Lezione 13

Esercizio: calcolare la derivata di:

a) $\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)$

b) $\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right)$

c) $\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}}$

d) $\arctan(x^2)$

e) $\frac{x^4-1}{x^4+1}$

a) $\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right) = \log\left(\frac{x^{2x}}{2^x\cdot x^x}\right) = \log\left(\frac{x^x}{2^x}\right) = \log(x^x) - \log(2^x) = x\log x - x\log 2 = x(\log x - \log 2)$

quindi $\left(\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)\right)' = (x(\log x - \log 2))' = \log x - \log 2 + 1 = \log\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

$x = f \qquad (\log x - \log 2) = g \qquad (fg)' = f'g + g'f$

b) $\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right) = \log(5x^6) - \log(3^x) = \log 5 + \log(x^6) - x\log 3 = \log 5 + 6\log x - \log 3\cdot x$

quindi $\left(\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right)\right)' = (\log 5 + 6\log x - \log 3\cdot x)' = 0 + \frac{6}{x} - \log 3 = \frac{6}{x} - \log 3$

c) $\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}} = \frac{(3^2)^{(x-3)}}{3^{x-1}} = \frac{3^{2x-6}}{3^{x-1}} = 3^{2x-6-x+1} = 3^{x-5}$

quindi $\left(\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}}\right)' = (3^{x-5})' = 3^{x-5}\cdot\log 3 = \frac{\log 3}{3^5}\cdot 3^x$

d) $(\arctan(x^2))' = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$

$\arctan(x^2) = f(g(x))$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

e) $\left(\frac{x^4-1}{x^4+1}\right)' = \frac{4x^3(x^4+1) - 4x^3(x^4-1)}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^7+4x^3-4x^7+4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Lezione 15 - prima parte

Derivata del coseno

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Osservo che:

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(g(x))$ con $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, $f(y) = \sin(y)$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\cos(x))' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = \cos(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin(x)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -\sin(x)$$

Derivata della tangente

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Derivata dell'arcotangente.

Per derivare l'arcotangente utilizziamo la formula della derivata della funzione inversa.
Se $g(y)$ è l'inversa di $f(x)$ abbiamo $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ con $x = g(y)$.

Dunque $$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Derivata dell'arcocoseno

Ricordiamo che l'arcocoseno è definito in $[-1,1]$, ma è derivabile in $(-1,1)$.

Anche in questo caso utilizziamo la formula della derivata della funzione inversa.

$$(\arccos(y))' = \frac{1}{(\cos(x))'} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos(\arccos(y)))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

se $y \in (-1,1)$, allora $x \in (0,\pi)$, dunque $\sin(x) > 0$
$\Rightarrow \sin(x) = +\sqrt{1-\cos^2(x)}$

Derivata dell'arcoseno

Anche l'arcoseno è derivabile in $(-1,1)$.
Similmente abbiamo

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$y \in (-1,1)$, allora $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, dunque $\cos(x) \geq 0$
$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

Esercizio: trovare l'equazione della retta tangente in $x=2$ a $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}-\log(2x-3)$.

Svolgimento:

1) la retta tangente passa per $P=(2,f(2))=(2,\frac{4}{3})$.
2) il coefficiente angolare della retta tangente è $m=f'(2)$.

$$f'(x)=\frac{x^2-1-(x+2)(2x)}{(x^2-1)^2}-\frac{2}{2x-3}$$

$$f'(2)=-\frac{31}{9}$$

$$y=mx+q \quad \text{con} \quad m=-\frac{31}{9}$$

Trovo q imponendo il passaggio per P:

$$\frac{4}{3}=-\frac{31}{9}\cdot 2+q \Rightarrow q=\frac{74}{9}$$

la retta è $9y=-31x+74$

Esercizio: Sia $f(x)=\begin{cases} e^{x+a} & x\geq 0 \\ x+b & x<0 \end{cases}$

i) Per quali $a,b\in\mathbb{R}$ la funzione è continua?
ii) Per quali $a,b\in\mathbb{R}$ la funzione è derivabile?

Svolgimento: La funzione è definita a tratti.

i) Per $x<0$ e $x>0$ la funzione è continua, dobbiamo vedere cosa succede in zero.
Affinchè sia continua anche in zero serve che

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^a \qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=b$$

quindi vogliamo che $b=e^a$.
Preso un qualsiasi $a\in\mathbb{R}$, se $b=e^a$ allora la funzione è continua.

ii) Se la funzione non fosse continua, allora non è neanche derivabile, quindi almeno dobbiamo avere che se prendiamo a qualsiasi in $\mathbb{R}$, allora $b=e^a$.
Vediamo se servono ulteriori condizioni
Per $x<0$ e $x>0$ la funzione è derivabile e la derivata vale

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x+a} & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

Affinchè sia derivabile anche in zero serve che

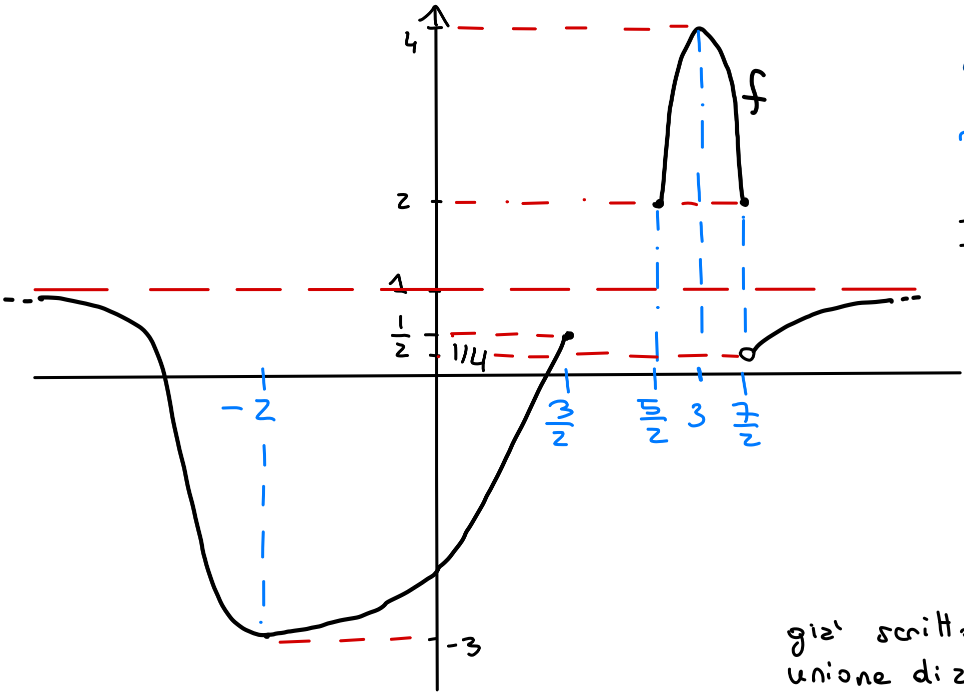
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\ell \quad \text{con } \ell\neq\pm\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+}e^{x+a}=e^a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-}1=1$$

quindi $e^a=1 \Rightarrow a=0$
e $b=e^0=1$.

Lezione 20

Esercizio: Dato il grafico della funzione f trovare
i) massimi e minimi ASSOLUTI
ii) massimi e minimi LOCALI
iii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $A = [-1,2]$.



Soluzione:

$Dom(f) = (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$

$Im(f) = [-3, 1) \cup [2, 4]$.

i) Trovare il massimo e minimo della funzione f significa trovare massimo e minimo (se esistono) dell'insieme $Im(f)$.
Visto che abbiamo già scritto $Im(f)$ sotto forma di unione di 2 intervalli, è facile vedere che

$\inf(Im(f)) = -3$, inoltre -3 appartiene all'insieme quindi il minimo assoluto di f è -3 e il punto di minimo è $x = -2$.
Inoltre $\sup(Im(f)) = 4$, 4 appartiene ad $Im(f)$ quindi il massimo assoluto di f è 4 e il punto di massimo è $x = 3$.

ii) I massimi/minimi assoluti sono anche massimi e minimi locali.
Vediamo se ce ne sono altri.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min locale:
A) punti a tangente orizzontale
B) una volta scritto il $Dom(f)$ sottoforma di intervalli, estremi di questi intervalli
C) punti interni al $Dom(f)$, ma punti di non derivabilità.

A) I punti del grafico $(-2,-3)$ e $(3,4)$ sono gli unici con tangente orizzontali. Non ce ne sono altri.
B) Il punto $x = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo locale.
Esiste infatti un intervallo I del quale $x = \frac{3}{2}$ è un punto interno tale che $\forall x \in I \cap Dom(f)$ vale $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$.
Basta prendere $I := [\frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Scelgo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Abbiamo $I = [1, 2]$, $I \cap Dom(f) = [1, \frac{3}{2}]$ e $\forall x \in [1, \frac{3}{2}]$ vale $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$.
Il massimo locale è $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.
Il punto $x = \frac{5}{2}$ è un punto di minimo locale.
Esiste infatti un intervallo I del quale $x = \frac{5}{2}$ è un punto interno tale che $\forall x \in I \cap Dom(f)$ vale $f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.

Basta prendere $I := [\frac{5}{2}-\varepsilon, \frac{5}{2}+\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Scelgo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Abbiamo $I = [2,3]$, $I \cap Dom(f) = [\frac{5}{2}, 3]$ e $\forall x \in [\frac{5}{2}, 3]$ vale $f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.
Il minimo locale è $f(\frac{5}{2}) = 2$.

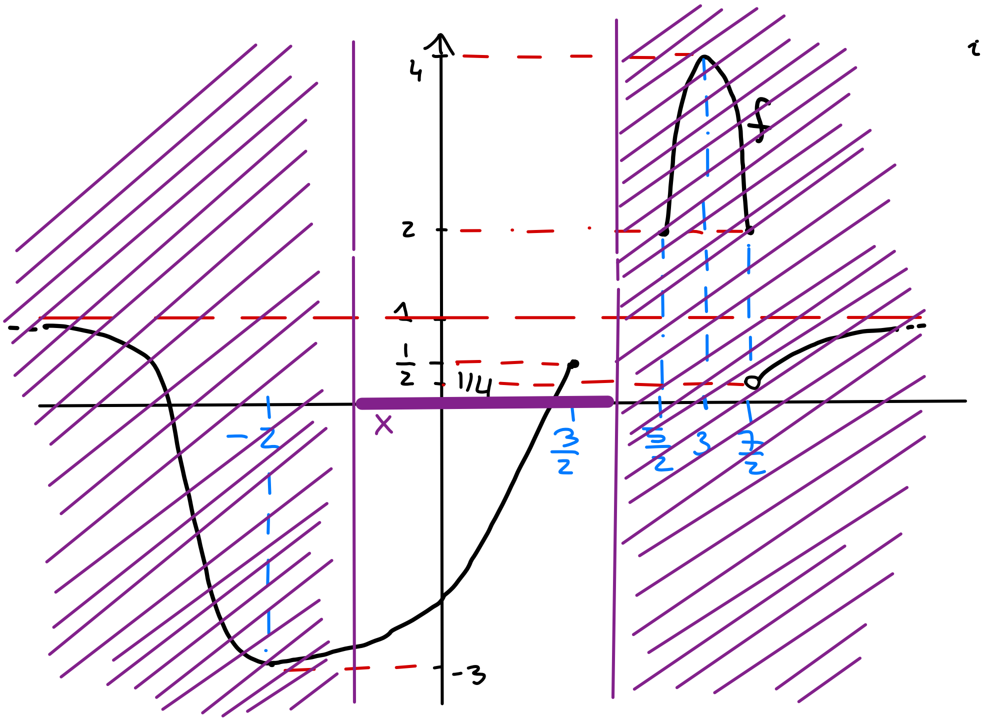
c) L'unico punto di $Dom(f)$ che è un punto di non derivabilità è $x = \frac{7}{2}$ visto che in $x = \frac{7}{2}$ la funzione non è neanche continua.
$x = \frac{7}{2}$ <u>non</u> è né un punto di massimo, né un punto di minimo locale.

Infatti non è possibile trovare nessun intervallo I che abbia $\frac{7}{2}$ come punto interno tale per cui <u>tutti</u> gli $x \in I \cap Dom(f)$ verifichino la proprietà
* $f(x) \geq f(\frac{7}{2})$ (necessaria affinché $x = \frac{7}{2}$ sia punto di minimo locale)

oppure
* $f(x) \leq f(\frac{7}{2})$ (necessaria affinché $x = \frac{7}{2}$ sia punto di massimo locale)

Gli intervalli per i quali $x = \frac{7}{2}$ è un punto interno sono del tipo $[\frac{7}{2}-a, \frac{7}{2}+b]$ con $a, b > 0$.
Abbiamo che per a sufficientemente piccolo (ad esempio $0 < a < 1$)
$[\frac{7}{2}-a, \frac{7}{2}+b] \cap Dom(f) = [\frac{7}{2}-a, \frac{7}{2}+b]$.
Per quanto possa io scegliere a, b piccoli abbiamo sempre
* $f(\frac{7}{2}) = 2$
* $\forall x \in [\frac{7}{2}-a, \frac{7}{2})$ vale $f(x) > 2$
* $\forall x \in (\frac{7}{2}, \frac{7}{2}+b]$ vale $f(x) < 2$, in particolare $\frac{1}{4} < f(x) < 1$.

Dunque
$x = \frac{7}{2}$ <u>non</u> è né un punto di massimo, né un punto di minimo locale.



iii) Ora ci interessa solo $f_{|[-1,2]}$ quindi ci chiediamo quali sono i massimi e minimi relativamente all'intervallo $[-1,2]$.
Notiamo che
$Dom(f) \cap [-1,2] = [-1, \frac{3}{2}]$.
Stiamo quindi considerando una funzione continua in un intervallo chiuso, limitato e non vuoto.
Il teorema di Weierstraß ci garantisce che massimo e minimo esistono.
Il minimo è $f(-1)$ ed il massimo è $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.
Il punto di minimo è $x = -1$ e il punto di massimo è $x = \frac{3}{2}$.
Notiamo inoltre che non ci sono ulteriori massimi e minimi locali.

Esercizio: Dato il grafico della funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$ trovare

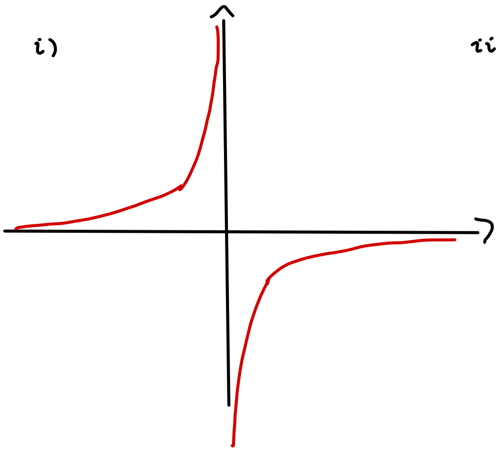
i) massimi e minimi ASSOLUTI, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

ii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $A = [0, +\infty)$, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

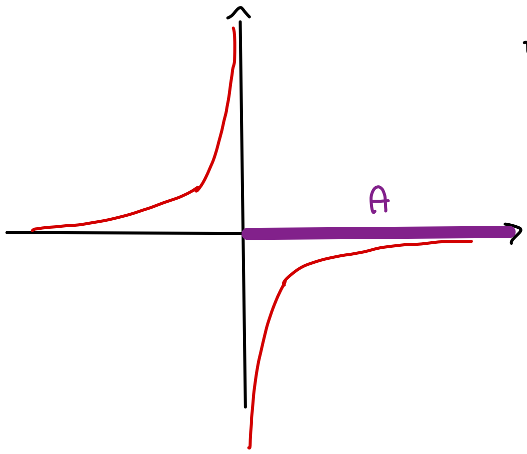
iii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $B = [1, +\infty)$, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

Soluzione:

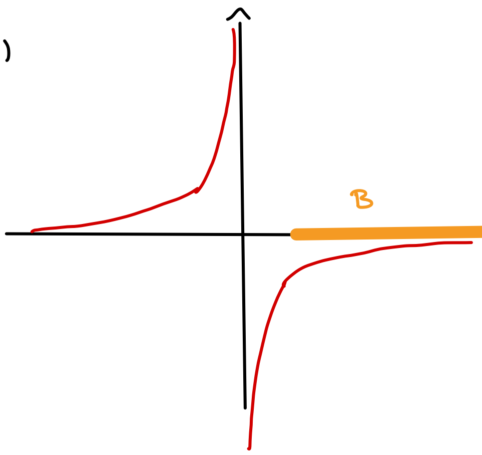
i)



ii)



iii)



i) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ e non esiste massimo assoluto,

$\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ e non esiste minimo assoluto.

ii) Guardiamo ora $f_{|A}$

$\mathrm{Dom}(f_{|A}) = \mathrm{Dom}(f) \cap A = ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) \cap [0, +\infty) = (0, +\infty)$.

$\mathrm{Im}(f_{|A}) = (-\infty, 0)$

$\sup(\mathrm{Im}(f_{|A})) = 0$, sebbene zero sia un valore finito, non c'è nessun $x \in \mathrm{Dom}(f_{|A})$ tale che $f(x) = 0$, quindi zero non è un massimo assoluto. Non esiste il massimo.

$\inf(\mathrm{Im}(f_{|A})) = -\infty$ e non esiste minimo assoluto.

iii) Guardiamo ora $f_{|B}$

$\mathrm{Dom}(f_{|B}) = \mathrm{Dom}(f) \cap B = ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$.

$\mathrm{Im}(f_{|B}) = [-1, 0)$. Come prima

$\sup(\mathrm{Im}(f_{|B})) = 0$, sebbene zero sia un valore finito, non c'è nessun $x \in \mathrm{Dom}(f_{|B})$ tale che $f(x) = 0$, quindi zero non è un massimo assoluto. Non esiste il massimo.

$\inf(\mathrm{Im}(f_{|B})) = -1$, inoltre $f(1) = -1$, quindi -1 è il minimo assoluto di $f_{|B}$ e 1 è il punto di minimo assoluto.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = e^{(x^3-3x)}$$

relativamente all'intervallo $-2 \leq x \leq 3$.

Soluzione: Osservo che $f_{|A}$ con $A=[-2,3]$ è una funzione continua definita su un intervallo chiuso, limitato e non vuoto, per il teorema di Weierstraß massimo e minimo esistono sicuramente. La funzione è anche derivabile in $[-2,3]$.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min:

A) estremi dell'intervallo $[-2,3]$

B) punti a derivata nulla

A) $f(-2) = e^{(-8+6)} = e^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2$

$f(3) = e^{(27-9)} = e^{18}$

B) $f'(x) = e^{(x^3-3x)} \cdot (3x^2-3) = 3(x^2-1)e^{(x^3-3x)}$

$0 = f'(x) = 3(x^2-1)e^{(x^3-3x)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

$f(-1) = e^{(-1+3)} = e^2$

$f(1) = e^{(1-3)} = e^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2.$

Confronto tutti i valori trovati ($f(-2) = e^{-2}$, $f(3) = e^{18}$, $f(-1) = e^2$, $f(1) = e^{-2}$). Abbiamo

$$e^{-2} < e^2 < e^{18}.$$

Quindi

e^{-2} è il minimo assoluto di f in $[-2,3]$ e

$x=-2$, $x=1$ sono punti di minimo.

e^{18} è il massimo assoluto di f in $[-2,3]$ e

$x=3$ è il punto di massimo.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = x^3 e^{2x}$$

relativamente all'intervallo $x \leq -1$.

Soluzione: In questo caso $(-\infty, -1]$ non è limitato, massimo e minimo potrebbero non esistere.
Per studiare il comportamento della f agli estremi dell'intervallo dobbiamo ricorrere ai limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{2x} = 0$$

$$f(-1) = -e^{-2} \simeq -0,13$$

Andiamo ora a vedere i punti con derivata nulla:

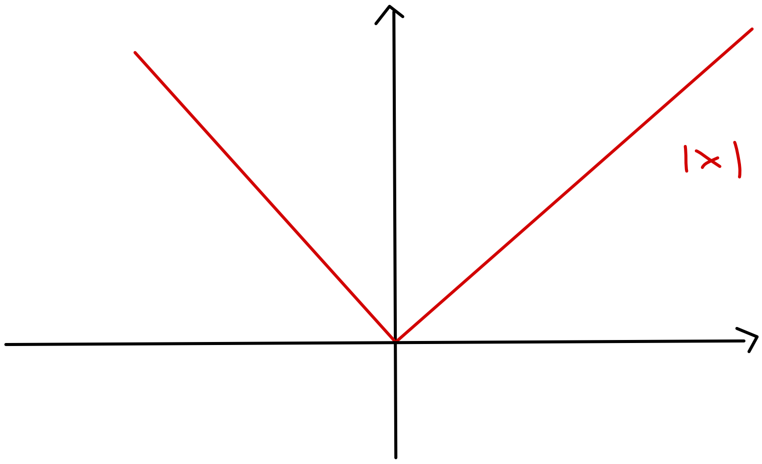
$$0 = f'(x) = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} = x^2 e^{2x} (3 + 2x) \iff x = 0, \; x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} e^{-3} \simeq -0,17$$

Possiamo concludere che il minimo assoluto di f ristretta a $(-\infty, -1]$ è $-\frac{27}{8} e^{-3}$ e il punto di minimo assoluto è $-\frac{3}{2}$

Il massimo assoluto non esiste e $\sup\left(Im\left(f_{|(-\infty,-1]}\right)\right) = 0$

Esempio: Consideriamo $f(x) = |x|$



Il minimo della funzione è zero e il punto di minimo è zero.
Il massimo non esiste.
Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
La sua derivata è $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

La derivata non si annulla mai.
Per trovare quindi i punti di massimo o minimo non basta cercare tra i punti in cui si annulla la derivata.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = |x^2 - 1|.$$

Svolgimento: $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) \subseteq [0, +\infty)$.
Possiamo scrivere la funzione come $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

La funzione è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ e la sua derivata vale $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{se } x > 1. \end{cases}$

La non derivabilità in $x = \pm 1$ si vede dal fatto che
$\lim_{x \to -1^-} 2x = -2$, $\lim_{x \to -1^+} -2x = 2$, $\lim_{x \to 1^-} -2x = -2$, $\lim_{x \to 1^+} 2x = 2$.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min locale:

A) punti a derivata nulla
B) punti di non derivabilità.

Abbiamo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup(Im(f)) = +\infty$ e il massimo non esiste.

A) $f'(x) = 0 \iff x = 0$
$f(0) = 1$

B) $f(-1) = 0$
$f(1) = 0$

$\Rightarrow$ Il minimo è 0 e i punti di minimo sono $x = \pm 1$.

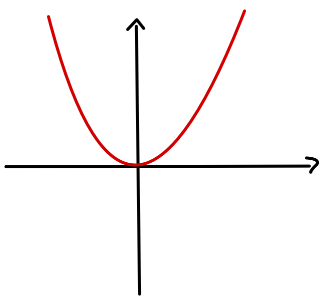
Inoltre $x = 0$ è un punto di massimo locale.

ESERCIZIO "TIPICO": trovare massimi/minimi assoluti di f (dove f è definita nel suo dominio "naturale") oppure trovare massimi/minimi assoluti di f relativamente all'insieme X (stiamo dunque considerando $f_{|X}$ definita in $Dom(f) \cap X$).

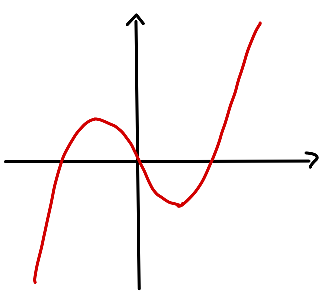
Osservazioni: consideriamo $f: X \to \mathbb{R}$ con X un intervallo / unione finita di intervalli. Sappiamo che se x_0 è un punto di massimo o minimo locale interno all'intervallo X (o a uno degli intervalli) e se x_0 è un punto in cui f è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.

Il viceversa non è necessariamente vero. Ciò significa che se x_0 è un punto interno ad X dove f è derivabile e $f'(x_0) = 0$ allora abbiamo varie possibilità:

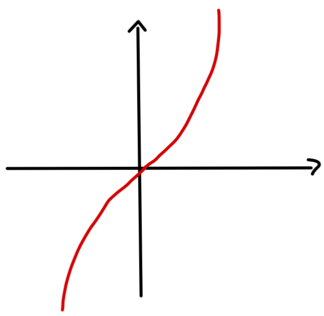
- x_0 può essere un massimo/minimo assoluto
- x_0 può essere un massimo/minimo locale
- x_0 può anche non essere né un massimo/minimo assoluto né un massimo/minimo locale



$f(x) = x^2$
$f'(0) = 0$ e 0 è punto di minimo assoluto.



$f(x) = x^3 - 3x$
$f'(1) = 0$ e 1 è punto di minimo locale



$f(x) = x^3$
$f'(0)$ e 0 non è né min/max. assoluto né min/max locale

Inoltre ci sono punti in cui f non è derivabile che possono essere punti di massimo / minimo per f, ad esempio $x = 0$ per $f(x) = |x|$.

E infine dobbiamo considerare gli estremi di $Dom(f)$ / $Dom(f) \cap X$.

Tenendo tutte queste cose a mente, abbiamo la seguente
STRATEGIA PER RISOLVERE L'ESERCIZIO TIPICO:

. ELENCO dei SOSPETTI punti di massimo e minimo assoluto :

A) estremi di Dom(f) / Dom(f) ∩ X
B) punti in cui la funzione non è derivabile
C) punti in cui la derivata si annulla

A) Scrivo Dom(f) / Dom(f) ∩ X come unione finita di intervalli, che possono essere chiusi/aperti e limitati/illimitati. Guardo tutti gli estremi.

- Se un estremo è $-\infty$ oppure $+\infty$:
  calcolo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2$

- Se un estremo è un numero finito $a_1 \dots a_m$ ma non appartiene a Dom(f) / Dom(f) ∩ X calcolo il limite pertinente (per $x\to a^+$ oppure $x \to a^-$ a seconda che a sia estremo sinistro o destro)

$$\lim_{x\to a_1^+} f(x) = \ell_3 \quad \dots \quad \lim_{x\to a_m^-} f(x) = \ell_n$$

ATTENZIONE: se uno di questi limiti $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_n$ è $+\infty$ allora $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ $(\sup(\mathrm{Im}(f_{|X})) = +\infty)$ è il massimo assoluto non esiste.
Se uno di questi limiti $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_n$ è $-\infty$ allora $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ $(\inf(\mathrm{Im}(f_{|X})) = -\infty)$ è il minimo assoluto non esiste.

- Calcolo la funzione in tutti gli estremi $b_1 \dots b_m$ che appartengono a Dom(f) / Dom(f) ∩ X.

$f(b_1) \dots f(b_m)$.

B) Se ci sono dei punti $c_1 \dots c_k$ interni a Dom(f) / Dom(f) ∩ X in cui f non è derivabile calcolo

$f(c_1) \dots f(c_k)$.

C) Calcolo la derivata prima di f. Cerco tutti i punti $x_1 \dots x_i$ in cui si annulla la derivata prima. Calcolo

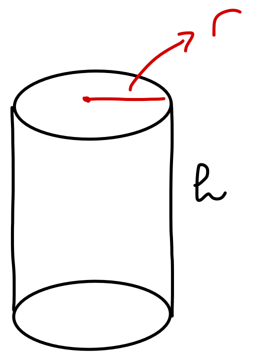
$f(x_1) \dots f(x_i)$.

* Confronto tutti i valori che ho ottenuto: $\ell_1, \dots, \ell_n, f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$.

Se il minore è uno tra $f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$, allora quello è il minimo assoluto.
Se il minore è uno tra quelli ottenuti come limite $\ell_1 \dots \ell_n$, allora quello è l'inf e il minimo non esiste.
Se il maggiore è uno tra $f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$, allora quello è il massimo assoluto.
Se il maggiore è uno tra quelli ottenuti come limite $\ell_1 \dots \ell_n$, allora quello è il sup e il massimo non esiste.

Esercizio: trovare le dimensioni del cilindro di area minima con volume 1.

Svolgimento:



Volume $= \pi r^2 \cdot h = 1$

$\Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

Area $= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

Area $= f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$ con $r \in (0, +\infty)$.

Cerco il minimo assoluto:

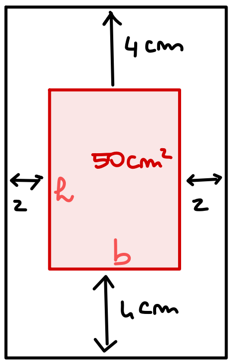
$\lim_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$

$f'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$ $\qquad f'(r) = 0 \iff \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$ $\leftarrow$ minimo

Il cilindro di area minima ha raggio $= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ e altezza $= \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$.

Esercizio: Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di 50 cm², margine superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm.
Trovare le dimensioni del foglio di area minima.



Area di stampa $= b \cdot h = 50$ cm²

$\Rightarrow b = \frac{50}{h}$

Area $= (h+8)(b+4) = (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right)$, $h \in (0, +\infty)$.

$\lim_{h \to 0^+} (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right) = +\infty$

$\lim_{h \to +\infty} (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right) = +\infty$

Area$'(h) = \left(\frac{50}{h} + 4\right) + (h+8)\left(-\frac{50}{h^2}\right) = -\frac{50 \cdot 8}{h^2} + 4$

$0 = $ Area$'(h) \iff h = \pm 10$

Area$(10) = 18 \cdot 9$ $\leftarrow$ minimo.

$h = 18$, $b = 9$.

Lezione 23

Sia $m \in \mathbb{N}$, con il simbolo $m!$ indichiamo il prodotto di m fattori

$$m! := m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

$m!$ si legge "m FATTORIALE".

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di e^x

Fissato $d \in \mathbb{N}$, per applicare il teorema dello sviluppo di Taylor serve che la funzione $f(x) = e^x$ sia derivabile d (oppure $d+1$) volte almeno in un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$ che contenga zero. Questa proprietà è vera, qualsiasi sia $d \in \mathbb{N}$, infatti $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^{(m)}(x) = e^x$.

Inoltre $f^{(m)}(0) = 1$ dunque

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^d}{d!} + \theta(x^{d+1})$$

$$= \sum_{m=0}^{d} \frac{x^d}{d!} + \theta(x^{d+1}).$$

Da questo sviluppo ritroviamo che $e^x - 1 \sim x$. Infatti $e^x - 1 = x + \theta(x^2)$ e quindi la parte principale di $e^x - 1$ è x.

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\cos(x)$.

Anche il coseno può essere derivato in tutto $\mathbb{R}$ quante volte vogliamo.
In particolare

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin(x) & f'''(0) &= 0 \\ f^{IV}(x) &= \cos(x) & & \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Quindi $\cos(x) = 1 + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2} + \frac{f'''(0) x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0) x^4}{4!} + \frac{f^{V}(0) x^5}{5!} + \ldots + \frac{f^{(d)}(0) x^d}{d!} + \theta(x^{d+1})$,

lo sviluppo all'ordine d con d PARI è:

$$\underline{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!}} + \theta(x^{d+1}),$$

Se ora facciamo lo sviluppo di ordine $d+1$ (che quindi è dispari) otteniamo

$$\underbrace{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!}}_{\text{stesso polinomio di prima ma resto } \theta(x^{d+2})} + \theta(x^{d+2}).$$

informazione più accurata!

Quindi alla fine lo sviluppo di ordine d del coseno è

con d pari $\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!} + \theta(x^{d+2}),$

con d dispari $\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \theta(x^{d+1}).$

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\sin(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\ f^{IV}(x) &= \sin(x) & f^{IV}(0) &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Nel caso del seno $f^{m}(0)=0$ quando m è pari

Quin $\sin(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \cancel{\frac{f''(0)\cdot x^2}{2}} + \frac{f'''(0)x}{3!} + \cancel{\frac{f^{IV}(0)x^4}{4!}} + \frac{f^{V}(0)x^5}{5!} + \dots + \frac{f^{(d)}(0)x^d}{d!} + \mathcal{O}(x^{d+1})$,

se d è dispari $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^d}{d!} + \mathcal{O}(x^{d+1})$,

se ora facciamo lo sviluppo di ordine $d+1$ (che quindi è pari) otteniamo

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^d}{d!} + \mathcal{O}(x^{d+2}).$$

Quindi alla fine lo sviluppo di ordine d del seno è

con d dispari $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^d}{d!} + \mathcal{O}(x^{d+2})$,

con d pari $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \mathcal{O}(x^{d+1})$.

Anche in questo caso abbiamo $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, quindi riotteniamo $\sin(x) \sim x$.

Osservazione: Consideriamo una funzione f derivabile almeno d volte in $I \subset \mathbb{R}$ e supponiamo che zero sia un punto interno ad I. Consideriamo il suo sviluppo di Taylor di ordine d in zero.

SE f E' PARI nel polinomio di Taylor appaiono solo termini di ordine PARI.

SE f E' DISPARI nel polinomio di Taylor appaiono solo termini di ordine DISPARI.

Dimostrazione:

la derivata di una funzione pari è una funzione dispari

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$$

la derivata di una funzione dispari è una funzione pari

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

Inoltre se f è dispari $f(0)=0$ infatti $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0)=0$
$\Rightarrow f(0) = 0$.

Se f è pari, allora $f^{(m)}(x)$ con m dispari è una fz. dispari e $f^{m}(0)=0$
$f^{(m)}(x)$ con m pari è una fz. pari

Se f è dispari, allora $f^{(m)}$ con m dispari è pari
$f^{(m)}$ con m pari è dispari e $f^{m}(0)=0$

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\log(x+1)$

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = 0 \qquad \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1 \qquad \frac{f'''(0)}{3!} = +\frac{2}{2\cdot 3} = +\frac{1}{3}$$

$$f'''(x) = +2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = +2$$

$$f^{IV}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4} \qquad f^{IV}(0) = -2\cdot 3 \qquad \frac{f^{IV}(0)}{4!} = -\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(m)}(x) = \pm (m-1)!\,(1+x)^{-m} \qquad \frac{f^{m}(0)}{m!} = \pm\frac{(m-1)!}{m!} = \pm\frac{1}{m}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^d}{d} + \mathcal{O}(x^{d+1}).$$

In particolare abbiamo che la parte principale di $\log(1+x)$ è x.

Osservazione: $\log(x+1)$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$, però basta che $\log(1+x)$ sia definita e derivabile d volte in un intervallo che contiene zero, ad esempio $I = [-1/2, 1/2]$.

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $(1+x)^a$ con $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x)^a \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \qquad f'(0) = a$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \qquad f''(0) = a(a-1)$$

$$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \qquad f'''(0) = a(a-1)(a-2)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(m)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)(1+x)^{a-m} \qquad f^{(m)}(0) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-d+1)}{d!}x^d + \mathcal{O}(x^{d+1}).$$

In particolare per $a = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \pm x^d + \mathcal{O}(x^{d+1})$$

Noto che se $b \leq a \leq b+1$ con $b \in \mathbb{N}$, allora la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ b volte, invece le derivate dalla $(b+1)$-esima in poi non sono definite per $x = -1$. Se a è negativo la funzione e tutte le sue derivate non sono definite per $x = -1$. Per fare lo sviluppo di Taylor in zero questo non è un problema. Basta prendere $I \subset (-1, 1)$.

Se introduciamo il simbolo $\binom{a}{m} := \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)}{m!}$ e $\binom{a}{0} := 1$

coefficiente binomiale generalizzato

allora possiamo scrivere:

$$(1+x)^a = \sum_{m=0}^{a} \binom{a}{0} x^m$$

Formula del Binomio di Newton

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Vale

$$(x+y)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m y^{d-m}$$

dove per $m \leq d$, $m, d \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{d}{m} := \frac{d!}{m!\,(d-m)!}$ $\quad$ e $\quad \binom{d}{0} = 1.$

Alcune proprietà del coefficiente binomiale

$$\binom{d}{d} = 1$$

$$\binom{d}{1} = \frac{d!}{1!\,(d-1)!} = d$$

$$\binom{d}{m} = \binom{d}{d-m} \quad \text{infatti} \quad \binom{d}{d-m} = \frac{d!}{(d-m)!\,(d-(d-m))!} = \frac{d!}{(d-m)!\,m!} = \binom{d}{d-m}$$

Osservazione: lo sviluppo di Taylor di ordine d (o più) di un polinomio di grado d coincide con il polinomio stesso, in particolare non c'è resto.

Dimostrazione: consideriamo un qualsiasi polinomio di grado d:

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_d x^d \qquad \text{con } q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}$$

Scriviamo il suo sviluppo di Taylor come polinomio di Taylor di ordine d e resto di Lagrange:

$$P_d(x) + R_d(x) = \sum_{m=0}^{d} \frac{q^{(m)}(0)}{m!} x^m + \frac{q^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} x^{m+1}$$

$$q'(x) = q_1 + 2q_2 x + 3q_3 x^2 + 4q_4 x^3 + \dots + d\, q_d\, x^{d-1}$$

$$q''(x) = 2q_2 + 3\cdot 2\, q_3 x + 4\cdot 3\, q_4 x^2 + \dots + d\cdot(d-1)\, x^{d-2}$$

$$q'''(x) = 3\cdot 2\, q_3 + 4\cdot 3\cdot 2\, q_4 x + \dots + d(d-1)(d-2)\, x^{d-3}$$

$$\vdots$$

$m < d \qquad q^{(m)}(x) = m\cdot(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\, q_m + (m+1)m\cdot(m-1)(m-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\, q_{m+1} x + \dots + d(d-1)(d-2)\cdot \dots (d-m+1)\, x^{d-m}$

$$\vdots$$

$$q^{(d)}(x) = d\cdot(d-1)(d-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\, q_d$$

$$q^{(d+1)}(x) \equiv 0.$$

Calcoliamo ora le derivate in zero

$$q(0) = q_0$$

$$q'(0) = q_1$$

$$q''(0) = 2q_2$$

$$q'''(0) = 3\cdot 2\, q_3 = 3!\, q_3$$

$$\vdots$$

$$q^{(m)}(0) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot \dots 3\cdot 2\, q_m = m!\, q_m$$

$$\vdots$$

$$q^{(d)}(0) = d\,(d-1)(d-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\, q_d = d!\, q_d$$

$$\frac{q''(0)}{2!} = q_2 \qquad \frac{q'''(0)}{3!} = \frac{3!\, q_3}{3!} = q_3$$

$$\frac{q^{(m)}(0)}{m!} = \frac{m!\, q_m}{m!} = q_m \qquad \frac{q^{(d)}(0)}{d!} = \frac{d!\, q_d}{d!} = q_d$$

Inoltre, visto che $q^{(d+1)}(x) \equiv 0$, allora il resto di Lagrange è zero, quindi

$$P_d(x) + R_d(x) = \sum_{m=0}^{d} \frac{q^{(m)}(0)}{m!} x^m + \underbrace{\cancel{\frac{q^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} x^{m+1}}}_{=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{d} q_m x^m = q(x).$$

Dimostrazione della FORMULA del BINOMIO di NEWTON

Possiamo supporre $y \neq 0$, altrimenti se $y=0$ allora $(x+y)^d = x^d$ e non c'è niente da calcolare.

$$(x+y)^d = \left[y\left(\frac{x}{y}+1\right)\right]^d = y^d \left(\frac{x}{y}+1\right)^d$$

Chiamo $\frac{x}{y} = t$, $(t+1)^d$ è un polinomio di grado d e coincide con il suo polinomio di Taylor di ordine.

$$(t+1)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m$$

quindi $\left(\frac{x}{y}+1\right)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \left(\frac{x}{y}\right)^m$ e

$$(x+y)^d = y^d\left(\frac{x}{y}+1\right)^d = y^d \left(\sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \frac{x^m}{y^m}\right) = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \frac{x^m}{y^m} \cdot y^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m y^{d-m}$$

Es 1 Trovare la parte principale di

1) $e^x - 1 - 2x$ per $x \to 0$

2) $e^{2x} - 1 - 2x$ per $x \to 0$

3) $e^x - \cos(x)$ per $x \to 0$

4) $e^{x^2} - \cos(2x)$ per $x \to 0$

Es 2 Ordinare le funzioni

$-\log x \,,\; x^2 \,,\; 3 \,,\; x^2 + x^{-2}$

rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0^+$

Es 3 Ordinare le funzioni

$x^2 \log x \,,\; \dfrac{x^4}{x^2+2} \,,\; \log(x + \sin(x)) \,,\; \dfrac{2^x}{3^x + 1}$

rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$

Es 4 Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\log(1 + x^3)}$

Svolgimento:

Es 1

1) Lo sviluppo di Taylor al primo ordine di e^x e'

$$e^x = 1 + x + O(x^2)$$

dunque

$$e^x - 1 - 2x = 1 + x + O(x^2) - 1 - 2x$$
$$= -x + O(x^2)$$
$$= -x + o(x)$$

quindi $e^x - 1 - 2x \sim -x$

e $-x$ e' la parte principale per $x \to 0$ di $e^x - 1 - 2x$.

2) Scriviamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine di e^t:

$$e^t = 1 + t + o(t^2).$$

Grazie alla sostituzione $t = 2x$ otteniamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x^2)$$

$\hookrightarrow o(2x^2) = o(x^2)$

quindi

$$e^{2x} - 1 - 2x = 1 + 2x + o(x^2) - 1 - 2x$$
$$= o(x^2)$$

$o(x^2)$ è una classe di funzioni, non descrive una sola funzione.

Non abbiamo trovato la parte principale. Per trovarla dobbiamo considerare lo sviluppo di Taylor di e^t ad un ordine successivo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

Sostituiamo nuovamente $t = 2x$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3).$$

Quindi

$$e^{2x} - 1 - 2x = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3) - 1 - 2x$$
$$= 2x^2 + o(x^3)$$

e la parte principale di $e^{2x} - 1 - 2x$ è $2x^2$.

3) $e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$
$\cos(x) = 1 + \Theta(x^2)$ } Sviluppo di Taylor al primo ordine

$e^x - \cos(x) = 1 + x + \Theta(x^2) - 1 + \Theta(x^2)$
$= x + \Theta(x^2)$

4) Proviamo a procedere come nel caso precedente:

$e^t = 1 + t + \Theta(t^2)$

$\cos(y) = 1 + \Theta(y^2)$

Sostituisco $t = x^2$ e $y = 2x$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \Theta(x^4)$

$\cos(2x) = 1 + \Theta(x^2)$

$e^{x^2} - \cos(2x) = 1 + x^2 + \Theta(x^4) - 1 + \Theta(x^2)$
$= \underbrace{x^2 + \Theta(x^2)}_{} + \Theta(x^4)$

ATTENZIONE:

le funzioni f che sono $\Theta(x^2)$ sono "comparabili" con x^2, quindi potrebbero anche essere del tipo αx^2

In tal caso la parte principale di $e^{x^2} - \cos(2x)$ sarebbe $(1+\alpha)x^2$ se α fosse diverso da -1.

Ci servono maggiori informazioni per concludere l'esercizio.

$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \Theta(y^4)$

$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \Theta(x^4)$

Quindi $$e^{x^2} - \cos(2x) = 1 + x^2 + \theta(x^4)$$
$$-1 + 2x^2 + \theta(x^4)$$
$$= 3x^2 + \theta(x^4)$$

La parte principale di $e^{x^2} - \cos(2x)$ e'
$3x^2$.

Es 2: Prima di tutto osservo che

per $x \to 0^+$ $\quad x^2 + x^{-2} \sim x^{-2}$

Sappiamo che per $x \to 0^+$
$$x^a \ll x^b \quad \text{se} \quad a > b$$
quindi
$$x^2 \ll 3 \ll x^2 + x^{-2} \sim x^{-2}$$

Ci resta da capire cosa fare con
$-\log(x)$. Usiamo la definizione di $\ll$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{-\log(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \ll -\log x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{-\log(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \ll -\log x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-2}}{-\log(x)} = +\infty$$
$$\Rightarrow \quad -\log x \ll x^{-2}$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\log(x)}{x^{-2}} = 0$$

Quindi
$$x^2 \ll 3 \ll -\log x \ll x^2 + x^{-2}$$

Es 3 Noto che per $x \to +\infty$

$$\frac{x^4}{x^2+2} \sim \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$x + \sin(x) \sim x \quad e \quad \log(x+\sin(x)) \sim \log(x)$$

$$\frac{2^x}{3^x+1} \sim \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Quindi possiamo ridurci ad ordinare

$$x^2 \log x, \quad x^2, \quad \log(x), \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Sappiamo che per $x \to +\infty$

$$\log(x) << x^a \quad \text{con } a>0$$

Visto che $\frac{2}{3} < 1$ abbiamo $\left(\frac{2}{3}\right)^x << \log x << x^2$

Resta da capire dove collocare $x^2 \log x$

Visto che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 \log x} = 0$

abbiamo $x^2 << \log x \cdot x^2$.

Es 4 $\sin(t) = t + o(t^3)$

$$\log(1+y) = y + o(y^2)$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\log(1+x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + o(x^9)}{x^3 + o(x^6)} = 3$$

Lezione 28

Esercizio: Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

Svolgimento: La p.p. di $\sin(x)$ e' x. Sommando le parti principali abbiamo una cancellazione. Servono informazioni piu' precise

I° modo:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\frac{x}{6}$$

la p.p. di $\sin(x) - x$ e' $-\frac{x^3}{6}$
la p.p. di $x\sin(x)$ e' x^2

II° modo

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6!} + \theta(x^5)$$

$$(\sin(x))^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6!} + \theta(x^5)\right)^{-1} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \theta(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + \theta(y^2)$$

$$y = -\frac{x^2}{6} + \theta(x^4)$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + \theta(x^4)\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \theta(x^4) + \theta\left(\left(-\frac{x^2}{6} + \theta(x^4)\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \theta(x^4)$$

$\Rightarrow$

$$(\sin(x))^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6!} + \theta(x^5)\right)^{-1} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \theta(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$= x^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{6} + \theta(x^4)\right] = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \theta(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} - (\sin(x))^{-1} = -\frac{x}{6} + \theta(x^3) = -\frac{x}{6} + o(x)$$

$\Rightarrow$ la p.p. di $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ e' $-\frac{x}{6}$

Esercizio: Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\sin(x^3) - (\sin(x))^3$.

Svolgimento:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^5)$$

Sostituzione $t = x^3$

$$\Rightarrow \sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{15})$$

$$(\sin(x))^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^3 = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)\right]^3$$

$$= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^3$$

$$(1+y)^3 = 1 + 3y + o(y^2)$$

Sostituzione: $y = -\frac{x^2}{6} + o(x^4)$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^3 = 1 + 3\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^4)\right) + o\left(\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4) + o(x^4) + o\left(-\frac{x^2}{6}o(x^4)\right)$$

$$+ o(o(x^8))$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$$

Quindi $(\sin(x))^3 = x^3\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\right)$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^7)$$

$\Rightarrow$

$$\sin(x^3) - (\sin(x))^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{15}) - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^7)$$

$$= \frac{1}{2}x^5 + o(x^7) = \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

$\Rightarrow$ La parte principale di $\sin(x^3) - (\sin(x))^3$ e' $\frac{1}{2}x^5$

Esercizio: Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\exp(x^2)}$$

a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

Svolgimento: a)

I° modo

$$1 - \cos(2x) \sim 2x^2$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} \sim \sqrt{2}x$$

$$\exp(x^2) \sim 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1-\cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} \sim \frac{\sqrt{2}x}{1} = \sqrt{2}x$$

II° modo

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + O(x^4)$$

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 + O(x^4)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} = (2x^2 + O(x^4))^{1/2}$$

$$= [2x^2(1 + O(x^2))]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}x\,(1 + O(x^2))^{1/2}$$

$$(1+y)^{1/2} = 1 + O(y)$$

$$y = O(x^2)$$

$$(1 + O(x^2))^{1/2} = 1 + O(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad (1-\cos(2x))^{1/2} = \sqrt{2}x\,(1 + O(x^2))$$

$$= \sqrt{2}x + O(x^3)$$

$\exp(t) = 1 + O(t)$

$\exp(x^2) = 1 + O(x^2)$

$(\exp(x^2))^{-1} = (1 + O(x^2))^{-1} = 1 + O(x^2)$

$(1+y)^{-1} = 1 + O(y) \qquad y = O(x^2)$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} (\exp(x^2))^{-1}$$
$$= (\sqrt{2}x + O(x^3))(1 + O(x^2))$$
$$= \sqrt{2}x + O(x^3) + O(x^3) + O(x^5)$$
$$= \sqrt{2}x + O(x^3) = \sqrt{2}x + o(x)$$

$\Rightarrow$ p.p è $\sqrt{2}x$

b) se $a \neq -\sqrt{2}$ allora p.p. è $(\sqrt{2} + a)x$

se $a = -\sqrt{2}$

I° modo $\qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$$

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 \quad \frac{1}{4!}(2x)^4 + O(x^6)\right)^{1/2}$$

$$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)\right)^{1/2} = \left[2x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + O(x^6)\right)\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + O(x^4)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}x \left[1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)\right]$$

$$= \sqrt{2}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + O(x^5)$$

$(1+y)^{1/2}$

$= 1 + \frac{1}{2}y + O(y^2)$

$y = -\frac{1}{3}x^2 + O(x^4)$

$\exp(t) = 1 + t + O(t^2)$

$\exp(x^2) = 1 + x^2 + O(x^4)$

$(\exp(x^2))^{-1} = (1 + x^2 + O(x^4))^{-1}$

$(1+y)^{-1} = 1 - y + O(y)$

$$y = x^2 + o(x^4)$$

$$(1 + x^2 + o(x^4))^{-1} = 1 - x^2 + o(x^4) + o(x^2 + o(x^4))$$

$$= 1 - x^2 + o(x^4) + o(x^4)$$

$$= 1 - x^2 + o(x^4)$$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} (\exp(x^2))^{-1}$$

$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 + o(x^5)\right)\left(1 - x^2 + o(x^4)\right)$$

$$= \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^3 + o(x^5) - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} x^5 + o(x^7)$$

$$+ o(x^5) + o(x^7) + o(x^9)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1 - \cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}x = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)x^3 + o(x^5)$$

$$= -\frac{7\sqrt{2}}{6} x^3 + o(x^5)$$

La parte principale è $-\frac{7\sqrt{2}}{6} x^3$

II° modo

$$\frac{(1 - \cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}x = \frac{(1 - \cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}x\exp(x^2)}{\exp(x^2)}$$

p.p. di $\exp(x^2)$ è 1

Andiamo ora a calcolare la parte principale di $(1 - \cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}x\exp(x^2)$

Abbiamo

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^6)$$

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y^2)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} = \left(1-1+\frac{1}{2}(2x)^2 \quad \frac{1}{4!}(2x)^4+\theta(x^6)\right)^{1/2}$$

$$= \left(2x^2-\frac{2}{3}x^4+\theta(x^6)\right)^{1/2} = \left[2x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+\theta(x^6)\right)\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,x\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2+\theta(x^4)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,x\left[1-\frac{1}{6}x^2+\theta(x^4)\right]$$

$$= \sqrt{2}\,x-\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3+\theta(x^5)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2}-\sqrt{2}\,x\exp(x^2)$$

$$= \sqrt{2}\,x-\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3+\theta(x^5)-\sqrt{2}\,x\left(1+x^2+\theta(x^4)\right)$$

$$= \sqrt{2}\,x-\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3+\theta(x^5)-\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,x^3+\theta(x^5)$$

$$= \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)x^3+\theta(x^5) \quad \sim -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3$$

Quindi

$$\frac{(1-\cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)}-\sqrt{2}\,x$$

$$= \frac{(1-\cos(2x))^{1/2}-\sqrt{2}\,x\exp(x^2)}{\exp(x^2)} \sim \frac{-\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3}{1} = -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3$$

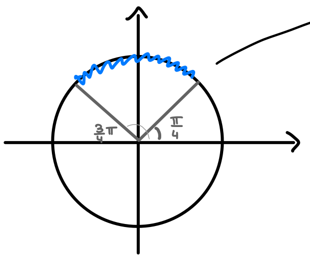
Lezione 30 - seconda parte

Alcuni esercizi in preparazione del compitino

Es 1) Trovare le soluzioni di $\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{1}{2}, 2]$.

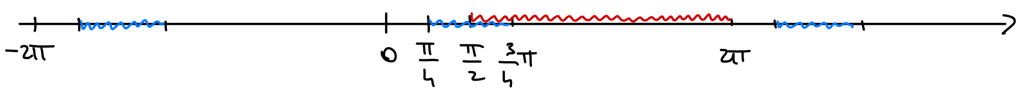
Svolgimento: **I° metodo:** Cambio di variabile $y = \pi x$. Modifico anche l'intervallo in cui cerco le soluzioni. Una volta trovate le soluzioni nel nuovo intervallo scrivo le soluzioni cercate usando il cambio di variabile $x = \frac{y}{\pi}$.

- $y = \pi x$. Se $x = \frac{1}{2}$, allora $y = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$ allora $y = 2\pi$. Quindi cerco le soluzioni di: di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.



$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

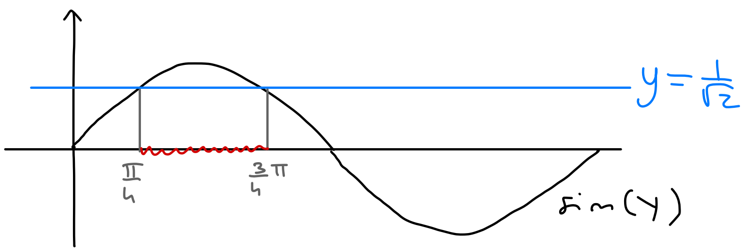
da intersecare con $\frac{\pi}{2} \leq y \leq 2\pi$.



$$\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3}{4}\pi$$

Soluzione: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

II° metodo: Cambio di variabile $y = \pi x$. Trovo le soluzioni di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cambio variabile, trovo le soluzioni di $\sin(\pi x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e interseco con $[\frac{1}{2}, 2]$.



$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Cambio di variabile $y = \frac{x}{\pi}$

$$\frac{1}{4} + 2k \leq x \leq \frac{3}{4} + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Le soluzioni sono $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

Es 2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f(x) = \arctan(x^3 - x)$ relativamente alla semiretta $(-\infty, 1]$.

Svolgimento:

PASSO I)

$$f(1) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^3 - x) = -\frac{\pi}{2}$$

PASSO II)

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^3-x)^2} \cdot (3x^2-1)$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

PASSO III) Confronto $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f(0)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\underset{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)}{\underset{\parallel}{\overset{\text{inf}}{\boxed{-\frac{\pi}{2}}}}} < \underset{\displaystyle f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\underset{\parallel}{\arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}} < \underset{\displaystyle f(0)}{\underset{\parallel}{0}} < \underset{\displaystyle f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\underset{\parallel}{\overset{\text{max}}{\boxed{\arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}}}}$$

Il punto di massimo è $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il punto di minimo non esiste.

Lezione 31

Esercizio: a) Disegnare il grafico di $f(x) = \log(\log(x))$.
b) Per quali $a > 0$ è verificata $\forall x > 1$ la dis.

$$\log(\log(x)) \leq a\sqrt{\log(x)} \qquad (*)$$

Svolgimento: a) Cerco l'insieme di definizione di

$$f(x) = \log(\log(x))$$

- $x > 0$
- $\log(x) > 0 \implies x > 1$

$Dom(f) = (1, +\infty)$.

- $\lim_{x \to 1^+} \log(\log(x)) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \log(\log(x)) = +\infty$
- studio del segno di $f(x)$:

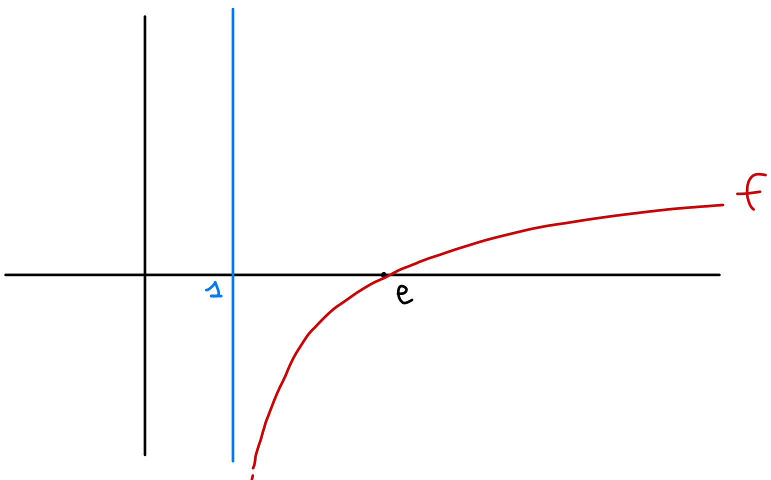
$$\log(\log(x)) \geq 0 \implies x \geq e.$$

- $f'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\log(x)}$
- Studio della monotonia di f

$f'(x) \geq 0$ nel dominio di f

$\frac{1}{x\log(x)} \geq 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ è sempre vero

$\implies f$ è crescente nel suo dominio.



b) I° modo:

Osservo che se $x>1$, allora $\log(x)>0$, quindi $\sqrt{\log(x)}$ è ben definito ed è strettamente positivo. Posso dividere (*) per $\sqrt{\log(x)}$ ed ottenere la disuguaglianza equivalente

$$(**) \qquad \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} \leq a \qquad \forall x>1.$$

Dunque cerco il massimo di $g(x)=\dfrac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}}$ in $(1,+\infty)$, lo chiamo Max.

Se $a \geq$ Max allora (**) è verificata, e quindi (*) è verificata.

$$\mathrm{Dom}(g) = (1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x\,(\log(x))^{3/2}}\left[2-\log(\log(x))\right]$$

$$g'(x)=0 \qquad x=\exp(e^2)$$

$$g(\exp(e^2)) = \frac{2}{e}$$

$$-\infty < 0 < \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Max} = \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow$ Se $a \geq \frac{2}{e}$ allora (**) è verificata, e quindi (*) è verificata.

La disuguaglianza è vera se $a \geq \frac{2}{e}$.

II° modo:

Scrivo (*) come

(***) $\log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} \leq 0$

Chiamo $h_a(x) = \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)}$.

Cerco il massimo di $h_a(x)$ e lo chiamo $Max(a)$.

Impongo $Max(a) \leq 0$.

$Dom(h_a) = (1, +\infty) \quad \forall a > 0$

$$\lim_{x \to 1^+} h_a(x) = \lim_{x \to 1^+} \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} = -\infty .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} = -\infty$$

$$h_a'(x) = \frac{1}{x\log(x)} - \frac{a}{2x\sqrt{\log(x)}} = \frac{2 - a\sqrt{\log(x)}}{2x\log(x)}$$

$h_a'(x) = 0 \qquad x = e^{4/a^2}$

$h_a(e^{4/a^2}) = \log 4 - 2 - 2\log a = Max(a)$

$Max(a) \leq 0 \qquad \log 4 - 2 - 2\log a \leq 0$

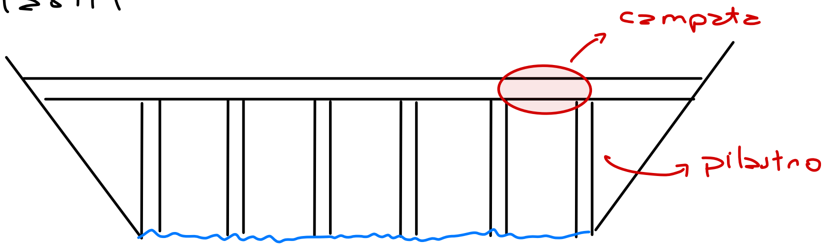
$\log a \geq \log 2 - 1$

$a \geq e^{\log 2} \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$

$\Rightarrow$ Se $a \geq \frac{2}{e}$ allora (***) è verificata, e quindi (*) è verificata.

La disuguaglianza è vera se $a \geq \frac{2}{e}$.

Esercizio: Si decide di costruire un ponte attraverso un fiume di lunghezza 15 formato da m campate di lunghezza uguale e da $(m-1)$ pilastri



Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è (ℓ^2+1), come conviene prendere m?

Attenzione: m deve essere un numero intero positivo!

Svolgimento: Scriviamo la funzione che descrive il costo del ponte al variare di m.

$$f(m) = (\text{numero di pilastri}) \cdot (\text{costo unitario pilastro})$$
$$+ (\text{numero di campate}) \cdot (\text{costo unitario campata})$$

numero di pilastri $= m-1$

costo unitario pilastro $= 3$

numero di campate $= m$

costo unitario campata $= ?$

Il costo di una campata di lunghezza ℓ è (ℓ^2+1)

Visto che le campate sono m e sono tutte lunghe uguali e che la lunghezza del ponte è 15, la lunghezza di una campata è $\frac{15}{m}$

e il suo costo $\frac{225}{m^2}+1$

$$f(m) = 3(m-1) + m\left(\frac{225}{m^2} + 1\right) = 4m + \frac{225}{m} - 3$$

$f(m)$ è definita per tutti gli $m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ la estendo a tutti gli $x > 0$

$$f(x) = 4x + \frac{225}{x} - 3 \quad , \quad dom(f) = (0, +\infty) .$$

$$\lim_{x \to +\infty} 4x + \frac{225}{x} - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} 4x + \frac{225}{x} - 3 = +\infty$$

$$f'(x) = 4 - \frac{225}{x^2}$$

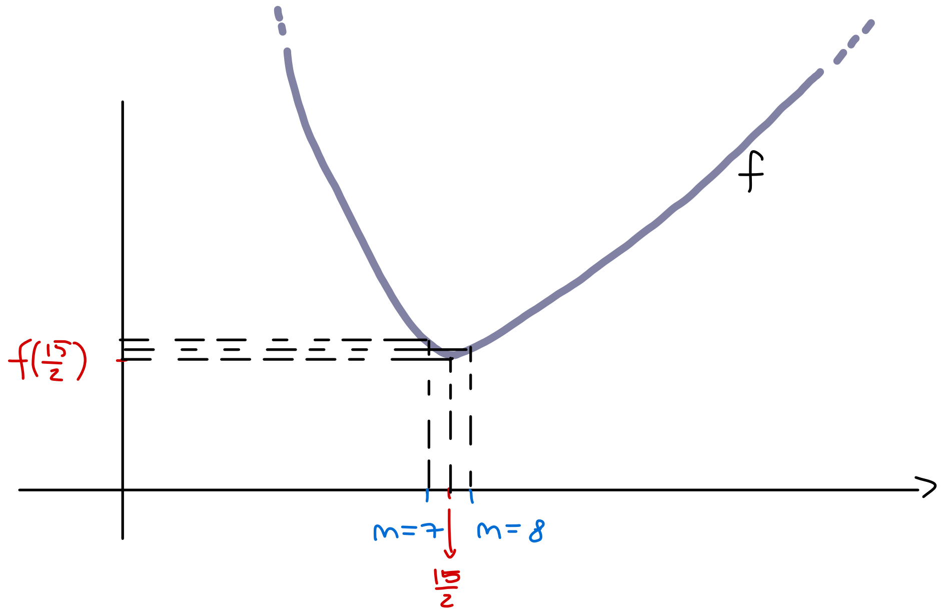
$$f'(x) \geq 0 \qquad 4 - \frac{225}{x^2} \geq 0 \qquad \frac{4x^2 - 225}{x^2} \geq 0$$

$$x \leq -\frac{15}{2} \ \cup \ x \geq \frac{15}{2}$$

		$-\frac{15}{2}$		0		$\frac{15}{2}$	
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f					$\searrow$		$\nearrow$

$x = \frac{15}{2}$ punto di minimo

$f\left(\frac{15}{2}\right) = 57$ minimo assoluto



Ricordiamo però che cerchiamo la soluzione tra gli $m \in \mathbb{N}$, dunque $x = \frac{15}{2}$ non può essere la soluzione cercata.

Visto che la funzione f è decrescente in $(0, \frac{15}{2})$ abbiamo $f(m) > f(7)$ per $m \in \mathbb{N}, m < 7$.
Inoltre la funzione è crescente in $(\frac{15}{2}, +\infty)$, quindi $f(8) < f(m)$ per $m \in \mathbb{N}, m > 8$.
I candidati punti di minimo tra gli interi sono dunque 7 e 8. Andiamo a calcolare $f(7)$ e $f(8)$.

$f(7) \simeq 57{,}14$

$f(8) \simeq 57{,}12$

dunque $f(8) < f(7)$, $f(8)$ è il minimo e $m = 8$ è il punto di minimo

$\Rightarrow$ per costruire il ponte con il minor costo possibile bisogna fare 8 campate.