Lezione 10 - seconda parte.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x$

Soluzione: $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$

Sappiamo che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ e la somma $\ell + \ell'$ è definita, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$.

Come primo tentativo calcolo $\lim_{x \to +\infty} x^2$ e $\lim_{x \to +\infty} -x$ e provo a vedere se in questo caso la somma dei limiti è definita.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$ e $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata.

Quindi non vale che $\lim_{x \to \infty} x^2 - x = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \lim_{x \to +\infty} -x$

Scriviamo $x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

In questo caso vediamo l'espressione come $f(x)\left[g(x) + h(x)\right]$ con $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$ e $h(x) = -\frac{1}{x}$

Sappiamo che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ e il prodotto $\ell \cdot \ell'$ è definito, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot \ell'$.

Vediamo se possiamo ora applicare le regole di somma e prodotto.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$1 + 0 = 1$ è definito $\Rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 1 + 0 = 1$.

$+\infty \cdot 1$ è definito $\Rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x \to +\infty} x^2\right)\left(\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Osservazione: in questo caso avrei potuto anche scrivere

$x^2 - x = x(x-1)$ e

$\lim_{x \to +\infty} x(x-1) = \left(\lim_{x \to +\infty} x\right)\left[\left(\lim_{x \to +\infty} x\right) + \left(\lim_{x \to +\infty} -1\right)\right] = +\infty$ infatti

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} -1 = -1$, la somma $+\infty - 1$ è definita e vale $+\infty$, il prodotto $+\infty \cdot +\infty$ è definito e vale $+\infty$.

Ci sono casi in cui raccogliere il termine di grado massimo funziona, ma raccogliere il termine di grado minimo no.
Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2+x$$

$x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$1+0+0=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 1$

$+\infty\cdot 1$ è definito $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x^3\right)\left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$x(x^2-x+1)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

ma la somma $+\infty-\infty+1$ non è definita.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+x^2}$

Soluzione:

Come primo tentativo calcolo $\lim_{x\to-\infty} x^3$ e $\lim_{x\to-\infty} x^2$ e provo a vedere se in questo caso la somma dei limiti è definita.

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ e $-\infty+\infty$ è una forma indeterminata.

Quindi non vale che $\lim_{x\to-\infty} x^3+x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 + \lim_{x\to-\infty} x^2$.

Scrivo $x^3+x^2 = x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Vale $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty$.

Possiamo concludere $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x^2}$

Soluzione: Negli esercizi precedenti abbiamo visto che

$\lim_{x\to+\infty} x^2-x = +\infty$. Inoltre, visto che $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Abbiamo $\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2 = +\infty$.

Però il quoziente $\frac{+\infty}{+\infty}$ è una forma indeterminata.

In questo caso possiamo scrivere $\frac{x^2-x}{x^3+x^2} = \frac{x^2(1-\frac{1}{x})}{x^3(1+\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Vale: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$.

Il prodotto $0\cdot 1\cdot 1$ e' ben definito e vale zero.

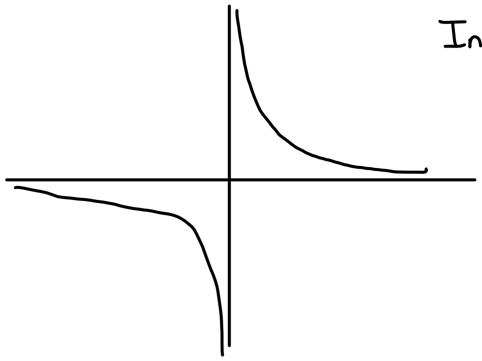
Dunque
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\right) = 0\cdot 1\cdot 1 = 0.$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to+\infty} e^x + \frac{1}{x}$

Soluzione: $\lim_{x\to+\infty} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to 0} e^x + \frac{1}{x}$

Soluzione: Il limite NON ESISTE.



Infatti $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.

Se pero' l'esercizio avesse chiesto di calcolare
$\lim_{x\to 0^+} e^x + \frac{1}{x}$ oppure $\lim_{x\to 0^-} e^x + \frac{1}{x}$

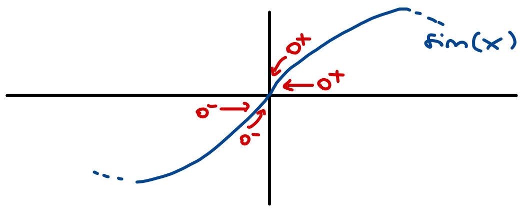
avremmo avuto:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e

$$\lim_{x\to 0^+} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 1 + (+\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^x + \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = 1 + (-\infty) = -\infty$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)}$

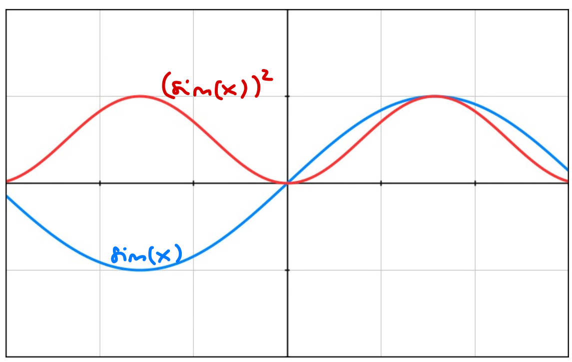
Soluzione: Il limite NON ESISTE



Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sin(x))^2}$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} (2 + \cos(x))\,x$

Soluzione: Sappiamo che $\lim_{x \to +\infty} \cos(x)$ non esiste, ma

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$1 \leq \cos(x) + 2 \leq 3$$

quindi $(2 + \cos(x))\,x \geq x$

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, quindi $\lim_{x \to +\infty} (2 + \cos(x))\,x = +\infty$.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

Soluzione: In questo caso $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Vale $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

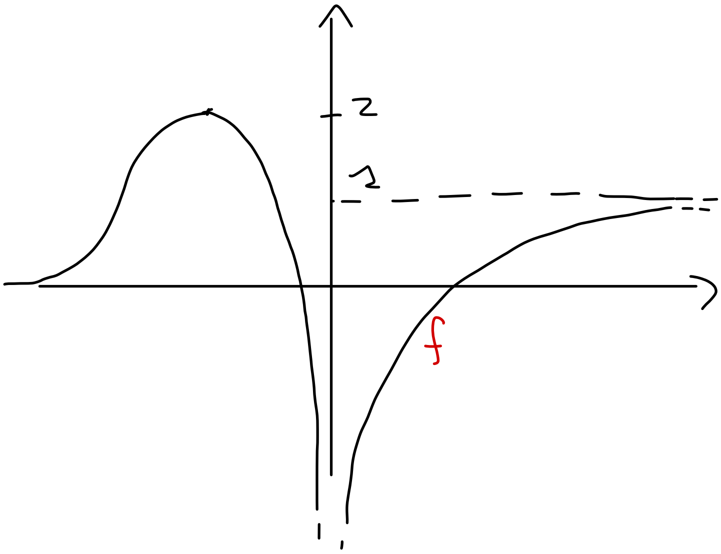
Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} e^x (2 + \sin(x))$

Soluzione:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$$
$$e^x \leq e^x(2 + \sin(x)) \leq 3e^x$$

$$\underset{\downarrow +\infty}{e^x} \qquad \qquad \underset{\downarrow x \to +\infty}{3e^x}$$
$$+\infty \qquad \qquad +\infty$$

quindi $\lim_{x \to +\infty} e^x (2 + \sin(x)) = +\infty$.



Esercizio:

Qual è:

i) il dominio,

ii) l'immagine

iii) i limiti rilevanti

della funzione f il cui grafico è rappresentato nella figura.

Svolgimento:

i) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2]$.

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Esercizio: Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e data $f: \begin{cases} 1 - x^2 & x \le 0 \\ \lambda x + 1 & x > 0 \end{cases}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dire per quali λ
1) la funzione è continua
2) la funzione è invertibile. Per questi valori scrivere l'inversa.

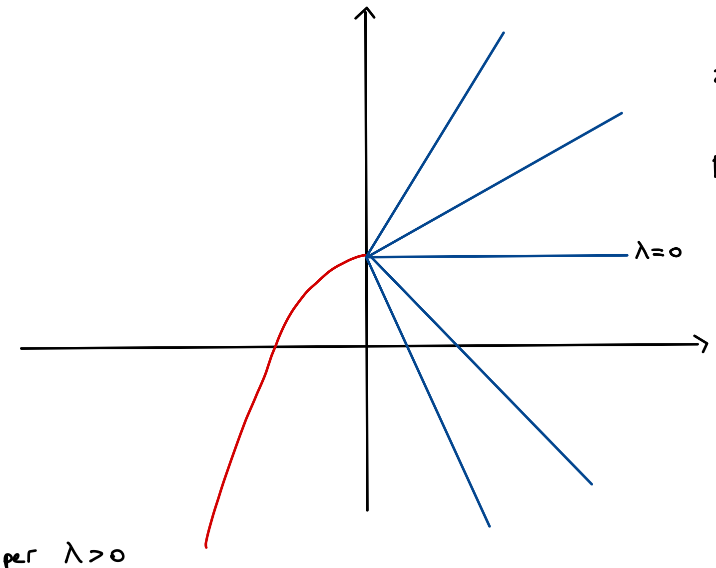
Svolgimento: 1) la funzione è definita a tratti e sia per $x<0$ che per $x>0$ è definita tramite una formula, sia per $x<0$ che per $x>0$ è una funzione elementare e sappiamo che è continua. Resta da vedere cosa succede in $x=0$.
Affinché sia continua anche in zero serve che

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Abbiamo $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ e anche $\lim_{x \to 0^+} \lambda x + 1 = 0$.

Quindi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione è continua.

2) Affinché sia invertibile vogliamo che la funzione sia biiettiva.
È facile disegnare il grafico di f:



al variare di λ
$\lambda x + 1$ sono rette con pendenze diverse, tutte passanti per $(0, 1)$.

Se $\lambda > 0$ f è biiettiva.

Solo per $\lambda > 0$
calcoliamo l'inversa: per $x \le 0$ abbiamo che $y = 1 - x^2$, dunque $x^2 = 1 - y$
$\Rightarrow$ se $y < 1$ allora $1 - y > 0$, quindi posso fare la radice
$\Rightarrow$ $x = -\sqrt{1-y}$ con $y \le 1$.
poiché $x \le 0$

Per $x > 0$ si ha $y = \lambda x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{\lambda}$ e $y > 1$ poiché $x > 0$.

Dunque
$$g(y) = \begin{cases} -\sqrt{1-y} & \text{se } y \le 1 \\ \frac{y-1}{\lambda} & \text{se } y > 1 \end{cases}$$