AM1 gest 20/21

Lezione 15
seconda parte

17/10/2020

## Calcolo dei limiti usando le derivate

(in particolare limiti di forme indeterminate)

Strumenti a disposizione:

- Teorema di de L'Hôpital
- Sviluppi di Taylor e parti principali ← questo è lo strumento più importante!

## Teorema di de L'Hôpital

Versione "imprecisa": date $f, g$ funzioni tali che:

$$f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

oppure

$$f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

← potrebbe non essere una forma indet.

↑ forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

La versione precedente è imprecisa nel senso che il teorema contiene delle altre ipotesi.

Ecco la versione "precisa":
consideriamo $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ tali che

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ t.c. $I := \{x \in X : x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| \leq \delta\}$ è della forma $[x_0 - \delta, x_0)$ opp. $(x_0, x_0 + \delta]$ opp. l'unione;
  se $x_0 = +\infty$ esiste $m$ t.c. $I := [m, +\infty) \subset X$;
  se $x_0 = -\infty$ esiste $m$ t.c. $I := (-\infty, m] \subset X$;
  inoltre $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$;
- $g(x), f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ oppure $g(x), f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$;
- esiste il limite $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

La prima ipotesi dice che $X$ deve avere una forma particolare, ed è soddisfatta nei casi concreti che considereremo.
La seconda ipotesi è quella fondamentale, ed è presente anche nella versione precedente.

La terza ipotesi richiede a priori che esista L: può infatti succedere che $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste mentre $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste.

## Esempi

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ forma indet. del tipo $\frac{0}{0}$, applico de L'Hôp. e ottengo:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

Nella lezione precedente abbiamo dato una dimostrazione lunga e complicata di questo limite. Perché? La ragione è che questo limite serve a dimostrare che $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ e questa dimostrazione usa che $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \left[= \text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right] \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \left[= \text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right] \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \operatorname{sen}(0) = 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \left[= \text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right] \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{de L.H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}\right]$

$$\overset{\text{de L.H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

## Esempi in cui qualcosa va storto

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x^2)}}{e^{(x^3)}} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{x^2})'}{(e^{x^3})'}$

$$\Big(e^{\overbrace{x^a}^{y}}\Big)' = (e^y)'(x^a)' = e^y \cdot a x^{a-1} = a x^{a-1} e^{x^a}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}\, e^{x^2}}{3x^{\cancel{2}} e^{x^3}} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x e^{x^2}}{3e^{x^3} + 3x \cdot 3x^2 e^{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x e^{x^2}}{(3+9x^3)\, e^{x^3}} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$= \dots$$

Andando avanti ad applicare de L'Hôpital non viene mai una forma non indeterminata!

D'altra parte possiamo calcolare il limite diversamente:

$$\frac{e^{x^2}}{e^{x^3}} = e^{x^2} \cdot e^{-x^3} = e^{x^2-x^3} = e^{x^3\left(-1+\frac{1}{x}\right)}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{x^3}^{+\infty}\overbrace{\left(-1+\frac{1}{x}\right)}^{-1}} = e^{-\infty} = 0.$$

- Applicazione errata del teor. di de L'Hôp.:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x} \overset{\text{te L'H.}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Questo risultato è sicuramente sbagliato perché $\frac{\log x}{x} < 0$ per $x<1$, e quindi il limite non è $+\infty$.

L'errore sta nel fatto che questo limite non è una forma indeterminata tipo $\frac{0}{0}$ né tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, e quindi NON si può applicare de L'Hôp.

In effetti $\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x} = "\frac{-\infty}{0^+}" = -\infty$.

non è una forma indet.

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}x}{\log x}$ forma indet. $\frac{+\infty}{+\infty}$

infatti $\operatorname{sen}x \geq -1$, quindi $x+\operatorname{sen}x \geq x-1$ e siccome $x-1 \to +\infty$ allora $x+\operatorname{sen}x \to +\infty$.

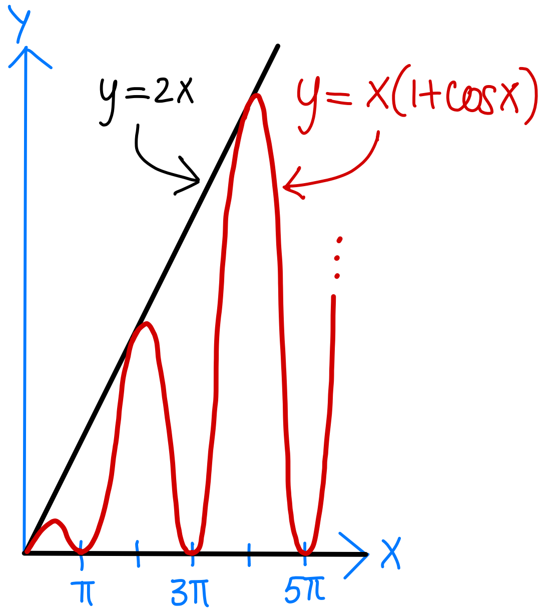
se applico de L'Hôp. ottengo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}x}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(1+\cos x)$$

e questo limite non esiste!

Infatti, per $x\to+\infty$, $\cos x$ oscilla infinite volte tra $-1$ e $1$, quindi $1+\cos x$ oscilla tra $0$ e $2$, e $x(1+\cos x)$ oscilla tra $0$ e $2x$.




Come si vede dal disegno il limite per $x\to+\infty$ non esiste.

Ma ragionando diversamente ottengo un risultato diverso!

Infatti $\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow \frac{x+\operatorname{sen} x}{\log x} \geq \frac{x-1}{\log x}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\operatorname{sen} x} \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Quindi anche $\frac{x+\operatorname{sen} x}{\log x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Il secondo risultato è quello giusto.

Il primo è sbagliato perché il teorema di de L'Hôp. non si può applicare perché non è verificata l'ipotesi che esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Morale: se applicando de l'Hôp. a $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ si ottiene che $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, non vuol dire che $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, ma solo che non si può applicare il teorema.

# Confronti di infiniti e infinitesimi

Terminologia (non molto usata):
dato $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ per "infinito (in $x_0$)" intendo una funzione che tende a $\pm\infty$ (per $x \to x_0$); per "infinitesimo (in $x_0$)" intendo invece una funzione che tende a 0.

Dati due infiniti (o due infinitesimi), cioè due funzioni che tendono a $\pm\infty$ (oppure a 0) per $x \to x_0$, ad esempio $x^2$ e $x^3$ (per $x \to +\infty$), voglio dare voglio dare un significato preciso all'intuizione che $x^2$ è molto più piccolo di $x^3$ (per $x \to +\infty$).

Questo è lo scopo della prossima definizione.

## Definizione

Date $f, g : X \to \mathbb{R}$ dico che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

In tal caso scrivo

ometto di scriverlo se è chiaro dal contesto

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{per } x \to x_0)$$

(il simbolo "$\ll$" si legge "minore minore")

oppure

$$f(x) = o(g(x)) \quad (\text{per } x \to x_0)$$

(il simbolo "$o(g(x))$" si legge "o piccolo di $g(x)$")

<u>Osserv.</u>

- Nella definizione non ho richiesto che $f$ e $g$ siano entrambi infiniti o infinitesimi.
  Tuttavia la nozione "$f(x) \ll g(x)$" è particolarm. significativa quando $f(x)$, $g(x) \to 0$ oppure $f(x), g(x) \to \pm\infty$ (cioè quando $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ è la forma indet. $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$).

- L'espressione "$f(x) \ll g(x)$" contiene un confronto tra i valori assoluti di $f(x)$ e $g(x)$, e non dipende dal segno di $f(x)$ e $g(x)$.
  Per esempio $x^2 \ll -x^3$ per $x \to +\infty$.

- Se $g(x) \to \pm\infty$ e $f(x) \to L$ finito, allore è immediato verificare che $f(x) \ll g(x)$.
  lo stesso vale se $g(x) \to L$ con $L \neq 0$ (incluso $\pm\infty$) e $f(x) \to 0$.

## Esempi fondamentali per $x \to +\infty$

(confronto di infinitesimi e infiniti elementari a $+\infty$)

a) $x^a \ll x^b$ se $a<b$

esempi: $x^2 \ll x^3$, $\frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x}$

b) $a^x \ll b^x$ se $0<a<b$

$a, b$ devono essere posit. affinché $a^x$ e $b^x$ siano definite

esempio: $2^x \ll e^x$

c) $(\log x)^a \ll x^b$ se $b>0$, $a$ qualunque

se $b \leq 0$ e $a>0$, $x^b \to 0$ opp. $1$ e $(\log x)^a \to +\infty$,
quindi $x^b \ll (\log x)^a$

d) $x^a \ll b^x$ se $b>1$ e $a$ qualunque

se $0<b\leq 1$ e $a>0$, $b^x \to 0$ opp. $1$ e $x^a \to +\infty$,
quindi $b^x \ll x^a$

## Osserv.

Caso particolare di quanto detto: $\log x \ll x^{0,00001}$

Ma se fate disegnare i grafici al computer sembra vero esattamente il contrario: il punto è che $x^{0,00001}$ diventa più grande di $\log x$ solo per valori di $x$ così grandi che il computer non li può gestire.

Stesso discorso per $x^{10000} \ll (1,00001)^x$.

## Dimostrazioni

a) Devo far vedere che $\frac{x^a}{x^b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $a<b$:

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{perché } a-b<0.$$

b) Devo far vedere che $\frac{a^x}{b^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $a<b$:

$$\frac{a^x}{b^x} = (a/b)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{perché } a/b<1.$$

c) Devo far vedere che $\frac{(\log x)^a}{x^b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $b>0$.

Caso $a=1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} \left[=\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{b x^{b-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b x^b} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Caso $a>0$: scrivo

$$\frac{(\log x)^a}{x^b} = \left(\frac{\log x}{x^{b/a}}\right)^a$$

e per il caso precedente $\dfrac{\log x}{x^{b/a}} \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{\frac{\log x}{x^{b/a}}}_{y}\Big)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = +\infty .$$

Caso $a<0$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \frac{0}{+\infty} = 0$.

d) Devo far vedere che $\dfrac{x^a}{b^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $b>0$: scrivo

$$\frac{x^a}{b^x} = \exp\left(\log\left(\frac{x^a}{b^x}\right)\right) = \exp\left(a\log x - x\log b\right)$$
$$= \exp\Big(\underbrace{x\left(-\log b + a\frac{\log x}{x}\right)}_{y}\Big)$$

e osservo che:

- $\dfrac{\log x}{x} \to 0$ (per c));
- $-\log b + a\dfrac{\log x}{x} \to -\log b$;
- $y = x\left(-\log b + a\dfrac{\log x}{x}\right) \to -\infty$;
- $\dfrac{x^a}{b^x} = e^y \to 0$. $\square$

AM1 gest 20/21

# Lezione 16

20/10/2020

Dalla lezione precedente: $f$ è trascurabile rispetto a $g$ per $x \to x_0$ se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \; ;$$

Scriviamo: $f \ll g$.

## Confronto di infiniti/infinitesimi elementari per $x \to +\infty$

(a) $x^a \ll x^b$ se $a < b$;

(b) $a^x \ll b^x$ se $0 < a < b$;

(c) $(\log x)^a \ll x^b$ se $b > 0$;

(d) $x^a \ll b^x$ se $b > 1$.

## Confronto di infiniti/infinitesimi elementari per $x \to 0$

(e) $x^a \ll x^b$ se $a > b$;

(f) $(\log x)^a \ll \frac{1}{x^b} = x^{-b}$ se $b > 0$.

Dim.

Gli enunciati (a) – (d) sono stati dimostrati nella lezione precedente.

(e) $$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^{a-b} = 0 \, .$$

perché $a - b > 0$ per ipotesi

(f) caso $a=1$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-b}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-b x^{-b-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^b}{-b} = 0$

caso $a>0$: $\frac{(\log x)^a}{x^{-b}} = \frac{(\log x)^a}{(x^{-b/a})^a} = \left(\frac{\log x}{x^{-b/a}}\right)^a$

quindi: $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)^a}{x^{-b}} = \lim_{x\to 0^+} \Bigg(\underbrace{\frac{\log x}{x^{-b/a}}}_{y}\Bigg)^a \overset{(*)}{=} \lim_{y\to 0^+} y^a = 0.$

(*) uso il cambio di variabile $y = \left(\frac{\log x}{x^{-b/a}}\right)$; so che $y \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ perché $\log \ll x^{-b/a}$.

caso $a \leq 0$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)^a}{x^{-b}} = \text{“}\frac{0}{+\infty}\text{”} = 0$ $\square$

<u>Esercizi</u>

- $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\log x}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-2}} = 0$

  $\log x \ll x^{-2}$ per $x \to 0^+$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{(\log x)^2}^{+\infty}}{\underbrace{e^x}_{+\infty}} = 0$

  Uso il seguente fatto generale:
  $(\log x)^a \ll b^x$ se $b>1$, in part. $(\log x)^2 \ll e^x$.
  Infatti $(\log x)^a \ll x$ e $x \ll b^x$ per $b>1$.

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2^x}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^4}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty}\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{x^4}{2^x}}}_{y}\Bigg)^{-1} = \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y} = +\infty .$$

  Cambio var. $y=\dfrac{x^4}{2^x}$

  $x^4 \ll 2^x \Rightarrow y \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$

- $$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x \underset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty}(-y)^2e^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y} = 0 .$$

  $y=-x$

  cioè $x=-y$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log(\log x)} \underset{y=\log x}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\log y} = +\infty$$

  $y=\log x$

- $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{2^x - x^{10}}_{+\infty-\infty} = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{2^x}^{\to+\infty}\overbrace{\Bigg(1-\frac{x^{10}}{\underbrace{2^x}_{\to0}}\Bigg)}^{\to1} = +\infty.$$

## Definizione (di equivalenza asintotica)

Date $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ si dice che $f$ e $g$ sono **asintoticamente equivalenti** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \leftarrow$$

suppongo che sia sensato parlare di questo limite cioè che $x_0$ sia appross. con punti di $X$.

Scriviamo $f \sim g$ per $x \to x_0$.

Nozione di "somiglianza" di due funzioni per $x \to x_0$.

## Definizione (di parte principale per $x \to 0$ o $x \to +\infty$)

Se $f(x) \sim a x^b$ per $x \to 0$ (risp., per $x \to +\infty$) chiamo $a x^b$ **parte principale** di $f(x)$ per $x \to 0$ (risp., per $x \to +\infty$).

## Esempi

- $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$ $\Leftarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;

  in particolare la p.p. di $\operatorname{sen} x$ per $x \to 0$ è $x$.

- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ $\Leftarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \uparrow= \frac{1}{2}$

  applico 2 volte de L'Hôp.

  in particolare la p.p. di $1 - \cos x$ per $x \to 0$ è $\frac{x^2}{2}$.

- $x^2 - 3x^3 \sim -3x^3$ per $x \to +\infty$ $\Leftarrow \frac{x^2 - 3x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3x} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

  e la p.p. di $x^2 - 3x^3$ per $x \to +\infty$ è $-3x^3$.

- $x^2 - 3x^3 \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Leftarrow \frac{x^2 - 3x^3}{x^2} = 1 - 3x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

  e la p.p. di $x^2 - 3x^3$ per $x \to 0$ è $x^2$.

**Proposizione** (negli enunciati sotto $x \to x_0$)

(1) $f \sim g$ equivale a dire che $f$ si può scrivere come $f = g + r$ con $r \ll g$.

"resto"

Versione compatta: $f \sim g \iff f = g + o(g)$

(ricordo che $o(g)$ indica qualunque funzione trascurabile rispetto a $g$).

(2) Se $f \sim g$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

(e se uno dei limiti non esiste, non esiste neanche l'altro).

(3) Se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ e $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.

Attenzione: in generale non vale $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

(4) Principio di sostituzione nei limiti: se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f_1 \cdot f_2 = \lim_{x \to x_0} g_1 \cdot g_2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1}{g_2}.$$

Se ho un prodotto (o un rapporto) di funzioni, sostituire ad un fattore una funzione asintoticamente equivalente (per $x \to x_0$) non cambia il limite (per $x \to x_0$).

Caso particolarmente utile: $x_0 = 0$ opp. $x_0 = +\infty$ e $g_1$ e $g_2$ sono potenze (cioè $g_1$ e $g_2$ sono le p.p. di $f_1$ e $f_2$).

Dim.

(1) suppongo $f \sim g$ e scrivo $f = g + r$ con $r = f - g$;

allora $$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}} - 1 \longrightarrow 0$$ cioè $r \ll g$;

suppongo $f = g + r$ con $r \ll g$: allora
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)+r(x)}{g(x)} = 1 + \underbrace{\frac{r(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 0}} \longrightarrow 1$$ cioè $f \sim g$.

(2) Scrivo $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}} \cdot g(x)$ quindi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(3) $$\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \underbrace{\frac{f_1}{g_1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{f_2}{g_2}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$ quindi $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

$$\frac{f_1/f_2}{g_1/g_2} = \Bigg(\underbrace{\frac{f_1}{g_1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}\Bigg) \Big/ \Bigg(\underbrace{\frac{f_2}{g_2}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}}\Bigg) \longrightarrow 1/1 = 1$$ quindi $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

(4) $$f_1 \sim g_1 \text{ e } f_2 \sim g_2 \underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{\Longrightarrow} f_1 f_2 \sim g_1 g_2 \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} f_1 f_2 = \lim_{x\to x_0} g_1 g_2 .$$

L'altra parte dell'enunciato si dimostra allo stesso modo. $\square$

AM1 gest 20/21 — Lezione 17 — 21/10/2020

<u>Esempi</u> (di uso del principio di sostituzione)

(1), ..., (4) si riferiscono agli enunciati della propos. nella lezione precedente.

- $2^x - x^4 \sim 2^x$ per $x \to +\infty$ $\Leftarrow$ $x^4 \ll 2^x$ (uso (1))

In particolare $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^4}_{\text{forma indet. } +\infty-\infty} \overset{\text{per (2)}}{=} \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x+\sin x}^{\sim x}}{\underbrace{x^2+x+\log x}_{\sim x^2}} \underset{\text{per(4)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sin x \ll x \overset{(1)}{\Rightarrow} x + \sin x \sim x$

(altern. $\sin x = o(x) \Rightarrow x + \sin x = x + o(x) \sim x$)

$x \ll x^2$ e $\log x \ll x^2$ per $x \to +\infty$ $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $x + \log x \ll x^2$

$\Rightarrow x^2 + x + \log x \sim x^2$

In $(*)$ ho usato il seguente fatto generale: (per $x \to x_0$)

se $f_1 \ll g$ e $f_2 \ll g$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora $c_1 f_1 + c_2 f_2 \ll g$.

Infatti $\dfrac{c_1 f_1 + c_2 f_2}{g} = c_1 \underbrace{\dfrac{f_1}{g}}_{\to 0} + c_2 \underbrace{\dfrac{f_2}{g}}_{\to 0} \longrightarrow 0$.

Scrittura compatta : "$c_1 \cdot o(g) + c_2 \cdot o(g) = o(g)$"

Attenzione che $o(g)$ rappresenta funzioni diverse

In particolare $o(g) - o(g) = o(g)$ e non $o(g) - o(g) = 0$.

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{3x^2 + x^4/4}^{\substack{x^4/4 \text{ (p.p. del num. per } x\to+\infty)\\ \wr}}}{\underbrace{\sqrt{x} - x^3/2}_{\substack{\wr \\ -x^3/2 \text{ (p.p. del denom. per } x\to+\infty)}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4/4}{-x^3/2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\cdot x = -\infty$$

$$x^2 \ll x^4 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 3x^2 \ll \frac{x^4}{4} \Rightarrow 3x^2 + \frac{x^4}{4} \sim \frac{x^4}{4}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \ll x^3 \underset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{x} \ll -x^3/2 \Rightarrow \sqrt{x} - x^3/2 \sim -x^3/2$$

In (*) ho usato questo fatto generale:

se $f \ll g$ allora $c_1 f \ll c_2 g \quad \forall c_1, c_2 \neq 0$

Infatti $\frac{c_1 f}{c_2 g} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \underbrace{\frac{f}{g}}_{\downarrow \, 0} \longrightarrow 0$.

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{3x^2 + x^4/4}^{\substack{3x^2 \text{ (p.p. del numer. per } x\to 0)\\ \wr}}}{\underbrace{\sqrt{x} - x^3/2}_{\substack{\wr \\ \sqrt{x} = x^{1/2} \text{ (p.p. del denom. per } x\to 0)}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x^{1/2}} = \lim_{x\to 0^+} 3x^{3/2} = 0$$

Faremo altri esercizi di questo tipo in seguito

Nota su come si scrive:

$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L$ OK $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ OK $\qquad \cancel{\lim_{x\to x_0} f(x) \to L}$ NO!

$$f_1 \sim f_2 \text{ per } x \to x_0 \quad \not\Longrightarrow \quad f_1 = f_2$$

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) \qquad \text{OK}$$

$$\cancel{\lim_{x \to x_0} f_1(x) \sim \lim_{x \to x_0} f_2(x)} \qquad \text{NO!}$$

Comunicia ora un pezzo di teoria

(per arrivare tra le altre cose alla dim. di de L'Hôp.)

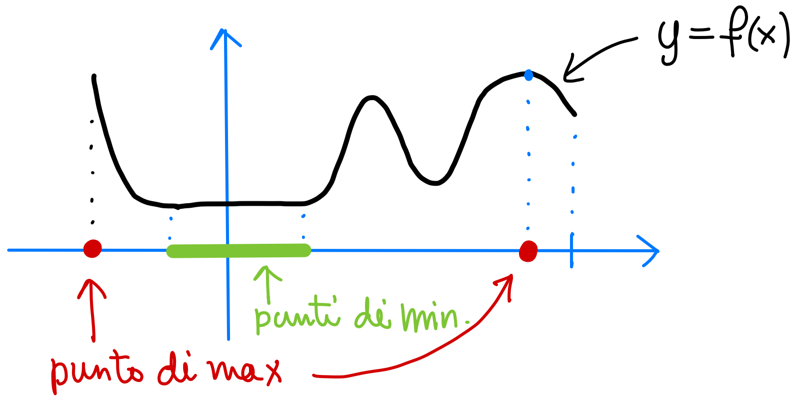
<u>Definizione</u>

Data $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, si dice che $x_0$ è <u>un</u> punto di massimo di $f$ (risp. di minimo) se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X \quad (\text{risp.}, \ f(x_0) \leq f(x))$$

non ">"

In tal caso $f(x_0)$ si chiama valore massimo (risp. min.) di $f$




<u>Definizione</u>

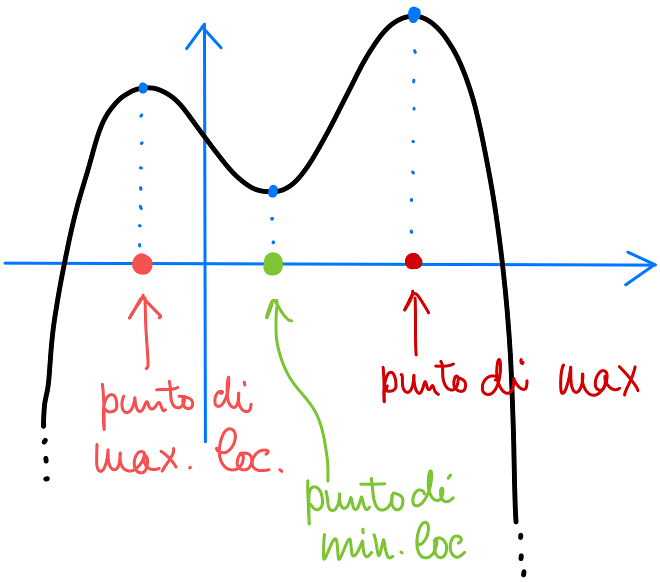
Data $f: X \to \mathbb{R}$, $X' \subset X$, $x_0 \in X'$, si dice che $x_0$ è punto di massimo (risp. di minimo) di $f$ relativo a $X'$ se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X' \quad (\text{risp. } f(x_0) \leq f(x))$$

$f(x_0)$ si chiama valore massimo (risp. min.) di $f$ relativo a $X'$.

## Definizione

Data $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, si dice che $x_0$ è un punto di massimo locale (risp., minimo locale) di $f$ se posso trovare $I$ intervallo aperto t.c. $x_0 \in I$ e $x_0$ è punto di massimo (risp., minimo) di $f$ relativamente a $X' := X \cap I$




si dice anche massimo relativo al posto mass. loc. e minimo relativo invece di min. loc.

Riprendo (e rifaccio) l'ultimo argomento di ieri.

Definizione

Dato $Y \subset \mathbb{R}$ il massimo di $Y$, che indico con $\max(Y)$, è l'elemento $\bar{y}$ di $Y$ che è più grande di tutti gli altri, cioè $\bar{y} \geq y \quad \forall y \in Y$.

Il minimo di $Y$, $\min(Y)$, è l'elemento più piccolo di $Y$.

Esempi: se $Y = [1, 3]$, $\max(Y) = 3$ e $\min(Y) = 1$.

se $Y = (0, 1]$, $\max(Y) = 1$, $\min(Y)$ non esiste.

se $Y = \mathbb{R}$, max e min non esistono.

Definizione

Data $f : X \to \mathbb{R}$, il valore massimo (risp., minimo) di $f$ è il massimo (risp. minimo) dell'insieme dei valori, cioè dell'immagine:

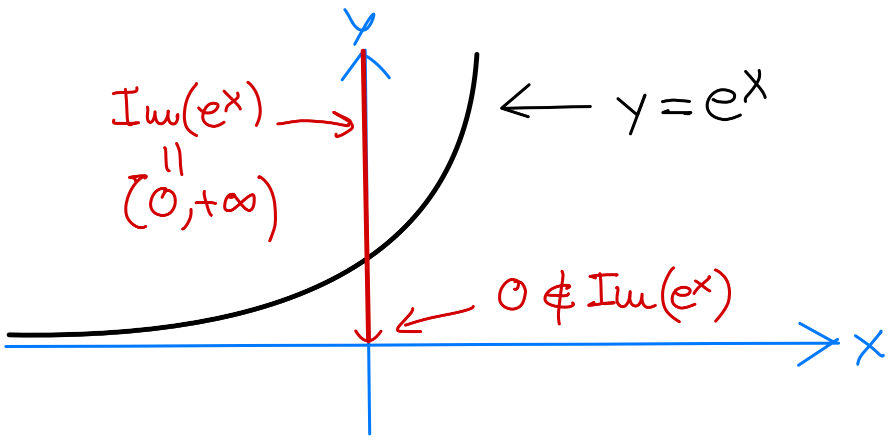
$\max(f)$    $\min(f)$

$$\mathrm{Im}(f) := \{ f(x) : x \in X \} = f(X)$$

cioè il val. max. (risp., min.) è $\max(f(X))$ (risp. $\min(f(X))$).

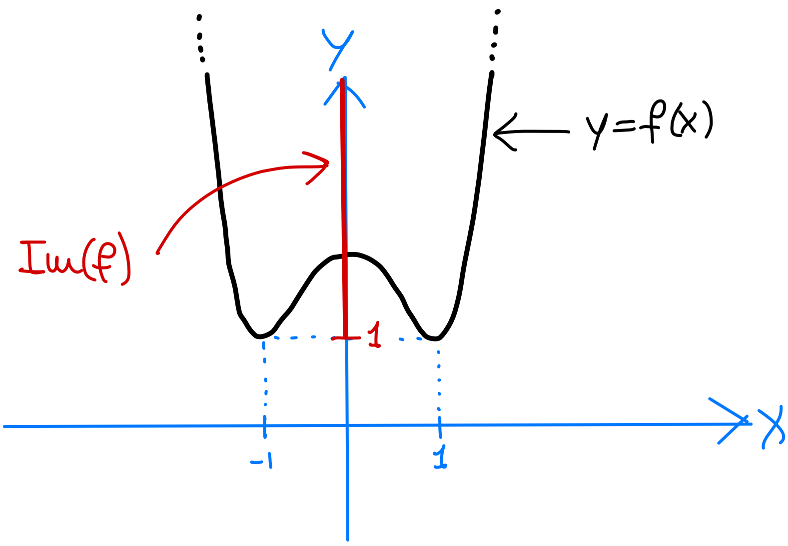
Un punto di max. (risp., minimo) di $f$ è un qualunque punto $\bar{x}$ dove il valore di $f$ coincide con il valore massimo (risp., minimo) cioè $f(\bar{x}) = \max(f(X))$ (risp., $f(\bar{x}) = \min f(X)$) vale a dire $f(\bar{x}) \geq f(x)\ \forall x \in X$ (risp., $f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in X$).

Attenzione il valore massimo/minimo e quindi i punti di max/min, possono non esistere.




$f(x) = e^x$
$X = \mathbb{R}$
$Im(f) = (0,+\infty)$

$X = \mathbb{R}$, $Im = (0,+\infty)$ non ha né min. né max.
e quindi $e^x$ non ha punti di max. né di min.



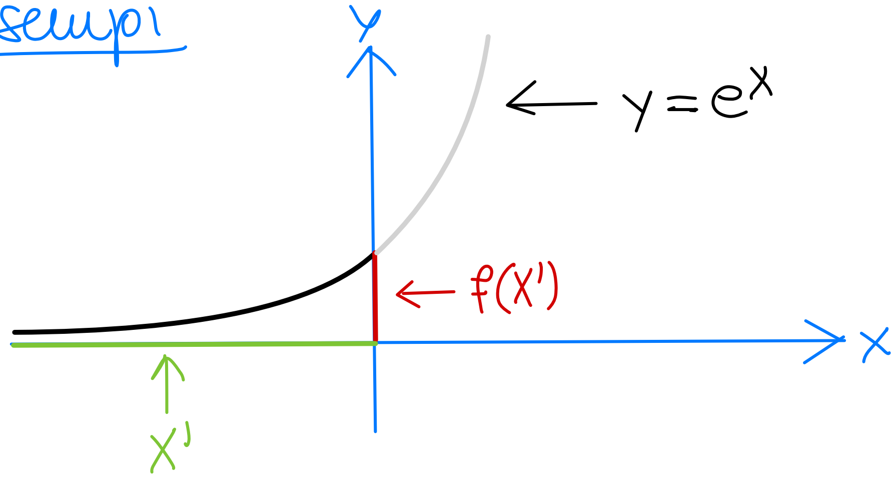

$X = \mathbb{R}$
$Im(f) = [1,+\infty)$
$\min(f) = 1$
punti di min: $1$ e $-1$
$\max(f)$ non esiste.

Se prendo $X' \subset X$, il valore massimo (risp., minimo) di $f(x)$ per $x \in X'$ è il massimo (risp., minimo) dell'insieme

$$\{f(x) : x \in X'\} = f(X').$$

I punti di massimo (risp., minimo) di $f$ in $X'$ sono i punti $\bar{x}$ di $X'$ dove $f$ assume il valore massimo (risp. minimo)

Esempi



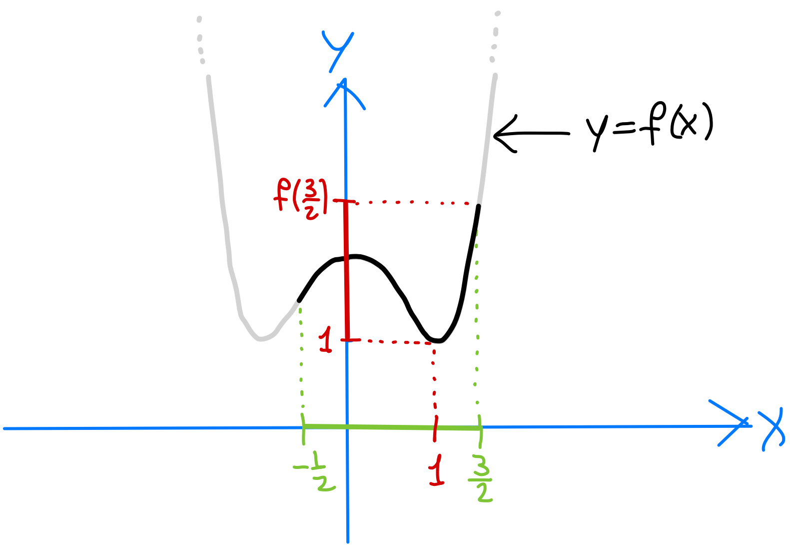

$f(x) = e^x$

$X = \mathbb{R}$

$X' = (-\infty, 0]$

$f(X') = (0, 1]$

val. max. di $f(x)$ per $x \in X'$ è $1$, il val. min. non esiste. Il punto di max. di $f(x)$ per $x \in X'$ è $0$.




$X = \mathbb{R}$

$X' = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

punto di max

$f(X') = [1, f(\frac{3}{2})]$

val. max. di $f$ su $X'$ $= f(\frac{3}{2})$

val. min. di $f$ su $X'$ $= 1 = f(1)$

punto di mi

## Definizione

Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, dico che $x_0 \in X$ è un punto di massimo (risp. minimo) locale se posso trovare $I$ intervallo tale che:

- $x_0$ è interno a $I$ (non è un estremo di $I$)
- $x_0$ è un punto di massimo (risp. minimo) di $f(x)$ per $x \in X' := X \cap I$

## Definizione

Dato $Y \subset \mathbb{R}$ che si scrive come unione di intervalli, $Y = I_1 \cup \dots \cup I_N$, chiamo $a_i, b_i$ gli estremi di ogni $I_i$.

Allora l'estremo superiore di $Y$, $\sup(Y)$, è il più grande tra $b_1, \dots, b_N$.

E l'estremo inferiore di $Y$, $\inf(Y)$, è il più piccolo tra $a_1, \dots, a_N$.

Se $\sup(Y)$ appartiene a $Y$ allora è uguale a $\max(Y)$, se invece $\sup(Y) \notin Y$, allora $\max(Y)$ non esiste.

Se $\inf(Y) \in Y$, allora $\min(Y) = \inf(Y)$, se $\inf(Y) \notin Y$, allora $\min(Y)$ non esiste.

Esempi

$Y = (0,1]$ $\max(Y) = \sup(Y) = 1$

$\inf(Y) = 0$, $\min(Y)$ non esiste

$Y = (0,1] \cup [2,+\infty)$ $\inf(Y) = 0$, $\sup(Y) = +\infty$

min e max non esistono

Osserv.

Il sup può essere $+\infty$, l' inf può essere $-\infty$.

Si possono definire $\sup(Y)$ e $\inf(Y)$ per insiemi $Y$ qualunque (lo farò dopo)

Definizione

Data $f : X \to \mathbb{R}$, l' estremo superiore di $f$, $\sup(f)$, è l' estremo superiore dell' insieme dei valori, cioè $\mathrm{Im}(f) = f(X)$, e $\inf(f)$ è l' estremo inferiore dei valori.

Se $\sup(f)$ è un valore di $f$ allora è il valore massimo, se $\sup(f)$ non è un valore, allora il valore massimo non esiste. E lo stesso vale per $\inf(f)$.

Problema: come trovare i punti di max e min (se esistono).

Comincio con un risultato teorico:

Teorema (di Weierstrass)
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora il valore max. e min. di $f$ esistono e quindi esistono i punti di max. e min.

Non lo dimostro.

Osserv.

- è importante che il dominio di $f$ sia un intervallo chiuso e limitato

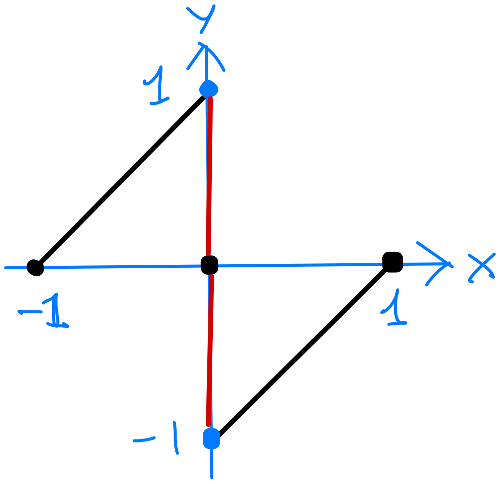
  Infatti $f(x) = e^x$, $X = \mathbb{R}$, allora non esistono né max né min.;

  Se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $X := (0,2]$ allora esiste il valore minimo $= \frac{1}{2}$ (raggiunto per $x=2 \leftarrow$ punto di min.) ma non esiste il valore massimo (il sup dei valori è $+\infty$).

- è importante che $f$ sia continua.

Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x-1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$




$Im(f) = (-1, 1)$
non esiste né max né min.

Il teor. di Weierstrass non si applica perché $f$ è discontinua in 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +1, \quad f(0) = 0$$

- Il teorema di W. vale anche se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e $X$ è unione di un numero finito di intervalli chiusi, $X = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$.

AM1 gest 20/21 lezione 19

23/10/2020

Riprendo il problema della ricerca dei massimi e minimi (sia valori che punti di max/min).

Proposizione

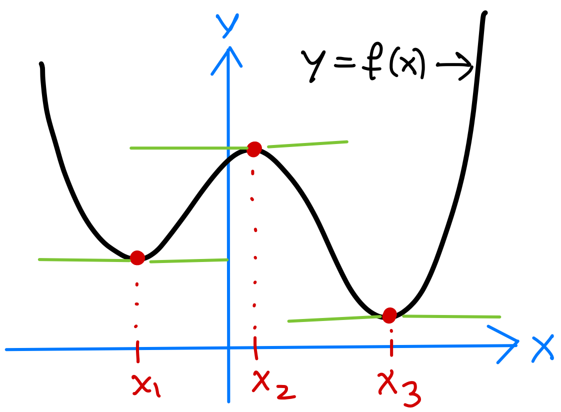
Dati $X$ intervallo (aperto/chiuso/limitato/illimitato...)

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, e $x_0 \in X$ t.c.

- $x_0$ è un punto di max. o min. locale di $f$;
- $x_0$ è interno $X$ (non è uno degli estremi);
- $f'(x_0)$ esiste.

Allora $f'(x_0) = 0$.

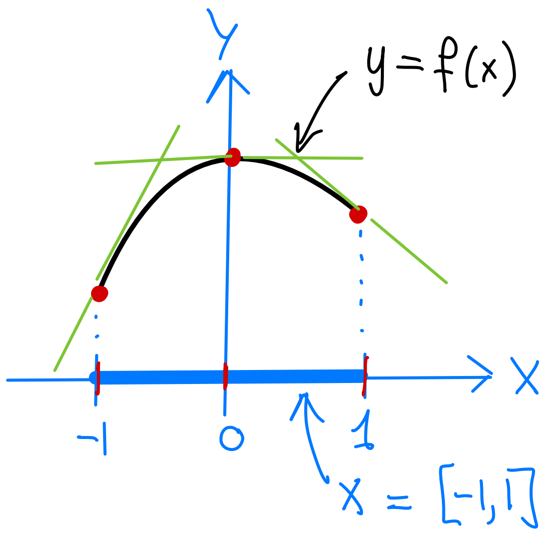
L'enunciato vale anche se $X$ si scrive come unione di intervalli.




$x_1$ punto di min. loc.

$x_2$ punto di max. loc.

$x_3$ punto di min. (assoluto)




0 punto di max.

-1 punto di min.

1 punto di min. loc.

Dim. (che non dipende da disegni)

Suppongo $x_0$ punto di minimo assoluto.

Il caso in cui $x_0$ è di min. loc. si fa allo stesso modo, e lo stesso per $x_0$ punto di max. loc.

Preso $h$ qualunque, ho $f(x_0+h) \geq f(x_0)$ per $h$ t.c. $x_0+h \in X$

Se $h>0$ allora $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ e quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Invece se $h<0$ allora $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ e quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Quindi $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0 \Longrightarrow f'(x_0)=0$.

Ho usato l'ipotesi che $x_0$ sia interno a $X$ per trovare $h$ arbitrariamente piccoli sia positivi che negativi tali che $x_0+h \in X$.

$\square$

Corollario

Dati $X$ intervallo (o unione di intervalli), $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0$ punto di max. oppure min. dif allora vale almeno una di queste opzioni:

(a) $x_0$ è un estremo (di uno degli intervalli...);

(b) $f'(x_0)$ non esiste;

(c) $f'(x_0)=0$.

## Procedura per trovare i punti di max. e min.

### Prima versione

Dati $X$ intervallo chiuso e limitato (oppure unione di un numero finito di intervalli chiusi e lim. $I_1, \dots, I_N$) e $f: X \to \mathbb{R}$ continua, trovo i punti di max. e min. di $f$ come segue:

Passo 1 : trovo tutti i punti $x \in X$ che soddisfano una delle opzioni del Corollario precedente, cioè:

(a) gli estremi (degli intervalli $I_1, \dots, I_N$);

(b) i punti dove $f'$ non esiste;

(c) i punti dove $f' = 0$.

Passo 2 : calcolate i valori di $f$ nei punti trovati al passo 1 e vedete qual è il più grande (quello è il valore max, e il punto è quello di max.) e qual è il più piccolo (quello è il valore minimo).

Idea: per le ipotesi su $X$ ed $f$, posso applicare il teorema di Weierstrass e quindi esistono sia i punti di max. che quelli di min.
Ma allora sono tra quelli raccolti al passo 1 (per via del Corollario) e quindi li individuo confrontando i valori di $f$.

# Esempi

Trovare max. e min. (punti e valori) di $f(x)$ con $x \in X$ nei casi seguenti

$f(x) = x^3 - 3x$

1. $f(x) = x^3 - 3x, \quad X = [-2, 3]$.

Passo 1: (a) estremi di $X$: $-2$ e $3$

(b) punti dove la derivata non esiste: nessuno

(c) punti dove $f' = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$, cioè $x = \pm 1$

I "candidati" sono: $-2, -1, 1, 3$.

Passo 2: $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$.

valore minimo: $-2$; punti di minimo: $-2, 1$;
valore max: $18$; punti di max: $3$.

2. $f(x) = x^3 - 3x, \quad X = [0, 3]$

Passo 1: i candidati sono: $0, 1, 3$.
Passo 2: $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$

valore minimo: $-2$; punti di minimo: $1$;
valore max: $18$; punti di max: $3$.

3. $f(x) = x^3 - 3x$, $X = \mathbb{R}$

passo1 : i candidati sono : $\pm 1$

passo2 : $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$

Conclusione (sbagliata!) :

valore minimo : $-2$ ; punti di minimo : $1$;

valore max : $2$ ; punti di max : $-1$

Errore : non si può applicare la procedura perché $X$ non è limitato.

In questo caso i punti di max. e min. non esistono (infatti $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, quindi sup valori $+\infty$, e inf valori $= -\infty$).

Per inciso vedremo in seguito che $\pm 1$ sono punti di max/min locale.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = [-1, 1]$.

Passo1 : estremi : $-1, 1$ ; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$

i candidati sono : $-1, 1$

Passo2 : $f(-1) = -1$ ; $f(1) = 1$

Conclusione (sbagliata!) :

valore minimo : $-1$ ; punti di minimo : $-1$;

valore max : $1$ ; punti di max : $1$

Errore: $f$ non è definita su tutto $X = [-1,1]$, perché non è definita in $0$, quindi $X$ avrebbe dovuto essere $[-1,1] \setminus \{0\} = [-1,0) \cup (0,1]$.

non sono intervalli chiusi.

Per inciso $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, sup valori $= +\infty$ (non esiste max) e inf valori $= -\infty$ (non esiste min.)
Disegnando il grafico di $\frac{1}{x}$ vedete che $-1$ è punto di max. loc., $1$ è punto di min. loc (in $X = [-1,0) \cup (0,1]$).

## Procedura per trovare i punti di max. e min.

Seconda versione

Dati $X = I_1 \cup \ldots \cup I_N$ con $I_i$ intervalli (chiusi/aperti/limitati e non) con estremi $a_i, b_i$, e $f : X \to \mathbb{R}$ continua, procedo come segue:

Passo 1 : come prima, raccogliete i seguenti punti:

(a) gli estremi $a_i$, $b_i$ (anche se non sono in X)

(b) i punti dove $f'$ non esiste;

(c) i punti dove $f' = 0$.

Passo 2 : calcolate $f(x)$ per ogni x al punto 1 se $x \in X$, per gli estremi $a_i \notin X$ calcolate il $\lim_{x \to a_i^+} f(x) = f(a_i^+)$, e per i $b_i \notin X$ calcolate $\lim_{x \to b_i^-} f(x) = f(b_i^-)$.

Prendo il valore più grande: se è raggiunto in un punto $x \in X$ allora è il valore massimo (e x è un punto di max); se invece non è raggiunto in un punto di X, allora è il sup dei valori (e non esiste il max).

Prendo poi il valore più piccolo: se è raggiunto in $x \in X$ allora è il val. min. (e x punto di min) e se no allora è inf. valori (min. non esiste).

3. $f(x) = x^3 - 3x$, $X = \mathbb{R}$

estremi di $\mathbb{R}$

passo1 : i candidati sono : $\pm 1$, $\pm\infty$

passo2 : $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = -\infty$

inf. valori
il min. non esiste!

sup. val.
max. non esiste!

non esistono punti di max. e min.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = [-1,1] \setminus \{0\} = [-1,0) \cup (0,1]$

Passo1 : i candidati sono : $-1, 1, 0$.

Passo2 : $f(-1) = -1$ ; $f(1) = 1$, "$f(0^+)$" $= +\infty$
"$f(0^-)$" $= -\infty$

inf. val.
(min. non esiste).

sup. val.
(max non esiste)

AM1 gest 20/21

lezione 21

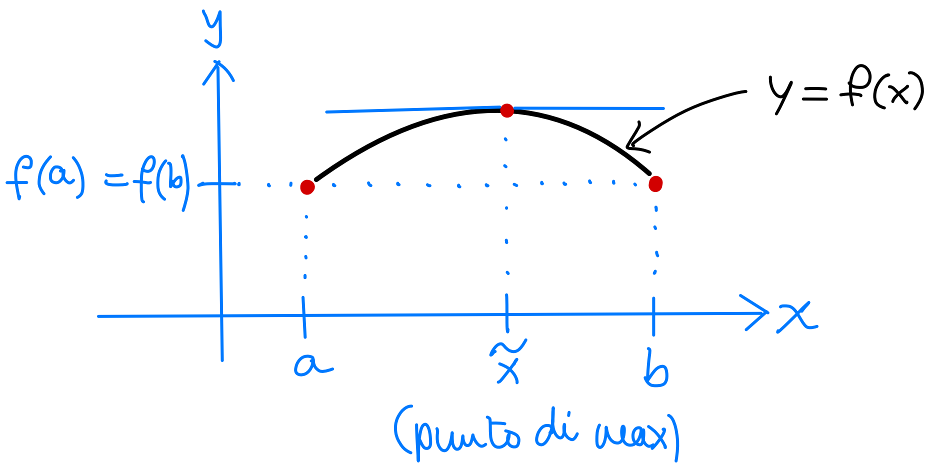
27/10/2020

Teoria necessaria a:

- dimostrazione del teorema di de L'Hôpital;
- teorema dello sviluppo di Taylor;
- strumenti per lo studio dei grafici di funzioni.

## Teorema di Rolle

Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile t.c. $f(a)=f(b)$ allora esiste $\tilde{x}$ con $a<\tilde{x}<b$ t.c. $f'(\tilde{x})=0$.




## Dim.

Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_0$ e $x_1$ punti di max. e min. risp.

Se $x_0$ (oppure $x_1$) è interno all'intervallo $[a,b]$, allora $f'(x_0)=0$ (oppure $f'(x_1)=0$) e prendo $\tilde{x}=x_0$ (oppure $\tilde{x}=x_1$).

Se $x_0$ e $x_1$ sono estremi di $[a,b]$, allora $f(x_0) = f(x_1) = f(a) = f(b) \Rightarrow \max f = \min f \Rightarrow f$ costante $\Rightarrow f' = 0$ ovunque $\Rightarrow$ va bene qualunque $\tilde{x}$. $\square$

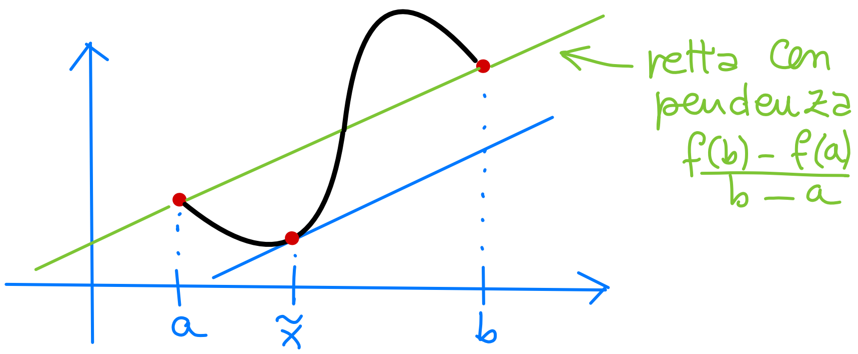
## Teorema di Cauchy

Date $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili con $g'(x) \neq 0 \ \forall x$. Allora $g(a) \neq g(b)$ e esiste $\tilde{x}$ con $a < \tilde{x} < b$ t.c.

$$\frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

Caso particolare (Teorema di Lagrange): data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile esiste $\tilde{x}$, $a < \tilde{x} < b$, t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\tilde{x}).$$




## Dim. del teorema di Cauchy

Se per assurdo $g(a) = g(b)$, allora per il teor. di Rolle la derivata $g'$ si annulla in qualche punto tra $a$ e $b$, contrariamente all'ipotesi $g' \neq 0$.

Pongo

$$m := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad ; \quad F(x) := f(x) - m\, g(x) .$$

Allora $F(b) = F(a)$, infatti

$$F(b)-F(a) = (f(b) - m\, g(b)) - (f(a) - m\, g(a))$$
$$= (f(b) - f(a)) - m\,(g(b)-g(a))$$
$$= (f(b) - f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}} \cancel{(g(b)-g(a))}$$
$$= 0 .$$

Allora, per il teorema di Rolle, esiste $\tilde{x}$ t.c. $F'(\tilde{x}) = 0$.
Ma $F'(x) = f'(x) - m\, g'(x)$, e quindi

$$F'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - m\, g'(\tilde{x}) = 0$$

cioè $f'(\tilde{x}) = m\, g'(\tilde{x})$, cioè $\dfrac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = m$, che è la tesi.

$\square$

## Teor. di de L'Hôpital

Date $f, g : [a, x_0) \to \mathbb{R}$ derivabili e t.c.

- $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ o $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$;
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$;
- esiste $L := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

## Dim.

Caso 1: $f, g$ sono definite anche in $x_0$, e derivabili e $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{teor. di Cauchy}}{=} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}$$

dove $x<\tilde{x}<x_0$. Attenzione: $\tilde{x}$ dipende da $x$ e tende a $x_0$ quando $x \to x_0$ e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\tilde{x}\to x_0} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = L.$$

Caso 2: $f, g \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. la dimostrazione è delicata e non la faccio.

Caso 3: $f, g \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$, $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \tilde{L} \neq 0, \pm\infty$.

In questo caso devo dimostrare che $\tilde{L}=L$.

$$\tilde{L} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\{1/g(x)\} \to 0}{\{1/f(x)\} \to 0}$$

del l'Hôp. caso 2

$$\mapsto = \lim_{x\to x_0} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{g'(x)}{f'(x)}}_{\to 1/L} \cdot \Big(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to \tilde{L}}\Big)^2 = \frac{\tilde{L}^2}{L}$$

Cioè $\tilde{L} = \frac{\tilde{L}^2}{L}$ cioè $L = \tilde{L}$.

Caso 4: $f, g \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ : non lo faccio. $\square$

Preparazione per il teorema di Taylor.

Notazione compatta per le somme.

Dati degli addendi $x_0, x_1, \dots, x_N$, scrivo la somma come

$$x_0 + x_1 + \dots + x_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$$

Esempi di uso:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \sum_{n=0}^{10} 2^n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$$

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Fattoriale

Dato $n = 1, 2, 3, \dots$ pongo $\underbrace{n!}_{\text{“n fattoriale”}} := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Si pone anche $0! := 1$.

Esempi: $2! = 2$ ; $3! = 6$ ; $4! = 24$ ; $5! = 120$ ....

Dati $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ che si approssima con punti di $X$,
voglio formalizzare il concetto che $f$ è dello stesso ordine di infinito/infinitesimo di $g$ o di ordine inferiore per $x \to x_0$

## Definizione

Dati $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ che si approssima con punti di $X$, si dice che " $f(x)$ è o grande di $g(x)$ per $x \to x_0$ " e si scrive

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0,$$

se esiste $M$ e un intervallo $I$ con $x_0$ interno a $I$ t.c.

$$|f(x)| \leq M |g(x)| \quad \forall x \in X \cap I, \; x \neq x_0$$

cioè $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato "vicino a $x_0$".

(se $x_0 = +\infty$, $I$ deve essere della forma $[a, +\infty)$
se $x_0 = -\infty$, $I$ deve essere della forma $(-\infty, b]$)

**Importante** Se esiste $L := \lim_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$, allora $f(x) = O(g(x))$ equivale a $L \neq +\infty$.
In pratica si usa questo come definizione.

**Osserv.** Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

**Esempi**

- $x^a = O(x^b)$ per $x \to +\infty$ se $a \leqslant b$.
- $a^x = O(b^x)$ per $x \to +\infty$ se $a \leqslant b$.
- $x^a = O(x^b)$ per $x \to 0$ se $a \geqslant b$.

Fate voi le verifiche.

L'ultima lezione ho dato la definizione di "$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$" vale a dire che $|f(x)| \leq M|g(x)|$ "vicino a $x_0$"

In tal caso diciamo che $f$ ha ordine di infinito / infinitesimo minore o uguale a $g$.

Se $L = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ esiste ed è finito allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

Anche se non è corretto, useremo spesso questa come definizione

Attenzione: se $f(x) = o(g(x))$ cioè $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ allora $f(x) = O(g(x))$

Esempi per $x \to +\infty$

- $x^a = o(x^b)$ se $a < b$ (già visto)
- $x^a = O(x^b)$ se $a \leq b$

Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to +\infty} x^{a-b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a < b \end{cases}$$

# Osservazioni

- se $f(x) = O(x^a)$ e $a \leq b$ allora $f(x) = O(x^b)$

caso particolare della regola (intuitiva):
se $f(x) = O(g(x))$ e $g(x) = O(h(x))$ allora
$f(x) = O(h(x))$.

Infatti
$$\frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \underbrace{\frac{|f(x)|}{|g(x)|}}_{L \text{ finito}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{|h(x)|}}_{L' \text{ finito}} \xrightarrow[x \to x_0]{} L \cdot L' \text{ finito}$$

- se $f(x) = O(x^a)$ e $a < b$ allora $f(x) = o(x^b)$

caso particolare della regola (intuitiva):
se $f(x) = O(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$ allora
$f(x)$ è $o(h(x))$.

Infatti
$$\frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \underbrace{\frac{|f(x)|}{|g(x)|}}_{L \text{ finito}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{|h(x)|}}_{0} \xrightarrow[x \to x_0]{} L \cdot 0 = 0.$$

Ex. Trovare le implicazioni tra queste affermaz.

per $x \to +\infty$: a) $f(x) = O(x^4)$ ; b) $f(x) = o(x^4)$ ; c) $f(x) = O(x^3)$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{x^4} < +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{x^3} < +\infty$$

a) $\not\Rightarrow$ b) ; b $\Rightarrow$ a) ; b) $\not\Rightarrow$ c) ; c) $\Rightarrow$ b)

se prendo
$f(x) = x^{3,5}$
ottengo $f(x) = o(x^4)$
ma $f(x) \neq O(x^3)$

Quindi c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a).
$\quad\ \ \not\Leftarrow \quad\ \ \not\Leftarrow$

## Esempi per $x \to 0$

- $x^a = o(x^b)$ se $a > b$;
- $x^a = O(x^b)$ se $a \geq b$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to 0} x^{a-b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a=b \\ 0 & \text{se } a>b \end{cases}$$

## Osservazioni

- se $f(x) = O(x^a)$ e $b \leq a$ allora $f(x) = O(x^b)$;
- se $f(x) = O(x^a)$ e $b < a$ allora $f(x) = o(x^b)$.

cioè $x^a = o(x^b)$

**Esercizio** Trovare le implicazioni tra queste affermazioni (per $x \to 0$):

a) $f(x) = O(x^3)$; b) $f(x) = o(x^3)$; c) $f(x) = O(x^4)$

**Risposta**: c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a).
$\quad\ \ \not\Leftarrow \quad\ \ \not\Leftarrow$

## Derivate di ordine superiore

Derivata seconda di $f$ := derivata della $\underbrace{\text{derivata di } f}_{\text{derivata prima}}$

$$f'' = f^{(2)} := (f')'$$

Derivata terza di $f$ := derivata della derivata seconda di $f$

$$f''' = f^{(3)} = (f'')'$$

e così via ....

La derivata $d$-esima si indica con $f^{(d)}$

Dico che $f$ è derivabile $d$ volte (con $d$ intero) se $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(d)}$ esistono tutte.

## Polinomio e resto di Taylor (in 0)

Sia $f$ una funzione definita (almeno) su un intervallo $I$ che contiene 0 all'interno, derivabile $d$-volte (con $d = 0, 1, 2, \dots$).

Il polinomio di Taylor di grado $d$ di $f$ (in 0) è

$$P_d(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(d)}(0)}{d!}x^d$$

Ponendo $f^{(0)} := f$ e $0! := 1$ ho la forma compatta

$$P_d(x) = \sum_{n=0}^{d} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Il resto di Taylor di grado $d$ di $f$ (in 0) è

$$R_d(x) := f(x) - P_d(x)$$

In altre parole

$$f(x) = \underbrace{P_d(x) + R_d(x)}_{\text{sviluppo di Taylor di grado } d \text{ di } f \text{ in } 0}$$

Il punto fondamentale è che il resto $R_d$ è "piccolo" per $x$ vicino a $x_0$.
Il significato di "piccolo" è spiegato nel teorema seguente:

**Teorema (dello sviluppo di Taylor)**

Prendo $f$ e $d$ come sopra. Allora per $x \to 0$:

(a) $\boxed{R_d(x) = o(x^d)}$; ← formula del resto di Peano.

(b) se $f$ è derivabile $d+1$ volte, $R_d(x) = O(x^{d+1})$ e anzi

$$R_d(x) \sim \frac{f^{(d+1)}(0)}{(d+1)!} \cdot x^{d+1};$$

(c) se $f$ è derivabile $d+1$ volte, per ogni $x$ esiste $\tilde{x}$ compreso tra 0 e $x$ tale che

$$\boxed{R_d(x) = \frac{f^{(d+1)}(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1}.}$$ ← formula del resto di Lagrange

## Osservazioni

- Più grande è d, più piccolo è (l'ordine di infinitesimo del) resto.

- Valgono queste implicazioni tra le formule in (a), (b), (c):

form. in (c) $\Rightarrow$ formula in (b) $\Rightarrow$ form. in (a)
(formula di Lagrange) (form. di Peano)

Provate a dimostrarlo voi!

## Dimostrazione del Teorema

Mi limito al caso $d=2$ (da cui si capisce il caso d qualunque).

a) Devo far vedere che $R_2(x) = o(x^2)$ cioè che $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$. Uso che

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$R_2'(x) = f'(x) - f'(0) - f''(0)\cdot x \Longrightarrow R_2'(0) = 0$$

$$R_2''(x) = f''(x) - f''(0) \Longrightarrow R_2''(0) = 0$$

$$R_2'''(x) = f'''(x) \Longrightarrow R_2'''(0) = f'''(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} \overset{\text{perché } R_2(0)=0 \Leftarrow (*)}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \underset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{R_2'(x)}{2x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \leftarrow \text{perché } R_2'(0)=0$$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{R_2''(x)}{2} = R_2''(0) = 0$$

b) Devo dimostrare che $\frac{R_2(x)}{x^3} \to \frac{f'''(0)}{6}$

Procedo come prima

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^3} \underset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{R_2'(x)}{3x^2} \underset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{R_2''(x)}{6x}$$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{R_2'''(x)}{6} = \frac{R_2'''(0)}{6} = \frac{f'''(0)}{6}.$$

c) Dato $x$ devo trovare $\tilde{x}$ t.c. $\frac{R_2(x)}{x^3} = \frac{f'''(\tilde{x})}{6}$

$$\frac{R_2(x)}{x^3} = \frac{R_2(x) - R_2(0)}{x^3 - 0^3} \underset{\substack{\text{teor. di Cauchy:} \\ \text{esiste } x_1 \text{ con} \\ 0<x_1<x}}{=} \frac{R_2'(x_1)}{3x_1^2}$$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \begin{array}{l} b=x,\ a=0 \\ f=R_2,\ g=x^3 \end{array}}$$

$$= \frac{R_2'(x_1) - R_2'(0)}{3x_1^2 - 3\cdot 0^2} \overset{}{=} \frac{R_2''(x_2)}{6x_2}$$

$$= \frac{R_2''(x_2) - R_2''(0)}{6x_2 - 6.0} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{R_2'''(x_3)}{6} = \frac{f'''(x_3)}{6}$$

prendo $\tilde{x} = x_3$.

$\square$

AM1 gest 20/21 — lezione 24

30/10/2020

Ricordo che:

**Teorema 1** (dello sviluppo di T.)

Data $f$ e dato $d = 0, 1, \dots,$ considero lo sviluppo di Taylor di $f$ di ordine $d$ (in 0):

$$f(x) = P_d(x) + R_d(x)$$

pol. di T di $f$ di ordine $d$ — resto di T ...

Allora per $x \to 0$:

a) $R_d(x) = o(x^d)$

b) $R_d(x) = O(x^{d+1})$ e precisam. $\dfrac{R_d(x)}{x^{d+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{f^{(d+1)}(0)}{(d+1)!}$

c) $\forall x\ \exists \tilde{x} \in (0,x)$ t.c. $R_d(x) = \dfrac{f^{(d+1)}(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1}$.

(per b) e c) serve che $f$ sia derivabile $d+1$ volte.)

**Proposizione 2** (Unicità dello sviluppo di T.)

Data $f$ come nel teorema 1, se posso scomporla come

$$f(x) = P(x) + o(x^d)$$

con $P$ polinomio di grado $\leq d$, allora $P$ è per forza il polinomio di Taylor $P_d$.

Dim

Scrivo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_d x^d \Rightarrow P(0) = a_0$$

allora:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + d\, a_d x^{d-1} \Rightarrow P'(0) = a_1$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + d(d-1)\, a_d x^{d-2} \Rightarrow P''(0) = 2a_2$$

Devo dimostrare che

$$a_0 \overset{\checkmark}{=} f(0), \quad a_1 \overset{\checkmark}{=} f'(0), \quad a_2 \overset{\checkmark}{=} \frac{f''(0)}{2}, \dots, \quad a_d = \frac{f^{(d)}(0)}{d!}$$

L'ipotesi è che $f(x) - P(x) = o(x^d)$ cioè

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f(x) - P(x)}^{\to f(0) - P(0)}}{\underbrace{x^d}_{\to 0}}$$

necess. una forma indet. "$\frac{0}{0}$" cioè $f(0) = P(0) = a_0$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f'(x) - P'(x)}^{\to f'(0) - P'(0)}}{\underbrace{d\, x^{d-1}}_{\to 0}}$$

necess. forma indet. "$\frac{0}{0}$" cioè $f'(0) = P'(0) = a_1$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f''(x) - P''(x)}^{\to f''(0) - P''(0)}}{\underbrace{d(d-1)\, x^{d-2}}_{\to 0}}$$

necessar. $f''(0) = P''(0) = 2a_2$

etc. etc. $\square$

## Sviluppo di Taylor in $x_0$

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$, $f$ funzione definita almeno in un intervallo $I$ che contiene $x_0$ all'interno, $f$ derivabile $d$ volte, allora il polinomio di Taylor di grado $d$ di $f$ in $x_0$ è

$$P_{x_0,d}(h) := f(x_0) + f'(x_0)\cdot x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(d)}(x_0)}{d!}x^d$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k$$

Il resto di Taylor è $R_{x_0,d}(h) = f(x_0+h) - P(h)$, e lo sviluppo di T. è:

$$f(x_0+h) = P_{x_0,d}(h) + R_{x_0,d}(h)$$

e ponendo $x = x_0+h$, cioè $h = x-x_0$,

$$f(x) = P_{x_0,d}(x-x_0) + R_{x_0,d}(x-x_0)$$

Il teorema dello sviluppo di Taylor è esattamente lo stesso: per $h \to 0$ vale che

a) $R_{x_0,d}(h) = o(h^d)$,

b) $R_{x_0,d}(h) = O(h^{d+1})$,

c) $R_{x_0,d}(h) = \dfrac{f^{(d+1)}(\tilde{h})}{(d+1)!} h^{d+1}$ con $\tilde{h} \in (0,h)$

# Esempio di uso dello sviluppo di T

Calcolare il valore di "e" con errore inferiore a $10^{-3}$.

Ricordo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^d}{d!} + R_d(x)$

Quindi $e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{d!} + R_d(1)$

$$= \sum_{n=0}^{d} \frac{1}{n!} + R_d(1)$$

Quindi se riesco a trovare d tale che $|R_d(1)| \leq 10^{-3}$

allora $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{d!}$ approssima e con errore $\leq 10^{-3}$.

Come trovo d? Uso la formula di Lagrange per il resto: $R_d(x) = \frac{f^{(d+1)}(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1} = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!} x^{d+1}$

con $\tilde{x} \in (0, x)$.

Quindi $R_d(1) = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!}$ con $0 < \tilde{x} < 1$,

uso che $e \leq 3$

$$|R_d(1)| = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!} \leq \frac{e}{(d+1)!} \leq \frac{3}{(d+1)!}$$

Cerco d t.c. $\frac{3}{(d+1)!} \leq 10^{-3}$ $\left(\Rightarrow |R_d(1)| \leq 10^{-3}\right)$

Procedo a tentativi:

$d = 4$: $\frac{3}{5!} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40} > \frac{1}{1000}$ NO

$d = 5$: $\frac{3}{6!} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} > \frac{1}{1000}$ NO

$d = 6$: $\frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} < \frac{5}{5000} = \frac{1}{1000}$ OK!

Conclusione:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,71805\ldots$$

approssima e con errore inferiore a $10^{-3}$

(In effetti $e = 2,71828\ldots$)

## Esercizi sul calcolo degli sviluppi di T.

Punto chiave: usare dove possibile gli sviluppi noti: $e^x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$.

1. Trovare lo sviluppo (o il polinomio) di T. di ordine 6 di $\operatorname{sen}(x^2)$ in 0.

Uso lo sviluppo noto: $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + O(y^7)$

e sostituisco $y = x^2$:

$$(*) \qquad \operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14}).$$

in particolare

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{13})$$

Per la proposizione 2, $x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}$ è il polinomio di Taylor di $\operatorname{sen}(x^2)$ di ordine 13 (perché il resto $o(x^{13})$) e coincide con il pol. di T. di ordine d per $d = 10, 11, 12$.

Usando (*) e il fatto che $\frac{x^{10}}{5!} = O(x^{10})$ ottengo

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + O(x^{10}) + O(x^{14})$$

usando la regola "$O(x^a) + O(x^b) = O(x^a)$, se $a \le b$"

ottengo — dimostrazione domani

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + O(x^{10})$$

Questo è lo sviluppo di T. di ordine 9

ed anche lo sviluppo di ordine $d$ con $d = 6, 7, 8$.

A posteriori, per risolvere l'esercizio bastava partire dallo sviluppo $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + O(y^5)$

infatti

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + O(x^{10}).$$

Ma attenzione: non basta partire da $\operatorname{sen} y = y + O(y^3)$ perché si ottiene solo

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

questo è solo lo sviluppo di ordine 5.

AM1 gest 20/21

Lezione 25

31/10/2020

## Calcolo di sviluppi di Taylor (in 0)

1. Trovare lo sviluppo di T. di $\operatorname{sen}(x^2)$ all'ordine 6.

Uso lo sviluppo $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + O(y^5)$ e sostituisco $y = x^2$:

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})$$
$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

quindi $x^2 - \frac{x^6}{6}$ è il pol. di T. di ordine 6.

Osservazioni

- In realtà ho anche $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^9)$ quindi $x^2 - \frac{x^6}{6}$ è anche il pol. di T. di ordine 9.

- Cosa succede se uso lo sviluppo $\operatorname{sen} y = y + O(y^3)$?

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

ma $O(x^6)$ non è $o(x^6)$, questa formula NON basta a trovare lo sviluppo di ordine 6 (ma basta a trovare quello di ordine 5).

- Cosa succede se uso $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + O(y^7)$?

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + O(x^{14})$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Va bene, ma ho fatto dei calcoli in più del necessario.

2. Trovare lo sviluppo all'ordine 4 di $e^{1+x^2}$.

Soluzione 1 (errata)

Uso $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + O(y^3)$ e sostituisco $y = 1+x^2$:

$$e^{1+x^2} = 1 + (1+x^2) + \frac{(1+x^2)^2}{2} + O((1+x^2)^3)$$

NON VA BENE! perché $y = 1+x^2 \not\to 0$ per $x \to 0$.

E infatti, esaminando il resto:

$$O((1+x^2)^3) = O(1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6) = O(1)$$

uso lo svil. di $(a+b)^3$

non è $o(x^4)$
(non è infinitesimo!)

Soluzione 2 (corretta)

$$e^{1+x^2} = e \cdot e^{x^2}$$

uso $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+O(y^3)$

e sostituisco $y = x^2$

$$= e\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6)\right)$$

$$= e + e x^2 + \frac{e}{2}x^4 + O(x^6)$$

questo è lo sviluppo all'ordine 4 perché $O(x^6)$ è anche $o(x^4)$.
(In effetti è anche lo sviluppo all'ordine 5.)

Mettiamo in chiaro alcune "regole" per l'uso degli "o grandi" (e degli "o piccoli")

- Sostituzione

Se $g(y) = O(f(y))$ per $y \to y_0$, e $h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$
allora $g(h(x)) = O(f(h(x)))$.

Dim.

Devo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \frac{|g(h(x))|}{|f(h(x))|}$ non è $+\infty$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|g(h(x))|}{|f(h(x))|} \underset{y=h(x)}{=} \lim_{y\to y_0} \frac{|g(y)|}{|f(y)|} \underset{\text{per ipotesi}}{=} L \text{ finito.}$$

- "$c\,O(f) = O(f)$", cioè: se $g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$
  allora $c \cdot g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$

  Cioè le costanti davanti agli O-grandi si possono eliminare.

  Dim. Per ipotesi $\frac{|g(x)|}{|f(x)|} \to L$ finito, e quindi

$$\frac{|c \cdot g(x)|}{|f(x)|} = |c| \cdot \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow |c| \cdot L \text{ finito.}$$

- "$O(f) + O(f) = O(f)$"

  cioè: se $g_1(x) = O(f(x))$ e $g_2(x) = O(f(x))$ allora $g_1(x) + g_2(x) = O(f(x))$.

  Dim. Per ipotesi $\frac{|g_1(x)|}{|f(x)|} \to L_1$, $\frac{|g_2(x)|}{|f(x)|} \to L_2$ con $L_1, L_2$ finiti. Quindi

$$\frac{|g_1(x) + g_2(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{|g_1(x)|}{|f(x)|} + \frac{|g_2(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow L_1 + L_2$$

- Casi particolari:

  se $x \to 0$ e $a \leq b$ : "$O(x^a) + O(x^b) = O(x^a) + O(x^a) = O(x^a)$"

  La somma di O-grandi di diverse potenze è O-grande della potenza di grado più basso.

se $x \to +\infty$ e $a \leq b$ : " $O(x^a) + O(x^b) = O(x^b) + O(x^b) = O(x^b)$ "

La somma di O-grandi di diverse potenze è O-grande della potenza di grado più alto.

- " $O(f_1) \cdot O(f_2) = O(f_1 \cdot f_2)$ "

  cioè: se $g_1(x) = O(f_1(x))$ e $g_2(x) = O(f_2(x))$

  allora $g_1(x) \cdot g_2(x) = O(f_1(x) \cdot f_2(x))$.

  Dim.

  Per ipotesi $\frac{|g_1(x)|}{|f_1(x)|} \to L_1$, $\frac{|g_2(x)|}{|f_2(x)|} \to L_2$ con $L_1, L_2$ finiti.

  Allora

  $$\frac{|g_1(x) \cdot g_2(x)|}{|f_1(x) \cdot f_2(x)|} = \frac{|g_1(x)|}{|f_1(x)|} \cdot \frac{|g_2(x)|}{|f_2(x)|} \to L_1 \cdot L_2 \text{ finito.}$$

- " $(O(f))^a = O(f^a)$ "

  cioè: se $g(x) = O(f(x))$ allora $(g(x))^a = O((f(x))^a)$.

  Dim. per esercizio.

- " $O(O(f)) = O(f)$ "

  cioè: se $g(x) = O(h(x))$ e $h(x) = O(f(x))$ allora $g(x) = O(f(x))$.

  Dim.

  $$\frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \overbrace{\frac{|g(x)|}{|h(x)|}}^{L_1 \text{ finito}} \cdot \overbrace{\frac{|h(x)|}{|f(x)|}}^{L_2 \text{ finito}} \longrightarrow L_1 \cdot L_2 \text{ finito.}$$

Esempio $O(ax^b) = O(x^b)$.

le costanti moltiplicative dentro gli O-grandi non contano.

- Se $g(x) \sim c\, f(x)$ allora $g(x) = O(f(x))$

infatti $\frac{g(x)}{c f(x)} \to 1$ cioè $\frac{g(x)}{f(x)} \to c$.

3. Completate le seguenti "regole":

$c\, o(f) =$

$o(f) + o(f) =$

$o(f) + O(f) =$

$o(f_1) \cdot o(f_2) =$

$\to$ $o(f_1) \cdot O(f_2) =$

$(o(f))^a =$

$o(o(f)) =$

$\to$ $o(O(f)) =$

$\to$ $O(o(f)) =$

4. Trovare lo sviluppo all'ordine 9 di $e^{-2x^3}$

Uso $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + O(y^4)$ e sostituisco

$y = -2x^3$ (posso farlo? Sì!):

$$e^{-2x^3} = 1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2} + \frac{(-2x^3)^3}{6} + O((-2x^3)^4)$$

$$= 1 - 2x^3 + 2x^6 - \frac{4}{3}x^9 + O(\cancel{16}x^{12})$$

questo è lo sviluppo cercato perché $O(x^{12})$ e anche $o(x^9)$.

5. Sviluppo all'ordine 8 di $(1+x^4)\log(1+x^4)$.

Uso $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$ e sost. $y = x^4$:

$$(1+x^4)\log(1+x^4) = (1+x^4)\left(x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12})\right)$$

$$= x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12}) + x^8 - \frac{x^{12}}{2} + x^4\, O(x^{12})$$

$$= x^4 + \frac{x^8}{2} + O(x^{12}) + O(x^{12}) + O(x^{16})$$

$$= x^4 + \frac{x^8}{2} + O(x^{12})$$

questo è lo sviluppo cercato perché $O(x^{12})$ è anche $o(x^8)$.

Cosa succede usando $\log(1+y) = y + O(y^2)$ ?

$$(1+x^4)\log(1+x^4) = (1+x^4)\left(x^4 + O(x^8)\right) =$$

$$= x^4 + O(x^8) + x^8 + x^4\, O(x^8)$$

$$= x^4 + x^8 + O(x^8) + O(x^{12})$$

$$= x^4 + x^8 + O(x^8)$$

non va bene perché $O(x^8)$ non è $o(x^8)$.

Attenzione: è corretto scrivere $f(x) = x^4 + x^8 + O(x^8)$

ma non ha senso tenere sia $x^8 + O(x^8)$,

meglio scrivere $x^8 + O(x^8) = O(x^8)$.

6. Trovare lo sviluppo all'ordine 2 di $\log(3+x)$.

$$\log(3+x) = \log\left(3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right) = \log 3 + \log\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

adesso uso $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$ e sostituisco $y = \frac{x}{3}$:

$$\log(3+x) = \log 3 + \left(\frac{x}{3} - \frac{(x/3)^2}{2} + O\left(\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)\right)$$

$$= \log 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + O(x^3)$$

è la risposta corretta perché $O(x^3)$ è anche $o(x^2)$.

NON va bene usare $\log(1+y) = \dots\dots$ e poi sostituire $y = 2+x$ perché $2+x \not\xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Calcolo delle parti principali (per $x \to 0$)

La p.p. di $f(x)$ per $x \to 0$ è il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor.

Infatti se il primo termine non nullo è di grado $d$ ho che lo sviluppo di ordine $d$ è

$$f(x) = ax^d + o(x^d) \implies f(x) \sim ax^d.$$

1. Trovare p.p. per $x \to 0$ di $\operatorname{sen}(x^4)$

So che $\operatorname{sen} y = y + O(y^3) \Rightarrow \operatorname{sen} y \sim y$

per sostituzione $y = x^4$ ottengo $\operatorname{sen}(x^4) \sim x^4$.

2. Trovare p.p. per $x \to 0$ di $e^{\operatorname{sen} x} - 1$

$e^y = 1 + y + O(y^2) \Rightarrow e^y - 1 = y + O(y^2) \Rightarrow$

$e^y - 1 \sim y$, sostituisco $y = \operatorname{sen} x$ :

$e^{\operatorname{sen} x} - 1 \sim \operatorname{sen} x \sim x$

posso farlo perché $\operatorname{sen} x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

AM1 gest

lezione 26

3/11/2020

Esercizi su parti principali e sviluppi di Taylor

Trovare la p.p. per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \log(1+x^2) \cdot \operatorname{sen} x$

So che: $\boxed{\operatorname{sen} x \sim x}$ $(\Leftarrow \operatorname{sen} x = x + o(x^3))$

$\log(1+y) \sim y$ $(\Leftarrow \log(1+y) = y + o(y^2))$

Sostituisco $y = x^2$

$$\boxed{\log(1+x^2) \sim x^2}$$

(posso farlo perché $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$).

Quindi

$$f(x) = \log(1+x^2) \cdot \operatorname{sen} x \sim x^2 \cdot x = x^3$$

Riassumendo

$$\text{p.p.}(f(x)) = x^3$$

Soluzione alternativa:

So che $\boxed{\operatorname{sen} x = x + o(x^3)}$

e $\log(1+y) = y + o(y^2) \Rightarrow \boxed{\log(1+x^2) = x^2 + o(x^4)}$

Quindi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x^2)\cdot \operatorname{sen} x \\
&= \left(x^2+O(x^4)\right)\cdot\left(x+O(x^3)\right) \\
&= x^3 + x^2\cdot O(x^3) + O(x^4)\cdot x + O(x^4)\cdot O(x^3) \\
&= x^3 + O(x^5) + O(x^5) + O(x^7) \\
&= x^3 + O(x^5) \longleftarrow \text{sviluppo di T di } f(x) \text{ di ordine 3 o 4} \\
&= x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Quindi $\quad p.p.(f(x)) = x^3.$

2. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) + \log(1+x^3)$

$\operatorname{sen} y \sim y \implies \boxed{\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2}$

$\log(1+y) \sim y \implies \boxed{\log(1+x^3) \sim x^3}$

Per l'enunciato sotto

$$f(x) \sim x^2+x^3 \sim x^2$$

Quindi $\quad p.p.(f(x)) = x^2$

Proposizione

Se $f(x) \sim ax^b$ e $g(x) \sim cx^d$ (per $x\to 0$ opp. $x\to+\infty$)

allora $f(x)+g(x) \sim ax^b+cx^d$

TRANNE se $ax^b+cx^d=0$, cioè $b=d$ e $c=-a$.

Dim.

So che $f(x) = ax^b + o(x^b)$, $g(x) = cx^d + o(x^d)$

quindi

$$f(x) + g(x) = ax^b + cx^d + o(x^b) + o(x^d)$$

Caso 1: $x \to 0$ e $b<d$ : $o(x^b) + o(x^d) = o(x^b) = o(ax^b)$

$= o(ax^b + cx^d)$ quindi $f(x) + g(x) \sim ax^b + cx^d$.

Gli altri casi si fanno in modo simile.... $\square$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \log(1+x^2)$

Siccome $\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2$ e $\log(1+x^2) \sim x^2$

NON posso concludere che $f(x) \sim x^2 - x^2 = 0$.

Devo usare gli sviluppi con i resti!!

Provo con

$$\log(1+y) = y + O(y^2) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 + O(x^4)$$

$$\operatorname{sen} y = y + O(y^3) \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

e ottengo

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \log(1+x^2)$$

$$= \cancel{x^2} + O(x^6) - \cancel{x^2} - O(x^4) = O(x^4)$$

Corretto, ma non ci permette di concludere.

Uso sviluppi più precisi:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^3) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

e

$$\operatorname{sen} y = y + o(y^3) \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^6)$$

come prima. Quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x^2) - \log(1+x^2) \\ &= \left(x^2 + o(x^6)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)\right) \\ &= \cancel{x^2} + o(x^6) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} - o(x^6) \\ &= \frac{x^4}{2} + o(x^6) \\ &\sim \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

Riassumendo: $\quad p.p.(f(x)) = \frac{x^4}{2}$.

Attenzione: usare lo sviluppo $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^5)$ cioè $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^{10})$ porta allo stesso risultato.

Invece usare gli sviluppi $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^5)$ e $\log(1+y) = y + o(y^2)$ non funziona.
Provateci e vedete dov'è il problema.

4. $f(x) = \log(\cos x)$

$$f(x) = \log(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{y})$$

$y = \cos x - 1$
noto che
$y \to 0$ per $x \to 0$

$$\longrightarrow \; = \log(1+y)$$

sviluppo
di $\log(1+y)$

$$\longrightarrow \; \sim y$$

$$= \cos x - 1$$

sviluppo di T.
di $\cos x$

$$\longrightarrow \; = \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right) - \cancel{1} = -\frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

Quindi $p.p.(f(x)) = -\dfrac{x^2}{2}$.

5. $f(x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{\operatorname{sen}(x^4)}$

Cerco separatamente le p.p. di numer. e denom.

$$e^y = 1 + y + o(y^2) \Longrightarrow e^{-2x} = 1 + (-2x) + o((-2x)^2)$$

$$= 1 - 2x + o(x^2)$$

sost. $y = -2x$
(legittima!)

Quindi $e^{-2x} - 1 = \cancel{1} - 2x + o(x^2) - \cancel{1} = -2x + o(x^2)$

e $e^{-2x} - 1 \sim -2x$.

$\operatorname{sen} y \sim y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sost. } y=x^4 \\ \text{(legittima!)}}}{\Longrightarrow} \operatorname{sen}(x^4) \sim x^4$

Quindi

$$f(x) = \frac{e^{-2x}-1}{\operatorname{sen}(x^4)} \sim \frac{-2x}{x^4} = -2x^{-3}$$

Quindi $\quad p.p.(f(x)) = -2x^{-3}.$

Provate a farlo con i resti.

Trovare la p.p. per $x \to +\infty$ delle seguenti funz.

6. $\quad f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

per $x \to +\infty \quad 1+x \sim x \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{3}} \sim x^{\frac{1}{3}}$

$f(x) \sim x^{\frac{1}{3}}$ e $p.p.(f(x)) = x^{\frac{1}{3}}$

7. $\quad f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$

$x+1 \sim x \Rightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} \sim x^{\frac{1}{3}}$

$x-1 \sim x \Rightarrow (x-1)^{\frac{1}{3}} \sim x^{\frac{1}{3}}$

Quindi $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} \sim x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}$

e $p.p.(f(x)) = 2x^{\frac{1}{3}}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

In questo caso $\sqrt[3]{x+1} \sim x^{1/3}$, $\sqrt[3]{x-1} \sim x^{1/3}$

ma NON posso concludere $f(x) \sim x^{1/3} - x^{1/3} = 0$.

L'esercizio è complicato!

Raccolgo $x$ dagli argomenti delle radici:

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - \left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Siccome $\pm\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$, posso usare lo sviluppo di T (in 0) di $(1+y)^{\frac{1}{3}}$:

$$(1+y)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}y + O(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

sostituendo $y = \frac{1}{x}$ (posso farlo perché $y = \frac{1}{x}$ tende a 0 quando $x \to +\infty$!) ottengo

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

e sostituendo $y = -\frac{1}{x}$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) + O\left(\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Quindi

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\left(\cancel{1}+\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \left(\cancel{1}-\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + O\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)$$

Siccome $O\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)$ è trascurabile rispetto a $x^{-\frac{2}{3}}$ per $x \to +\infty$ (perché $-\frac{2}{3} > -\frac{5}{3}$)

$$p.p.(f(x)) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$