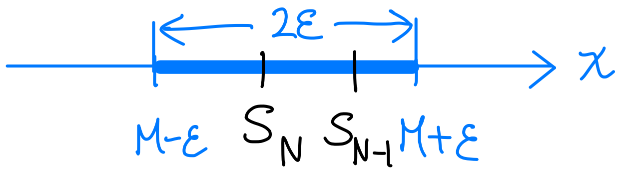
- per $L > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
- per $L < 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$;
- per $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ può avere qualunque comportamento.

## Dim.

(1) Sia $M := \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$.

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, N_\varepsilon$ t.c. $N \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_N - M| \leq \varepsilon$

Per $N > N_\varepsilon$




cioè $\underbrace{|S_N - S_{N-1}|}_{= a_N} \leqslant 2\varepsilon$

Riassumendo: $|a_n| \leqslant 2\varepsilon$ per $N > N_\varepsilon$.

Questo significa proprio che $a_n \to 0$.

(2) Suppongo $L>0$ (il caso $L<0$ è simile).
Prendo $\varepsilon$ con $0<\varepsilon<L$.
Siccome $a_n \to L$, deve valere $a_n \geq \varepsilon$
da un certo $n_0$ in poi (cioè per $n \geq n_0$)
Ma allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon = +\infty .$$

somma di infiniti addendi uguali a $\varepsilon$: vale $+\infty \cdot \varepsilon = +\infty$.

$\square$

## Prop. 3

Se $a_n \geq 0$ da un certo $n_0$ in poi allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste ed è finita o $+\infty$.

Sono esclusi i comportamenti "diverge a $-\infty$" e "non esiste".

Analogamente, se $a_n \leq 0$ da un certo $n_0$ in poi allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste ed è finita o $-\infty$; sono esclusi i compart. "$+\infty$" e "non esiste".

## Dim.

Per $N \geq n_0$, allora $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$.
Quindi la successione $S_N$ è crescente

per $N \geq n_0$, e quindi converge a

$$L := \sup \{ S_N : N \geq n_0 \}$$

che è un numero finito o $+\infty$. Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L. \qquad \square$$

Teorema 4 (Criterio del confronto con l'integrale)

Sia $n_0$ intero e $f : [n_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione decrescente e positiva. Allora

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(n) \quad e \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

esistono e appartengono a $[0, +\infty]$ (già visto) e inoltre

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

In particolare $\sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k) \approx \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx.$

Corollario 5

Se $f : [n_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è decrescente e positiva vicino a $+\infty$ (cioè su $[a, +\infty)$ per qualche $a \geq n_0$)

allora

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \approx \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

e convergono oppure divergono a $+\infty$.

## Esempio fondamentale (serie armonica generalizzata)

Dato $a>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leqslant 1 \\ \text{finita} & \text{se } a>1 \end{cases}$$

perchè questa serie si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$.
(applico il teorema 4 con $f(x)=\frac{1}{x^a}$ e $n_0=1$).

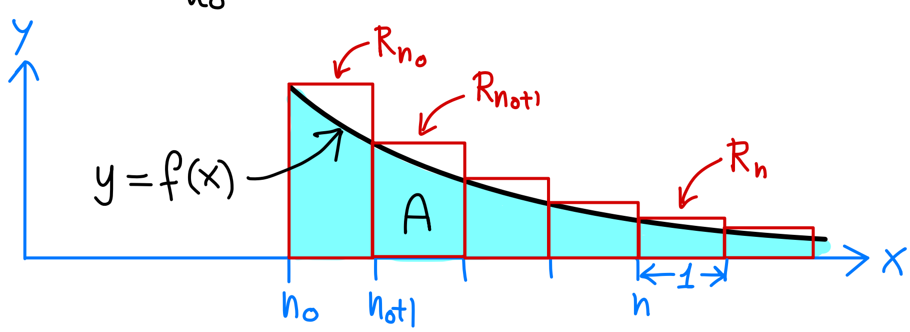
Notare che gli addendi $\frac{1}{n^a}$ tendono a $0$, ma il comportamento dipende dal valore di $a$!

In particolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

serie armonica

## Dimostrazione del teorema 4

Dimostro che $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$.



Allora:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area}(A)$$

A è contenuto nell' unione dei rettangoli $R_n$ con $n = n_0, n_0+1, \dots$

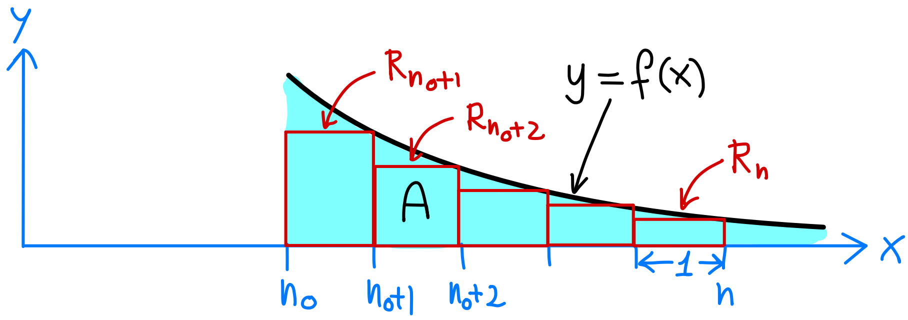
qui è essenziale che $f$ sia decrescente

$$\leq \text{area}(R_{n_0}) + \text{area}(R_{n_0+1}) + \dots$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \text{area}(R_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

$R_n$ ha base 1 e altezza $f(n)$ $\Rightarrow$ $\text{area}(R_n) = f(n)$

Dimostro ora che $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$




Allora

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area}(A)$$

A contiene l' unione dei rettangoli $R_n$ con $n = n_0+1, n_0+2, \dots$

$$\geq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \text{area}(R_n) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n)$$

come prima, $R_n$ ha base 1 e altezza $f(n)$

Quindi $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n)$ e sommando $f(n_0)$ a entrambi i termini ottengo

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

che è la tesi. $\square$

## Calcolo approssimato delle serie

Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (che esiste ed è finita) ed un margine di errore $\varepsilon > 0$, quanto devo prendere grande $N$ affinché la somma parziale

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$$

approssimi $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con errore inferiore a $\varepsilon$, cioè

$$|S - S_N| \leq \varepsilon \ ?$$

Una risposta viene dal seguente risultato:

**Prop. 6**

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie che converge a $S$ finito. Supponiamo di avere $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente t.c. $|a_n| \leq f(n)$.

Allora per ogni $N \geq a$ vale che

$$|S - S_N| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Dato $\varepsilon > 0$, se trovo $N$ t.c. $F(N) := \int_N^{+\infty} f(x)\,dx \leq \varepsilon$ allora

$$|S - S_N| \leq \varepsilon.$$

Dim.

$$S - S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Quindi

fatto noto per le somme finite

$$|S-S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

per ipotesi $\mapsto \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$

Teorema 4 (lezione prec.) $\mapsto \leq \int_N^{+\infty} f(x)\, dx$ . $\square$

Esempio

Sia $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

Quanto deve essere grande N affinché $|S-S_N| \leq 10^{-3}$ ?

Applico la prop. 6 con $f(x) = \frac{1}{x^4}$ :

$$|S-S_N| \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = \left| -\frac{1}{3x^3} \right|_N^{+\infty} = \frac{1}{3N^3} .$$

Cerco N t.c. $\frac{1}{3N^3} \leq 10^{-3}$ cioè $3N^3 \geq 10^3$,

$N^3 \geq \frac{10^3}{3}$ , $N \geq \frac{10}{\sqrt[3]{3}} = 6,93\ldots$

Prendo $N = 7$ : $|S-S_7| \leq 10^{-3}$, cioè

$$S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{7^4} \pm 10^{-3} .$$

Passo adesso ai criteri di confronto per le serie. Notare la somiglianza con quelli per gli integrali impropri.
Ometto le dimostrazioni, che sono molto simili.

## Prop. 7 (Criterio del confronto)

Date due successioni di addendi $a_n$ e $b_n$ t.c. $0 \leq a_n \leq b_n$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ esistono e sono finite o $+\infty$ (prop. 3 della lez. prec.) e

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

In particolare:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$;
- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ può essere finita o $+\infty$, e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ può essere finita o $+\infty$.

## Prop. 8 (1° criterio di confr. asintotico per le serie)

Date due successioni di addendi $a_n$ e $b_n$ t.c.

- $a_n, b_n \geq 0$ per $n$ suff. grande (cioè esiste $n_0$ t.c. $a_n, b_n \geq 0$ per $n \geq n_0$);
- $a_n = O(b_n)$ (vale se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ finito);

Allora

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$;
- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ può essere finita o $+\infty$, e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ può essere finita o $+\infty$.

## Prop. 9 (2° criterio di confr. asintotico per le serie)

Date $a_n$ e $b_n$ successioni di addendi t.c.

- $b_n \geq 0$ da un certo punto in poi (oppure $b_n \leq 0$ da un certo punto in poi);
- $a_n \sim L b_n$ con $0 < L < +\infty$ (cioè $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$);

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

## Esempi

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2-1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ finito (già visto, si tratta della serie armonica gener. di espon. 2)

  2° crit. di confr. asint.:
  $\frac{1}{2n^2-1} \sim \frac{1}{2n^2}$ per $n \to +\infty$
  $\left(\Leftarrow \frac{1}{2x^2-1} \sim \frac{1}{2x^2} \text{ per } x \to +\infty\right)$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = +\infty$$ per confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

  Noto infatti che $\log n \ll n$ per $n \to +\infty$
  $\Rightarrow \frac{1}{\log n} \gg \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ e quindi posso applicare il 1° criterio del confronto asint.

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^4-n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$ (cioè è finita)

  2° crit. confr. asint.
  $\frac{2n^2+5}{n^4-n} \sim \frac{2}{n^2}$ per $n \to +\infty$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} < +\infty$$ (cioè converge) per confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

  Osservo infatti che
  $$\forall a \quad 2^n \gg n^a \Rightarrow \frac{n^3}{2^n} \ll \frac{n^3}{n^a} = \frac{1}{n^{a-3}}$$
  e per $a=5$ ottengo $\frac{n^3}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n^3}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
  e applico il 1° crit. di confr. asint.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right]$ con $a>0$

Siccome

$$a_n := \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1 \longrightarrow \cos\left(\frac{1}{+\infty}\right)-1 = \cos(0)-1=0$$

serve un'analisi più precisa di $a_n$.

Uso lo sviluppo di Taylor $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$

cioè $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}+O(x^4) \sim -\frac{1}{2}x^2$

Allora ponendo $x=\frac{1}{n^a}$

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1 \sim -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2a}}$$

Per il 2° criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right] \approx \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2a}} \approx -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2a}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right] = \begin{cases} -\infty & \text{se } 2a\le 1 \text{ cioè } a\le\frac{1}{2}, \\ \text{finito} & \text{se } 2a>1 \text{ cioè } a>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^n}{1+e^n} = -\infty$

perché $\displaystyle\frac{1-e^n}{1+e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

e uso la Prop. 2, lez. prec.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^a}$ con $a>0$.

Osservo che
$$a_n := \frac{\log n}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
quindi serve un'analisi più precisa di $a_n$.
Uso che
$$1 \ll \log n \ll n^{\delta} \quad \forall \delta>0,$$
quindi
$$\frac{1}{n^a} \underset{(1)}{\ll} \frac{\log n}{n^a} \underset{(2)}{\ll} \frac{1}{n^{a-\delta}}$$

(1) implica $\frac{1}{n^a} = O\left(\frac{\log n}{n^a}\right)$ : se $a \leq 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = +\infty$ e il 1° crit. confr. asint.
implica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} = +\infty$.

(2) implica che $\frac{\log n}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^{a-\delta}}\right)$
se $a>1$ posso trovare $\delta>0$ t.c. $a-\delta>1$
quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-\delta}} < +\infty$ e per il 1° crit.
confr. asint. ho che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} < +\infty$.

Riassumendo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1, \\ \text{finito} & \text{se } a>1. \end{cases}$$

AM1 gest 20/21 lezione 50

9/12/2020

## Serie di Taylor

(polinomio di Taylor di grado infinito)

Data $f$ definita (almeno) su un intervallo che contiene 0 e derivabile infinite volte, la serie di Taylor di $f$ in 0 è la serie di potenze

$$f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n$$

Domanda: è vero che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x$ se la serie converge in $x$ ?

Purtroppo la risposta è NO!

Esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte t.c. $D^n f(0) = 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots$, ma $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$.

Quindi la serie di Taylor di $f$ (in 0) è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi $f(x)$ coincide con la serie di T. solo per $x=0$.

## Osservazione

Sia $R_N(x)$ il resto dello sviluppo di T. di $f$ in $0$ di ordine $N$. Se $R_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ allora

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n .$$

serie di T. di $f$

## Dim.

La somma parziale $S_N$ della serie di T. è il polinomio di T. di grado $N$.
Quindi

$$S_N(x) = f(x) - R_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$$

Quindi vale $(*)$.

Il problema è che spesso è difficile far vedere che $R_N(x) \to 0$.

## Esempi significativi di serie di T.

- La serie di T. di $e^x$ è

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Il raggio di convergenza $R$ è $+\infty$ e la serie coincide con la funzione, cioè

$$(*) \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se dimostro (*) è automatico che $R=+\infty$ (se fosse finito, esisterebbero degli $x$ per cui la serie NON converge — tutti gli $x$ t.c. $|x|>R$).

Dimostro (*) per $x>0$.

La formula di Lagrange del resto è

$$\underbrace{R_N(x)}_{\text{resto dello svil. di T. di ordine } N \text{ di } e^x} = \frac{D^{N+1}f(\tilde{x})}{(N+1)!}x^{N+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq x.$$

In questo caso

$$0 \leqslant R_N(x) = \frac{e^{\tilde{x}}}{(N+1)!}x^{N+1} \leqslant e^x \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

e $R_N(x) \longrightarrow 0$ perché $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \longrightarrow 0$ (quando $N \to +\infty$).

Infatti $a_n := \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ per ogni $x$ per il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è finito $\Rightarrow a_n \to 0$.

In modo simile si dimostra che $R_N(x) \to 0$ per $x<0$. $\square$

Si può anche dimostrare (ma non lo facciamo) che:

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{R = +\infty}$

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{R = +\infty}$

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1]$

$\boxed{R = 1}$ infatti $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\Big(-\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}\Big) \longrightarrow 1$$

- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$

$\boxed{R = 1}$

coefficiente binomiale

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

In particolare per $a = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

e sostituendo $x$ con $-x$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{(serie geom.)}$$

## Definizione del numero e

Usando la serie di T di $e^x$ per $x=1$ si ottiene

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Questa formula permette di calcolare e con grande precisione.

Formula alternativa per e:

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Infatti

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\Big(\overbrace{x\,\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\sim\frac{1}{x}}}^{\sim 1}\Big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \exp(1) = e$$

## Definizione di $e^z$ con $z$ numero complesso

Dato $z\in\mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Ponendo $z=ix$ con $x$ reale si ottiene

$$e^{ix} = \cos x + i\,\operatorname{sen} x$$

Infatti

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

## Esercizi

1| Trovare il raggio di convergenza R e il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n}$ per $|x| \leq R$.

Riscrivo la serie come

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2x^3)^n \underset{\underset{t=2x^3}{\uparrow}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \leftarrow \text{quasi serie geom.}$$

per la serie geometrica il raggio di conv. è 1 ($a_n = 1 \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$), quindi la serie converge per $|t| < 1$ e non converge per $|t| > 1$.

Sostituendo $t = 2x^3$ ottengo che la serie di partenza converge per $|2x^3| < 1$, cioè $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, e non converge per $|2x^3| > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Quindi il raggio di convergenza della serie di partenza è $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Inoltre abbiamo già visto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \qquad \text{se } |t|<1$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) - 1 = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}$$

e sostituendo $t = 2x^3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} = \frac{2x^3}{1-2x^3} \qquad \text{se } |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

**2|** Calcolare il raggio di convergenza e il valore di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{2n}$.

Riscrivo la serie come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{2n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!}}_{\substack{\text{serie di T. di} \\ e^t \text{ con } t=3x^2}} = e^{3x^2}$$

la serie di T di $e^t$ converge per ogni $t$, quindi la nostra serie converge per ogni $x$, e $R = +\infty$.

3] Trovare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^4}{1+2^n} x^n$$

I coefficienti della serie sono $a_n = \frac{1-n^4}{1+2^n}$ quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^4-1}{2^n+1}} \sim \sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^4}}{\sqrt[n]{2^n}}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{n}\log(n^4)\right)}{2} = \frac{\exp\left(4\frac{\log n}{n}\right)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Quindi $R=2$.

4] Discutere il comportamento al variare di $x$ di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^4}{1+2^n} x^n$$

La serie converge se $|x| < R = 2$.

La serie non converge se $|x| > 2$.

Per la precisione se $x > 2$ la serie diverge a $-\infty$ perché è a termini negativi e quindi diverge a $-\infty$ oppure converge (cosa che è esclusa).

Per $x<-2$ la serie non esiste, ma non è facile da dimostrare.

Resta da studiare i casi $|x|=2$.

Per $x=2$, la serie è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^4}{1+2^n} \cdot 2^n \approx -\sum_{n=2}^{\infty} n^4 = -\infty$$

2° criterio di confr. asint.

perché $n^4 \to +\infty$

Per $x=-2$ la serie non esiste, ma non è facile da dimostrare.