AM1gest 20/21

lezione 1

29/9/2020

Introduzione

Docenti: Giovanni Alberti, Alessandra Pluda

Programma

- ripasso nozioni di base
- derivate: calcolo e applicazioni
- integrali: calcolo e applicazioni
- serie numeriche
- equazioni differenziali ← forse l'argomento più importante per i corsi che seguono

Nota: in questo corso si da più peso agli aspetti operativi (risoluzione di problemi) che a quelli teorici (che comunque verranno trattati).
In questo senso il corso è più vicino ad un corso di "Calcolo" che di "Analisi".

nel senso americano del termine

Esame

Ogni anno avete 7 occasioni di passare l'esame (7 "appelli"): in pratica si tratta di 7 date in cui si svolge la prova scritta (3 a gennaio-febbraio, 3 a luglio-agosto, 1 a settembre).

Attenzione: potete tentare l'esame al più 4 volte.

Struttura esame:

SCRITTO + ORALE

1ª parte (scritto)	2ª parte (scritto)	orale
domande a cui dare solo la risposta	esercizi di cui dare soluzioni motivate	esercizi (se lo scritto è solo suff.) + enunciati dei teoremi + dimostrazioni (per i voti alti)
di solito: 8 in un'ora	di solito: 3 in due ore	

Nota: la consegna della prima parte dello scritto conta come aver tentato l'esame.

Strumenti del corso

TEAMS

- lezioni
- ricevimento: G.A.: Ven. 11.30-13
  A.P.: Lun. 18-19.30
- registrazioni delle lezioni

portale E-LEARNING di Ingegneria

https://elearn.ing.unipi.it

e poi cercate questo corso ....

- Comunicazioni (sugli esami e altro)
- materiale didattico
  - liste di esercizi
  - appunti delle lezioni
  - testi e soluzioni degli esami

pagina web di G.A.

http://pagine.dm.unipi.it/alberti

- testi e soluzioni degli scritti degli anni passati.
- breve presentazione del corso

e-mail di G.A.

giovanni.alberti@unipi.it

Solo per le emergenze!

libri di testo

Non seguiamo un testo preciso:

come supporto o complemento più o meno ogni testo universitario va bene!

registro delle lezioni

link sulla mia pagina web.

Osservazioni sparse

- il corso inizia lento poi si accelera;
  è facile rimanere indietro!
- il voto finale dipende solo dall'esame;
- la frequenza non è obbligatoria
  (anche perché ci sono le registrazioni delle lezioni!);
- durante le lezioni fate domande
  (a voce meglio che in chat);
- la parte fondamentale dell'esame è lo scritto;
  l'orale serve a determinare il voto finale all'interno della fascia data dallo scritto;
  raramente si viene bocciati all'orale;
- piuttosto che imparare a memoria la procedura per risolvere gli esercizi bisogna capire il ragionamento che ci sta dietro;

- studiare insieme ad altri molto utile (magari non ugualmente utile per tutti);
- se qualcosa non va nel corso potete rivolgervi a:
    - me (anche se può essere difficile);
    - Alessandra Pluda;
    - rappresentanti degli studenti!

Fine della presentazione del corso

Passo ora al contenuto matematico.

Avvertenze di carattere generale

- In questo corso il logaritmo è sempre in base e (= 2,718... , costante di Napier)

$$\log x = \log_e x$$

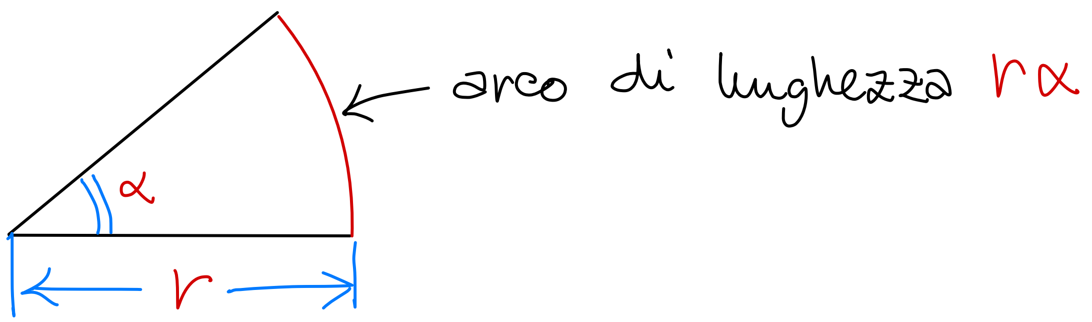
Questa scelta semplifica alcune formule nel calcolo delle derivate, ma non è quella usuale in ambito ingegneristico.

- Gli angoli sono misurati in radianti.

Quindi $90°$ diventa $\frac{\pi}{2}$, $45°$ diventa $\frac{\pi}{4}$ etc.

Questa scelta semplifica alcune formule nel calcolo delle derivate.

Significato geometrico della misura in radianti:



AM1 gest 20/21 lezione 3

1/10/20

Grafici di funzioni elementari

Perché è utile disegnare i grafici di funzioni?

Perché serve a visualizzare le informazioni contenute nella formula

Metodi per disegnare grafici:

STUDIO DI FUNZIONI

COMPUTER

GRAFICI DI FUNZIONI ELEMENTARI e operazioni sui grafici

argomento delle prossime lezioni

Esercizio

Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sotto risolvere (graficamente) le seg. equazioni e diseq.

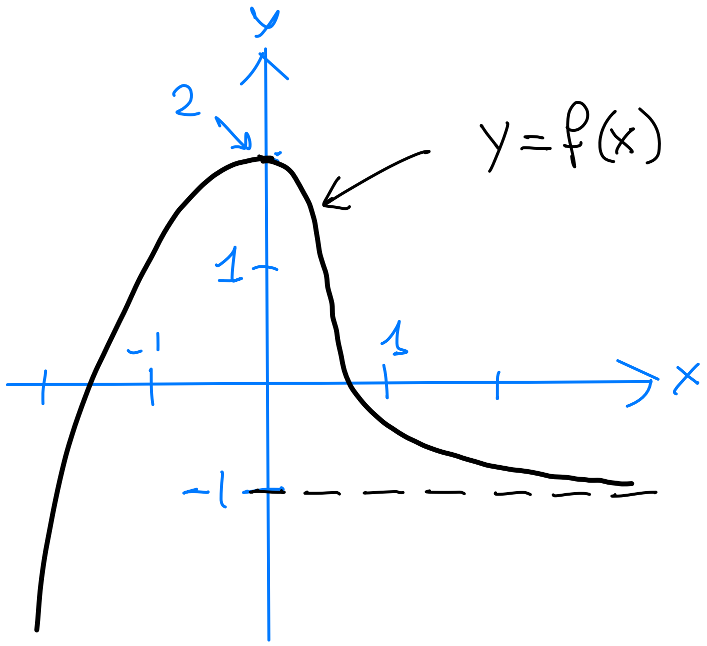
a) $f(x)=1$

b) $f(x)\geq 1$

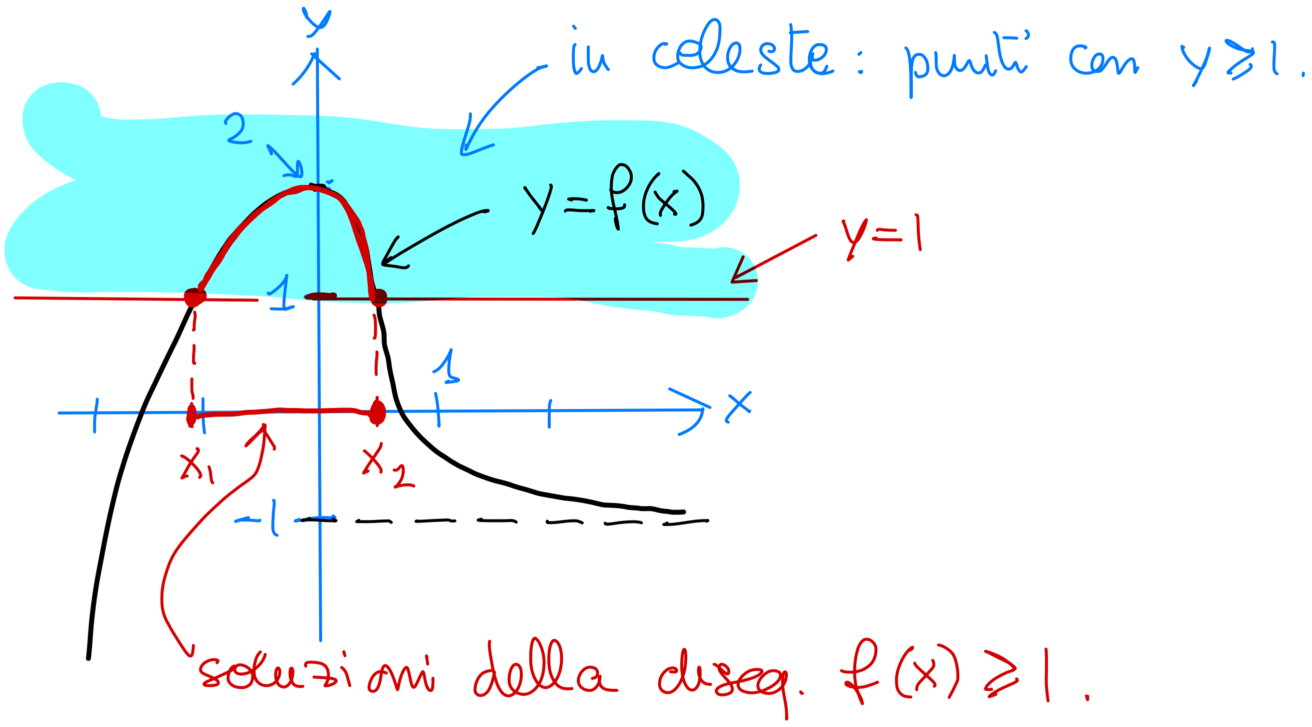
c) $f(x)=x^2$

d) $f(x)\geq x^2$

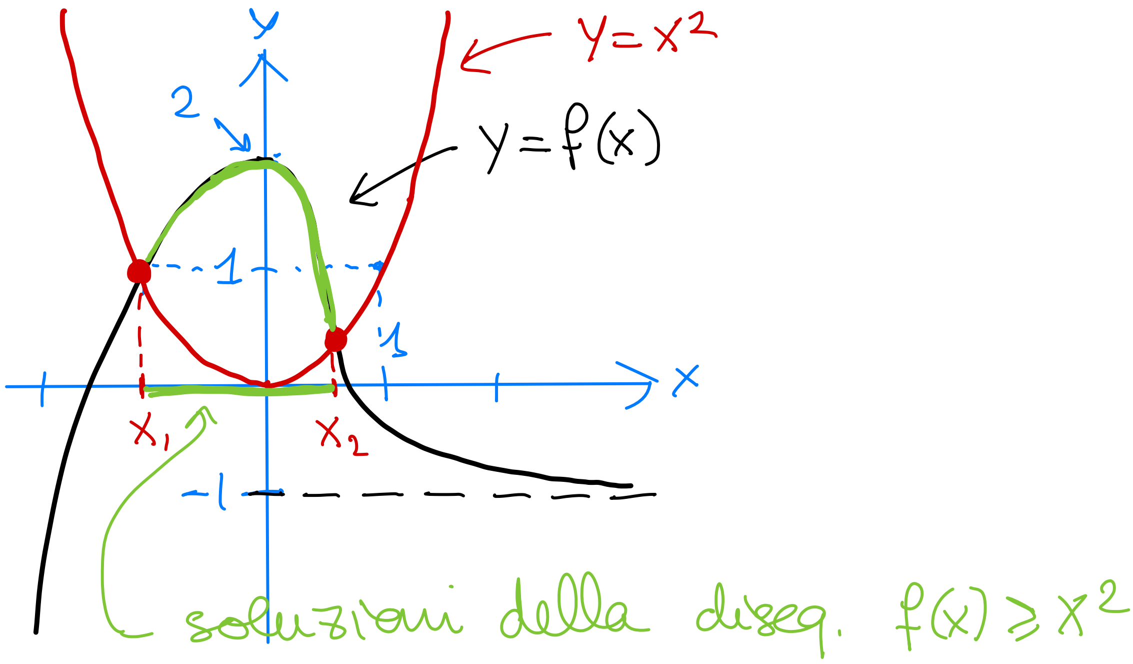
e) $f(x)\leq e^x-1$



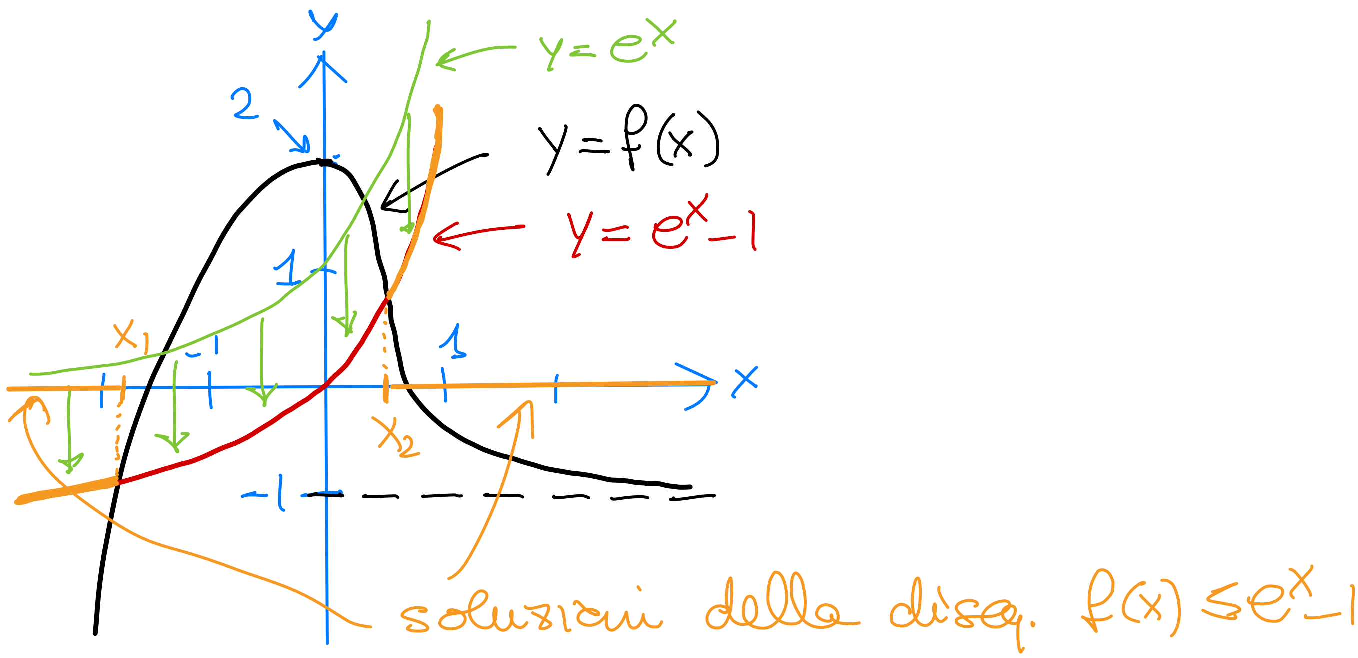
b) $f(x)\geq 1$

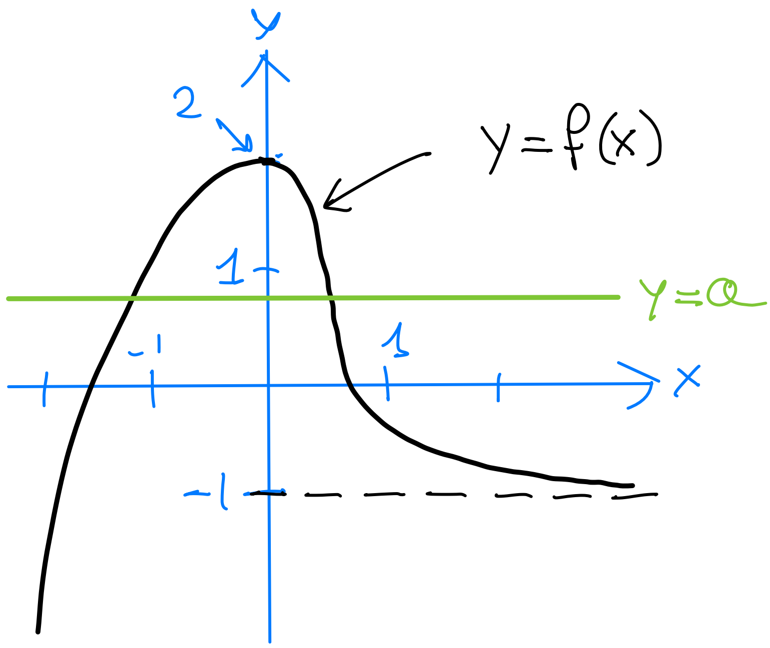


d) $f(x) \geq x^2$



e) $f(x) \leq e^x - 1$

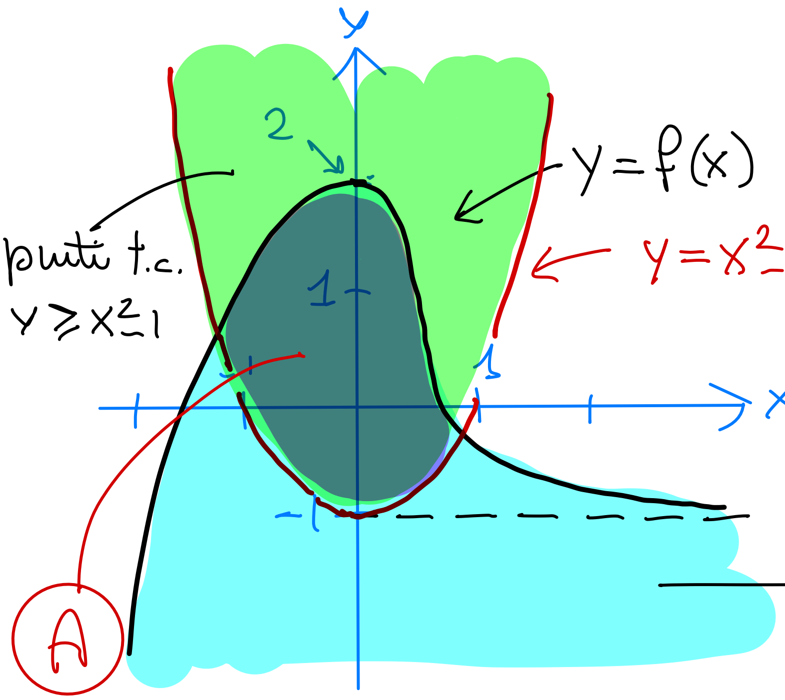




Domanda:
per quali $a \in \mathbb{R}$
l'equazione $f(x)=a$
ha 2 soluzioni?
Risp.: $-1 < a < 2$

$a \in (-1, 2)$

~~$a < 2 \wedge a > -1$~~



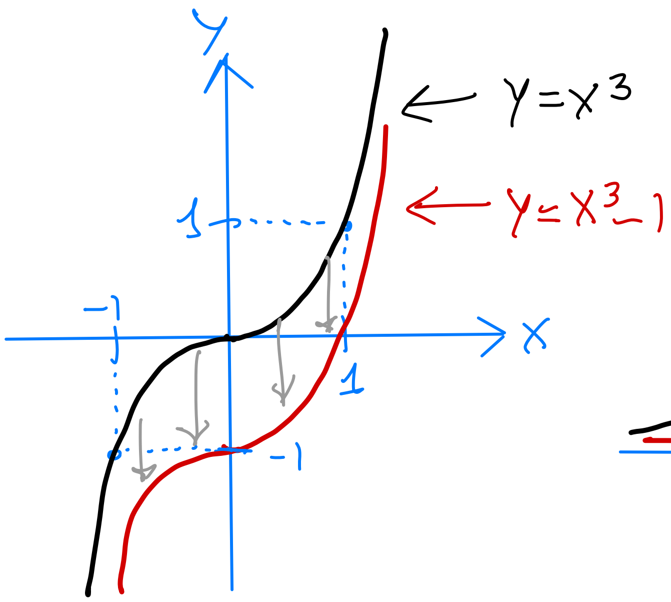
Disegnare l'insieme A
dei punti (x,y) tale
che $x^2-1 \leq y \leq f(x)$

punti t.c. $y \leq f(x)$

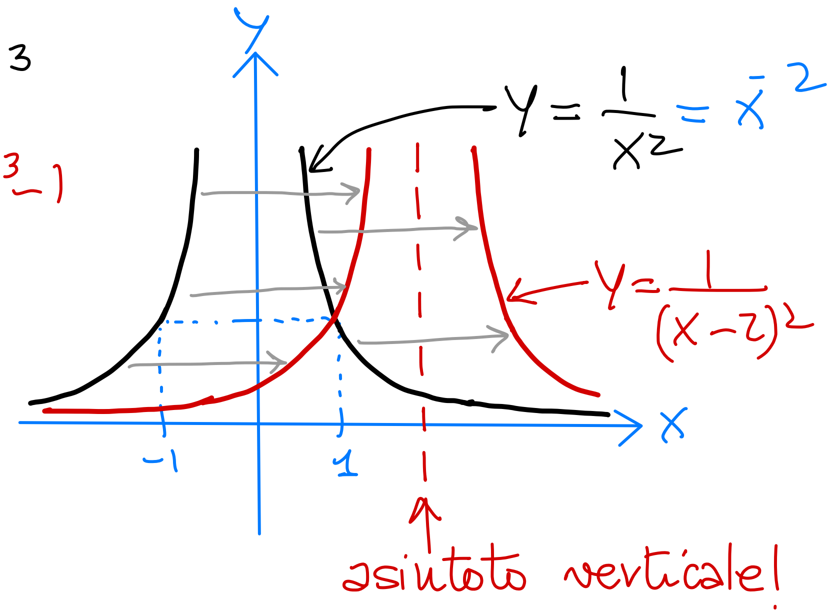
E se avessi chiesto l'insieme dei punti
t.c. $x^2-1 \leq y$ oppure $y \leq f(x)$?
In tal caso si prende l'unione dell'area
verde e di quella celeste.

Esempi : disegnare i seguenti grafici

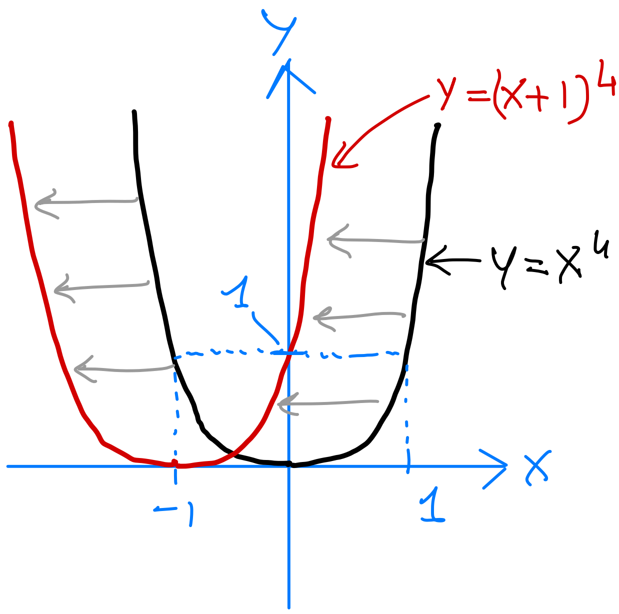
a) $y = x^3 - 1$



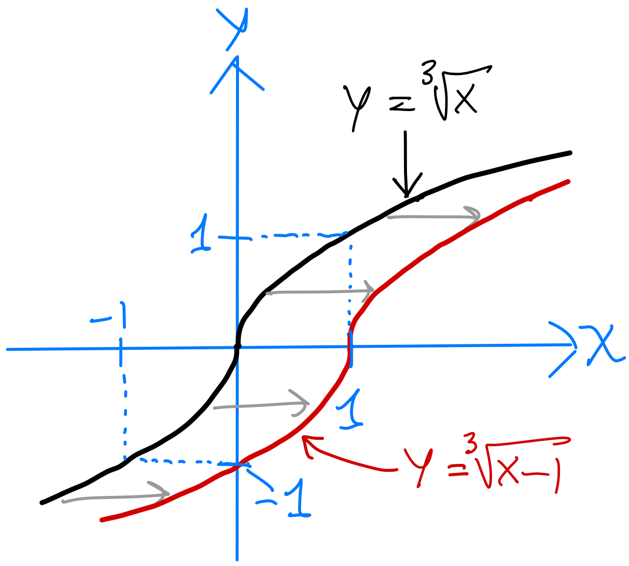
b) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$



c) $y = (x+1)^4$



d) $y = \sqrt[3]{x-1}$

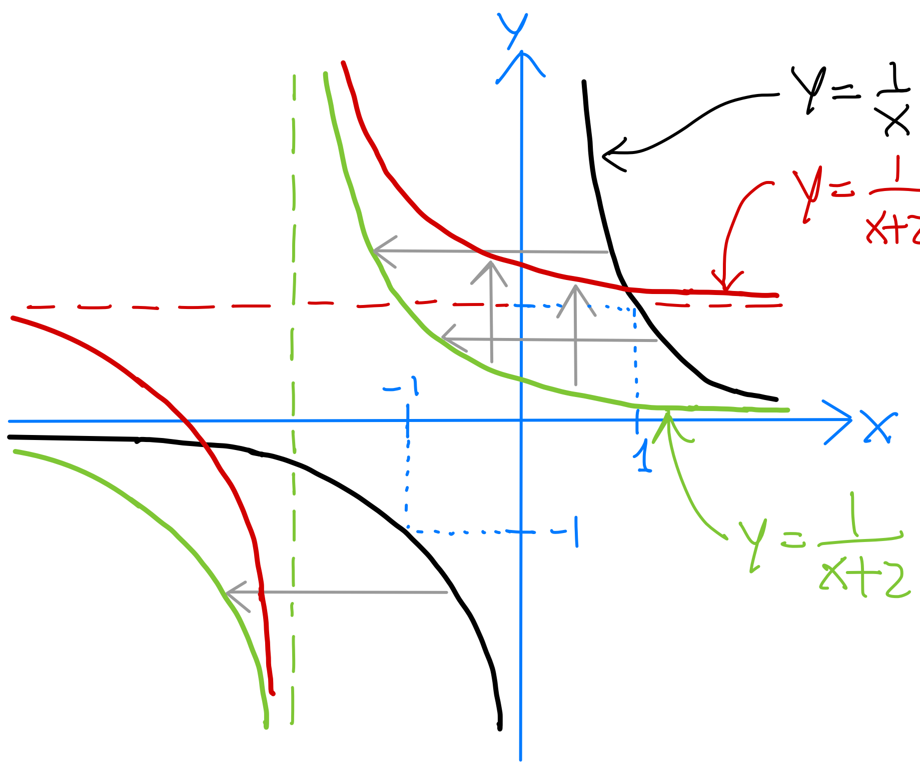


e) $\dfrac{1}{x+2}+1$

in due passi: $\dfrac{1}{x} \rightsquigarrow \dfrac{1}{x+2} \rightsquigarrow \dfrac{1}{x+2}+1$

$f(x) \rightsquigarrow f(x+2)$
sposto verso sinistra di 2

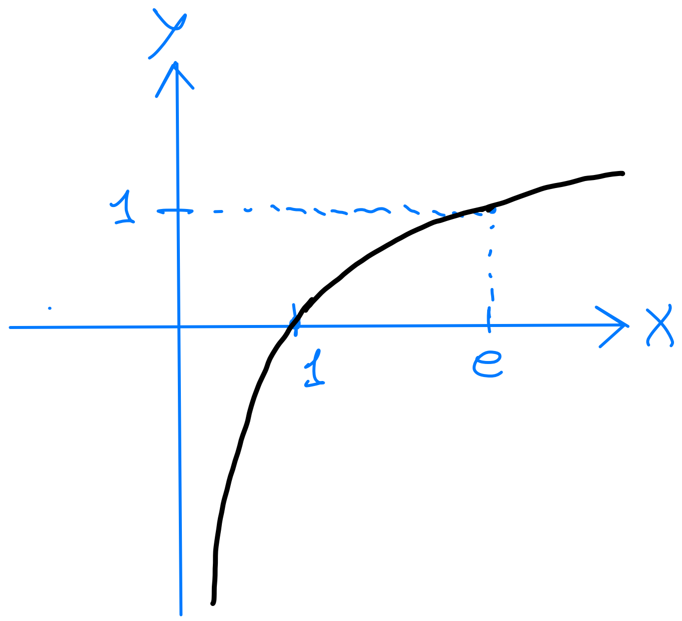
$f(x) \rightsquigarrow f(x)+1$
sposto verso l'alto di 1



Nota: va bene invertire l'ordine delle operaz.

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x}+1 \rightsquigarrow \frac{1}{x+2}+1$$

grafico del logaritmo $\quad y = \log x = \log_e x$



AM1 gest 20/21 lezione 4

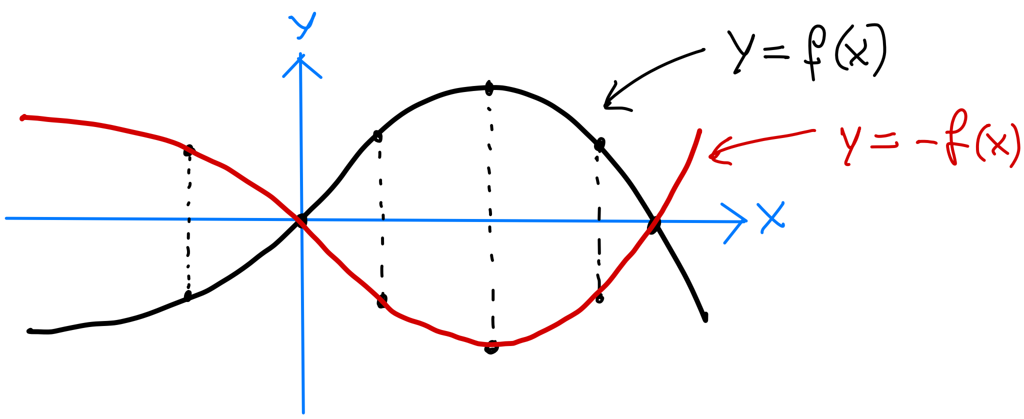
2/10/2020

Lezione del Venerdì : 9.40 → 11.40
con pausa in mezzo

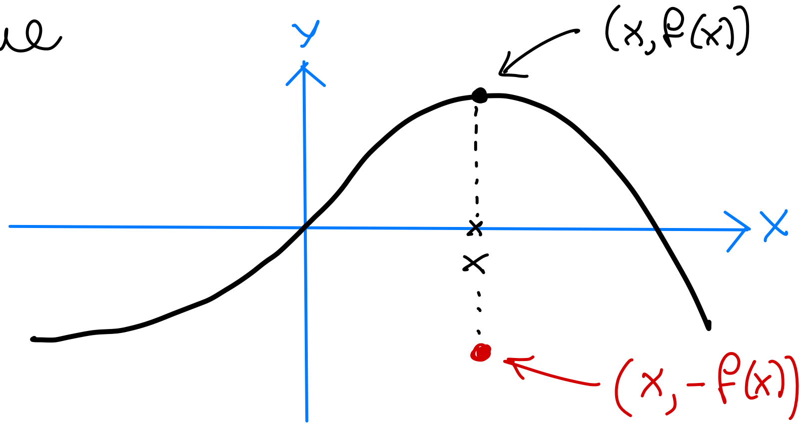
$\boxed{\text{inizio reale}}$

Operazioni sui grafici II

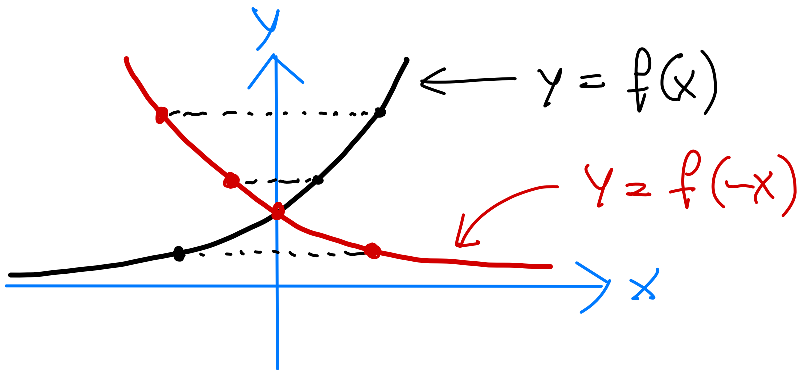
a) Il grafico di $-f(x)$ è ottenuto riflettendo quello di $f(x)$ rispetto all' asse delle x



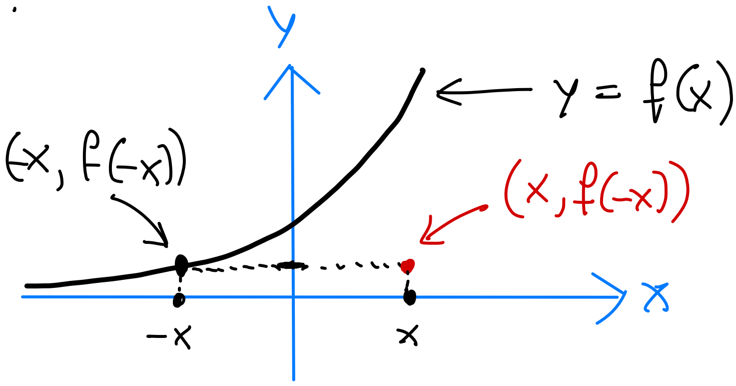
Spiegazione



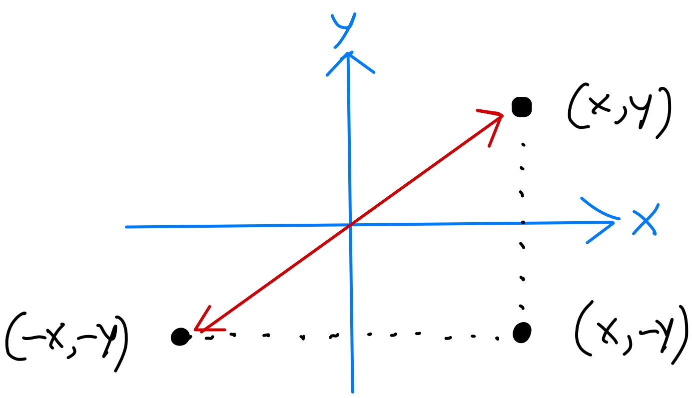
b) Il grafico di $f(-x)$ è la riflessione del grafico di f rispetto all'asse y



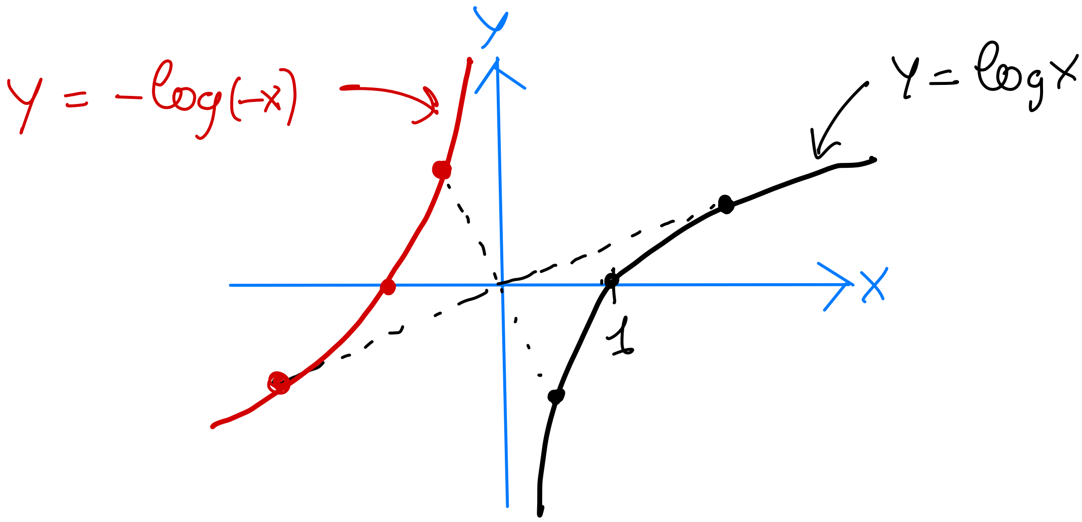
Spiegazione:



Osservazione: se rifletto un punto (x,y) rispetto ad un asse e poi rispetto all'altro ottengo la riflessione rispetto all'origine

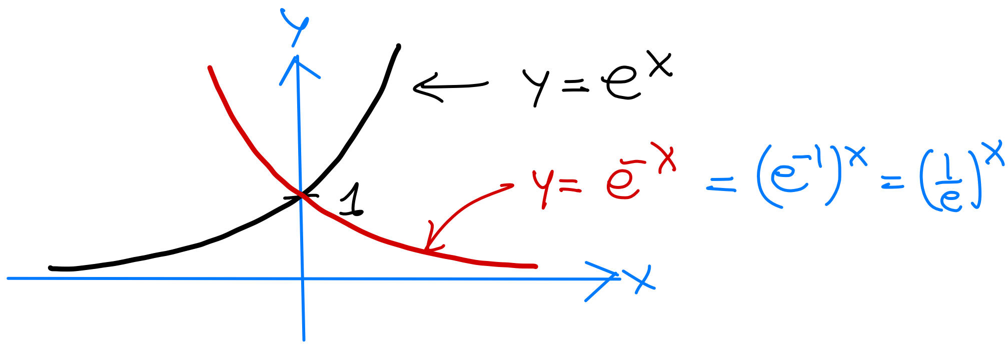


c) il grafico di $-f(-x)$ è quello di $f(x)$ riflesso prima rispetto all'asse x e poi all'asse y che è lo stesso che riflettere rispetto all'origine

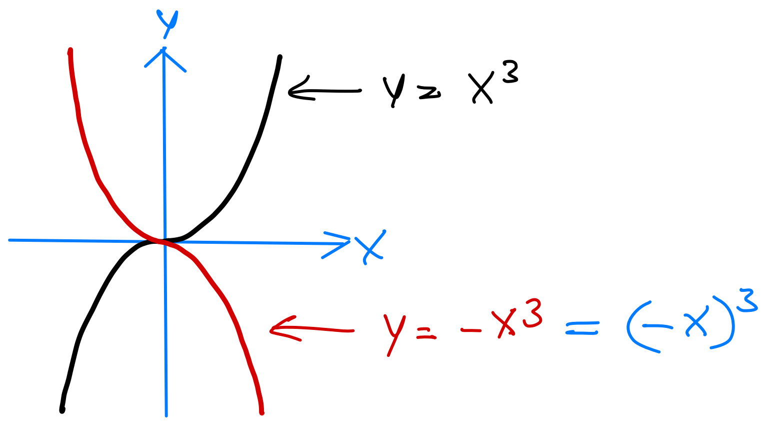


Esempi

1) e^{-x}



2) $-x^3$

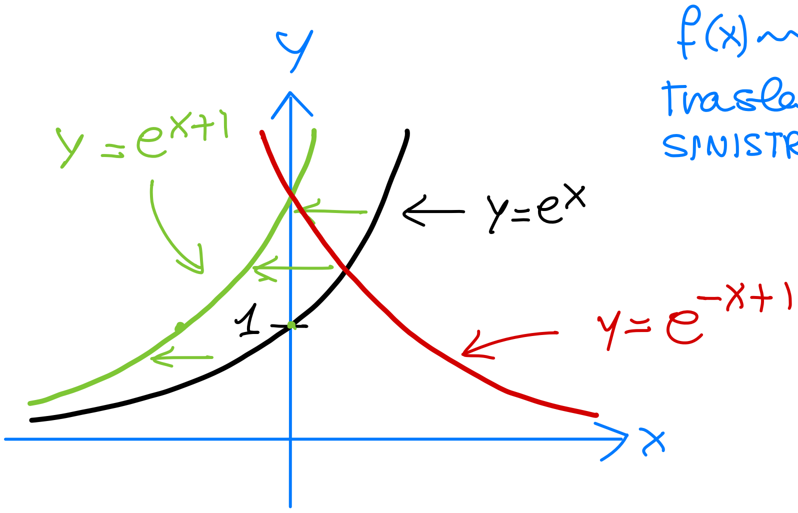


3) e^{1-x}

ci arrivo in due mosse: $e^x \rightsquigarrow e^{x+1} \rightsquigarrow e^{-x+1}$

$f(x) \rightsquigarrow f(x+1)$
traslaz. verso SINISTRA di 1

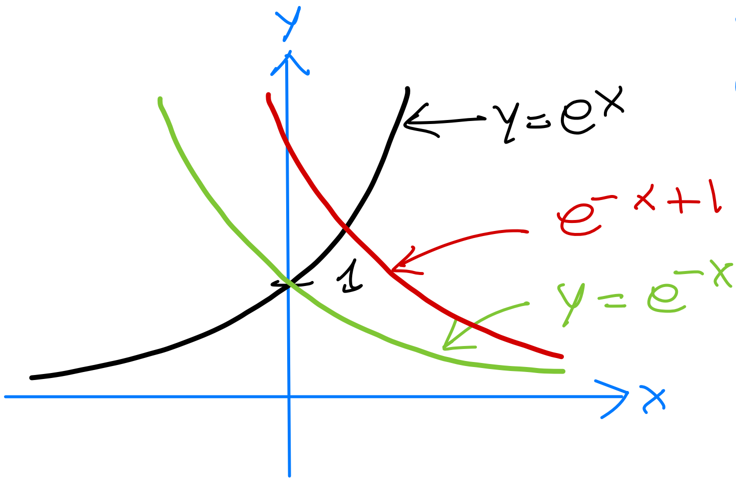
$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$
riflessione rispetto asse y



Versione alternativa $e^x \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-x+1}$

rifless. risp. asse y

$f(x) \rightsquigarrow f(\overset{x-1}{\cancel{x+1}})$
traslaz. verso ~~sinistra~~ destra di 1



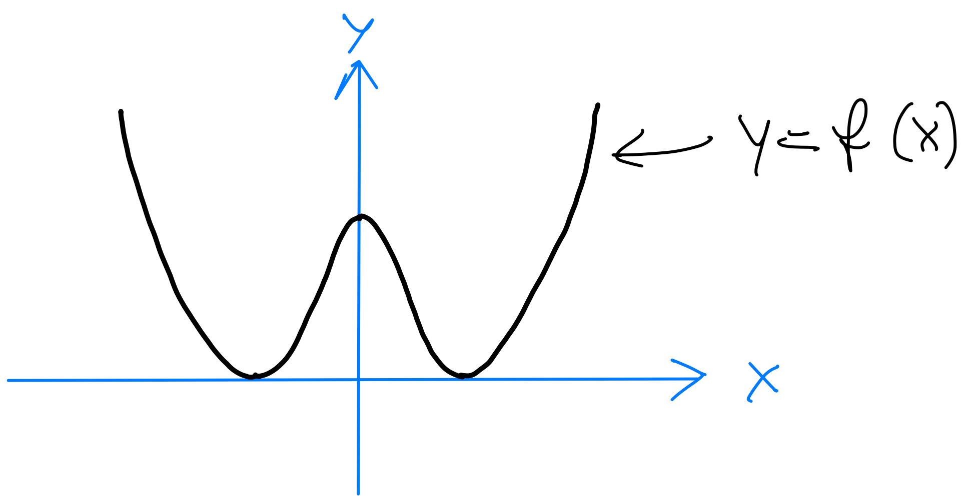
Funzioni pari

Una funzione $f(x)$ si dice "pari" se
$f(-x) = f(x)$ per ogni x

esempio base $f(x) = x^n$ con n pari

altro esempio $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2+1}$

$f(x)$ è pari se riflettendo il grafico rispetto asse y ottengo lo stesso grafico
cioè se il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all' asse y

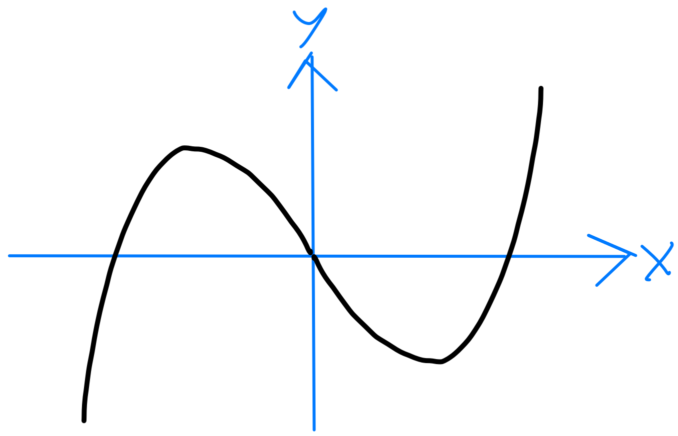


Funzioni dispari

Una funz. $f(x)$ si dice "dispari" se
$f(-x) = -f(x)$ per ogni x.

Esempio base: x^n con n dispari

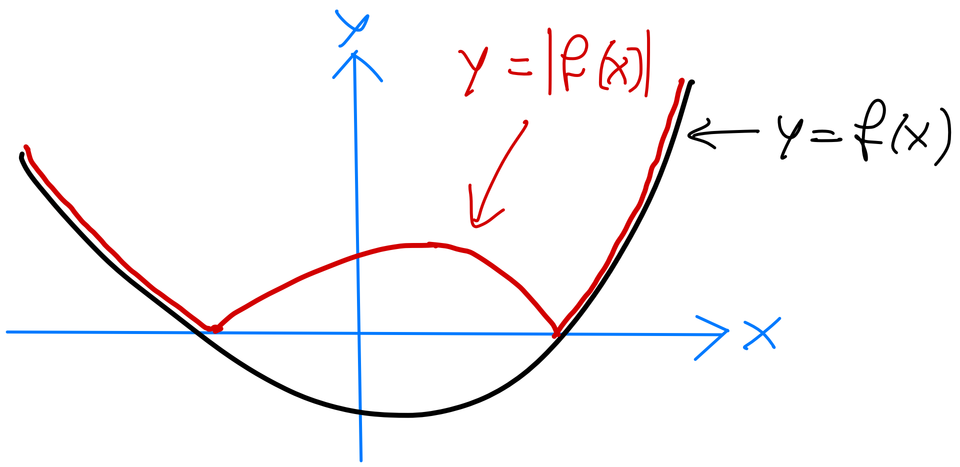
L'equazione $f(-x)=-f(x)$ equivale a
$f(x)=-f(-x)$ e quindi $f(x)$ è dispari se
riflettendo il suo grafico rispetto all'
origine ottengo lo stesso grafico, cioè
il grafico è simmetrico rispetto all'origine.



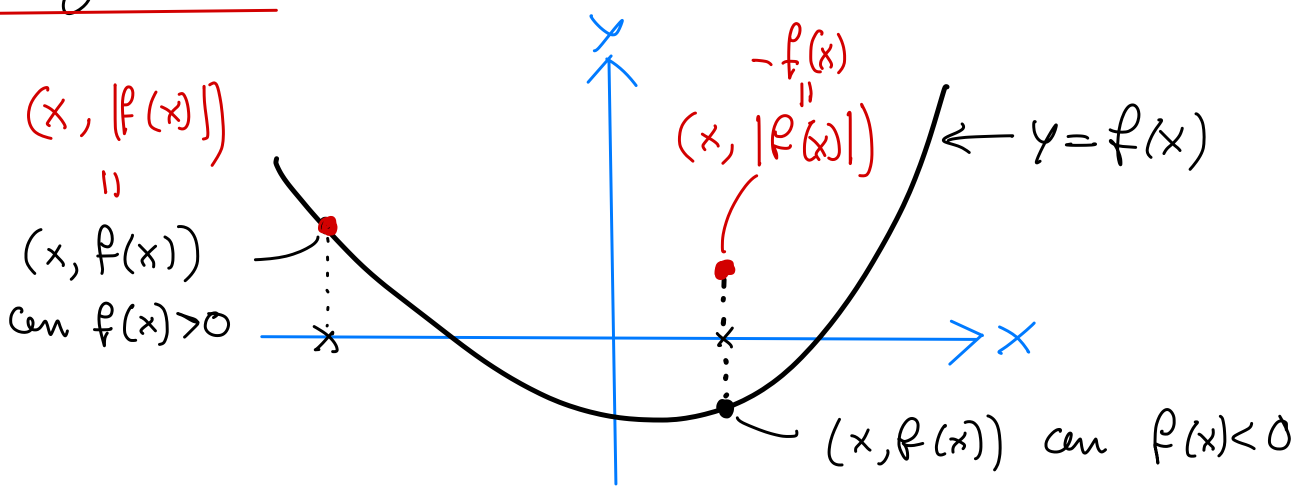
Esistono funzioni né pari né dispari
es.: e^x, $\log x$, $(x+1)^2$, x^3-1

Operazioni sui grafici III

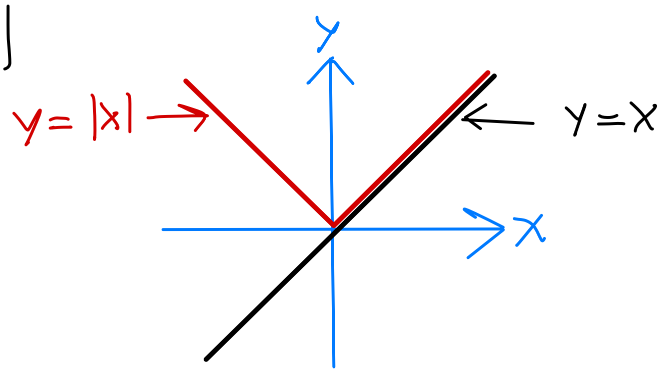
a) Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene ribaltando la parte del grafico di $f(x)$ sotto l'asse x (e portandola sopra l'asse x)



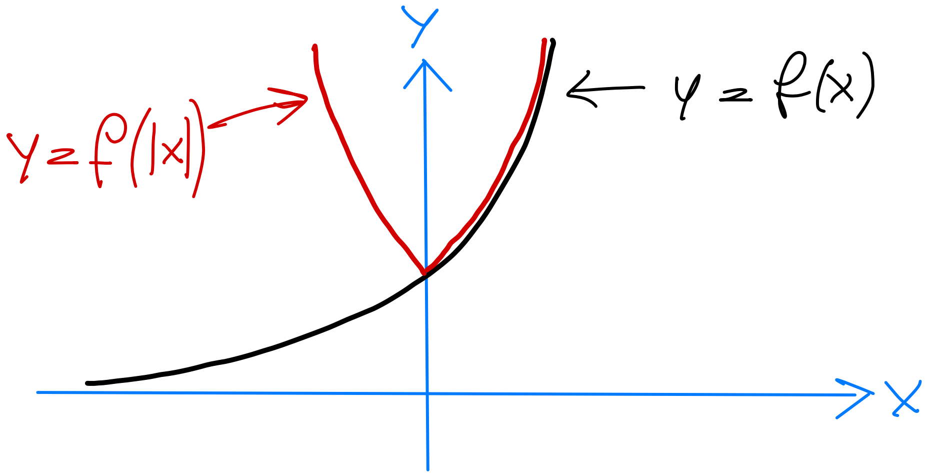
Spiegazione



Esempio: $|x|$



b) Il grafico di $f(|x|)$ è dato dalla parte del grafico di $f(x)$ a destra dell'asse y unita alla sua riflessione rispetto all'asse y.



Spiegazione: se $x > 0$, $f(|x|) = f(x)$

quindi il graf. di $f(|x|)$ a destra dell'asse y coincide con quello di $f(x)$;

inoltre $f(|x|)$ è una funzione pari.

quindi la parte del grafico a sinistra dell'asse y si ottiene riflettendo quella a destra!

(qualunque sia f !!)

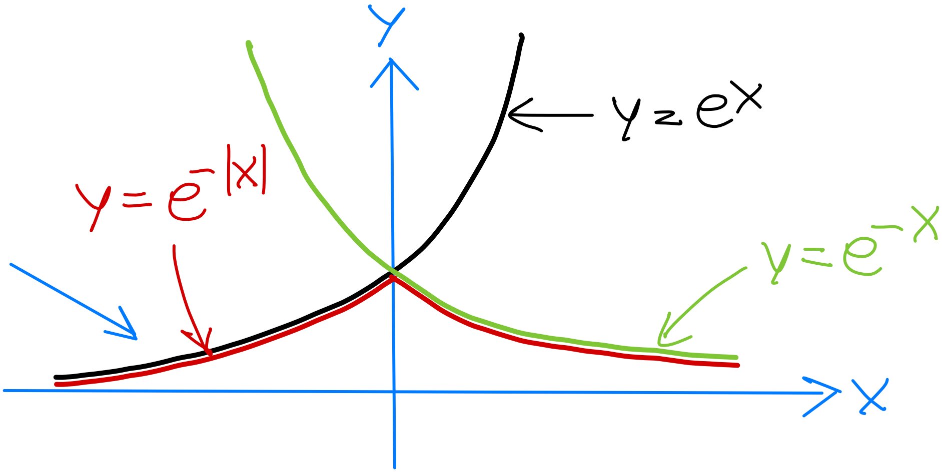
Esempio: $e^{-|x|}$

strategia: $e^{x} \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-|x|}$

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$
riflessione
risp. asse y

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$
....

per $x < 0$
$|x| = -x$
$-|x| = x$
$e^{-|x|} = e^{x}$



versione alternativa?

$e^{x} \rightsquigarrow e^{|x|} \rightsquigarrow e^{+|x|}$

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$

non funziona!

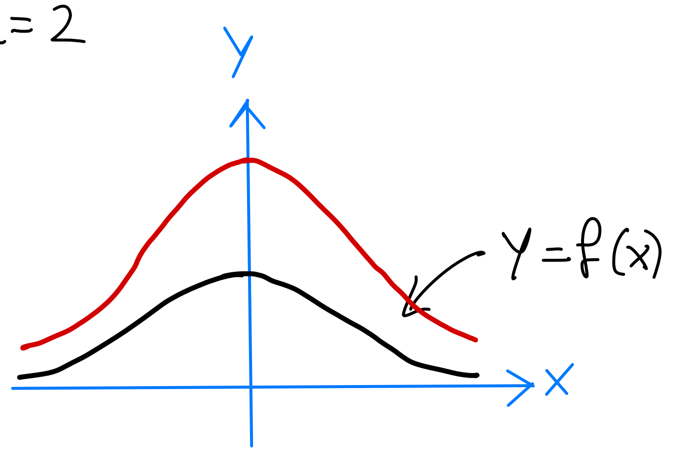
AM1 gest 20/21

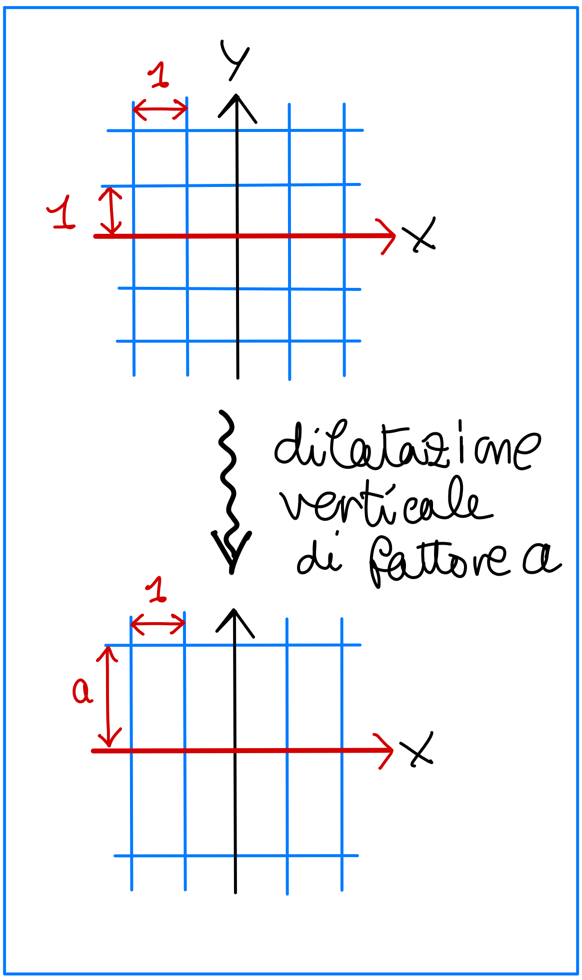
Lezione 5
prima parte
3/10/2020

Operazioni sui grafici IV

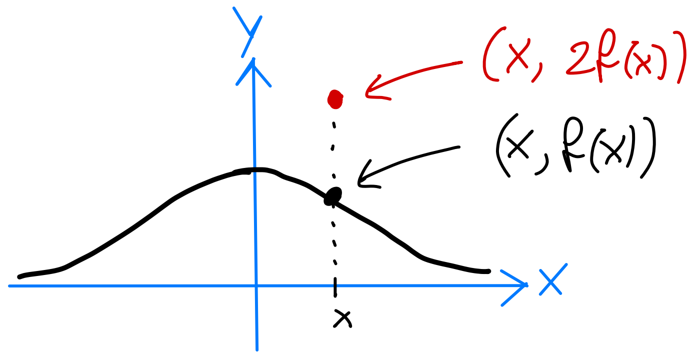
a) Dato $a>1$ il grafico $a\cdot f(x)$ è ottenuto dilatando il grafico di $f(x)$ verticalmente di un fattore a (lasciando fisso l'asse x)

$a=2$



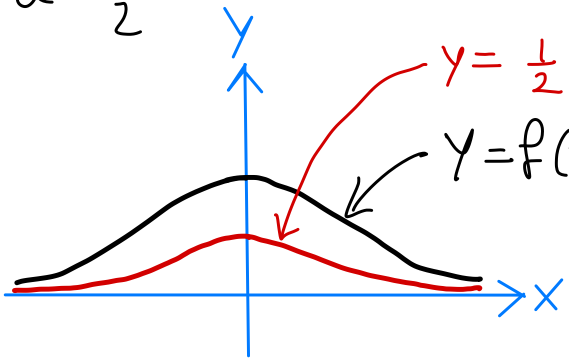


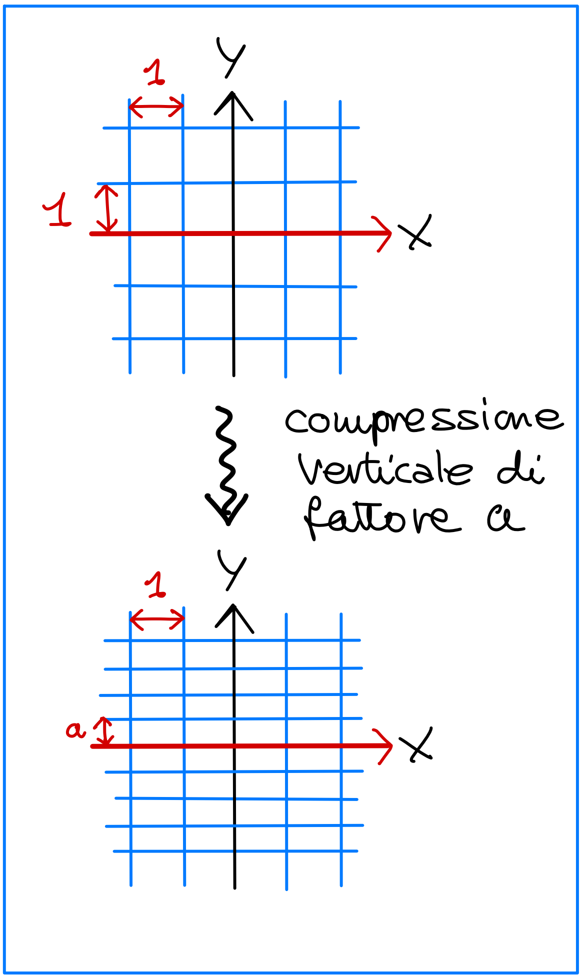
Spiegazione:



b) Dato $0<a<1$ il grafico di $a\,f(x)$ si ottiene comprimendo verticalmente il grafico di $f(x)$ di un fattore a (lasciando fisso l'asse x)

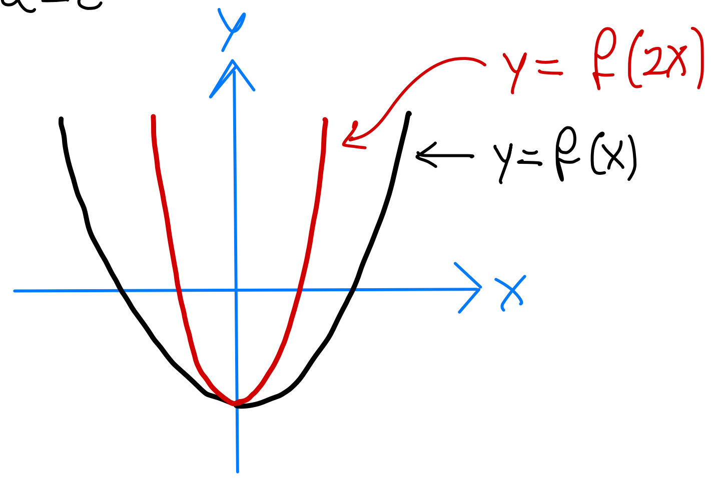
$a = \frac{1}{2}$



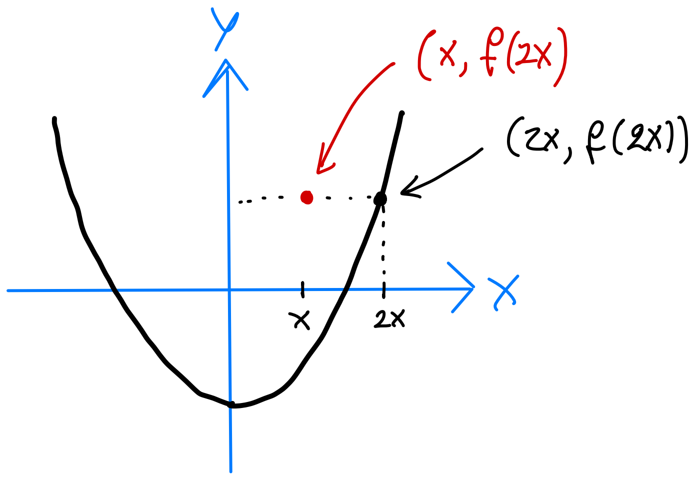


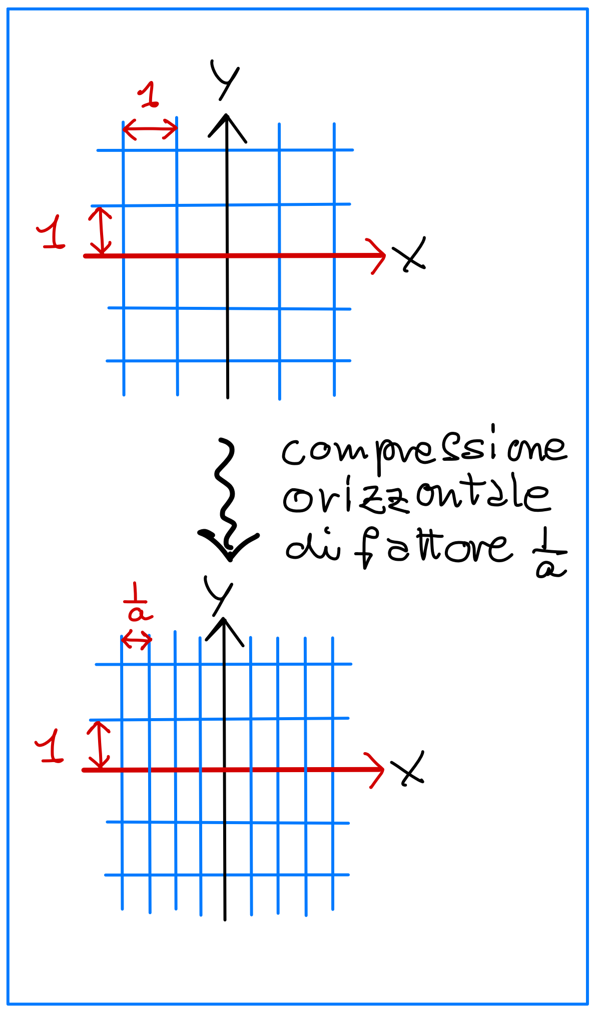
c) per $a > 1$ il grafico di $f(ax)$ si ottiene comprimendo orizzontalmente il grafico di $f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ (lasciando fisso l'asse delle y)

$a = 2$



spiegazione:



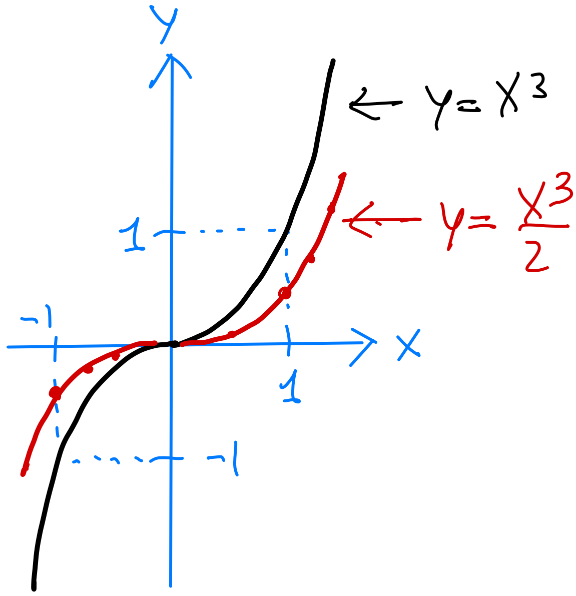


d) Se $0 < a < 1$, il grafico di $f(ax)$ si ottiene dilatando orizzont. il grafico di $f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ etc. etc.

Esempi

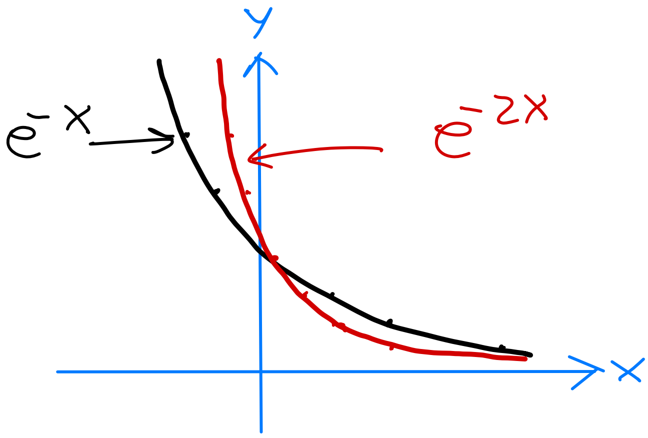
a) $\frac{x^3}{2}$ $\qquad x^3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\cdot x^3$

compressione
verticale di
fattore $\frac{1}{2}$

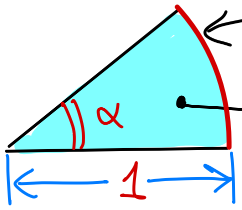


b) e^{-2x} $\qquad e^{-x} \rightsquigarrow e^{-(2\cdot x)}$

compressione
orizzontale
di fattore $\frac{1}{2}$



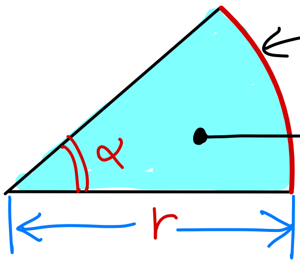
Ripasso di trigonometria



arco di lunghezza α

settore circ. di area $\frac{\alpha}{2}$

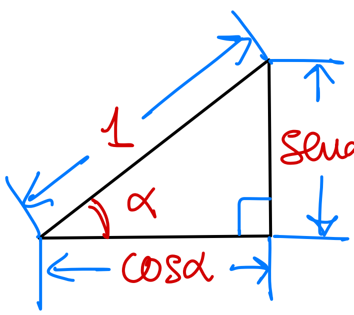
e per similitudine (cosa vuol dire?) ottengo

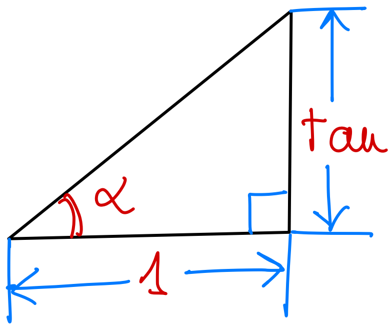


arco di lunghezza $r\alpha$

settore circ. di area $\frac{\alpha r^2}{2}$

Definizione di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ per $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



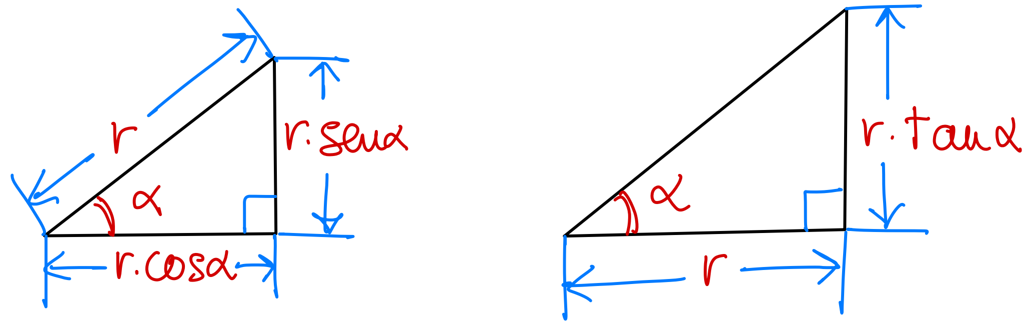


Proprietà

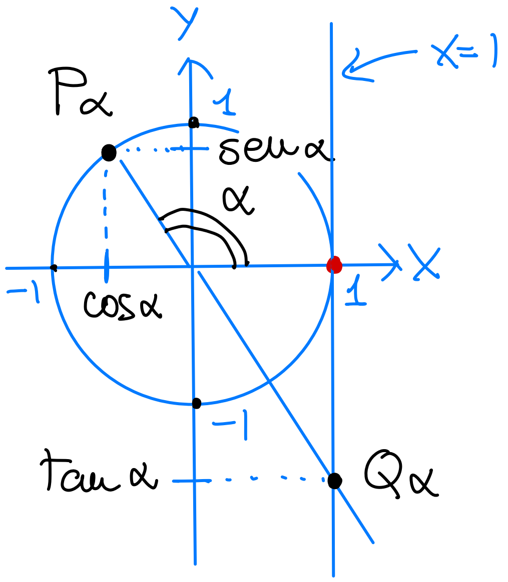
- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\Leftarrow$ teor. di Pitagora

$$\boxed{\text{notazione: } \cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 \neq \cos\alpha^2 = \cos(\alpha^2)}$$

- $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\Leftarrow$ similitudine

- 

Definizione di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$



P_α punto ottenuto partendo da $(1,0)$ e percorrendo una distanza $|\alpha|$ lungo la circonferenza in senso antiorario se $\alpha > 0$ e in senso orario se $\alpha < 0$.

$$\boxed{P_\alpha \text{ ha coordinate } (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)}$$

Q_α intersezione della retta verticale di eq. $x=1$ con la retta che passa per P_α e l'origine.

$$\boxed{Q_\alpha \text{ ha coordinate } (1,\ \tan\alpha)}$$

Osservazioni

- $\tan\alpha$ non è definita se $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k intero (anche negativo) perché Q_α non esiste;
- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ possono essere negativi
- $P_{\alpha+2\pi} = P_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha \\ \sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha \end{cases}$

  cioè le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ hanno periodo 2π.

Ricordo che una funzione $f(x)$ ha periodo T se $f(x+T) = f(x)$ per ogni x

numero positivo

- $P_{\alpha+\pi}$ è l'opposto (risp. all'origine) di P_α

  $\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \\ \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \end{cases}$

- $Q_{\alpha+\pi} = Q_\alpha \Rightarrow \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$

  cioè la funz. $\tan\alpha$ ha periodo π

- Valori per alcuni angoli significativi

α	$\cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha$	$\tan\alpha$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	non def.

- formule utili:

a) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \end{cases}$

che significa?

b) $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Quindi seno e tangente sono funzioni dispari mentre il coseno è pari.

d) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Da d) si ottengono diversi casi particolari utili

e) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

etc. etc.

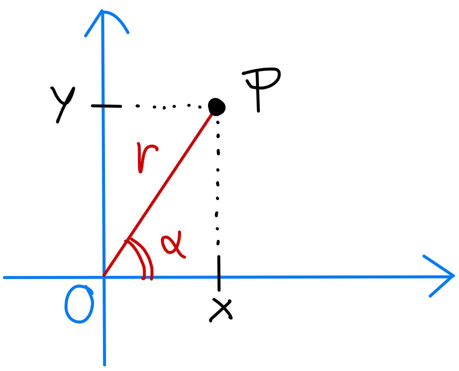
AM1 gest

Lezione 6

6/10/2020

Ripasso di trigonometria (Continuazione)

Coordinate polari



(x,y) coordinate cartesiane di P

(r,α) coordinate polari di P

$r :=$ distanza di P dall' origine O

$\alpha :=$ angolo tra segmento $\overline{OP}$ e asse x.

Osservazioni

- per l' origine O, $r=0$ e α non è definito.
- α è un numero positivo o negativo.
- α non è univocamente determinato:

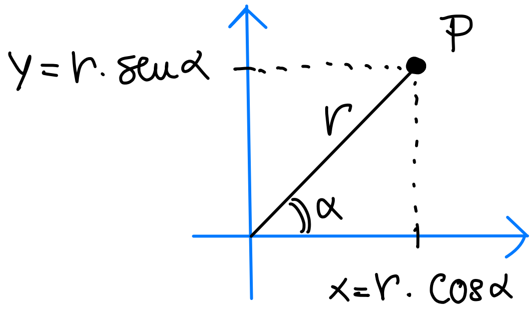
  se α è un angolo per P, allora anche $\alpha + 2k\pi$ con k intero è un angolo per P.

  Per avere un unico α si impone talvolta $0 \leq \alpha < 2\pi$ (oppure $-\pi < \alpha \leq \pi$).

Formule di conversione

note r e α, x e y sono date da:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

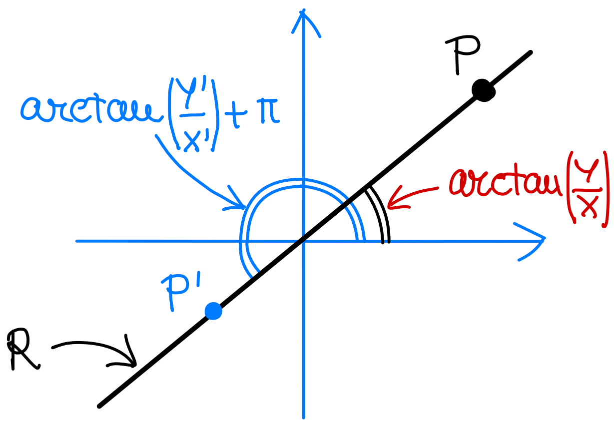


note x e y, r e α sono date da

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} & \Leftarrow \text{teorema di Pitagora} \\ \boxed{\tan\alpha = \dfrac{y}{x}} & \Leftarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cancel{r}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cancel{r}\cos\alpha} = \tan\alpha \end{cases}$$

non basta a trovare α!

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ non è la formula corretta.



Infatti per ogni P, P' sulla retta R vale $y/x = y'/x'$ e quindi

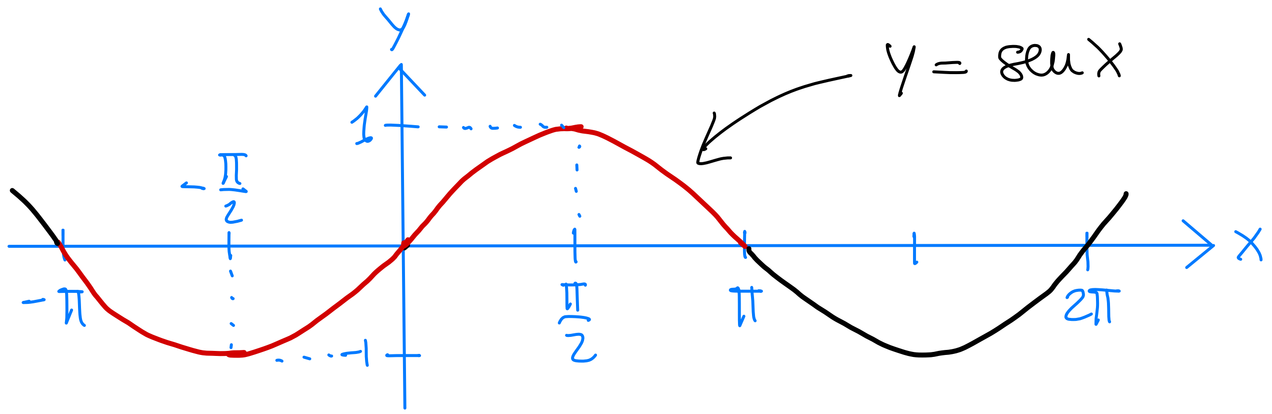
$$\arctan(y/x) = \arctan(y'/x')$$

Ma quest'angolo non va bene per tutti i punti.

Formula corretta:

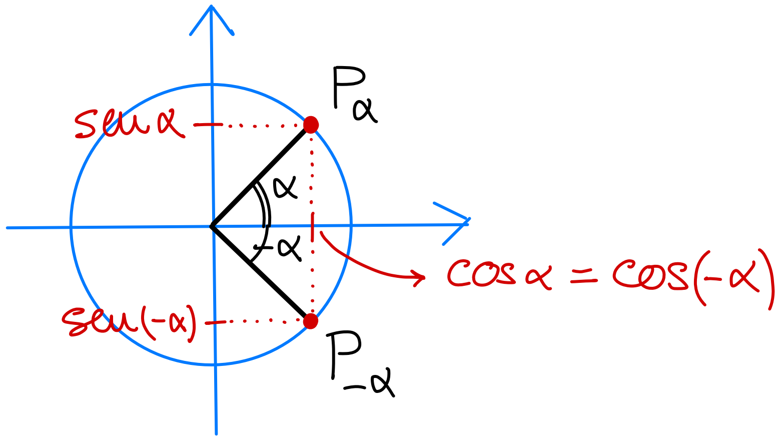
$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ \frac{\pi}{2} + \pi & \text{se } x = 0,\ y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Grafici delle funzioni sen x, cos x, tan x



Disegno la parte in rosso usando la definiz. di sen x (con la circonferenza trigonometrica) e la parte in nero usando il fatto che sen x è una funzione di periodo 2π e quindi il grafico si "ripete" sugli intervalli $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $[-3\pi, -\pi]$ etc.

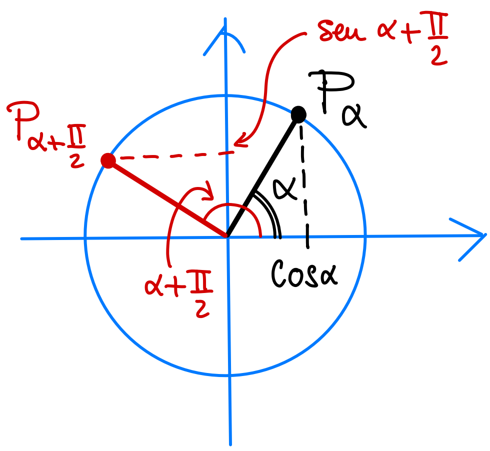
Il disegno suggerisce che sen x è una funzione dispari, cosa che si verifica dalla definizione:



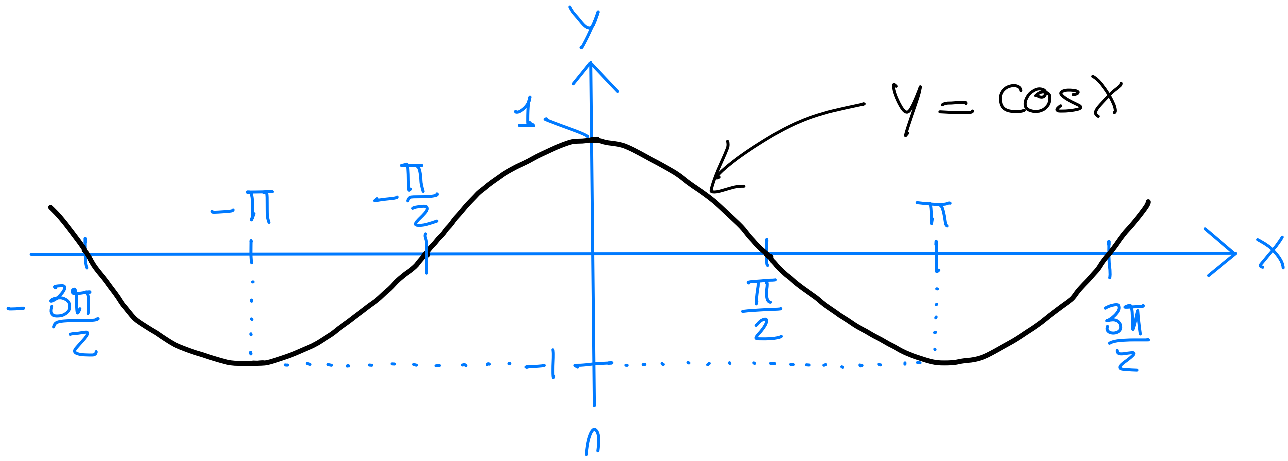
Questo mostra anche che la funzione coseno è pari: $\cos(-x) = \cos x$.

Inoltre vale $\cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

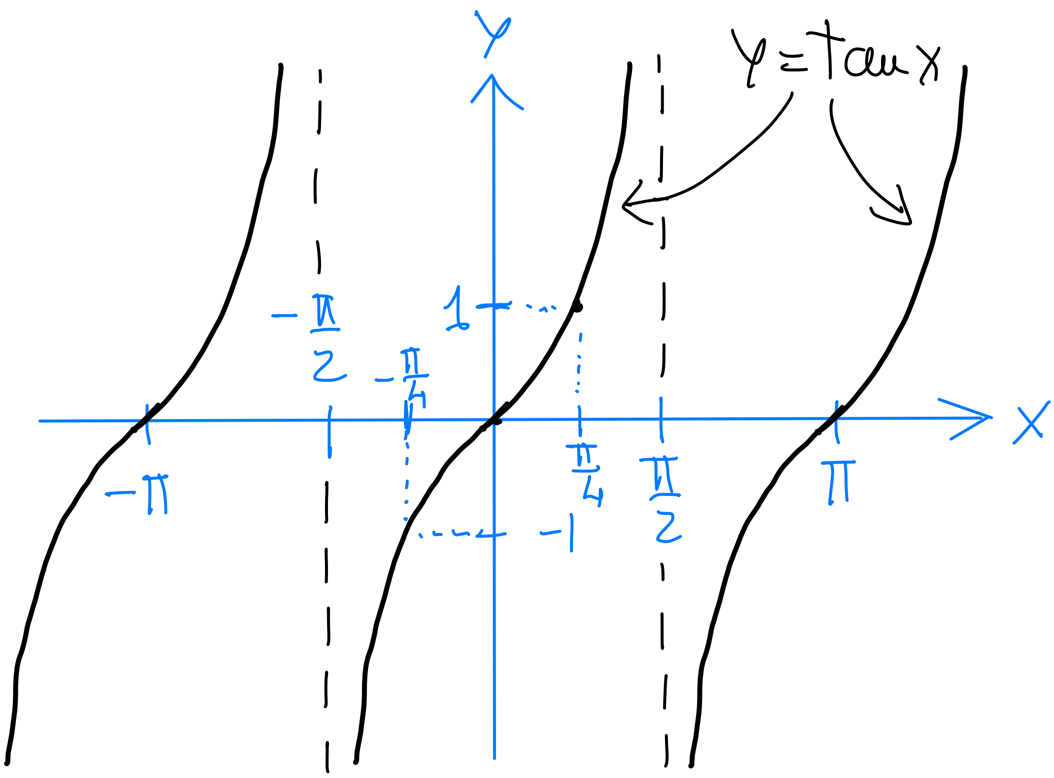
Posso verificarlo usando la formula per il seno della somma di due angoli o direttamente dalla definizione:



Quindi il grafico di $\cos x$ si ottiene traslando quello di $\sin x$ verso sin. di $\frac{\pi}{2}$



Infine il grafico della tangente



Ho usato che $\tan x$ ha periodo π.

Funzioni (terminologia)

Intervalli: dati $a < b$

$$[a,b] := \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b) := \{x : a < x < b\}$$

$$[a,b) := \dots \qquad (a,b] := \dots$$

$$[a,+\infty) := \{x : x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] := \{x : x \leq b\}$$

$$(a,+\infty) := \dots \qquad (-\infty, b) := \dots$$

Definizione di funzione (non precisa)

Dati due insiemi X e Y (di numeri o altro) una funzione f da X a Y ($f : X \to Y$) è una "procedura" che ad ogni $\boxed{x \in X}$ associa un elemento $y \in Y$, indicato con $\boxed{f(x)}$.

output

input

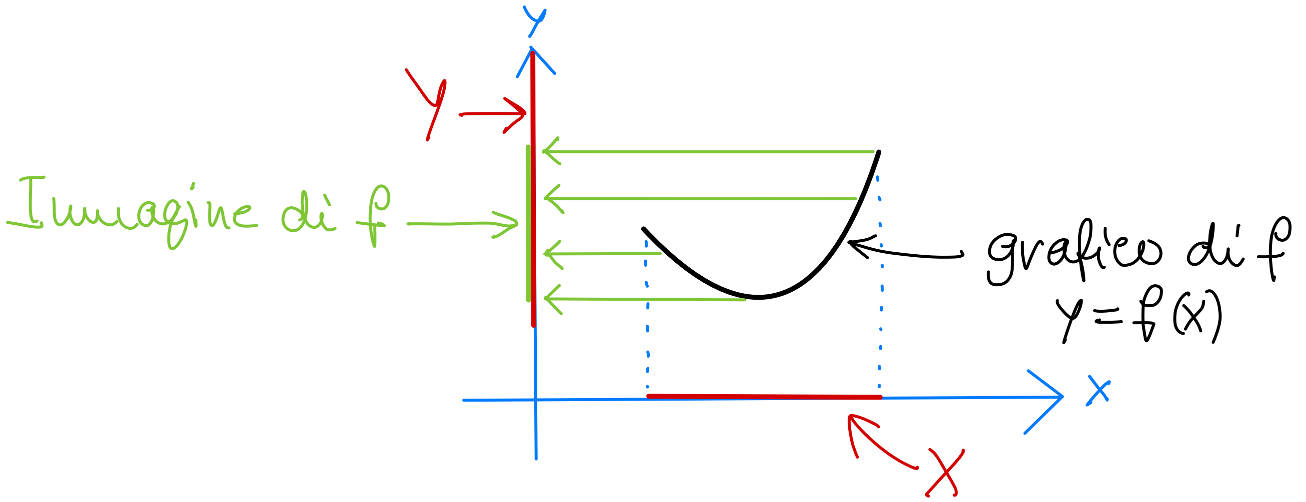
X si chiama dominio di f;

Y si chiama codominio di f;

$\{f(x) : x \in X\}$ si chiama immagine di f.

Se X, Y sono contenuti in $\mathbb{R}$ il grafico di f è l'insieme (curva) dei punti del piano

$$\{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$



L'immagine si ottiene "proiettando" il grafico sull'asse delle y.

Ancora funzioni

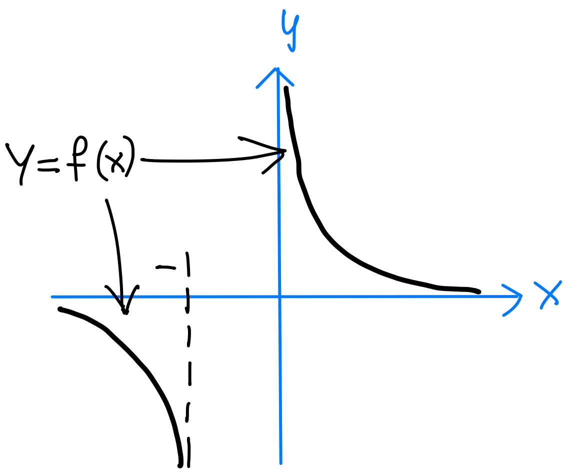
Richiamo: X, Y insiemi, f funzione da X in Y:

- dominio di $f := X$;
- codominio di $f := Y$;
- immagine di $f := \{\text{valori di } f\} = \{f(x) : x \in X\}$.

Inoltre, se X e Y sono insiemi di numeri $(X, Y \subset \mathbb{R})$:

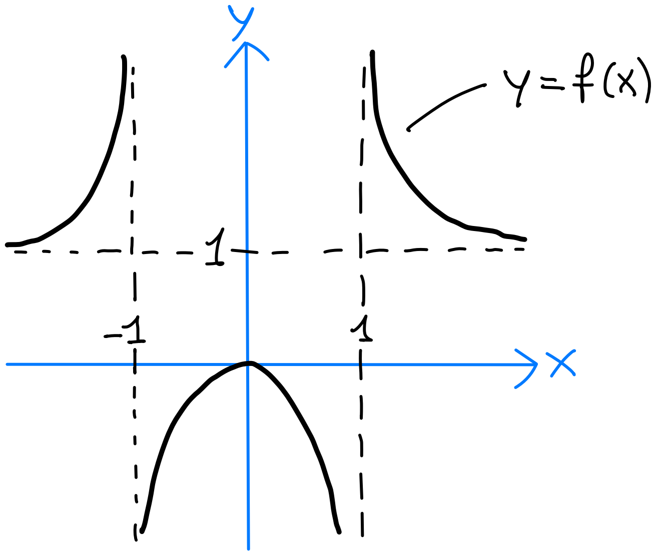
- grafico di $f = \{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$

Esempi



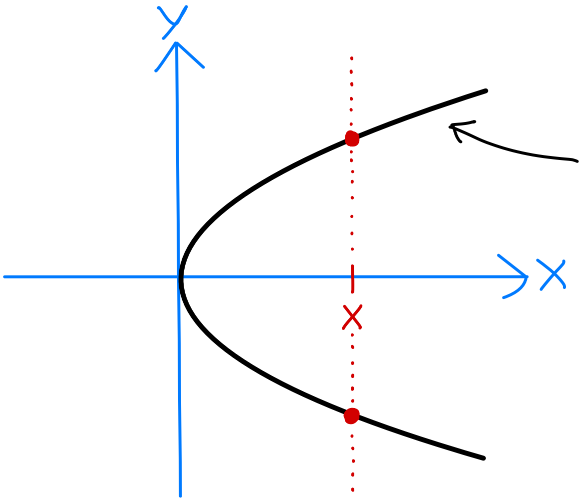
dominio $= (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) = \{x : x<-1 \text{ opp. } x>0\}$

immagine $= (-\infty,0) \cup (0,+\infty) = \{y : y \neq 0\}$



dominio = $\{x : x \neq \pm 1\}$

immagine = $\{y : \; y \leq 0$ opp. $y > 1\} = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.



Questo NON è il grafico di una funzione $f(x)$

Infatti un grafico del tipo $y = f(x)$ interseca ogni retta verticale in al più un punto, e questo insieme non ha questa proprietà.

(Ma questo è un grafico del tipo $x = f(y)$, con $f(y) = y^2$)

Osservazioni

- L' uso della x per la variabile indip. (input) e della y per la variabile dipend. (output) è puramente convenzionale, ogni tanto si usano altre lettere.

- Quasi sempre in questo corso X e Y sono insiemi di numeri ($X, Y \subset \mathbb{R}$) e $f(x)$ è data da una formula (per es., $f(x) = \tan(1+x^3)$).

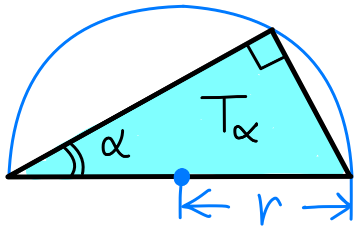
  In tal caso il dominio di f è l'insieme di definizione della formula cioè l'insieme degli x per cui $f(x)$ si può calcolare.

Esempi

formula	insieme di definizione	immagine
$x^2 - 4$	$\mathbb{R}$	$[-4, +\infty)$
$\dfrac{1}{x-2}$	$\{x : x \neq 2\}$	$\{y : y \neq 0\}$
$\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$	$[0, +\infty)$
2	$\mathbb{R}$	$\{2\}$

immagine: insieme degli y t.c. l'eq. $f(x) = y$ ha almeno una soluzione x

- Considero $f(\alpha) := \text{area}(T_\alpha)$ dove T_α è il triangolo rettangolo in figura.



Quindi il dominio di f è l'insieme degli angoli α per cui si può definire T_α, cioè $\{\alpha : 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$.
I cateti di T_α sono $2r\cos\alpha$ e $2r\,\text{sen}\,\alpha$ e quindi

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}(2r\cos\alpha)(2r\,\text{sen}\,\alpha) = r^2\,\text{sen}(2\alpha).$$

Anche se $r^2\,\text{sen}\,\alpha$ è definita per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il dominio "naturale" di f resta $(0, \frac{\pi}{2})$.

- Considero le formule x^2-1 e $(x-1)(x+1)$: sono diverse ma danno lo stesso risultato per ogni x. Per noi queste sono la stessa funzione.

- Altri esempi di funzioni

A) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

dominio: $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$; trovate l'immagine.

B) Legge oraria di un punto P in movimento nello spazio (o nel piano).

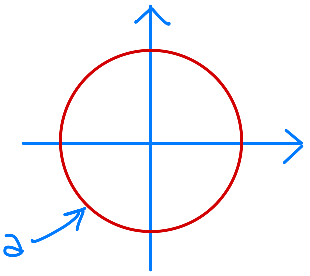
Dato t tempo, $f(t)$ è la posizione di P all' istate t, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

coordinate di P al tempo t

Dominio: intervallo di tempi

Codominio: lo spazio $\mathbb{R}^3$ (o il piano $\mathbb{R}^2$)

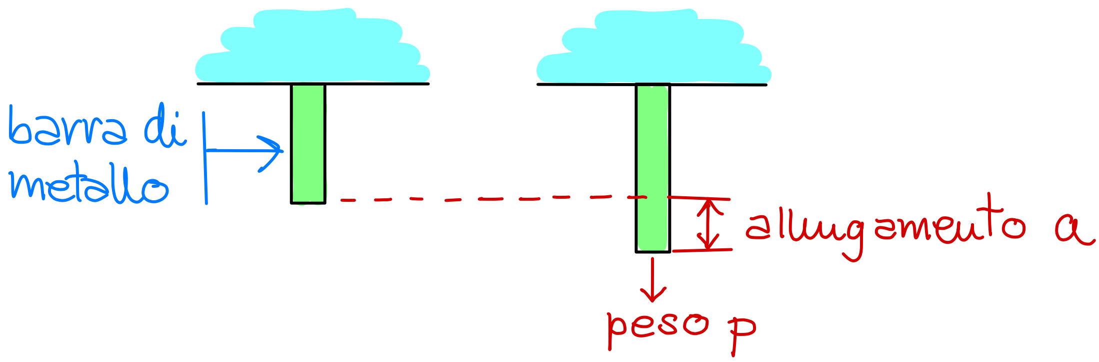
immagine: traiettoria di P.



Esempio: $f(t) = (\cos t, \sin t)$

moto circolare uniforme; traiettoria

C) Faccio delle misurazioni sperimentali:

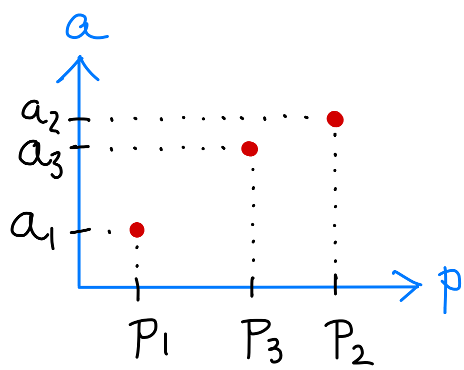


L' allungamento a dipende dal peso p: $a = a(p)$.

Se ripeto la misurazione con i pesi p_1, p_2, p_3 ottengo una funzione $a(p)$ con

dominio $= \{p_1, p_2, p_3\}$

immagine $= \{a_1, a_2, a_3\}$



D) f funzione che ad ogni targa di automobile associa il codice fiscale del proprietario.

Qual è il dominio? E l'immagine?

E) Esistono funzioni il cui "input" sono più numeri:

$$f(\underbrace{x_1, x_2}_{x}) \,, \quad f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x})$$

Queste si chiamano funzioni di n variabili, e verranno studiate nel corso di Analisi II.

funzioni iniettive

$f: X \to Y$ si dice iniettiva se a input diversi corrispondono sempre output diversi, cioè

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

cioè l'equaz. $f(x) = y$ ha al più una soluz. x per ogni valore del parametro y.

Graficamente: il grafico di f interseca ogni retta orizzontale in al più un punto.

Esempi: $f(x) = e^{1-x}$ è iniettiva, infatti l'eq. $y = e^{1-x}$ ha al più la soluz. $x = 1 - \log y$;
$f(x) = x^2$ non è iniettiva (infatti $f(-2) = f(2)$).

funzioni surgettive

$f: X \to Y$ si dice surgettiva se l'immagine è Y, cioè l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluz. x per ogni $y \in Y$.

Graficamente: il grafico di f interseca ogni retta orizzontale ad altezza y con $y \in Y$.

Esempi: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $f(x):=\log x$ è surgettiva, infatti l'eq. $y=\log x$ ammette sempre la sol. $x=e^y$.
La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x^2$ non è sur., infatti l'eq. $x^2=-1$ non ammette soluzioni.

Funzione inversa

Date $f:X\to Y$ e $g:Y\to X$ si dice che g è l'inversa di f (ed f è l'inversa di g) se

$$g(f(x))=x \text{ per ogni } x\in X,$$
$$f(g(y))=y \text{ per ogni } y\in Y.$$

In altre parole la funzione g "disfa" quello che fa f e viceversa.
L'inversa di f (se esiste) è una sola e si indica talvolta con f^{-1} (pessima notazione, perché si confonde con il reciproco $1/f$).

L'inversa esiste se e solo se f è sia iniettiva che surgettiva (cioè, è bigettiva).

In tal caso l'equazione $f(x)=y$ ha un'unica soluzione x per ogni $y \in Y$, e $g(y)$ è proprio questa soluzione x.

Esempi facili di inversa

A) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax+b$ con $a \neq 0$.

Risolvo l'equazione $y = ax+b$ e ottengo
$ax = y-b$, $x = \frac{1}{a}(y-b)$;

dunque l'eq. ha un'unica soluzione per ogni $y \in \mathbb{R}$, e questo significa che f è bigett. (cosa che si vede anche dal grafico);

l'inversa di f è $g(y) = \frac{1}{a}(y-b)$.

B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3+1$.

Risolvo l'eq. $y = x^3+1$ e ottengo $x = \sqrt[3]{y-1}$;

dunque l'eq. ha un'unica soluzione per ogni $y \in \mathbb{R}$ e quindi f è bigettiva (si vede anche dal grafico);

l'inversa di f è $g(y) := \sqrt[3]{y-1}$.