AM1 gest 20/21 — lezione 9

9/10/2020

Limiti di funzioni

Argomento trattato velocemente.

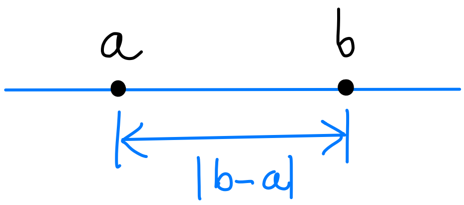
Il calcolo dei limiti viene dopo...

Notazione

Simbolo	significato
$\forall$	"per ogni"
$\exists$	"esiste"
$\nexists$	"non esiste"
$\exists!$	"esiste ed è unico"
$\Longrightarrow$	"implica"

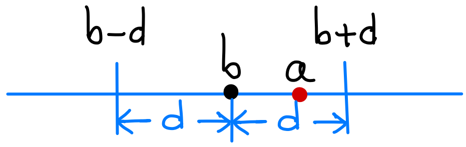
$|a-b|$ è la distanza tra due punti $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a-b| = |b-a|$$



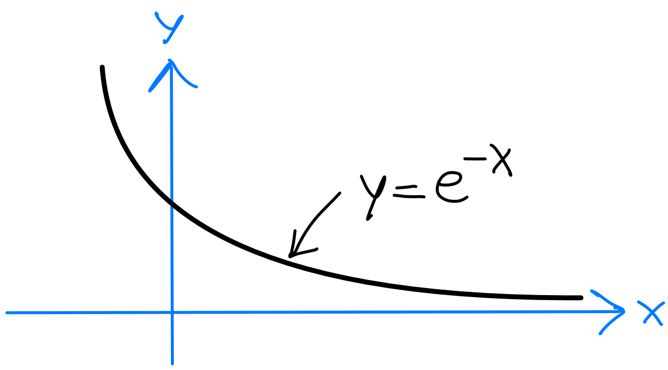
la disequazione $|a-b| \leqslant d$ equivale a:

- $-d \leqslant a-b \leqslant d$
- $b-d \leqslant a \leqslant b+d$
- $a-d \leqslant b \leqslant a+d$



Esempio

Considero il grafico di e^{-x}



Cosa succede all'output e^{-x} quando l'input x si muove "verso $+\infty$"?

Risposta: e^{-x} si muove "verso 0".

Per la precisione e^{-x} si avvicina sempre di più a 0 quanto più x diventa grande (ma $e^{x} \neq 0$ sempre).

Esprimo quanto osservato dicendo che "e^{x} tende a 0 quando x tende a $+\infty$" oppure "il limite di e^{x} per x che tende a $+\infty$ è 0".

Più in generale, dati $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e L numero reale, se $f(x)$ si avvicina sempre di più a L quando x diventa sempre più grande, dico che

"$f(x)$ tende a L quando x tende a $+\infty$"

oppure

"il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è L"

e scrivo $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$ oppure $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Queste espressioni a parole sono però vaghe.

Definizione precisa

Si dice che $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ se:

per ogni $\varepsilon > 0$

$f(x)$ approssima L con errore inferiore a ε

da un certo x_ε in poi.

cioè per ogni $x \geq x_\varepsilon$

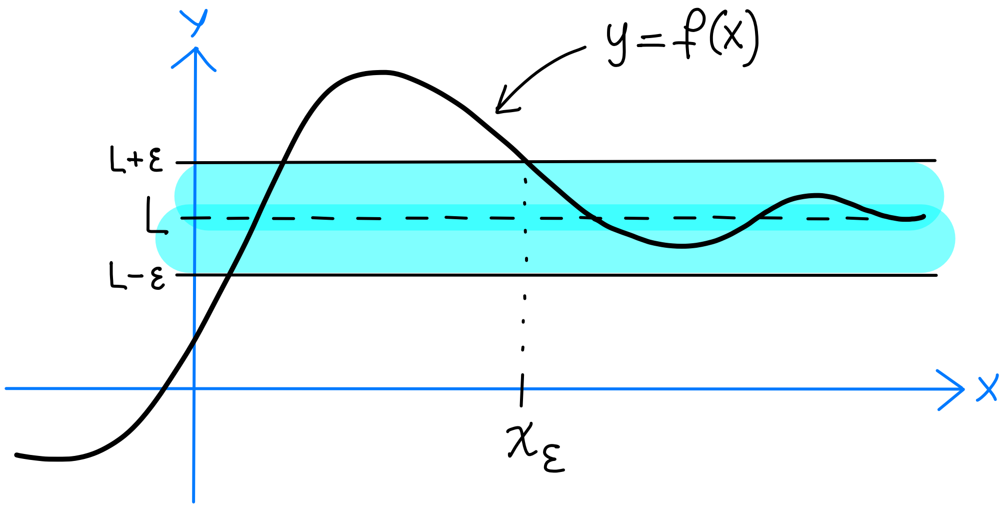
cioè $|f(x) - L| \leq \varepsilon$

$(L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$

Versione compatta:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \text{ tale che } x \geq x_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon}$$

Interpretazione grafica:



Osservazioni

- Posso usare il disegno del grafico di f per dimostrare che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$?

  No, perché nel disegno non si vede cosa succede per x molto grande e per ε molto piccolo.
  Il grafico serve solo a farsi un'idea.

- Per le stesse ragioni non posso usare neanche un computer.

- Dimostro che $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

  Dato $\varepsilon>0$ (qualunque) voglio trovare x_ε tale che $|e^{-x}-0| \leq \varepsilon$ se $x \geq x_\varepsilon$.

  Per farlo risolvo la diseq. $|e^{-x}-0| \leq \varepsilon$:

  Siccome $|e^{-x}-0| = |e^{-x}| = e^{-x}$, ho $e^{-x} \leq \varepsilon$ cioè $-x \leq \log\varepsilon$, $x \geq -\log\varepsilon = \log(1/\varepsilon)$.

  Riassumendo $|e^{-x}-0| \leq \varepsilon$ se $x \geq \log(1/\varepsilon)$.

  Prendo allora $x_\varepsilon := \log(1/\varepsilon)$.

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+1}{e^x-6x} = 0$,

  ma questo lo si dimostra con tecniche che vedremo più in là.

- Per poter parlare di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non serve che il dominio X di f sia $\mathbb{R}$, basta che X contenga numeri che "si avvicinano a $+\infty$", cioè

$$\forall M \ \exists x \in X \text{ tale che } x \geq M.$$

Cosa significa che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$?

Attenzione: la definizione di prima non funziona perché $|f(x)-(+\infty)|\leq \varepsilon$ non ha senso ($+\infty$ non è un numero).

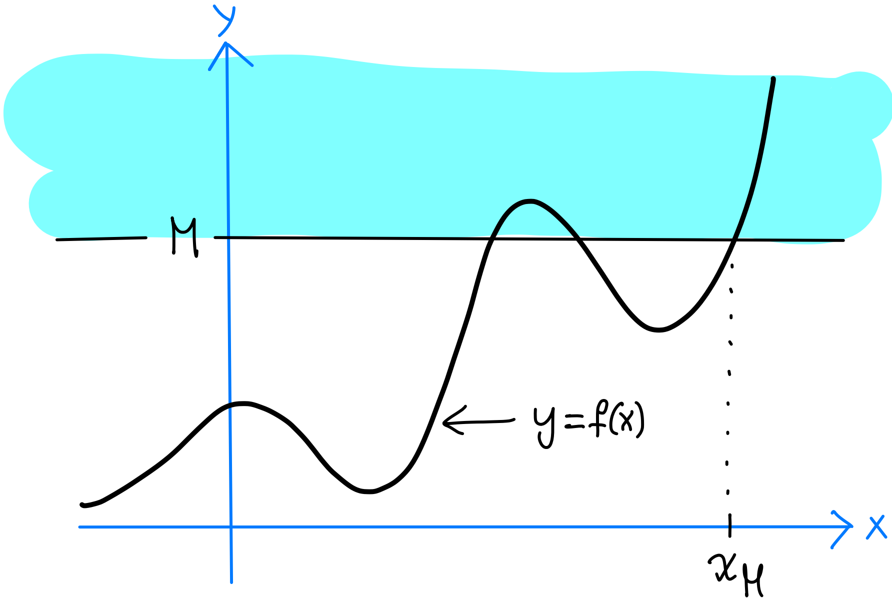
<u>Definizione</u> (di limite infinito per $x\to+\infty$)

Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (oppure $f: X\to\mathbb{R}$ con X t.c. ....)

si dice che $f(x)\longrightarrow+\infty$ per $x\to+\infty$ se

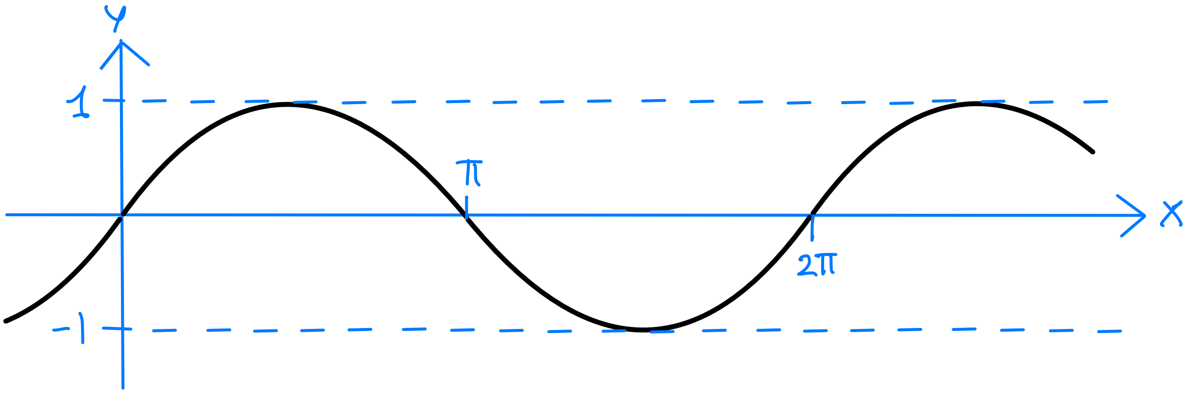
per ogni "soglia" M, vale $f(x)\geq M$ per x da un certo punto x_M in poi, cioè:

$$\boxed{\forall M\ \exists x_M \text{ tale che } x\geq x_M \Rightarrow f(x)\geq M}$$



Scrivete voi la definizione di $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Attenzione non sempre il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ esiste. Per esempio $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste!



Definizione (di limite finito per $x \to x_0$)

Dati $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ se:

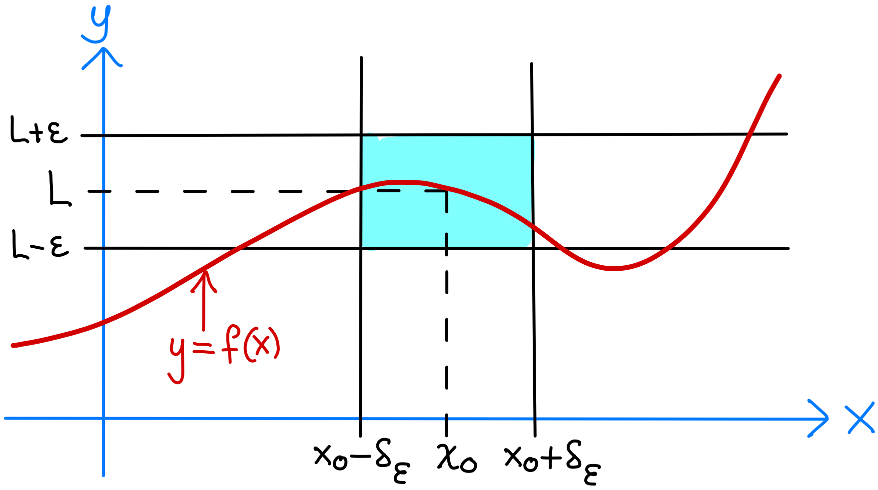
per ogni $\varepsilon > 0$

$\boxed{f(x) \text{ approssima } L \text{ con errore } \leq \varepsilon}$ → cioè $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ $(L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$

$\boxed{\text{per ogni } x \text{ sufficientemente vicino a } x_0}$ → per ogni x t.c. $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ per un certo δ_ε

Versione compatta:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.}$$



Osservo.

Come prima, per parlare di limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non serve che il dominio X di f sia $\mathbb{R}$ ma basta che X contenga punti arbitrariamente vicini a x_0, cioè:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \ x \in X \text{ tale che } x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| \leq \delta .$$

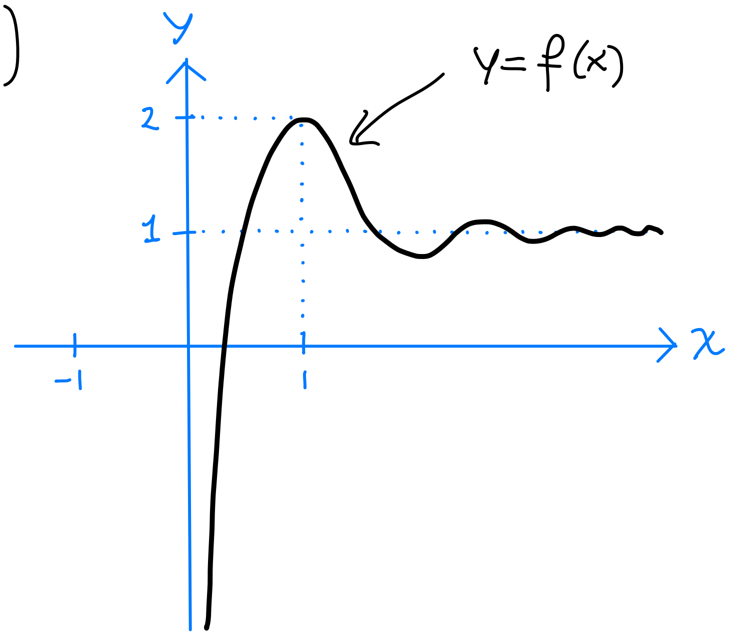
Scrivete per esercizio le definizioni mancanti:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty,$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} L, \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty .$$

Esempi

1)



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

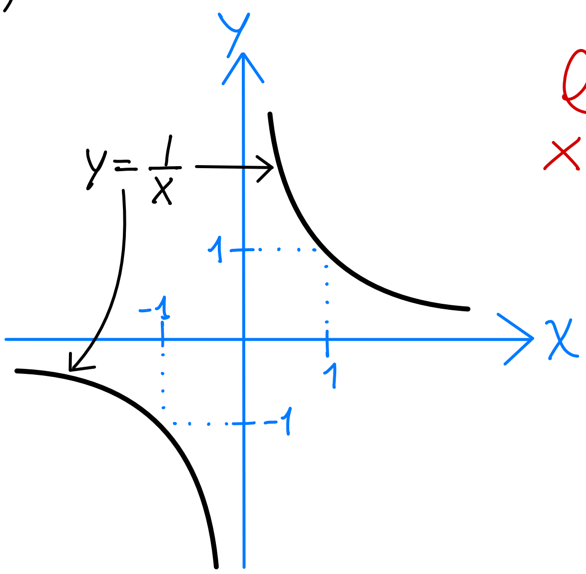
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\cancel{\lim_{x\to -1} f(x) =}$$

non si può parlare di limite per $x\to -1$!

2)



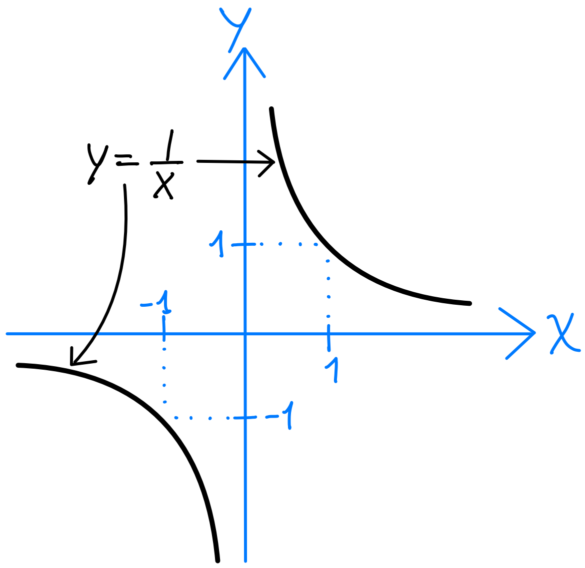
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$ non esiste!

AM1 gest 20/21 Lezione 10

10/10/2020

Proseguo dall'ultimo esempio di ieri:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.



[$x<0$]

Ma se considero solo $x>0$, cioè x tende a 0 "da destra", allora $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$

["da sinistra"] [$-\infty$]

Definizione di limite destro e sinistro

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$,

dico che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 da destra (da sinistra) è L

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{opp.} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} L$$

$(x \to x_0^-)$ $\qquad\qquad$ $(x \to x_0^-)$

se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta_\varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \ x_0 < x \leq x_0 + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \qquad (x_0 - \delta_\varepsilon \leq x < x_0)}$$

Osserv.

- Per parlare di limite destro (sinistro) di $f(x)$ in x_0 basta che il dominio X di f contenga punti x arbitrariam. vicini a x_0 e strettamente maggiori (minori) cioè

$$\forall \delta > 0 \ \exists \, x \in X \ \text{t.c.} \ x_0 < x \leq x_0 + \delta \qquad (x_0 - \delta \leq x < x_0)$$

Per esempio, non ha senso parlare di $\lim_{x\to 0^-} \log x$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

- se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ (oppure uno dei due non esiste) allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste.

- la def. precedente vale per $L \in \mathbb{R}$ ma si può estendere a $L = \pm\infty$. Fatelo per esercizio. E dimostrate che $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Funzioni continue

Definizione

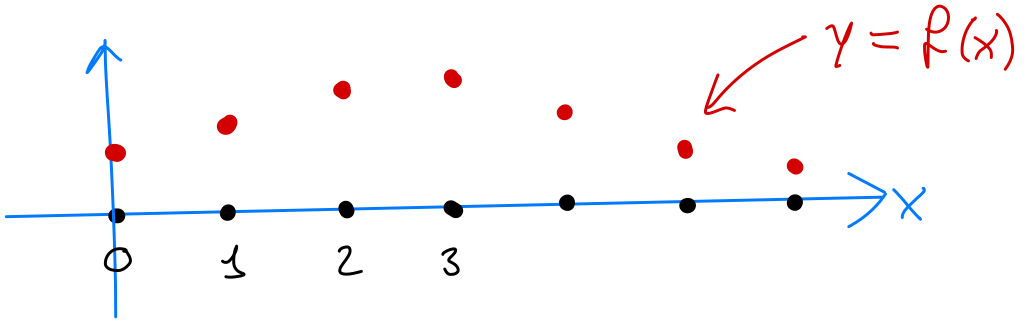
Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $X \subseteq \mathbb{R}$) e $x_0 \in X$, dico che f è continua in x_0 se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \underbrace{|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon}_{\substack{x \text{ approssima} \\ x_0 \text{ con err.} \leq \delta_\varepsilon}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon}_{\substack{f(x) \text{ approssima } f(x_0) \\ \text{con errore} \leq \varepsilon}}}$$

Dico che f è continua se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Osserv.

- La continuità viene data per scontata quando si usa la calcolatrice o il computer per calcolare $f(x_0)$ se x_0 ha infinite cifre decimali
- Se f è continua in x_0 allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (se si può parlare di limite)



ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è continua

numeri naturali $= \{0, 1, 2, \dots\}$

ma non si può parlare di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ per alcun x_0 (tranne $+\infty$).

- Tutte le funzioni elementari viste finora sono continue (in tutti i punti dell'insieme di definizione). (NON LO DIMOSTRO)

Domanda: la funzione $\frac{1}{x}$ è continua in 0?

La domanda è mal posta perché 0 NON appartiene al dominio di $\frac{1}{x}$.

- Tutte le operazioni elementari sulle funzioni: somma $(f(x)+g(x))$, prodotto $(f(x) \cdot g(x))$, composizione $(f(g(x)))$ mandano funzioni continue in funzioni continue.

(NON LO DIMOSTRO)

Quindi tutte le funzioni date da un'unica formula sono continue.

- La funzione $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$ (il dominio è $\mathbb{R}$) è discontinua (non è continua) in 0 perché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

ma

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Calcolo dei limiti (facili)

Regole "di buon senso" spiegate per esempi.

- $\lim_{x \to -\infty} \left(\underset{\downarrow\, 0}{e^x} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{x}} \right) = 0 + 0 = 0$

Regola: se $f_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L_1$ e $f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L_2$ $(L_1, L_2 \in \mathbb{R})$
allora $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L_1 + L_2$

In sintesi "il limite della somma è la somma dei limiti".

- $\lim_{x \to 0} \underset{\downarrow\, +\infty}{\frac{1}{x^2}} + \underset{\downarrow\, \cos(0) = 1}{\cos x} = +\infty$

Regola: Se $f_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ $(-\infty)$ e $f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$ con $L \in \mathbb{R}$
allora $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ $(-\infty)$

Sintesi: "$+\infty + L = +\infty$" e "$-\infty + L = -\infty$"

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} + \underbrace{x^2}_{+\infty} = +\infty$

Regola: "$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$"

e analogamente "$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$"

Attenzione: Se $f_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ e $f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$ allora non posso dire qual'è il limite di $f_1(x) + f_2(x)$ per $x \to x_0$ senza informaz. più precise.

In sintesi: "$(+\infty) + (-\infty)$ forma indeterm."

Es. $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{x}_{-\infty} = +\infty$ (lo vediamo dopo)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{x^3}_{-\infty} = -\infty$ " "

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\cos x}_{\text{non ha limite}} = +\infty \Leftarrow x + \cos x \geq x - 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(3+\frac{1}{x}\right)}_{3+0=3}\underbrace{\left(-2+e^x\right)}_{-2+0=-2} \longrightarrow 3\cdot(-2)=-6$

$\frac{1}{x}\to 0$, $e^x \to 0$

<u>Regola</u> Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L_1$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L_2$, $L_1,L_2\in\mathbb{R}$

allora $f_1(x)\cdot f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L_1\cdot L_2$

("il limite del prod. è il prod. dei lim.")

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\cos(x+\pi) = -\infty$

$\frac{1}{x}\to+\infty$ $\quad \cos(x+\pi)\to\cos(\pi)=-1$

<u>Regola</u> " $+\infty\cdot L = \begin{cases} +\infty & \text{se } L>0 \\ -\infty & \text{se } L<0 \end{cases}$ "

incluso $L=+\infty$

incluso $L=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x \log x = +\infty$

$e^x\to+\infty$ $\quad \log x\to+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \log x\cdot\frac{1}{x} = -\infty$

$\log x\to-\infty$ $\quad \frac{1}{x}\to+\infty$

Attenzione "$+\infty \cdot 0$" e "$-\infty \cdot 0$" sono forme indeterminate.

Es $\lim_{x \to 0^+} \underset{\downarrow 0}{x} \cdot \underset{\downarrow -\infty}{\log x} = 0$ (più in là)

$\lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow +\infty}{(1+4^x)} \cdot \underset{\downarrow 0}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow 0}{e^{-x}} + \underset{\downarrow +\infty}{\left(\frac{4}{e}\right)^x} = +\infty$

• $\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{1 \uparrow}{\cos x}}{\underset{\downarrow -\infty}{\log x}} = 0$

Regola "$\frac{L}{\pm\infty} = 0$"

Attenzione "$\cancel{\frac{1}{0} = +\infty}$"   Es $x \to 0$ ma $\frac{1}{x}$ non ha limite
$x \to 0$

Ma vale

"$\frac{1}{0^+} = +\infty$"   "$\frac{1}{0^-} = -\infty$"

il reciproco di una funzione che tende a 0 da destra (cioè è pos) tende a +

Più in generale

$$"\frac{L}{0^+}" = \begin{cases} +\infty & \text{se } L>0 \ (\text{incluso } +\infty) \\ -\infty & \text{se } L<0 \ (\text{incluso } -\infty) \end{cases}$$

$$"\frac{L}{0^-}" = \begin{cases} -\infty & \text{se } L>0 \ (\text{incluso } +\infty) \\ +\infty & \text{se } L<0 \ (\text{incluso } -\infty) \end{cases}$$

Infine

$$"\frac{0}{0} \text{ forma indeterminata}"$$

AM1gest 20/21 — Lezione 11 — 13/10/2020

Limiti "facili" (conclusione)

Per il calcolo dei limiti valgono tutte le regole "intuitive" che uno si aspetta.

Ma attenzione alle forme indeterminate:

"$(+\infty)+(-\infty)$" ("$+\infty-\infty$")

"$(\pm\infty)\cdot 0$"

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$\frac{1}{0}$"

ma "$\frac{1}{0^+}=+\infty$" ; "$\frac{1}{0^-}=-\infty$" ; "$+\infty+\infty=+\infty$"

"$\frac{1}{\pm\infty}=0$" "$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$"

Formula di cambio di variabile

Se $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$

cambio di variabile $y=f(x)$

$$\lim_{x\to -\infty} \cos(e^x) = \lim_{y\to 0} \cos y = \cos(0) = 1$$

cambio var.
$y = e^x$
osservo che
se $x \to -\infty$
allora $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(\log x) = \lim_{y\to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \log x$
se $x \to 0^+$
allora $y \to -\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \log(\log(\log x)) = \lim_{y\to +\infty} \log(\log y) = \lim_{z\to +\infty} \log z = +\infty$$

$y = \log x$ $\qquad$ $z = \log y$

Curiosità: se calcolate $\log(\log(\log x))$ con la calcolatrice ottenete sempre numeri < 2.

Attenzione Può succedere che $\lim_{y\to y_0} g(y)$ NON esiste mentre esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$.

Va bene applicare la formula se $\lim_{y\to y_0} g(y)$ esiste.

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \underset{y=-x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

ma

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} \underset{y=e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \quad \text{non esiste!}$$

In effetti basta stare più attenti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} \underset{y=e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty.$$

e osservo che
se $x \to -\infty$,
allora $y = e^x \to 0^+$