AM1gest 20/21 Lezione 11

13/10/2020

Limiti "facili" (conclusione)

Per il calcolo dei limiti valgono tutte le regole "intuitive" che uno si aspetta.

Ma attenzione alle forme indeterminate:

"$(+\infty)+(-\infty)$" ("$+\infty-\infty$")

"$(\pm\infty)\cdot 0$"

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$\frac{1}{0}$"

ma "$\frac{1}{0^+}=+\infty$" ; "$\frac{1}{0^-}=-\infty$" ; "$+\infty+\infty=+\infty$"

"$\frac{1}{\pm\infty}=0$" "$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$"

Formula di cambio di variabile

Se $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y)$

cambio di variabile $y=f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x) = \lim_{y\to 0} \cos y = \cos(0) = 1$$

cambio var.
$y = e^x$
osservo che
se $x \to -\infty$
allora $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(\log x) = \lim_{y\to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \log x$
se $x \to 0^+$
allora $y \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(\log(\log x)) = \lim_{y\to+\infty} \log(\log y) = \lim_{z\to+\infty} \log z = +\infty$$

$y = \log x$ $\qquad$ $z = \log y$

Curiosità: se calcolate $\log(\log(\log x))$ con la calcolatrice ottenete sempre numeri < 2.

Attenzione Può succedere che $\lim_{y\to y_0} g(y)$ NON esiste mentre esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$.

Va bene applicare la formula se $\lim_{y\to y_0} g(y)$ esiste.

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \underset{y=-x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

ma

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} \underset{y=e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to 0}\frac{1}{y} \quad \text{non esiste!}$$

In effetti basta stare più attenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} \underset{y=e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y} = +\infty.$$

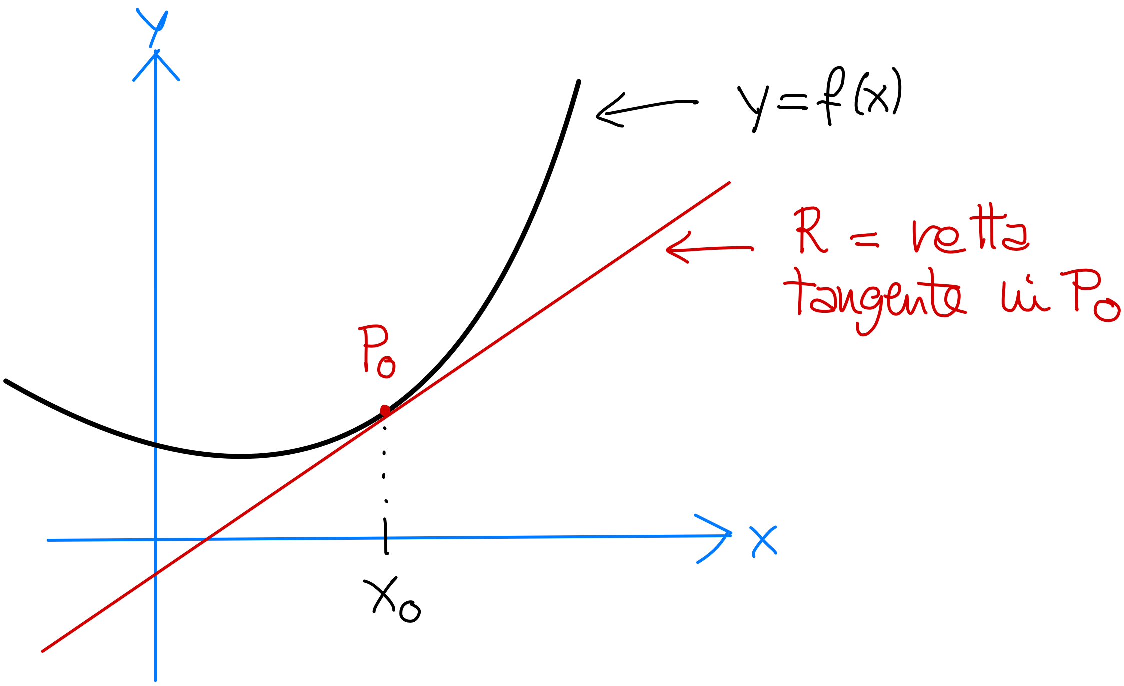
e osservo che
se $x\to-\infty$,
allora $y=e^x\to 0^+$

Derivate

Definizione e motivazioni

1. Motivazione geometrica

Problema: trovare l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto P_0 di ascissa x_0



Siccome $P_0 = (x_0, f(x_0))$, le rette passanti per P_0 hanno equazione

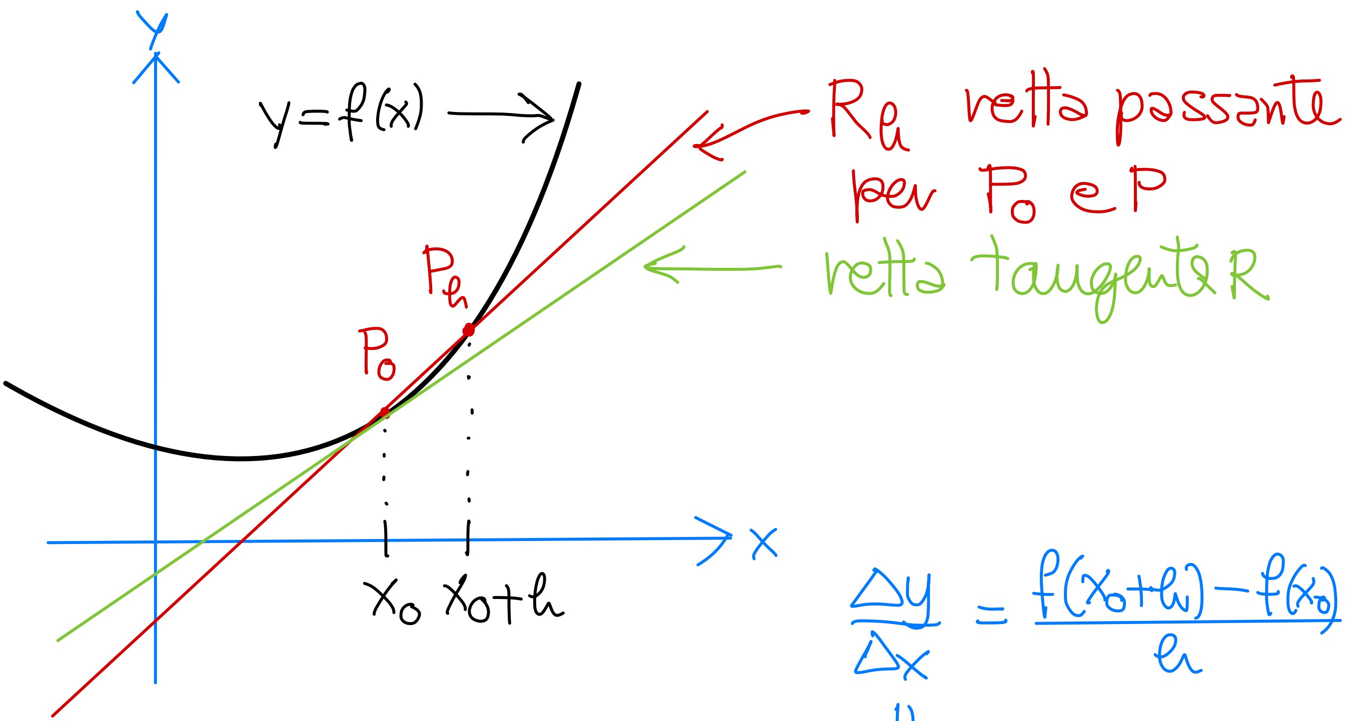
$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

coefficiente angolare

Resta da trovare il valore di m.

Prendo $h > 0$ piccolo e considero la retta R_h che passa per P_0 e P_h

punto del grafico di ascissa x_0+h, cioè $(x_0+h, f(x_0+h))$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$||$$

Idea: il coeff. angolare m_h di R_h tende a m quando $h \to 0$ cioè

$$m = \lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}}$$

2. Definizione di derivata

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la derivata di f in x è il limite (se esiste)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notazioni alternative : $\dot{f}(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$

la usiamo

si usa in fisica

Se $f : X \to \mathbb{R}$ (con $X \subseteq \mathbb{R}$) e $x \in X$, per parlare di derivata di f in x serve che esistono h arbitrariamente piccoli t.c. $x+h \in X$.

Se $f'(x)$ esiste e appartiene a $\mathbb{R}$ dico che f è derivabile in x.

Se la derivata esiste in tutti i punti del dominio di f dico che f è derivabile (su X)

Osservaz.

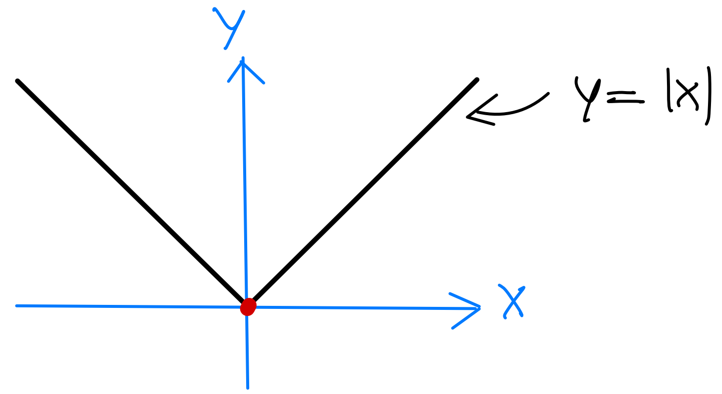
- Non sempre la derivata esiste.

Es.: se $f(x) = |x|$ allora la derivata in 0 non esiste.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

quindi $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ non esiste.

In questo caso però esistono i limiti destri e sinistri, chiamati derivata destra e sinistra.

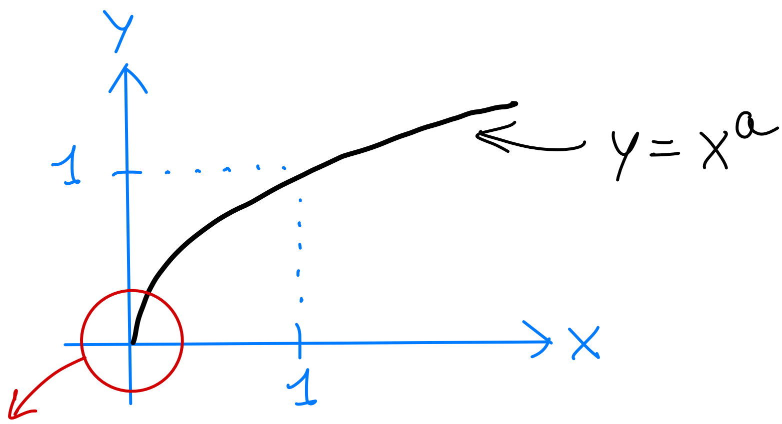


- La derivata può essere $+\infty$ (o $-\infty$).

Es.: se $f(x) := x^a$ con $0<a<1$, allora

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1-a}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



"il grafico ha pendenza $+\infty$ in 0"

- Se f è derivabile in x allora è continua in x (non lo dimostro).

- Calcolo la derivata di $f(x) = x^2$ a partire dalla definizione:

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2hx - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x.$$

Non è così che si calcolano le derivate!

Altre interpretazioni della derivata

- **Velocità** (scalare)

Considero P punto in movimento nello spazio. Indico con $d(t)$ la distanza percorsa da P a partire dall'istante iniziale.

velocità media nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ è

$$v_m = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0}$$

velocità all'istante t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v \text{ media in } [t, t+\Delta t] \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t+\Delta t) - d(t)}{\Delta t} = d'(t).$$

Cioè

velocità (scalare) = derivata della distanza percorsa.

- <u>Velocità (vettore)</u>

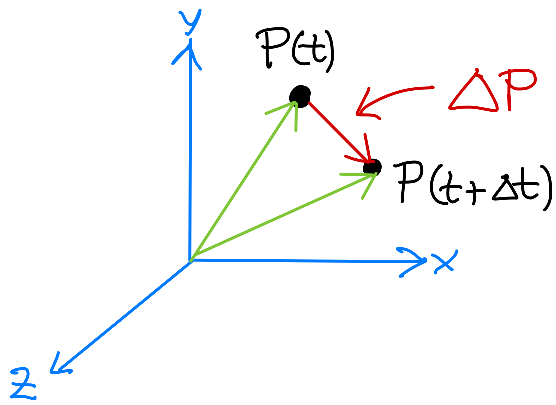
P come prima. La posizione al tempo t

è $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ← vettore in $\mathbb{R}^3$

Spostamento tra l'istante t e l'istante $t+\Delta t$

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) \leftarrow \text{vettore in } \mathbb{R}^3$$

$$= (x(t+\Delta t) - x(t),\ y(t+\Delta t) - y(t),\ z(t+\Delta t) - z(t))$$



Velocità (istantanea) al tempo t

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P'(t)$$

$$= (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

AM1 gest 20/21 Lezione 12

14/10/2020

Calcolo delle derivate

Le derivate si calcolano utilizzando

- l'elenco delle derivate delle funzioni elementari
- un insieme di regole (usate per combinare le derivate delle funzioni elementari e ottenere quelle di funzioni più complesse).

Oggi do l'elenco e le regole, spiegando come usarle.
Le dimostrazioni verranno date nella prox. lezione.

Tavola delle derivate elementari (a, b sono numeri)

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
$ax+b$	a
x^a $a \neq 0$	ax^{a-1}
e^x	e^x
a^x $a>0$	$\log a \cdot a^x$
$\log x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ogni formula vale in tutto l'insieme di definizione di f (e in particolare f è derivabile in tutto il dominio) con le seguenti eccezioni:

- per $0<a\;1$, x^a è definita su $[0,+\infty)$, continua ovunque, e la derivata in 0 e $+\infty$, mentre ax^{a-1} non è definita in 0.

- $\arcsin x$ è definita su $[-1,1]$, continua ovunque, e la derivata in ± 1 e $+\infty$, mentre $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ non è definita in ± 1.
  Un discorso analogo vale per $\arccos x$.

Regole (f, g sono funzioni, a, b sono numeri)

1. Derivata della somma: $(f+g)'=f'+g'$

   cioè $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$; non scrivo la var. x per semplificare la formula

   Caso particolare: $(f+a)'=f'$

   Esempio:

   $$(e^x+x^2)'=(e^x)'+(x^2)'=e^x+2x^{2-1}=e^x+2x$$

1 bis. Derivata della differenza: $(f-g)'=f'-g'$

2. Derivata del prodotto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Caso particolare: $(af)' = af'$

Esempi

$$(x^2 \cdot \log x)' = (x^2)' \cdot \log x + x^2 \cdot (\log x)'$$

$$= 2x^{2-1} \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = \left(2 \cdot x^{1/2} - 3 \cdot x^{-1}\right)'$$

$$= 2\left(x^{1/2}\right)' - 3\left(x^{-1}\right)'$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 3 \cdot (-1)\, x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$$

3. Derivata del rapporto: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Caso particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Esempio:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+\cancel{1})' \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot (x^2-\cancel{1})'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x\,(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x-1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2}$$

4. Derivata della funzione composta:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Caso particolare: $(f(ax+b))' = a f'(ax+b)$

Nell' uso introduco la variabile $y = g(x)$ e la formula diventa

$$[f(\underbrace{g(x)}_{y})]' = f'(y) \cdot g'(x)$$

derivata risp. alla variabile y

e sostituisco a y il valore $g(x)$ in un passaggio successivo.

Esempi

$$(\underbrace{e^{x^2+1}})' = \underbrace{(e^y)'}_{\text{derivata risp. alla variab. } y} \cdot (x^2+\cancel{1})' = e^y \cdot 2x = e^{x^2+1} \cdot 2x .$$

$f(y) = e^y$
$g(x) = x^2+1$

$$(\underbrace{\sqrt{1-2x}})' = \overbrace{(y^{\frac{1}{2}})'}^{\text{derivata risp. alla variab. } y} (1-2x)' = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$f(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$
$g(x) = 1-2x$

Esercizi

1. $\left(e^{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{y}}\right)' = (e^y)'(\operatorname{sen} x)' = e^y \cdot \cos x = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$

funzione composta
$f(y) = e^y$; $g(x) = \operatorname{sen} x$

funzione composta
$f(y) = y^{1/2}$, $g(x) = 1-x^2$

2. $$x\sqrt{1-x^2} = (x)' \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(\overbrace{(\underbrace{1-x^2}_{y})^{\frac{1}{2}}}\right)'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(y^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot (\cancel{1}-x^2)'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x)$$

$$= \sqrt{1-x^2} - x^2 y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $$\left(\underbrace{\log(\overbrace{\log(\log x)}^{y})}\right)' = (\log y)' \cdot \left(\underbrace{\log(\overbrace{\log x}^{z})}\right)'$$

funzione comp.
$f(y) = \log y$
$g(x) = \log(\log x)$

funzione comp.
$f(z) = \log x$, $g(x) = \log x$

$$= \frac{1}{y} \cdot (\log z)' \cdot (\log x)'$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log(\log x)}$$

4. $$\left(\arctan\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{y}\right)\right)' = (\arctan y)' \cdot \left(\overbrace{\frac{1}{x}}^{x^{-1}}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+y^2}\cdot\left((-1)\cdot x^{-2}\right)$$

$$= \frac{-1}{(1+y^2)\,x^2} = \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

5. $$\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]'$$ prima semplificare!!

$$\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right) = \log\left(\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \log\left(\frac{(x+1)^{3/4}}{(x-1)^{3/2}}\right)$$

$$= \log\left((x+1)^{\frac{3}{4}}\right) - \log\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log(x-1)$$

$$\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]' = \left[\frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log(x-1)\right]'$$

$$= \frac{3}{4}\left(\log(x+1)\right)' - \frac{3}{2}\left(\log(x-1)\right)'$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} = -\frac{3x+9}{4(x^2-1)}$$

6. $(x^x)' = \left(\exp(\overbrace{x\log x}^{y})\right)' = (e^y)'(x\log x)'$

$a^b = e^{b\log a}$
$= \exp(b\log a)$

$= e^y\left((x)'\cdot\log x + x(\log x)'\right)$

$= e^{x\log x}(\log x + 1)$

$= x^x(\log x+1)$

Torno agli esercizi sui limiti.

7. "$0^{+\infty}$" è una forma indeterminata o no?

Traduzione: date $f(x)$ e $g(x)$ tali che

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+ \quad e \quad g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty,$$

posso dire qual è il limite di $f(x)^{g(x)}$ (per $x\to x_0$) senza bisogno di altre info?

Per rispondere scrivo $f(x)^{g(x)}$ come potenza in base e:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\Big(\underbrace{\overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{g(x)} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{-\infty}}_{\downarrow\, -\infty}\Big) \longrightarrow \text{“}e^{-\infty}\text{''} = 0$$

Dunque “ $0^{+\infty} = 0$ ” (non è una forma indet.)

Allo stesso modo si ottiene “ $0^{-\infty} = +\infty$ ”.

8. Far vedere che “ $1^{+\infty}$ ” è una forma indet.

Procedo come prima:

$$\underbrace{f(x)}_{\downarrow\, 1}{}^{\overbrace{g(x)}^{+\infty}} = \exp\Big(\overbrace{g(x)}^{+\infty} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{\log 1 = 0}\Big)$$

e “$+\infty \cdot 0$” è una forma indeterminata

Nota: anche $1^{-\infty}$ è una forma indet.

9. "0^0" è una forma indeterminata.

$$\underbrace{f(x)}_{\to 0^+}{}^{\overbrace{g(x)}^{\to 0}} = \exp\Big(\overbrace{g(x)}^{\to 0} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{\to -\infty}\Big)$$

e "$0 \cdot (-\infty)$" è una forma indeterminata

10. Dire se le seguenti sono forme indet. oppure no:

"$+\infty^{+\infty}$" ; "$+\infty^{-\infty}$" ; "$+\infty^{0}$" ; "$2^{+\infty}$"

Dimostrazioni delle regole di derivazione e delle derivate delle funzioni elementari

E' importante farle nell' ordine giusto!

Regola 1 $\quad (f+g)' = f' + g'$

Versione precisa: date $f, g : X \to \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x \in X$, allora $f+g$ è derivabile in x e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(Per le prossime regole NON enuncerò la versione precisa.)

Dim.

Parto dal rapporto incrementale di $f+g$:

$$\frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0 \atop f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0 \atop g'(x)} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x) + g'(x)$$

$\square$

<u>Regola 2</u> $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

<u>Dim.</u>

Parto dal rapporto incrementale di $f \cdot g$:

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\downarrow\, h\to 0 \atop f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\downarrow\, h\to 0 \atop g(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow\, h\to 0 \atop g'(x)}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$\square$

<u>Regola 4</u> $[f(g(x))]' = f'(y) \cdot g'(x)$ con $y = g(x)$.

<u>Dim.</u>

Parto dal rapporto incrementale di $f(g(x))$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\substack{\| \\ \frac{f(y+k)-f(y)}{k} \\ \downarrow k\to 0 \\ f'(y)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ g'(x)}} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(y)\cdot g'(x)$$

Sostituzione:
$y := g(x)$
$k := g(x+h) - g(x)$
allora:
$y + k = g(x+h)$
$k \to 0$ per $h \to 0$

Questa dimostrazione non è del tutto corretta perché si divide per $g(x+h) - g(x)$, che potrebbe essere 0. $\square$

Regola 5 (Derivata dell'inversa)

Se g è l'inversa di f allora

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{dove } x = g(y) \text{ cioè } y = f(x).$$

In questo enunciato conviene usare lettere diverse per le variabili di f e g.

Dim.

Per definizione di inversa ho che $x = g(f(x))$ per ogni x.
Deriviando questa identità ottengo:

$$1 = (g(\overbrace{f(x)}^{y}))' \overset{\text{Reg. 4}}{=} g'(y)\cdot f'(x).$$

$\square$

$\underline{(ax+b)' = a}$

Dim. Calcolo il rapporto incrementale:

$$\frac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h} = \frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} = a$$

e anche il limite per $h \to 0$ è a. $\square$

$\underline{(e^x)' = e^x}$

Problema: non ho mai definito il numero "e".
Darò la definizione più in là nel corso.
Uso qui la seguente proprietà caratterizzante:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 .$$

Dim. Scrivo il rapporto increm. di e^x:

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1}} \xrightarrow[h\to 0]{} e^x .$$

$\square$

$\underline{(a^x)' = \log a \cdot a^x}$

Dim.

Scrivo $\quad a^x = e^{x \cdot \log a}$. Quindi

$$(a^x)' = (e^{\overbrace{x \cdot \log a}^{y}})' \overset{\text{Reg. 4}}{=} (e^y)' \cdot (x \cdot \log a)'$$
$$= e^y \cdot \log a$$
$$= e^{x \cdot \log a} \cdot \log a = \log a \cdot a^x$$

$\square$

$\underline{(\log x)' = \frac{1}{x}}$

Dim.

Ricordo che $\log y$ è l'inversa di e^x.

Come al solito, uso y come variabile dell'inversa

Quindi

$$(\log y)' \overset{\text{Reg. 5}}{\underset{\substack{x = \log y \\ \text{cioè } y = e^x}}{=}} \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Quindi $(\log y)' = \frac{1}{y}$.

$\square$

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

Dim. (solo per $x>0$)

Scrivo $x^a = e^{a \cdot \log x}$ e quindi

$$(x^a)' = \Big(e^{\overbrace{a\cdot\log x}^{y}}\Big)' \overset{\text{Reg. 4}}{=} (e^y)' \cdot (a \cdot \log x)'$$

$$= e^y \cdot a \cdot (\log x)'$$

$$= e^{a \cdot \log x} \cdot a \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a x^{a-1} \qquad \square$$

Regola 3, caso particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Dim.

$$\Bigg(\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{y}}\Bigg)' \overset{\text{Reg. 4}}{=} \left(\frac{1}{y}\right)' \cdot g'(x) = (y^{-1})' \cdot g'(x)$$

$$= (-y^{-2}) \cdot g'(x)$$

$$= -\frac{g'(x)}{y^2} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \qquad \square$$

Regola 3, caso generale: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Dim.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \overset{\text{Reg. 2}}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$\underset{\text{Reg. 3 caso partic.}}{=} \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad \square$$

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

Dim. Si parte dal rapporto incrementale:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} h \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} h \cdot \cos x}{h} + \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

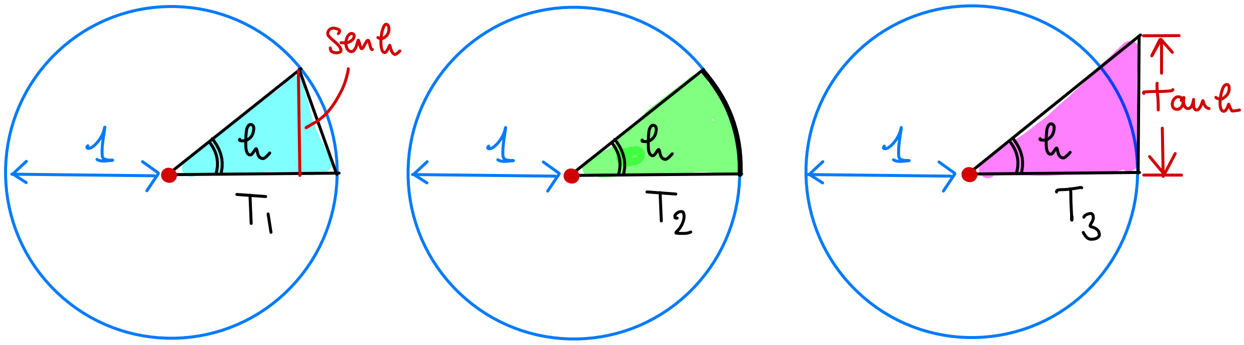
$$= \cos x \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 1}} - \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos h}{h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 0}} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x$$

Resta da dimostrare che:

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$; (2) $\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$.

forma indet. $\frac{0}{0}$ forma indet. $\frac{0}{0}$

Dimostro (1). Considero le seguenti figure piane:



Se sovrappongo le tre circonferenze, T_1, T_2 e T_3 sono contenute una nell'altra ($T_1 \subset T_2 \subset T_3$) e quindi

$$\begin{array}{ccccc} \text{area}(T_1) & \leq & \text{area}(T_2) & \leq & \text{area}(T_3) \\ \| & & \| & & \| \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} h & & \frac{1}{2} h & & \frac{1}{2}\tan h = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h} \end{array}$$

formula per l'area del settore circol.

cioè

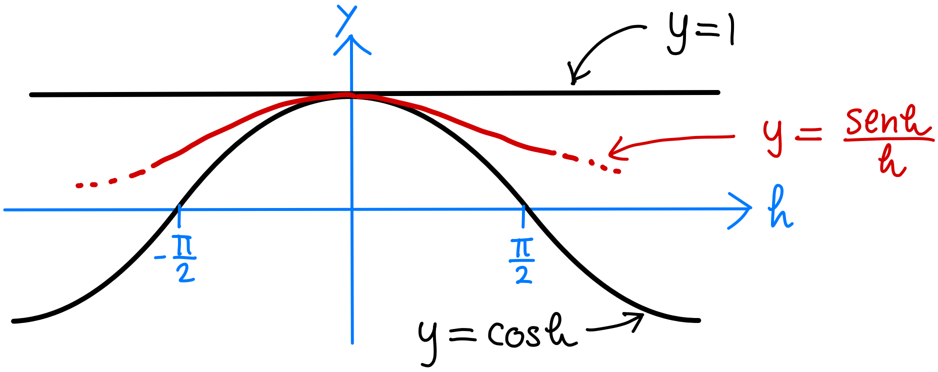
$$\operatorname{sen} h \leq h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$$

$$\cos h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{h} \leq 1$$

Siccome $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ è compreso tra $\cos h$ e 1, e $\cos h \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(0) = 1$ ($\cos h$ è una funz. continua) ne deduco che

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \quad .$$

Un altro modi di interpretare l'ultimo passaggio è questo: il grafico di $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ (funzione della var. h) è compreso tra quello di $\cos h$ e quello di 1:



Siccome i grafici di 1 e $\cos h$ si toccano per $h=0$ (perché $\cos 0 = 1$) necess. $\frac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$.

Dimostro (2):

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h\,(1+\cos h)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{1+\cos h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(0)}{1+\cos(0)} = 0}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$1-\cos^2 h = \operatorname{sen}^2 h$

$\square$