Lezione 52

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI del I° ORDINE

Definizione: Una O.D.E. del primo ordine si dice lineare se è del tipo

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t)$$

con a, b funzioni date.
La funzione $a(t)$ viene detta coefficiente e la funzione $b(t)$ viene detta termine noto.
Se $b(t) \equiv 0$ allora diremo che l'equazione è omogenea.

In generale una O.D.E. del primo ordine è del tipo $x'(t) = f(t, x(t))$
nel caso delle eq. lineari
$f(t, x(t)) = -a(t)\,x(t) + b(t)$
In forma breve spesso scriveremo
$x' = -a(t)\,x + b(t)$

ESEMPI: $x' + 4tx = 0$ $\quad a(t) = 4t \quad b(t) = 0$

$x' - 2x = \sin(t) \quad a(t) = -2 \quad b(t) = \sin(t)$

CONTROESEMPI: NON sono O.D.E. lineari del primo ordine $x' + 2x^2 = 0$

$x' + t\cos(x) = t^2$

Teorema: Le soluzioni dell'eq. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ sono tutte e sole le funzioni della forma

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[\, B(t) + c \,\right]$$

con $c \in \mathbb{R}$, dove

$A(t)$ una primitiva di $a(t)$

$B(t)$ è una primitiva di $e^{A(t)} \cdot b(t)$

Dimostrazione:

Consideriamo $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$.

Moltiplico per $e^{A(t)}$ con $A(t)$ primitiva di $a(t)$

$$\underbrace{x'(t) \cdot e^{A(t)} + a(t)\, e^{A(t)} x(t)}_{\left(x(t)\, e^{A(t)}\right)'} = e^{A(t)}\, b(t)$$

Dunque $\left(x(t)\, e^{A(t)}\right)' = e^{A(t)}\, b(t)$

da cui $x(t)\, e^{A(t)} = B(t) + c$

con $B(t)$ primitive $e^{A(t)}\, b(t)$.

Esplicitando $x(t)$ otteniamo

$$x(t) = e^{-A(t)} \left[B(t) + c \right].$$

ESEMPIO: Risolvere $x' + 2x = 3$

$\left(x'(t) + 2x(t) = 3 \qquad a(t) = 2 \qquad b(t) = 3 \right)$

$a(t) = 2 \longrightarrow A(t) = 2t$

$e^{A(t)} = e^{2t}$

$$e^{2t} x' + e^{2t} \cdot 2x = 3e^{2t}$$

$$(x\, e^{2t}) = 3\, e^{2t}$$

cerco $B(t)$ primitiva di $e^{A(t)}\, b(t) = 3e^{2t}$

$$\int 3e^{2t}\, dt = \int \frac{3}{2} \cdot 2e^{2t}\, dt = \frac{3}{2} \int 2e^{2t}\, dt$$

$$= \frac{3}{2} e^{2t} + c$$

$$x\, e^{2t} = \frac{3}{2} e^{2t} + c$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2} + c\, e^{-2t}}$$ con $c \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: $x' - \frac{x}{t} = 2t^2$ (*)

$\left(x'(t) - \frac{1}{t} x(t) = 2t^2 \qquad a(t) = -\frac{1}{t} \quad b(t) = 2t^2 \right)$

$a(t) = -\frac{1}{t}$

<u>se $t > 0$</u> $\quad A(t) = -\log(t)$, $e^{A(t)} = \frac{1}{t}$, $e^{-A(t)} = t$

$e^{A(t)} \cdot b(t) = 2t \qquad B(t) = t^2$

$x(t) = t(t^2 + c) = t^3 + ct \qquad c \in \mathbb{R}$

<u>se $t < 0$</u> $\quad A(t) = -\log(-t)$, $e^{A(t)} = -\frac{1}{t}$, $e^{-A(t)} = -t$

$e^{A(t)} \cdot b(t) = -2t \qquad B(t) = -t^2$

$x(t) = -t(-t^2 + c) = t^3 - ct = t^3 + \tilde{c}t$

Dunque sia per $t<0$ che per $t>0$

$x(t) = t^3 + Ct$ con $C \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: Risolvere $\begin{cases} x' + 2tx = 4t^3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

$$a(t) = 2t \quad , \quad b(t) = 4t^3$$

$$\Rightarrow A(t) = t^2 \quad , \quad e^{A(t)} = e^{t^2}$$

$$e^{A(t)} b(t) = 4t^3 e^{t^2}$$

$$B(t) = 2e^{t^2} [t^2 - 1]$$

Infatti $\displaystyle\int 4t^3 e^{t} \, dt = \int \underbrace{2t^2}_{g} \cdot \underbrace{2te^{t^2}}_{f} \, dt$

per parti $\rightarrow$ $\displaystyle = 2t^2 e^{t^2} - \int 4t e^{t^2} dt = 2te^{t^2} - 2\int 2te^{t^2} dt$

$$= 2t^2 e^{t^2} - 2e^{t^2} + c$$

$$= 2e^{t^2} [t^2 - 1] + c$$

Dunque $\quad x(t) = e^{-A(t)} [B(t) + c]$

$$= e^{-t^2} [2e^{t^2} (t^2 - 1) + c]$$

$$= 2 (t^2 - 1) + c e^{-t^2} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Vogliamo ora trovare $c \in \mathbb{R}$ tale per cui $x(0) = 2$.

$$2 = 2 (0 - 1) + c e^0$$

$$\Rightarrow \quad 2 = -2 + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 4$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = 2(t^2 - 1) + 4e^{-t^2}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE del II° ORDINE

Sono quelle che si scrivono nella forma

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

con f funzione data.

Problema di Cauchy (o ai dati iniziali)

$$(PC) \quad \begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Teorema [Esistenza e unicità di soluzioni per (PC)]

L'equazione $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ (sotto opportune ipotesi su f) ammette <u>una ed una sola</u> soluzione che soddisfa anche le condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x_1$.

Osservazione: Le soluzioni di $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ formano una famiglia a <u>due</u> parametri

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI del II° ORDINE

Definizione: Un'eq. differenziale ordinaria si dice lineare del second'ordine se è del tipo

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

con a, b, c funzioni date.

Le funzioni $a(t)$, $b(t)$ si chiamano coefficienti.

Se $a(t) \equiv a$ e $b(t) \equiv b$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) sono indipendenti da t, diciamo che l'eq. è a coefficienti costanti. La funzione $c(t)$ si chiama termine noto. Se $c(t) \equiv 0$, l'eq. è omogenea.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI del II° ORDINE OMOGENEE

Teorema: Chiamiamo X l'insieme delle soluzioni di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \qquad (*)$$

Allora X è uno spazio vettoriale e $\dim(X) = 2$.

Osservazione: L'insieme V delle funzioni da $I \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale: la somma è l'usuale somma tra funzioni ($(f+g)(x) := f(x) + g(x)$) e il prodotto per scalare è l'usuale prodotto per uno scalare ($c \in \mathbb{R}$, $(cf)(x) := c \cdot f(x)$).

Dimostrazione:

Dimostriamo che X è un sottospazio vettoriale di V.

(i) X è chiuso rispetto alla somma.

Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due soluzioni di $(*)$.

Allora $(x_1+x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$ è soluzione di $(*)$

Infatti

$$(x_1+x_2)''(t) + a(t)(x_1+x_2)'(t) + b(t)(x_1+x_2)(t)$$

$$= x_1''(t) + x_2''(t) + a(t)x_1'(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_1(t) + b(t)x_2(t)$$

$$= \underbrace{x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)}_{=0} + \underbrace{x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t)}_{=0}$$

$$= 0$$

(ii) X è chiuso rispetto al prodotto per scalare

Sia $x_1(t)$ soluzione di $(*)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Allora $(cx_1)(t) = c \cdot x_1(t)$ è soluzione di $(*)$.

Infatti

$$(cx_1)''(t) + a(t)(cx_1)'(t) + b(t)(cx_1)(t)$$

$$= cx_1''(t) + a(t)\cdot c\cdot x_1'(t) + b(t)\cdot c\cdot x_1(t)$$

$$= c\left(x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)\right) = c\cdot 0 = 0.$$

(iii) X non è vuoto

La funzione $x(t)\equiv 0$ è soluzione di $(*)$:

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 + a(t)\cdot 0 + b(t)\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t)\equiv 0 \in X \quad \Rightarrow \quad X \neq \phi.$$

Possiamo concludere che X è sottospazio vettoriale di V, quindi è uno spazio vettoriale.

Dobbiamo dimostrare che $\dim(X) = 2$

Dimostriamo che X è isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Definisco $T: \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{cases}$

che manda soluzioni di $(*)$ nel vettore con prima entrata la funzione calcolata in zero e la sua derivata calcolata in zero.

(i) T è lineare

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due soluzioni di $(*)$. Allora

$$T(x_1+x_2) = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)(0) \\ (x_1+x_2)'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)+x_2(0) \\ x_1'(0)+x_2'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = T(x_1) + T(x_2).$$

Sia $x_1(t)$ soluzione di $(*)$ e $c\in\mathbb{R}$. Allora

$$T(cx_1) = \begin{pmatrix} (cx_1)(0) \\ (cx_1)'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x_1(0) \\ c\,x_1'(0) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \end{pmatrix} = c\,T(x_1).$$

(ii) T è iniettiva

Dimostriamo che $\mathrm{Ker}(T) = \{x(t) \equiv 0\}$, ossia che l'unica soluzione di (*) che soddisfa $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la funzione costantemente nulla.

Si vede facilmente che $x(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$(\#) \quad \begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Grazie al teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy possiamo concludere che $x(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione di (#)

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(T)$ contiene solo il vettore nullo (che in questo caso è la funzione $x(t) \equiv 0$)

$\Rightarrow$ T è iniettiva.

(iii) T è suriettiva.

Dimostriamo che $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, ossia che preso un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ esiste una soluzione di (*) che soddisfa $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Questo coincide con dimostrare l'esistenza di soluzioni per il problema

$$(\#\#) \quad \begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x(0) = v_1 \\ x'(0) = v_2 \end{cases}$$

con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

Il teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy ci garantisce che (##) ammette soluzione.

$\Longrightarrow$ T è suriettiva.

$\Longrightarrow$ T è un isomorfismo

$\Longrightarrow X \simeq \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \dim(X) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$

Lezione 53

Equazioni differenziali ordinarie del second'ordine lineari a coefficienti costanti omogenee:

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

(in breve $x'' + ax' + bx = 0$)

Teorema: Data l'equazione

(*) $\quad x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$

chiamiamo equazione caratteristica associata l'equazione di secondo grado $\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$

e indichiamo con Δ il suo discriminante.

1) Se $\Delta > 0$ indichiamo con $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ le due soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica.

La soluzione generale di (*) è

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Se $\Delta = 0$ indichiamo con $\tilde{\lambda} = -\frac{a}{2}$ l'unica soluzione dell'equazione caratteristica.

La soluzione generale di (*) è

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\tilde{\lambda} t} + c_2 t e^{\tilde{\lambda} t}} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Se $\Delta < 0$ indichiamo con $\rho \pm i\omega$ le due soluzioni complesse dell'equazione caratteristica

$\left(\rho = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)$.

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\rho t} \cos(\omega t) + c_2 e^{\rho t} \sin(\omega t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione:

1) Sia $\Delta > 0$.

Mostriamo che $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ è soluzione di $(*)$.

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

$$x_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$x_1''(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_1 t}$$

$$= e^{\lambda_1 t} \underbrace{(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)}_{=0 \text{ poiché } \lambda_1 \text{ è soluzione di } \lambda^2 + a\lambda + b = 0.} = e^{\lambda_1 t} \cdot 0 = 0$$

Analogamente $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ è soluzione di $(*)$.

Inoltre $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

2) Sia $\Delta = 0$.

Grazie allo stesso argomento del punto 1)

verifico che $x_1(t) = e^{\tilde{\lambda} t}$ è soluzione di $(*)$.

Considero ora $x_2(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$

$$x_2(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$x_2'(t) = e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{\lambda} t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$x_2''(t) = 2\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + (\tilde{\lambda})^2 t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$\Rightarrow 2\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + (\tilde{\lambda})^2 t e^{\tilde{\lambda} t} + a e^{\tilde{\lambda} t} + a\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + b t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$= e^{\tilde{\lambda} t} \underbrace{(2\tilde{\lambda} + a)}_{=0 \text{ poiché } \tilde{\lambda} = -\frac{a}{2}} + t e^{\tilde{\lambda} t} \underbrace{(\tilde{\lambda}^2 + a\tilde{\lambda} + b)}_{=0 \text{ poiché } \tilde{\lambda} \text{ soluzione}}$$

$$= 0 \cdot e^{\tilde{\lambda} t} + 0 \cdot t e^{\tilde{\lambda} t} = 0$$

$\Rightarrow$ $x_2(t)$ è soluzione.

Inoltre $x_1(t)$ e $x_2(t)$ non sono proporzionali, dunque sono linearmente indipendenti.

3) Sia $\Delta < 0$.

Verifichiamo che $x_1(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$ è soluzione di (*).

$$x_1(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$x_1'(t) = \rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$x_1''(t) = (\rho^2 - \omega^2) e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\omega\rho e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - \omega^2) e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\omega\rho e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$a\rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - a\omega e^{\rho t}\sin(\omega t) + b e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$= \underbrace{(\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)}_{= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - 4b}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0} e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega\underbrace{(2\rho + a)}_{= 0 \text{ poiché } \rho = -\frac{a}{2}} e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$= 0 \cdot e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega \cdot 0 \cdot e^{\rho t}\sin(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow x_1(t)$ è una soluzione.

Verifichiamo che $x_2(t) = e^{\rho t}\sin(\omega t)$ è soluzione di (*).

$$x_2(t) = e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$x_2'(t) = \rho e^{\rho t}\sin(\omega t) + \omega e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$x_2''(t) = (\rho^2 - \omega^2) e^{\rho t}\sin(\omega t) + 2\omega\rho e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - \omega^2) e^{\rho t}\sin(\omega t) + 2\omega\rho e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$a\rho e^{\rho t}\sin(\omega t) + a\omega e^{\rho t}\cos(\omega t) + b e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$= \underbrace{(\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)}_{= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - 4b}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0} e^{\rho t}\sin(\omega t) - \omega\underbrace{(2\rho + a)}_{= 0 \text{ poiché } \rho = -\frac{a}{2}} e^{\rho t}\cos(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow x_2(t)$ è soluzione.

Inoltre $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

Esempi:

- Risolvere $x'' - 4x' + 4x = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = 2$$

La soluzione generale di $x'' - 4x' + 4x = 0$

è $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

$= e^{2t}(c_1 + c_2 t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Risolvere $x'' - 3x' + 2x = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$$

La soluzione generale di $x'' - 3x' + 2x = 0$

è $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Risolvere $x'' - 2x' + 5x = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \rho \pm \omega i = 1 \pm 2i$$

La soluzione generale di $x'' - 2x' + 5x = 0$

è $x(t) = e^{t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Giustificazione del perchè le soluzioni sono della forma vista nel teorema.

Cerchiamo le soluzioni a $x''+ax'+bx=0$ del tipo $\tilde{x}=e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{x}(t) = e^{\lambda t}$$
$$\tilde{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\tilde{x}''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{>0} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

i) Se il discriminante di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ è strett. maggiore di zero, allora λ_1 e λ_2 sono le due soluzioni reali e distinte di $\lambda^2+a\lambda+b=0$

$\Rightarrow$ $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni di $x''+ax'+bx=0$.

ii) Se il discriminante di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ è strett. minore di zero, allora λ_1 e λ_2 sono le due soluzioni complesse di $\lambda^2+a\lambda+b=0$.

Dando per buono che anche per $\lambda \in \mathbb{C}$ $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ e $(e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, abbiamo ancora che $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sono soluzioni di (*).

Possiamo scrivere $\lambda_{1,2} = \rho \pm \omega i$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(\rho+\omega i)t} = e^{\rho t} \cdot e^{i\omega t}$$
$$= e^{\rho t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(\rho - \omega i)t} = e^{\rho t} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= e^{\rho t}\left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)\right)$$

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni, anche $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ è soluzione

Prendo $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$= \frac{1}{2} e^{\rho t}\left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right) + \frac{1}{2} e^{\rho t}\left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right)$$

$$= e^{\rho t} \cos(\omega t).$$

Prendo $c_1 = \frac{1}{2i}$ e $c_2 = -\frac{1}{2i}$ $\Rightarrow$

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$= \frac{1}{2i} e^{\rho t}\left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right) - \frac{1}{2i} e^{\rho t}\left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right)$$

$$= e^{\rho t} \sin(\omega t).$$

Quindi $e^{\rho} \cos(\omega t)$ e $e^{\rho} \sin(\omega t)$ sono soluzioni.

iii) Se $\Delta = 0$, allora l'unica soluzione dell'eq. caratteristica è $\tilde{\lambda}$. Ripetendo i conti del punto i) troviamo che $x_1(t) = e^{\tilde{\lambda} t}$ è sol. di (*).

Resta da spiegare perché cerchiamo una seconda soluzione linearmente indipendente a $x_1(t)$ tra le funzioni della forma $te^{\lambda t}$.

Abbiamo che $\tilde{\lambda}$ è l'unica soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - 2\tilde{\lambda}\lambda + \tilde{\lambda}^2 = 0$ associata all'eq. diff. $x'' - 2\tilde{\lambda} x' + \tilde{\lambda}^2 x = 0$. (*)

Prendiamo $h > 0$ piccolo, allora $\tilde{\lambda} + h$ tende a $\tilde{\lambda}$ per h che tende a zero.

Abbiamo che $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$ e $\lambda_2 = \tilde{\lambda} + h$ sono le due soluzioni reali e distinte dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - (2\tilde{\lambda} + h)\lambda + \tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} h = 0$ associata all'equazioni differenziale
$x'' - (2\tilde{\lambda} + h) x' + (\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} h) x = 0$. (**)

Visto che per $h \to 0$ abbiamo che $\tilde{\lambda} + h \to \tilde{\lambda}$ e l'equazione (**) si riduce a (*), ci aspettiamo un comportamento simile sulle soluzioni.

La soluzione generale di (**) è
$x(t) = c_1 e^{\tilde{\lambda} t} + c_2 e^{(\tilde{\lambda}+h)t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Prendo $c_1 = -\frac{1}{h}$ e $c_2 = \frac{1}{h}$

Con questa scelta ottengo $\tilde{x}(t) = -\frac{1}{h} e^{\tilde{\lambda} t} + \frac{1}{h} e^{(\tilde{\lambda}+h)t}$, che, ovviamente, è una soluzione di (**)

Mi aspetto che, se faccio il limite per h che tende a zero di $\tilde{x}(t)$, ottengo una soluzione di (*).

$$\lim_{h \to 0} \tilde{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(\tilde{\lambda}+h)t} - e^{\tilde{\lambda} t}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{\tilde{\lambda} t} \cdot e^{ht} - e^{\tilde{\lambda} t}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{\tilde{\lambda} t} \left(\frac{e^{ht} - 1}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{\tilde{\lambda} t} \left(\frac{\cancel{1} + t\cancel{h} - \cancel{1}}{\cancel{h}} \right) = t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$e^x = 1 + x + o(x^2) \Rightarrow e^{th} = 1 + th + o(h^2)$

$\Rightarrow x(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$ è soluzione di
$x'' - 2\tilde{\lambda} x' + \tilde{\lambda}^2 x = 0$.

Lezione 54

Proposizione 1:

Sia $x_1(t)$ una soluzione di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t)$ con a, b, c_1 funzioni date.

Sia $x_2(t)$ una soluzione di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_2(t)$ con a, b, c_2 funzioni date.

Allora $x_1 + x_2$ è soluzione di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t) + c_2(t).$$

Dimostrazione:

Considero $(x_1+x_2)(t)$. Vale

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2)''(t) + a(t)\left((x_1+x_2)'(t)\right) + b(t)(x_1+x_2)(t) \\
&= x_1''(t) + x_2''(t) + a(t)x_1'(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_1(t) + b(t)x_2(t) \\
&= x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t) + x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t) \\
&= c_1(t) + c_2(t).
\end{aligned}$$

uso il fatto che x_1 è soluzione di $x'' + a(t)x' + b(t)x = c_1(t)$, x_2 è soluzione di $x'' + a(t)x' + b(t)x = c_2(t)$

$\Rightarrow$ $x_1 + x_2$ è soluzione di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t) + c_2(t).$$

Proposizione 2: Sia $x_{om}(t)$ la soluzione generale di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ con a, b funzioni date. Sia $\tilde{x}(t)$ una soluzione di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.

Allora la soluzione generale di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$ è $x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$.

Dimostrazione:

Abbiamo $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$

e $\tilde{x}(t)$ soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Applico la Proposizione 1 con $c_1(t)\equiv 0$ e $c_2(t)=c(t)$

$\Rightarrow x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$ è soluzione di

$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Inoltre $x(t)=x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$ è una famiglia

a due parametri di soluzioni, dunque $x(t)$

è la soluzione generale di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Osservazione: Chiamiamo X lo spazio vettoriale

delle soluzioni dell'equazione omogenea

$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$.

Allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione non

omogenea $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$ (con $c(t)$ non zero)

è $S=X+\tilde{x}=\{x+\tilde{x} \mid x\in X, \tilde{x}$ soluzione particolare della eq. non omogenea$\}$

Si vede che S non è uno spazio vettoriale.

La proposizione 2 ci da un metodo operativo

di risoluzione di $x''(t)+ax'(t)+bx(t)=c(t)$

per alcune classi di $c(t)$ e per $a,b\in\mathbb{R}$.

Infatti:

- se $a,b\in\mathbb{R}$ abbiamo un metodo per trovare x_{om}.
- ci sono casi in cui è semplice trovare $\tilde{x}$.

Sia $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ l'equazione caratteristica associata a $x'' + ax' + bx = 0$. Se $\Delta \geq 0$, chiamiamo λ_1, λ_2 le soluzioni di $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (possibilmente coincidenti) se $\Delta < 0$, chiamiamo $\rho \pm i\omega$ le soluzioni complesse.

Forma di $c(t)$	Forma di $\tilde{x}(t)$
$c(t)$ è una costante	$\tilde{x}(t) = c$ con $c \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è un polinomio di grado d	$\tilde{x}(t)$ è un polinomio di grado d $\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_d t^d$ con $c_0, c_1, c_2 \dots c_d \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è un multiplo di e^{mt} con $m \neq \lambda_1$, $m \neq \lambda_2$ (oppure λ_1, λ_2 complessi) con $m = \lambda_1$, $m \neq \lambda_2$ con $m = \lambda_1 = \lambda_2$	 $\tilde{x}(t) = c\, e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$ $\tilde{x}(t) = c t e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$ $\tilde{x}(t) = c t^2 e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è combinazione lineare di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ con $\alpha \neq \omega$ (oppure λ_1, λ_2 reali) con $\alpha = \omega$	 $\tilde{x}(t) = a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $\tilde{x}(t) = a t \sin(\alpha t) + b t \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è combinazione lineare di $e^{mt} \sin(\alpha t)$ e $e^{mt} \cos(\alpha t)$. con $m \pm i\alpha \neq \rho \pm i\omega$ con $m \pm i\alpha = \rho \pm i\omega$	 $\tilde{x}(t) = a e^{mt} \sin(\alpha t) + b e^{mt} \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $\tilde{x}(t) = a t e^{mt} \sin(\alpha t) + b t e^{mt} \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

* coefficienti in blu da determinare.

ESEMPI:

1.a: Risolvere $x'' + x' - 6x = 3$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$

$x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) \equiv c$ con $c \in \mathbb{R}$.

$\tilde{x}(t) = c$

$\tilde{x}'(t) = 0$

$\tilde{x}''(t) = 0$

$0 + 0 - 6c = 3 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2}$

$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{2}$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.b. Risolvere $x'' + x' - 6x = 2t^2$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ con $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$

$\tilde{x}'(t) = c_1 + 2c_2 t$

$\tilde{x}''(t) = 2c_2$

$2c_2 + c_1 + 2c_2 t - 6(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) = 2t^2$

$2c_2 + c_1 - 6c_0 + t(2c_2 - 6c_1) - 6c_2 t^2 = 2t^2$

$$\begin{cases} 2c_2 + c_1 - 6c_0 = 0 \\ 2c_2 - 6c_1 = 0 \\ -6c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_0 &= -7/54 \\ c_1 &= -1/9 \\ c_2 &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}(t) = -\frac{7}{54} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{3}t^2$$

. La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{54} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{3}t^2 \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.a. Risolvere $x'' + x' - 6x = 8e^t$

. $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

. Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = c e^t$ $(m = 1,\ m \neq \lambda_1,\ m \neq \lambda_2)$

$$\tilde{x}(t) = ce^t$$

$$\tilde{x}'(t) = ce^t$$

$$\tilde{x}''(t) = ce^t$$

$$ce^t + ce^t - 6ce^t = 8e^t \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

$$\tilde{x}(t) = -2e^t$$

. La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - 2e^t \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.b. Risolvere $x'' + x' - 6x = 5e^{2t}$

. $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

. Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = c\,te^{2t}$ $(m = 2,\ m = \lambda_2,\ m \neq \lambda_1)$

$$\tilde{x}(t) = cte^{2t}$$

$$\tilde{x}'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t}$$

$$\tilde{x}''(t) = 4ce^{2t} + 4cte^{2t}$$

$$4ce^{2t} + 4cte^{2t} + ce^{2t} + 2cte^{2t} - 6cte^{2t} = 5e^{2t}$$

$$5ce^{2t} = 5e^{2t} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\tilde{x}(t) = te^{2t}$$

. La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + te^{2t} \qquad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.c. Risolvere $x'' - 2x' + x = 3e^t$

. Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \qquad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

. Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = c\, t^2 e^t \qquad (m = 1 = \lambda_1 = \lambda_2)$$

$$\tilde{x}(t) = ct^2 e^t$$

$$\tilde{x}'(t) = 2cte^t + ct^2e^t$$

$$\tilde{x}''(t) = 2ce^t + 4cte^t + ct^2e^t$$

$$2ce^t + 4cte^t + ct^2e^t - 4cte^t - 2ct^2e^t + ct^2e^t = 3e^t$$

$$2ce^t = 3e^t \implies c = \frac{3}{2}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{3}{2} t^2 e^t$$

. La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{3}{2} t^2 e^t \qquad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.a. Risolvere $x'' + x' - 6x = 10\cos(t)$

. $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \qquad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

. Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \qquad (\alpha = 1 \neq \omega)$$

$$\tilde{x}(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$$

$-a\cos(t) - b\sin(t) - a\sin(t) + b\cos(t)$

$-6a\cos(t) - 6b\sin(t) = 10\cos(t)$

$(b-7a)\cos(t) + (-a-7b)\sin(t) = 10\cos(t)$

$$\begin{cases} b - 7a = 10 \\ -a - 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{7}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{array}$$

$\tilde{x}(t) = -\frac{7}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3.c. Risolvere $x'' + 4x = \cos(2t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' + 4x = 0$.

$\lambda^2 + 4 = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ $(p = 0, \omega = 2)$

$x_{om}(t) = c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = a t\sin(2t) + b t\cos(2t)$ $(\alpha = 2 = \omega)$

$\tilde{x}(t) = at\sin(2t) + bt\cos(2t)$

$\tilde{x}'(t) = a\sin(2t) + 2at\cos(2t) + b\cos(2t) - 2bt\sin(2t)$

$\tilde{x}''(t) = 4a\cos(2t) - 4at\sin(2t) - 4b\sin(2t) - 4bt\cos(2t)$

$4a\cos(2t) - 4at\sin(2t) - 4b\sin(2t) - 4bt\cos(2t)$

$+ 4at\sin(2t) + 4bt\cos(2t) = \cos(2t)$

$4a\cos(2t) - 4b\sin(2t) = \cos(2t$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \end{array}$$

$\tilde{x}(t) = \frac{1}{4}t\sin(t)$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t) + \frac{1}{4}t\sin(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4.a. Risolvere $x'' + x' + x = e^t \sin(t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' + x' + x = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \left(\rho = -\frac{1}{2}, \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t) \qquad (m \pm i w \neq \rho \pm i w)$$

$$\tilde{x}(t) = a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = (a-b) e^t \sin(t) + (a+b) e^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -2b e^t \sin(t) + 2a e^t \cos(t)$$

$$-2be^t \sin(t) + 2ae^t \cos(t) + (a-b) e^t \sin(t) + (a+b) e^t \cos(t)$$

$$+ a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t) = e^t \sin(t)$$

$$(2a - 3b) e^t \sin(t) + (3a + 2b) e^t \cos(t) = e^t \sin(t)$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{2}{13} \\ b = -\frac{3}{13} \end{array}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{2}{13} e^t \sin(t) - \frac{3}{13} e^t \cos(t)$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{13} e^t \sin(t) - \frac{3}{13} e^t \cos(t)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4.b. Risolvere $x'' - 2x' + 2x = e^t \cos(t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' - 2x' + 2x = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i \qquad (\rho = 1, \omega = 1)$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a t e^t \sin(t) + b t e^t \cos(t) \qquad (m \pm i w = \rho \pm i w)$$

$$\tilde{x}(t) = ate^t \sin(t) + bte^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = (a-b)te^t \sin(t) + (a+b)te^t \cos(t)$$
$$+ ae^t \sin(t) + be^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -2bte^t \sin(t) + 2ate^t \cos(t)$$
$$+ (2a-2b)e^t \sin(t) + (2a+2b)e^t \cos(t)$$

$$-2bte^t \sin(t) + 2ate^t \cos(t) + (2a-2b)e^t \sin(t)$$
$$+ (2a+2b)e^t \cos(t) + (2b-2a)te^t \sin(t)$$
$$-2(a+b)te^t \cos(t) - 2ae^t \sin(t) - 2be^t \cos(t)$$
$$+ 2ate^t \sin(t) + 2bte^t \cos(t) = e^t \cos(t)$$

$$-2be^t \sin(t) + 2ae^t \cos(t) = e^t \cos(t)$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{array}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2} te^t \sin(t).$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) + \frac{1}{2} te^t \sin(t)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lezione 55

Osservazione: Supponiamo di dover risolvere

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Supponiamo di poter scrivere $c(t)$ come somma di funzioni $c_1(t) + c_2(t) + \dots c_d(t)$ e supponiamo di saper trovare una soluzione particolare $\tilde{x}_i(t)$ di $x''(t) + a x'(t) + b x(t) = c_i$ per $i = 1 \dots d$.

Allora una soluzione particolare di

$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$ è

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t) + \dots + \tilde{x}_d(t).$$

Esempio: $\quad x''(t) + 4x(t) = e^t + 4t + 1$.

- Trovo la soluzione generale di $x'' + 4x = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$x_{om}(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Trovo una soluzione particolare di $x'' + 4x = e^t$.

$$\tilde{x}_1(t) = a e^t$$

$$\tilde{x}_1'(t) = a e^t$$

$$\tilde{x}_1''(t) = a e^t$$

$$\implies 5 a e^t = e^t \implies a = \frac{1}{5}$$

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{5} e^t$$

- Trovo una soluzione particolare di $x'' + 4x = 4t + 1$

$$\tilde{x}_2(t) = a + bt$$

$$\tilde{x}_2'(t) = b$$

$$\tilde{x}_2''(t) = 0$$

$$0 + 4a + 4bt = 4t + 1$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 1 \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{4} + t$$

- La soluzione generale di $x''(t) + 4x(t) = e^t + 4t + 1$ è $x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{4} + t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine

Le soluzioni di $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (eq. lineare del primo ordine omogenea) formano uno spazio vettoriale di dimensione 1.

Inoltre le soluzioni di $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ si possono scrivere come

$$x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{om}(t)$ è la soluzione generale di $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (ossia una famiglia a un parametro di soluzioni) e $\tilde{x}(t)$ è una soluzione particolare di $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$.

Nel caso in cui $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$ e $b(t)$ è una funzione tra quelle della tabella abbiamo un secondo metodo di risoluzione di $x'(t) + ax(t) = b(t)$.

1) Scrivo l'equazione caratteristica associata a $x'(t) + a\,x(t) = 0$, ossia

$$\lambda + a = 0.$$

La soluzione dell'equazione caratteristica è $\lambda = -a \in \mathbb{R}$.

Quindi $x_1(t) = e^{-at}$ è una soluzione di $x'(t) + a\,x(t) = 0$.

La soluzione generale di $x'(t) + a\,x(t) = 0$ è $x_{om}(t) = c\,e^{-at}$ con $c \in \mathbb{R}$.

2) Trovo una soluzione particolare $\tilde{x}(t)$ di $x'(t) + a\,x(t) = b(t)$.

3) La soluzione generale di $x'(t) + a\,x(t) = b(t)$ è

$$x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$$
$$= c\,e^{-at} + \tilde{x}(t) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $x'(t) + 2x(t) = \sin(2t)\,e^{3t}$

1) $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow x_{om}(t) = c\,e^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R}$

2) $\tilde{x}(t) = a\,e^{3t}\sin(2t) + b\,e^{3t}\cos(2t)$

$\tilde{x}'(t) = (3a - 2b)\,e^{3t}\sin(2t) + (2a + 3b)\,e^{3t}\cos(2t).$

$$(3a-2b)\,e^{3t}\sin(2t) + (2a+3b)\,e^{3t}\cos(2t)$$
$$+2a\,e^{3t}\sin(2t) + 2b\,e^{3t}\cos(2t) = e^{3t}\sin(2t)$$

$$\begin{cases} 5a - 2b = 1 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{5}{29}, \quad b = -\frac{2}{29}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{5}{29}e^{3t}\sin(2t) - \frac{2}{29}e^{3t}\cos(2t)$$

3) La soluzione generale è

$$x(t) = c\,e^{-2t} + \frac{5}{29}e^{3t}\sin(2t) - \frac{2}{29}e^{3t}\cos(2t), \quad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio: Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$

$x(t) = t^a$ risolve l'equazione $t^2 x''(t) - 6x(t) = 0$.

Svolgimento:

$$x(t) = t^a$$
$$x'(t) = a\, t^{a-1}$$
$$x''(t) = a(a-1)\, t^{a-2}$$

$$t^2 \cdot [a(a-1) t^{a-2}] - 6(t^a) = 0$$

$$(a^2 - a - 6)\, t^a = 0$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = 3, \; a_2 = -2}$$

* Osservo inoltre che t^3 e t^{-2} sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$

la soluzione generale di $t^2 x''(t) - 6x(t) = 0$

è $x(t) = c_1 t^3 + c_2 t^{-2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio: Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'eq. differenziale

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2-a)x = 4e^{-t}. \qquad (*)$$

i) Trovare la soluzione generale per $a > 0$ e $a \neq 1$.

ii) Trovare la soluzione generale per $a = 1$

iii) Dimostrare che $\forall a \geq 2$ e per ogni $x(t)$ soluzione di $(*)$ si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

Svolgimento:

i) ii) Cerchiamo $x_{om}(t)$ soluzione generale di $\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2-a)x = 0$ al variare di a.

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (2-a) = 0$$

e $\Delta = 4a^2 - 4(2-a) = 4(a^2 + a - 2)$

CASO 1: Se $a > 1$, allora $\Delta > 0$ e

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+a-2}.$$

Dunque

$$x_{om}(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

CASO 2: Se $0 < a < 1$, allora $\Delta < 0$ e

$$\lambda_{1,2} = -a \pm (\sqrt{2-a-a^2})i.$$

Dunque

$$x_{om}(t) = e^{-at}\left(c_1 \cos(\sqrt{2-a-a^2})t + c_2 \sin(\sqrt{2-a-a^2})t\right)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

CASO 3: Se $a = 1$, allora $\Delta = 0$ e $\lambda = -1$.

Quindi

$$x_{om}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passiamo ora allora ricerca di $\tilde{x}(t)$ soluzione particolare.

Nel CASO 1 e CASO 2 cerco $\tilde{x}(t)$ tra le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = c e^{-t}$.

$$\tilde{x}(t) = c e^{-t}$$

$$\tilde{x}'(t) = -c e^{-t}$$

$$\tilde{x}''(t) = c e^{-t}$$

$$c e^{-t} - 2ac e^{-t} + (2-a)c e^{-t} = 4 e^{-t} \Rightarrow c = \frac{4}{3-3a}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

Nel CASO 3 cerco $\tilde{x}(t)$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = c t^2 e^{-t}$.

$$\tilde{x}(t) = ct^2 e^{-t}$$

$$\tilde{x}'(t) = 2cte^{-t} - ct^2 e^{-t}$$

$$\tilde{x}''(t) = 2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2 e^{-t}$$

$$2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2 e^{-t} + 4cte^{-t} - 2ct^2 e^{-t} + ct^2 e^{-t} = 4e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad c = 2$$

$$\tilde{x}(t) = 2t^2 e^{-t}$$

Riassumendo: abbiamo

CASO 1: $a > 1$

$$x(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t} + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

CASO 2: $0 < a < 1$

$$x(t) = e^{-at} \left(c_1 \cos(\sqrt{2-a-a^2})t + c_2 \sin(\sqrt{2-a-a^2})t\right) + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

CASO 3: $a = 1$

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 2t^2 e^{-t}$$

iii) Visto che $a \geq 2$, una soluzione di $(*)$ è del tipo

$$x(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t} + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

E' chiaro che $\frac{4}{3-3a} e^{-t}$ è $o(e^t)$.

Inoltre $\forall a \geq 2$ vale $-a-\sqrt{a^2+a-2} < -a+\sqrt{a^2+a-2}$,

quindi ci basta far vedere che

$c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t}$ è $o(e^t)$.

Si può ridurre questa affermazione al verificare

che $\forall a \geq 2$ vale

$$-a + \sqrt{a^2+a-2} < 1$$

$$\sqrt{a^2+a-2} < a+1$$

$$a^2+a-2 < a^2+2a+1 \quad \Rightarrow \quad a > -3 \quad \checkmark$$