CORSO: **Analisi Matematica 3**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CORSO DI STUDIO: **laurea triennale in Matematica (MAT-L)**
e laurea magistrale in Matematica (WMA-LM)
CODICE ESAME: **547AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **60**
ANNO ACCADEMICO: **2019-20**
PERIODO: **primo semestre**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: spazi L^p e spazi di Hilbert, serie e trasformata di Fourier (in L^1 e L^2) e relative applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali fondamentali, funzioni armoniche, superfici regolari di dimensione k in $\mathbb{R}^d$ e integrazione su superfici.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2019]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. RICHIAMO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE
   1.1. *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   1.2. *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   1.3. *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile (rispetto a cambi di variabile di classe C^1).*

2. SPAZI L^p E CONVOLUZIONE
   2.1. Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   2.2. Norma L^p di una funzione. Spazi L^p. Completezza degli spazi L^p.
   2.3. Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   2.4. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   2.5. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

3. SPAZI DI HILBERT
   3.1. Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   3.2. Proiezione di un vettore su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione in termini di distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   3.3. *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

4. SERIE DI FOURIER ED APPLICAZIONI
   4.1. Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$. Serie di Fourier per le funzioni in $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$.
   4.2. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti. Convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   4.3. Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione e ulteriori risultati sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.
   4.4. *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde con condizioni di periodicità agli estremi tramite la serie di Fourier. *Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.*
   4.5. Varianti della serie di Fourier: rappresentazione in serie di seni e coseni per le funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$ (serie di Fourier reale); rappresentazione in serie di seni per le funzioni in $L^2(0,\pi)$; rappresentazione in serie di esponenziali di due variabili per le funzioni in $L^2\big([-\pi,\pi]^d;\mathbb{C}\big)$ (serie di Fourier in d variabili).
   4.6. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.

5. TRASFORMATA DI FOURIER E APPLICAZIONI

5.1. *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni (complesse) in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

5.2. Proprietà elementari della trasformata di Fourier. Trasformata del prodotto di convoluzione di due funzioni in L^1. Trasformata della derivata, derivata della trasformata. Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La trasformata di una funzione a supporto compatto è analitica.

5.3. Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.

5.4. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata delle funzioni in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Trasformata del prodotto di due funzioni in L^2.

5.5. Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.

6. FUNZIONI ARMONICHE

6.1. Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media e regolarità C^∞. Principio del massimo per le funzioni armoniche. Unicità e principio del confronto per le soluzioni delle equazioni di Laplace e di Poisson con dato al bordo assegnato.

6.2. Relazioni tra le funzioni armoniche in dimensione due e le funzioni olomorfe. Analiticità delle funzioni armoniche e principio di prolungamento analitico in dimensione due.

6.3. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite nucleo di Poisson.

7. INTEGRAZIONE SU SUPERFICI

7.1. *Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni e caratterizzazione come luogo di zeri (cioè in termini di equazioni). Spazio tangente ad una superficie. Mappe regolari tra superfici, e loro differenziale (inteso come applicazione lineare tra i rispettivi spazi tangenti). Superfici con bordo.*

7.2. Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Determinante di un'applicazione lineare tra spazi vettoriali con prodotto scalare. Formula dell'area per parametrizzazioni lineari.

7.3. Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$. Caratterizzazione della misura di volume su una superficie in termini di quasi-isometrie, e costruzione tramite la formula dell'area. Integrazione di funzioni scalari su una superficie tramite formula dell'area.

7.4. Applicazioni k-lineari alternanti su uno spazio vettoriale e formula di Binet generalizzata. Formule alternative per lo Jacobiano di una mappa. Casi particolari della formula dell'area: misura di lunghezza su una curva, misura di volume sul grafico di una funzione (scalare), misura di area su una superficie 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$.

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Servono in particolare le nozioni fondamentali di algebra lineare, topologia in spazi metrici, derivata e integrale (secondo Lebesgue) di funzioni in più variabili, convergenza uniforme e totale per successioni e serie di funzioni, teorema della divergenza, funzioni olomorfe e calcolo degli integrali con il metodo dei residui. Le nozioni di base della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue verranno richiamate all'inizio del corso.

Mailing list e pagina web del corso. Le comunicazioni riguardanti corso ed esami vengono inviate per posta elettronica a chi si è iscritto alla mailing list del corso, e pubblicizzate sulla pagina web del docente: `http://pagine.dm.unipi.it/alberti/`. Su tale pagina saranno disponibili gli eventuali appunti, e i testi e le soluzioni delle varie prove scritte.

Appelli ed esami. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. Per l'ammissione alla prova orale è necessario aver superato la prova scritta; la prova orale va sostenuta nello stesso appello della prova scritta. Non è consentito l'uso di libri di testo o appunti durante le prove scritte. Durante il corso è previsto lo svolgimento di due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta del primo o del secondo appello. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre). Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi utilizzando l'apposita procedura online.

Istruzioni per gli scritti online (aggiunte il 30 giugno 2020). A partire da giugno e forse fino a settembre gli esami si svolgeranno online, usando la piattaforma Google Meet (gli indirizzi verranno pubblicati sulla pagina web del docente e sulla pagina di iscrizione agli esami).
La prova scritta è divisa in due parti. La prima parte (che si svolge nella data prevista per lo scritto), consiste di 5 esercizi medio/facili da svolgere in un'ora e mezza. La seconda parte si svolge in una data successiva concordata con gli studenti interessati, e consiste di 3 esercizi medio/difficili da svolgere in un'ora e mezza. Passare la prima parte è sufficiente per l'ammissione all'orale.
Durante ciascuna prova scritta la telecamera deve inquadrare lo studente e un tavolo sgombro (a parte la carta e la penna). Non ci si può allontanare dall'inquadratura per tutta la durata della prova.
All'inizio della prova mostrerò e detterò il testo dell'esame che lo studente deve ricopiare sui fogli (un foglio per ogni esercizio). Alla fine della prova lo studente fotografa ciascun foglio con il cellulare e mi invia le foto per email (usando il proprio indirizzo istituzionale).

Importante: è compito dello studente far sì che l'inquadratura sia buona e la connessione adeguata.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso e si raccomanda quindi la frequenza. Alcuni degli argomenti del corso sono coperti dai seguenti testi. Si noti tuttavia che la presentazione proposta in questi testi differisce a volte significativamente da quella data a lezione (e alcuni argomenti svolti nel corso non sono trattati in alcuno dei testi sottostanti).

- R. Courant e F. John. *Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2.* Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1974.
- A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin. *Introductory real analysis.* Dover Publications, New York, 1975. Traduzione italiana: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Editori Riuniti, Roma, 2012.
- T.W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill 1974. Traduzione italiana: *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, 1974.