AM1 gest 20/21 lezione 40

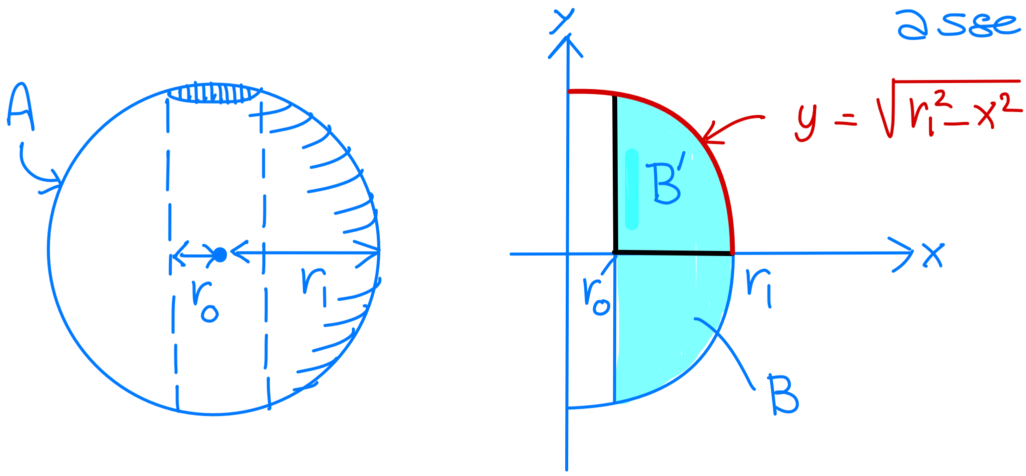
24/11/2020

Esempi di calcolo dei volumi

1| A è il solido ottenuto prendendo una sfera di raggio r_1 e bucandola con il trapano con una punta di diametro $d = 2r_0$, passando per il centro.
Calcolare il volume di A.

Punto 1: disegnare A

A si ottiene ruotando B attorno all'asse delle y



Indicando con B' la metà superiore di B e con A' il solidi di rotazione generato da B' ho che

$$\mathrm{vol}(A) = 2\,\mathrm{vol}(A') = 2\left(2\pi\int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2 - x^2}\,dx\right)$$

$$= 4\pi\int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2 - x^2}\,dx$$

cambio di var.
$t = r_1^2 - x^2,$
$dt = -2x\, dx$
$\left(-\frac{1}{2}\right) dt = x\, dx$

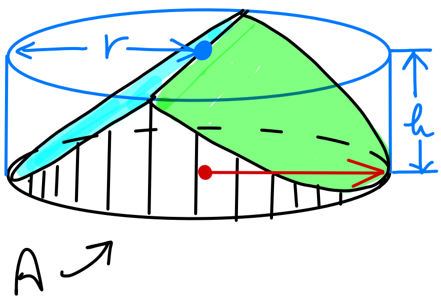
$$= 4\pi \int_{r_1^2 - r_0^2}^{0} \sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r_1^2 - r_0^2} \sqrt{t}\, dt$$

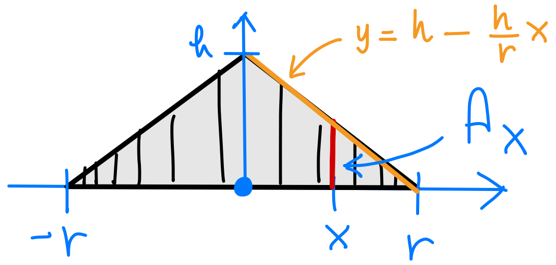
$$= 2\pi \left| \frac{2}{3} t^{3/2} \right|_{0}^{r_1^2 - r_0^2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(r_1^2 - r_0^2\right)^{3/2}$$

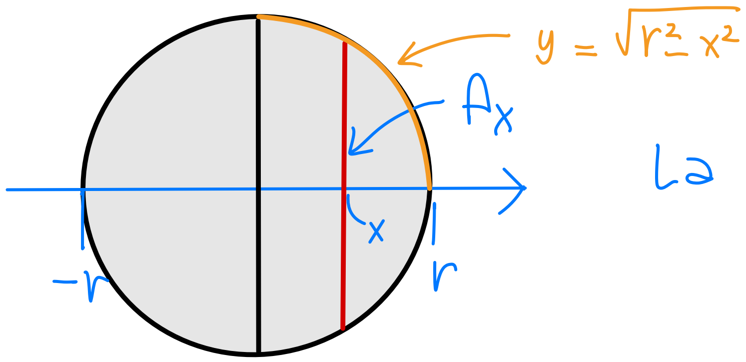
2| Calcolare il volume di A dato sotto:



Scelgo un asse e considero le sezioni A_x rispetto a questo asse.
L'asse per cui è facile l'area di A_x è quello dato dalla freccia rossa in fig.



A_x è un rettangolo.
L'altezza è $h - \frac{h}{r} x$ (per $x > 0$).



La base è $2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi $\quad \text{area}(A_x) = 2h\left(1 - \frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2 - x^2}.$

Quindi

$$\text{Vol}(A) = \int_{-r}^{r} \text{area}(A_x)\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{r} \text{area}(A_x)\, dx$$

$$= 4h\int_{0}^{r} \left(1 - \frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x}{r} \\ dt &= \frac{1}{r}\, dx \\ r\, dt &= dx \end{aligned}\right| \longrightarrow = 4hr^2 \int_{0}^{1} (1 - t)\sqrt{1 - t^2}\, dt$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \text{sen}\, u \\ dt &= \cos u\, du \end{aligned}\right| \longrightarrow = \; \cdots\cdots$$

Integrali impropri

$\int_a^b f(x)\,dx$ è un integrale proprio se a e b sono numeri finiti e f è ben definita e continua su $[a,b]$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ è un int. improprio semplice in b se a è finito (ma b può essere $+\infty$), f è definita è continua su $[a,b)$ ma f non è definita in b o non è continua.

$\int_a^b f(x)\,dx$ è un int. improprio semplice in a se b è finito (ma a può essere $-\infty$), f è definita è continua su $(a,b]$ ma f non è definita in a, o non è continua.

$\int_a^b f(x)\,dx$ è un integrale improprio se f è definita e continua su $[a,b]$ meno un numero finito di punti (all' interno o agli estremi dell' intervallo).

Esempi

$\int_0^1 e^x \, dx$ integr. proprio

$\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$ improprio semplice in 0

$\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$ improprio semplice in $+\infty$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ improprio non semplice in 0 e $+\infty$

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx$ improprio non semplice in 0.

Per adesso consideriamo solo integrali impropri semplici

Definizione

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ è improprio semplice in b, il valore è dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to b^-} \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{integrale proprio per ogni } c<b}$$

Se $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c \to b^-} \Big| F(x) \Big|_a^c$$

$$= \left(\lim_{c \to b^-} F(c) \right) - F(a)$$

In breve vale la solita formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_a^b = F(b^-) - F(a)$$

a patto di intendere $F(b^-)$ come limite

$$= \lim_{x \to b^-} F(x)$$

Esempi

1) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \Big| -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \Big| e^{-x} \Big|_{+\infty}^{0}$$

$$= e^{-0} - \underset{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}}{\underset{\parallel}{e^{-\infty}}} = 1 - 0 = 1$$

2) $$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = \Big| \log(-x) \Big|_{-1}^{0} = \underset{\lim\limits_{x \to 0^+} \log x}{\underset{\parallel}{\log(0^+)}} - \log(1) = -\infty$$

3]

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \Big| \operatorname{sen} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{sen}(+\infty) - \operatorname{sen}(0)$$

$$\operatorname{sen}(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{non esiste!}$$

Questo integrale improprio non esiste (o non converge)!

Definizione

Se $\int_a^b f(x)dx$ è improprio semplice in a, il valore è dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx = \Big|F(x)\Big|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+)$$

$$F(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x)$$

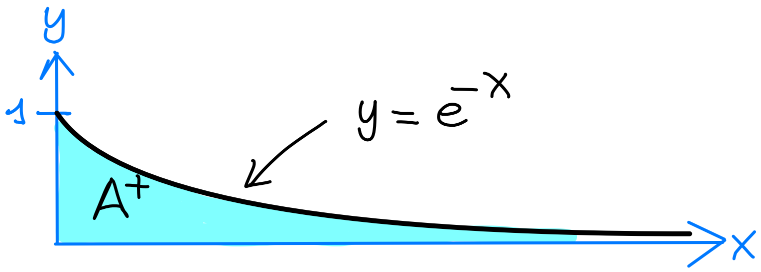
Possibili comportamenti di un int. improprio semplice.

Dato $I := \int_a^b f(x)dx$ improprio in a o b allora ci sono quattro possibili casi:

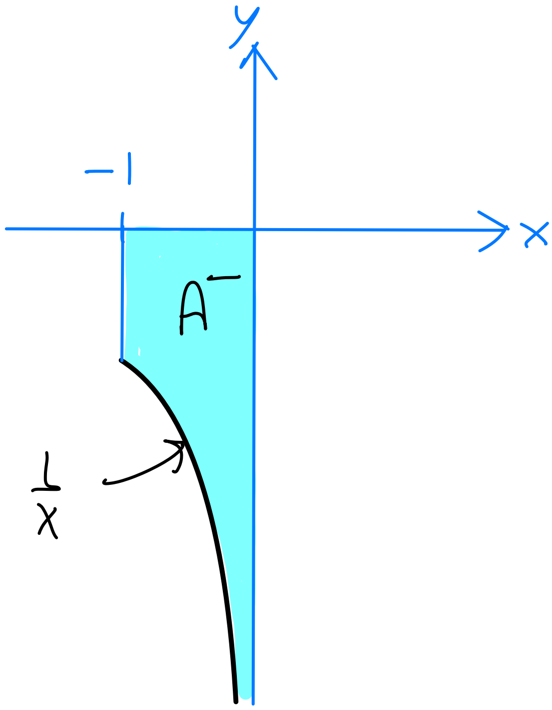
- I esiste ed è finito (si dice che l'int. converge);
- I esiste $= +\infty$ (si dice che l'int. diverge a $+\infty$);
- I esiste $= -\infty$ (si dice che l'int. diverge a $-\infty$);
- I non esiste.

Significato geometrico degli esempi precedenti

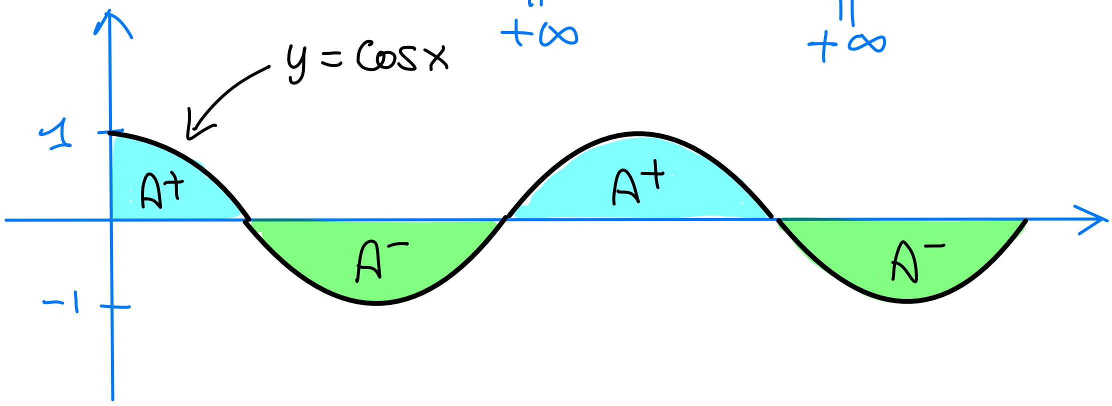
1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \text{area}(A^+)$



2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\,\text{area}(A^-)$



3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \underbrace{\text{area}(A^+)}_{=\,+\infty} - \underbrace{\text{area}(A^-)}_{=\,+\infty}$



Riprendiamo con gli integrali impropri.

Se conoscete la primitiva F di f, allora potete calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ anche se è improprio in a o b.

Se non conoscete F, il valore dell'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ non si può determinare, ma il comportamento spesso sì.

Questo è l'oggetto di questa lezione.

Notazione

Dati $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_c^d g(x)\,dx$ (impropri) scrivo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_c^d g(x)\,dx$$

per dire che hanno lo stesso comportamento.

Cioè: sono entrambi finiti, oppure entrambi $+\infty$, oppure entrambi $-\infty$, oppure entrambi non esistono.

(Se sono entrambi finiti non sono necess. uguali)

Da qui in poi $\int_a^b f(x)\,dx$ è improprio in b.
Tutti i risultati hanno una versione per gli integr. impropri in a (che non scrivo).

Prop. 1

Il comportamento di $\int_a^b f(x)\,dx$ (impr. in b) non dipende da a.
In altre parole, se prendo a' con $a < a' < b$,

$$\int_{a'}^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dim

Presa $F : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitiva di f, il comportam. di

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

dipende solo da $\lim_{x \to b^-} F(x)$ e non da $F(a)$. $\square$

Prop. 2

Se f è "positiva vicino a b" cioè esiste a' con $a < a' < b$ tale che $f \geq 0$ su $[a', b)$,
allora $\int_a^b f(x)\,dx$ ha solo due possibili comport.:

- è finito (cioè converge);
- è $+\infty$ (cioè diverge a $+\infty$).

In particolare $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste sempre!

Se invece f è "negativa vicino a b", cioè esiste a' con $a<a'<b$ t.c. $f \leq 0$ su $[a',b)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ ha solo due possibili comport.:

- è finito (cioè converge);
- è $-\infty$ (cioè diverge a $-\infty$).

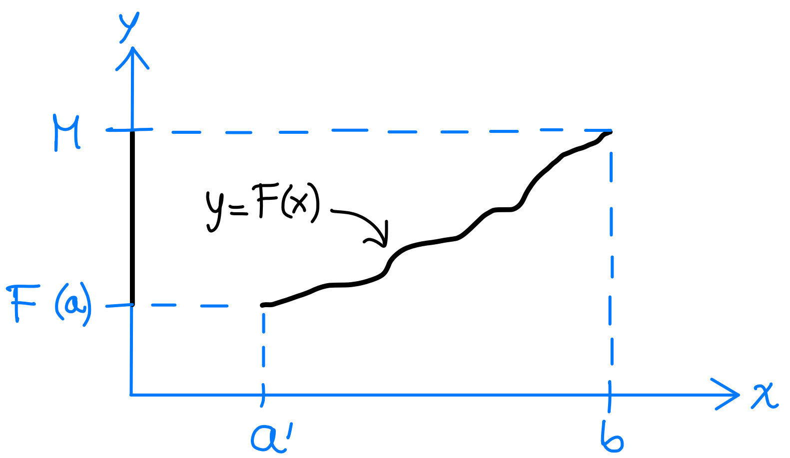
Lemma 3

Se $F : [a',b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente allora $\lim_{x\to b^-} F(x)$ esiste ed è uguale a $\sup\{F(x) : a' \leq x < b\}$.

Analogamente se F è decrescente $\lim_{x\to b^-} F(x)$ esiste ed è $\inf\{F(x) : a' \leq x < b\}$.

"Dim. grafica"

Nel caso $b<+\infty$, F crescente, $M := \sup\{F(x) : \dots\} <+\infty$.



Dim. prop. 2 (primo enunciato)

Prendo a' t.c. $f \geq 0$ su $[a', b)$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{Prop. 1}}{\approx} \int_{a'}^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} \underset{\text{primitiva di } f}{F(x)} - F(a')$$

ed F è crescente su $[a, b)$ perchè $F' = f \geq 0$, quindi per il lemma 3

$$\lim_{x \to b^-} F(x) \text{ esiste } = \sup\{F(x) : a' \leq x < b\}$$

e questo sup è $+\infty$ oppure un numero finito. $\square$

Prop. 4

Suppongo che $b = +\infty$ ed esiste $L := \lim_{x \to +\infty} f(x)$ (finito o infinito). Allora:

- se $L > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$;
- se $L = 0$ non ho informazioni su $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;
- se $L < 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.

Dim. (per $L > 0$)

Prendo m t.c. $0 < m < L$. Siccome $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ esiste $\bar{x}$ t.c. $f(x) \geq m$ per $x \geq \bar{x}$.

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \approx \int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_{\bar{x}}^{+\infty} m\,dx = \Big| m x \Big|_{\bar{x}}^{+\infty} = +\infty.$$

Prop. 1

perché $f(x) \geq \frac{L}{2}$

$\square$

Esempi nel caso $L=0$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \Big| -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{1} = 1$ finito!
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \Big| \log x \Big|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log 1 = +\infty$ infinito!
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx = \Big| \operatorname{sen}(\log x) \Big|_1^{+\infty} = \operatorname{sen}(\log(+\infty))$

  $= \operatorname{sen}(+\infty)$

  tende a 0 per $x \to +\infty$

  NON ESISTE!

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx = \int \cos y\,dy = \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(\log x) + c$$

$y = \log x$

$dy = \frac{dx}{x}$

Prop. 5 (criterio del confronto)

Date $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Allora

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx .$$

esistono per la prop. 2
e appartengono a $(-\infty, +\infty]$

In particolare

- se $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$
- se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$
- se $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$.
- se $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$.

Dim. Facile a partire dalle disug. per gli integrali propri. $\square$

Osserv.

Se $g(x) \leq f(x) \leq 0$ allora

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq 0 .$$

esistono e sono
in $[-\infty, +\infty)$ per
la Prop. 2

Esempio

$\frac{1}{x^4+2x+1} \leq \frac{1}{x^4}$ + principio del confronto

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^4+2x+1}}_{\substack{\text{definita e pos. per } x>1 \\ \text{non ho una primitiva}}} dx \leq \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\substack{\text{primitiva} \\ = -\frac{1}{3x^3}}} dx = \left| \frac{1}{-3x^3} \right|_1^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{3(+\infty)^3} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} = \frac{1}{3}.$$

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1} dx$ è finito.

AM1 gest 20/21 — lezione 43

27/11/2020

Continuazione della lezione precedente.

In particolare $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ sono integrali impropri in b.

(Il caso degli integrali impropri in a è analogo.)

Prop. 6 (Primo criterio del confronto asintotico)

(anche: crit. confr. asint. debole)

Date $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ tali che:

- f, g sono positive vicino a b (cioè esiste a' con $a \leq a' < b$ t.c. $f, g \geq 0$ su $[a', b)$);
- $f(x) = O(g(x))$ per $x \to b^-$;

allora gli integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ sono finiti o $+\infty$ e valgono le stesse implicazioni della prop. 5:

- se $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$
- se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Osserv.

- se $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$, e se $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$.

- se $f, g \leq 0$ vicino a b e $f(x) = O(g(x))$ allora valgono le seguenti implicazioni:
    - se $\int_a^b g(x)dx > -\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx > -\infty$;
    - se $\int_a^b f(x)dx = -\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = -\infty$.

Dim.

Vicino a b vale che $f(x), g(x) \geq 0$ ed esiste $M > 0$ t.c. $|f(x)| \leq M|g(x)|$ (per la definizione di $f = O(g)$)

Quindi esiste a' con $a \leq a' < b$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq M g(x) \quad \text{per } x \in [a', b)$$

Ma allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a'}^b f(x)\,dx \leq M \int_{a'}^b g(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx.$$

prop. 1 della lezione scorsa

Quindi se $\int_a^b g(x)dx$ è finito, sono finiti tutti gli integrali sopra, e se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, sono infiniti tutti gli integrali sopra. $\square$

Prop. 7 (Secondo criterio del confronto asintotico)
(anche: crit. confr. asint. forte)

Date $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ t.c.

- g è positiva vicino a b (oppure g è negativa vicino a b);
- $f(x) \sim L \cdot g(x)$ per $x \to b^-$ con $L > 0$;

allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx .$$

In particolare i due integrali sono entrambi finiti, oppure entrambi $+\infty$ (se $g \geq 0$ vicino a b) oppure entrambi $-\infty$ (se $g \leq 0$ vicino a b).

Osserv.

Se $g(x)$ (oppure $f(x)$) cambia segno infinite volte per $x \to b^-$ allora non vale nessun criterio di confronto asintotico.

Dim.

Suppongo $g \geq 0$ vicino a b (l'altro caso è simile).
L'ipotesi $f \sim Lg$ per $x \to b^-$ significa che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to b^-$$

$$\lim_{x\to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L} \Rightarrow g(x) = O(f(x)) \text{ per } x \to b^-.$$

Dimostro prima che $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty \Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx < +\infty$:

$\Leftarrow$ segue dalla prop. 6 + $f = O(g)$;

$\Rightarrow$ segue dalla prop. 6 + $g = O(f)$.

Allo stesso modo si dimostra che $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$

$\Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$. $\square$

Integrali impropri fondamentali

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

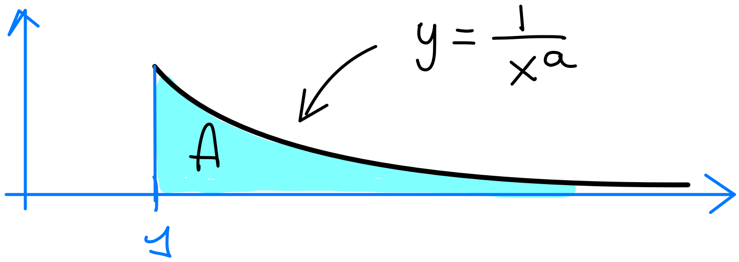
Infatti per $a \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{+\infty - 1}{1-a} = +\infty & \text{se } a<1 \\ \frac{0-1}{1-a} = \frac{1}{a-1} & \text{se } a>1 \end{cases}$$

mentre per $a = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left| \log x \right|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log(1) = +\infty.$$

In particolare A ha area finita sse $a>1$



- $$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a\geq 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } a<1 \end{cases}$$

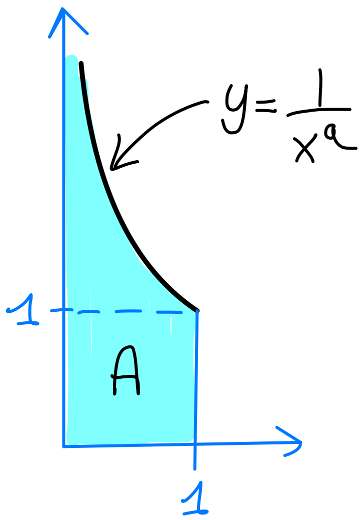
Infatti, per $a\neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \left|\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_{0^+}^{1} = \begin{cases} \frac{1-(+\infty)}{1-a} = +\infty & \text{se } a>1 \\ \frac{1-0}{1-a} = \frac{1}{1-a} & \text{se } a<1 \end{cases}$$

e per $a=1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \left|\log x\right|_{0^+}^{1} = \log(1)-\log(0^+) = +\infty$$

In particolare l'area di A è finita se e solo se $a<1$.



Esercizi

Determinare il comportamento (non il valore!) dei seguenti integrali impropri.

- $$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx$$

verifica: $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}$ è definita e continua su $(0,2]$; l'integrale è improprio in 0.

Per $x \to 0^+$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Quindi per

$$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx \underset{\substack{\text{Prop. 1} \\ \text{(lez. prec.)}}}{\approx} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx \underset{\substack{2^\circ \text{ crit.} \\ \text{confr. asint.}}}{\approx} \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \underset{\text{NOTO!}}{=} +\infty$$

Risposta: $\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx = +\infty$.

- $$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx$$

Verifica: $\frac{x^2+\log x}{2x^5+6}$ è def. e continua per $x>0$, l'integrale è improprio (semplice) in $+\infty$

Per $x \to +\infty$, $\frac{x^2+\log x}{2x^5+6} \sim \frac{x^2}{2x^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}$.

Quindi

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2° crit. confr.} \\ \text{asint.}}}{\approx} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 1}}}{\approx} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NOTO}}}{<} +\infty$$

Risposta: $\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx$ è finito.

Con questo metodo non posso scoprire quanto vale esattamente.

Continuo con lo studio degli integrali impropri semplici

Esercizi

Determinare il comportamento dei seguenti integrali impropri

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx$

analisi preliminare:
$\tan x$ è definita, continua e strett. positiva su $(0,1]$
$\sqrt{\tan x}$ è def., cont., strett. pos. su $(0,1]$ e quindi anche $\frac{1}{\sqrt{\tan x}}$ lo è. L'integrale è improprio in 0, e ci sono solo due possibili comp.: $+\infty$ o finito.

Per $x \to 0^+$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \frac{x}{1} = x$,

quindi $\frac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$,

2° crit. conf. asint.

quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}$ è finito.

Conclusione: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx$ è finito.

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\, dx$

Analisi preliminare: $\frac{1}{x^2\log x}$ è definito, continuo e positivo su $[2,+\infty)$, quindi l'int. è improprio solo in $+\infty$ ed è finito o $+\infty$.

Attenzione: $\frac{1}{x^2\log x}$ non ha parte princ. per $x\to+\infty$.

Non posso usare il 2° crit. di confr. asint.

Però osservo che per $x\to+\infty$

$$\frac{1}{x^2\log x} \ll \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2\log x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

e

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{converge.}$$

Per il 1° criterio di confronto asintotico

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\log x}\, dx \quad \text{converge.}$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx$

Analisi prelim.: $\frac{\log x}{x}$ è definita, continua, e positiva su $[1,+\infty)$; l'integrale è improprio solo in $+\infty$ e vale $+\infty$ o è finito.

Non c'è una parte principale per $x\to+\infty$.

Osservo che per $x \to +\infty$

$$\frac{\log x}{x} \gg \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x} = O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$. Quindi per il 1° crit. del confr. asintotico

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx = +\infty$$

<u>Nota</u> questo integrale si può calcolare direttamente con un cambio di variabile:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx \underset{\substack{y = \log x \\ dy = \frac{1}{x} dx}}{=} \int_0^{+\infty} y\, dy = \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^{+\infty} = +\infty$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\, dx$

Analisi prelim.: $\frac{\log x}{x^2}$ è def., cont., posit. su $[1, +\infty)$; l'integrale è improprio solo in $+\infty$ ed è finito oppure $+\infty$.

Per $x \to +\infty$ vale che:

$$\frac{\log x}{x^2} \gg \frac{1}{x^2} \implies \frac{1}{x^2} = O\left(\frac{\log x}{x^2}\right)$$

Fatto inutile, perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ è finito.

Però vale anche che

$$\frac{\log x}{x^2} \ll \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \frac{\log x}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \text{ è finito}$$

Per 1° crit. di confr. asint.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx \text{ è finito.}$$

Attenzione: come ho scelto l'esp. 1/2 in rosso?

Potrei procedere in maniera più generale:

$\forall\ \boxed{a>0}$ $\quad \dfrac{\log x}{x^2} \ll \dfrac{x^a}{x^2} = \dfrac{1}{x^{2-a}}$

questa informazione è utile se $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-a}}\,dx$ è finito, cioè se $2-a>1$, $\boxed{a<1}$.

Quindi posso concludere scegliendo $0<a<1$, per esempio $a=\frac{1}{2}$ (ma anche $a=\frac{1}{3}$, ma non $a=1$).

- $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,\log x}\,dx$

analisi prelim.: $\dfrac{1}{\sqrt{x}\log x}$ è def., cont., positiva su $[3,+\infty)$;

l'integrale è improprio solo in $+\infty$ ed è finito o $+\infty$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x \log x}} = \frac{1}{x^{1/2} \cdot (\log x)^{1/2}} \ll \frac{1}{x^{1/2}}$$

inutile perché $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx = +\infty$.

Ma anche:

$$\frac{1}{\sqrt{x \log x}} = \frac{1}{x^{1/2} \cdot (\log x)^{1/2}} \gg \frac{1}{x^{1/2} \cdot (x^{1/2})^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/4}}$$

e

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3/4}}\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/4}}\, dx = +\infty$$

quindi, per il 1° crit. di confr. asint.,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x \log x}}\, dx = +\infty.$$

Come prima, l'esponente 1/2 in rosso poteva essere sostituito da un qualunque esponente a con $0 < a < 1$.

- $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^2}\, dx$$

Analisi prelim.: $\frac{1}{x (\log x)^2}$ è def., cont., pos. su $[2, +\infty)$; l'integrale è improprio solo a $+\infty$ ed è finito o $+\infty$.

Attenz.: $a=1$ è il valore dell'esponente per cui cambia il comportamento di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx$.

Provo a cercare una stima dall'alto (per dimostrare che l'integrale è finito): per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x(\log x)^2} \ll \frac{1}{x \cdot 1^2} = \frac{1}{x}$$

inutile perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$.

Provo a cercare una stima dal basso (per dimostrare che l'integrale è infinito): per $x \to +\infty$

$\forall a > 0$
$$\frac{1}{x(\log x)^2} \gg \frac{1}{x(x^a)^2} = \frac{1}{x^{1+2a}}$$

inutile perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2a}}\,dx < +\infty$ per ogni $a > 0$.

Il comportamento di questo integrale non si determina usando il confronto con le potenze!

L'unico modo (che io sappia) è calcolare l'integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx \underset{\substack{y = \log x \\ dy = \frac{dx}{x}}}{=} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy < +\infty$$

Quindi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ è finito!

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$ con $a > 0$. Fatelo voi!

- $$\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{e^x + x^2}\, dx$$

Analisi preliminare: $\frac{x^5}{e^x+x^2}$ è definita, cont. positiva su $[0,+\infty)$.

L'integrale è improprio solo in $+\infty$

Per $x \to +\infty$

$$\frac{x^5}{e^x+x^2} \sim \frac{x^5}{e^x} \ll \frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \text{ è finito}$$

Quindi per il 1° criterio del confr. asint.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{e^x+x^2}\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{x^5}{e^x+x^2}\, dx \text{ è finito}$$

L'esponente 7 in rosso può essere sostituito con un qualunque $a > 6$.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{a^x}\, dx$ con $a > 1$. Fatelo voi!
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^a}\, dx$ con $a > 0$. Fatelo voi!
- $\int_2^{+\infty} (\log x)^a\, dx$ con $a > 0$. Fatelo voi!

Continuo con gli integrali impropri.

Classi di integrali impropri significative

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^a}\,dx = -\int_{+\infty}^{1} \frac{1}{t^a}\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

improprio in $-\infty$ $\qquad$ $x=-t$, $dx=-dt$

<u>Nota</u>: ho messo $\frac{1}{|x|^a}$ invece di $\frac{1}{x^a}$ perché così posso considerare anche a non intero, e non mi devo preoccupare del segno.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{|x|^a}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{t^a}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

improprio in 0 $\qquad$ $x=-t$, $dx=-dt$

Esempi

Studiare il comportamento dei seguenti int. impropri.

- $$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+x^4}\,dx \approx \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx \approx \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty.$$

improprio in 0 $\qquad$ 2° crit. confr. asint.: $x^2+x^4 \sim x^2$ per $x \to 0$

- $$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx \approx \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{x}\,dx \approx \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\int_{-1}^{0} \frac{1}{|x|}\,dx = -\infty .$$

improprio in 0

2° crit. di confr. asint.
$\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

$x = -|x|$ per $x<0$

- $$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}\,dt$$

improprio in $\frac{\pi}{2}$
perché $\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$
def. e pos su $[0, \frac{\pi}{2})$

$t = \frac{\pi}{2} - x$
$dt = -dx$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \operatorname{sen} t$

$$\approx \int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt = \text{finito}$$

2° crit. confr. asint.
$\operatorname{sen} t \sim t$ per $t \to 0$

Esempio importante

il cambio di variabile
serve a ricondursi a
un integrale improprio in 0

- $$\int_0^3 \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx \approx \cancel{\frac{1}{5}} \int_0^3 \frac{1}{x-3}\,dx$$

improprio in 3
$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$
$\frac{1}{x^2-x-6}$ é definita
su $[0,3)$

per $x \to 3$
$x+2 \sim 5$

$$= \int_{-3}^{0} \frac{1}{t}\,dt$$

$t = x-3$
$dt = dx$

$$\approx \int_{-1}^{0} \frac{1}{t}\,dt = -\infty .$$

Versione alternativa: cambio di variabile subito

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \int_{-3}^0 \frac{1}{t(t+5)}\,dt \approx \int_{-3}^0 \frac{1}{5t}\,dt \approx \int_{-1}^0 \frac{1}{t}\,dt = -\infty$$

improprio in 3

$t = x-3$, $dt = dx$ per passare ad un integrale impr. in 0

$x = t+3 \Rightarrow$

$x^2-x-6 = (t+3)^2-(t+3)-6$

$= t^2+6t\cancel{+9}-t\cancel{-3}\cancel{-6}$

$= t^2+5t = t(t+5)$

$t+5 \sim 5$ per $t \to 0$

- $$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \approx \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \approx \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4} = \text{finito.}$$

improprio in $-\infty$

$x^4+x^2+1 \sim x^4$ per $x \to -\infty$

Versione errata:

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \approx \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^4}$$

$x^4+x^2+1 \sim x^4$ per $x \to -\infty$

Siccome $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^4}$ è improprio anche in 0 non si può applicare il criterio del confronto asintotico!

Conclusione della teoria degli integrali impropri

Finora abbiamo considerato solo $\int_a^b f(x)\,dx$ impropri solo in b (risp., a) e tutti i criteri di confronto richiedono che f abbia segno costante vicino a b (risp., a).

Il prossimo criterio non richiede segno costante.

Proposizione (Criterio della convergenza assoluta)

Sia $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$.

esiste sempre, ed è finito o $+\infty$

Allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

Osservazione

Se $\int_a^b |f(x)|\,dx = +\infty$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può avere qualunque comportamento!

Esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$ esiste ed è finito perché

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty.$$

Ometto la dimostrazione di questa proposizione.

Integrali impropri non semplici

Considero $\int_a^b f(x)\,dx$ con f definita e continua su $[a,b]$ escluso un numero finito di punti (in cui f non è definita o non è continua — l'integrale è improprio in questi punti).

Si scompone $\int_a^b f(x)\,dx$ come somma finita di integrali impropri semplici, cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx}_{\text{improprio in } a_n \text{ o } b_n} .$$

Si dice che $\int_a^b f(x)dx$ esiste se esistono tutti gli integr. $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$ e tra i valori non appaiono sia $+\infty$ che $-\infty$.
In tal caso il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ è la somma dei valori di $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$.

In tutti gli altri casi (cioè se uno degli addendi non esiste oppure uno è $+\infty$ e un altro è $-\infty$) si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ non esiste.

Esempi

- $$\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx}_{\text{improprio in } 0} \overset{\text{scomposiz.}}{=} \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \text{NON ESISTE}$$

uso che $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\infty$

e $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

- $$\underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{improprio in } 0 \text{ e } +\infty} \overset{\text{scompos.}}{=} \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = +\infty$$

uso che $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è finito

e $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$

- $$\underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\log x}\,dx}_{\text{improprio in } 0,\ 1,\ +\infty} \overset{\text{scompos.}}{=} \underbrace{\int_{0}^{1/2} \cdots}_{A} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \cdots}_{B} + \underbrace{\int_{1}^{2} \cdots}_{C} + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} \cdots}_{D}$$

Provate a calcolarli tutti, cominciando da B e C.