AM1 gest 17/18

Lezione 1, 26/9/17, due ore

Presentazione del corso

PROGRAMMA

- ripasso delle nozioni di base
- derivate (calcolo e applicazioni)
- integrali (calcolo e applicazioni)
- serie numeriche
- equazioni differenziali

  anche se non ci dedicheremo molto tempo questo è uno degli argomenti più importanti

NOTE

- Questo è un corso di Analisi o di "Calculus"? (Che significano questi termini?)

  Risposta: questo è sopratutto un corso di Calculus, ma faremo anche argomenti tipicamente di analisi, anche se non in modo del tutto sistematico.
- Attenzione: non c'è una netta separazione tra teoria ed esercizi.
- Attenzione: il corso parte lento ma poi acceleriamo, è facile rimanere indietro.

PAGINA WEB DEL CORSO / DOCENTE

http:// pagine.dm.unipi.it/alberti

↪ sottopagina della didattica

Ci trovate:

- programma (inclusi libri di testo e modalità d'esame, che discuto tra poco)
- Testi e soluzioni degli esami degli anni passati.
- Annunci
- link al registro delle lezioni. (E che è?)
- Materiale didattico vario...

MAILING LIST DEL CORSO

- Che è?
- Ci si iscrive seguendo le istruzioni sulla pagina web (a partire da domani)

RICEVIMENTO

- A che serve e come funziona...
- Proposta: Mercoledì 12.30 - 13.30
  Giovedì 12.30 - 13.30
  Sabato 12.30 - 13.30

GESTIONE DEL SABATO

RAPPRESENTANTI DEGLI STUDENTI

ESAMI

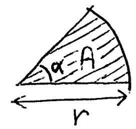
- Cosa sono e come funzionano gli appelli.
- Struttura delle prove scritte (due parti...)
- Prove orali
- Numero massimo di appelli : 4
  (Vale la consegna della prima parte dello scritto.)
  (Perché?)
- Compitini : sostituiscono la prova scritta.

CONSIGLI & OSSERVAZIONI

- La frequenza non è obbligatoria.
- Fate domande (se non in aula almeno a ricevimento)
- Attenzione a non rimanere indietro.
- "Capire" le soluzioni degli esercizi, piuttosto che imparare delle procedure.
- Studiare insieme aiuta, almeno all'inizio.

Esercizi sparsi

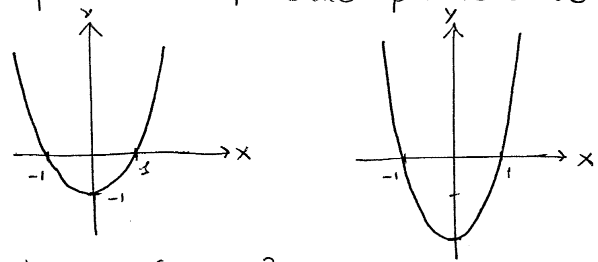
- Semplificare il più possibile l'espressione
  $\log\left(\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^3}}\right)$ [NOTA $\log x = \log_e x$!]
- Faccio una fotocopia con ingrandimento del 200% di una figura piana.
  Di quanto cresce l'area?
  Di quanto cresce il perimetro?
- Calcolare l'area di



[NOTA : gli angoli sono sempre misurati in radianti.]

[Significato geometrico della misura in radianti.
Convenienza nel calcolo delle derivate...]

- Proporre un'equazione per le curve



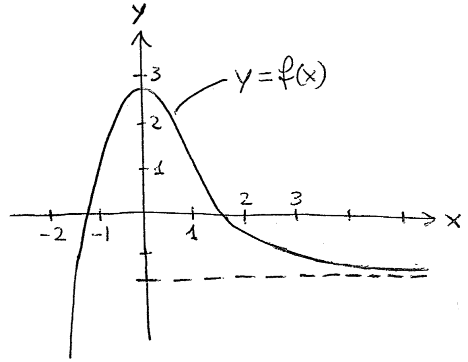
- Risolvere $(\mathrm{sen}\, x)^2 - \frac{1}{4} \geq 0$.
- Risolvere $(e^x - 2)(x^2 - 4) \geq 0$.

AM1 gest 17/18

Lezione 2, 27/9/17, 2 ore

Ripasso delle nozioni di base: esercizio/test

Considero la funzione $f(x)$ di cui disegno sotto il grafico



- risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq x$;
- risolvere $f(x) = 2$; $f(x) \geq 2$;
- per quali a l'equazione $f(x) = a$ ha 2 sol.?
- risolvere $f(x) \geq x^2 - 1$;
- disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2 - 1 \leq y \leq f(x)$;
- disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2 - 1 \leq y$ e $f(x) \leq 1$; lo stesso con "o" al posto di "e".

Sempre nell'ambito del ripasso, fissiamo la notazione e il significato preciso di alcune espressioni.

- □ $\log a = \log_e(a)$ = logaritmo in base $e = 2{,}71828\ldots$
- □ $\sqrt{a}$ è la radice quadrata positiva di a, ed è definita per ogni $a \geq 0$.
  (Quindi: le radici quadrate di 4 sono ± 2 ma $\sqrt{4} = 2$.).
  Lo stesso discorso vale per $\sqrt[n]{a}$ con n pari.
- □ a^b cosa significa? Consideriamo diversi casi:
  - per a qualunque, $b = 1, 2, 3\ldots$ si ha $a^b := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ volte}}$

il simbolo $:=$ viene usato per le definizioni: "$A := \ldots$" significa che l'oggetto A è definito da quello che segue dopo $:=$

  - per $a \neq 0$, $b = 1, 2, 3, \ldots$ si ha $a^{-b} := \dfrac{1}{a^b}$
  - per $a \neq 0$ si ha $a^0 := 1$

è meglio non definire 0^0, perché non è chiaro quale sarebbe la definizione "giusta": $a^0 = 1$ per $a \neq 0$ suggerisce $0^0 := 1$, mentre $0^a = 0$ per $a > 0$ suggerisce $0^0 := 0$ ....

  - per $a \geq 0$, $b = \frac{1}{n}$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ si ha $a^b = a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$.
  - per $a \geq 0$, $b = \frac{m}{n}$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ si ha $a^b = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$.
    (Se $b < 0$ si esclude il caso $a = 0$....)

cioè b razionale

È meglio non definire a^b con $a<0$ e b non intero, perché questo può portare a paradossi. Per esempio $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, ma anche $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ ....

- In fine si definisce a^b con $a \geq 0$ e b reale ma non razionale per approssimazione, cioè

$$2^{\pi} = 2^{3{,}141592\ldots} = \text{limite di } 2^3;\ 2^{3{,}1};\ 2^{3{,}14};\ 2^{3{,}1415};\ \ldots$$

per chi non l'ha già visto, il concetto di limite verrà spiegato più in là...

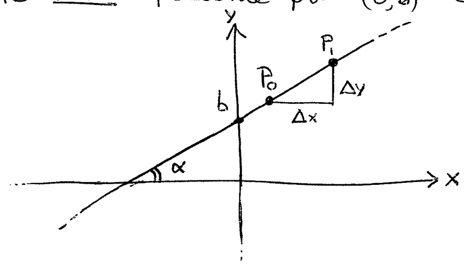
Grafici delle funzioni elementari (I)

Funzioni lineari $f(x) := ax+b$ (a,b numeri reali)

Il grafico di f, cioè l'insieme dei punti (x,y) del piano tali che $y = ax+b$ è la retta passante per $(0,b)$ con pendenza a

per ogni P_0, P_1 sul grafico si ha

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$



Funzioni potenza $f(x) = x^a$

Insieme di definizione:

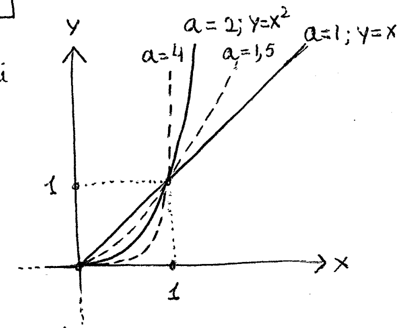
cioè l'insieme degli x per cui la formula x^a ha senso...

- ogni $x \in \mathbb{R}$ se $a = 1,2,3,\ldots$
- ogni $x \neq 0$ se $a = 0,-1,-2,\ldots$
- ogni $x \geq 0$ se $a > 0$, non intero
- ogni $x > 0$ se $a < 0$, non intero

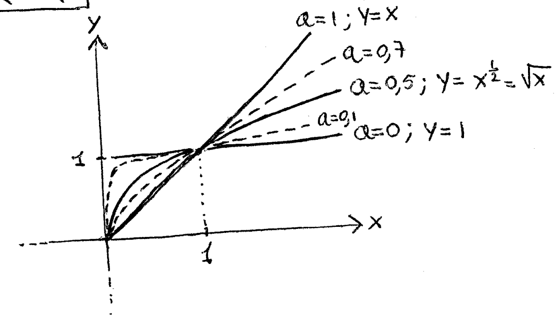
Disegno il grafico solo per $x \geq 0$ (l'estensione a $x<0$ per a intero viene dopo)

caso $a \geq 1$

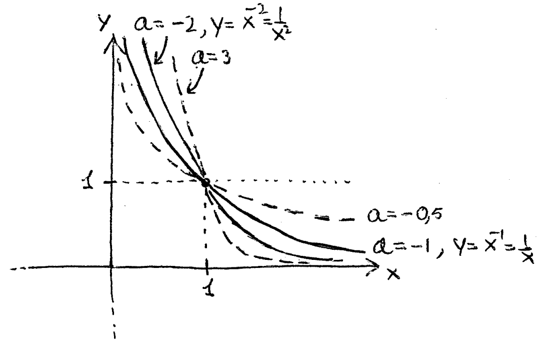
tutti i grafici passano per $(0,0)$ e $(1,1)$



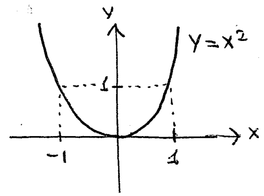
caso $0 \leq a \leq 1$

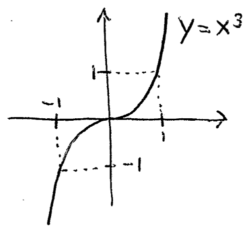


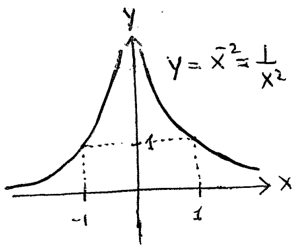
caso $a<0$

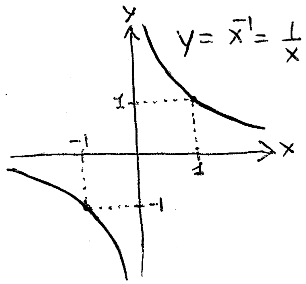


! Per a intero il grafico $y = x^a$ è definito anche per $x<0$.
La parte mancante viene ottenuta per simmetria rispetto all'asse y nel caso a pari e per simmetria rispetto all'origine nel caso a dispari





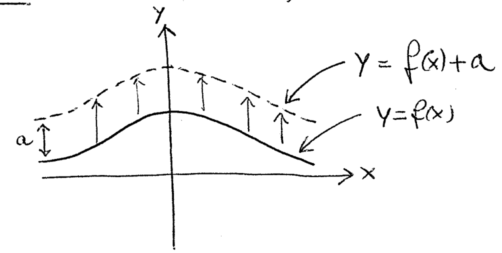




Operazioni sui grafici (I)

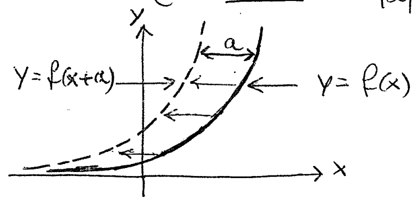
$\boxed{f(x)+a}$ Consideriamo una funzione $f(x)$ ed un numero reale a.

Il grafico $y = f(x)+a$ si ottiene spostando il grafico $y=f(x)$ in alto di a se $a>0$ (in basso di $|a|$ se $a<0$).



Il fatto è che il punto $(x, f(x)+a)$ si ottiene spostando $(x, f(x))$ in alto di a...

$\boxed{f(x+a)}$ Il grafico $y=f(x+a)$ si ottiene invece spostando il grafico $y=f(x)$ a sinistra di a se $a>0$ (a destra di $|a|$ se $a<0$)



Il fatto è che il punto $(x, f(x+a))$ si ottiene spostando $(x+a, f(x+a))$ verso sinistra di a

punto del grafico di f !!

Esempi

Disegnare i grafici delle funzioni

$x^3 - 1$; $(x+1)^4$; $\dfrac{1}{(x-2)^2}$; $\dfrac{1}{x+2} + 1$; $\sqrt{x+1}$

$\downarrow$

in due passaggi:

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x-2} \rightsquigarrow \frac{1}{x-2} + 1$$

sposto a destra di 2 — sposto in alto di 1

(ma anche al contrario

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x} + 1 \rightsquigarrow \frac{1}{x-2} + 1 \quad)$$

AM1 gest 17/18

Lezione 3, 28/9/17, 2 ore

(Continua il ripasso delle nozioni di base)

Grafici delle funzioni elementari (II)

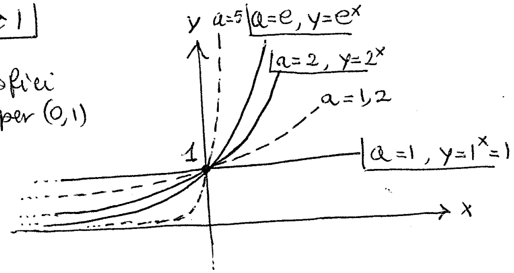
Funzioni esponenziali $y = a^x$ con $a>0$.

L'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$.

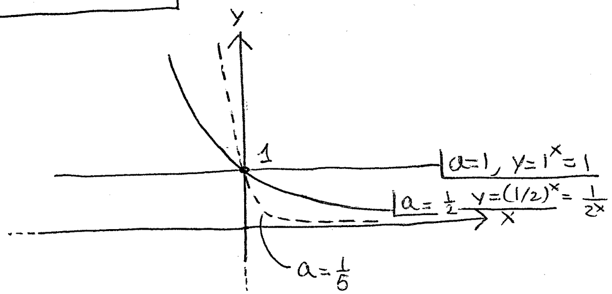
[Nota: non considero proprio il caso $a<0$, perché in tal caso gli unici x ammissibili sono i numeri interi.]

Caso $a \geq 1$

tutti i grafici passano per $(0,1)$



Caso $0<a\leq 1$



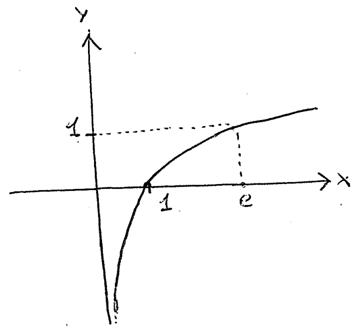
E' utile ricordare che tutte le potenze si possono scrivere come potenze in base e:

$$a^b = (e^{\log a})^b = e^{b\cdot \log a} \quad \left(\text{Quindi } a^x = e^{(\log a)\cdot x}\right)$$

Funzione logaritmo $y = \log x = \log_e x$

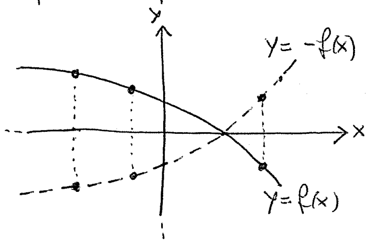
[Nota: in questo corso consideriamo solo il logaritmo in base "e", che indichiamo con log (e non ln). Le ragioni principali sono che la derivata di $\log_e x$ è più semplice di quella di $\log_a x$, e che si può passare facilmente dal logaritmo in base a a quello in base e...]

Insieme di definizione di $\log x$: tutti gli $x>0$.



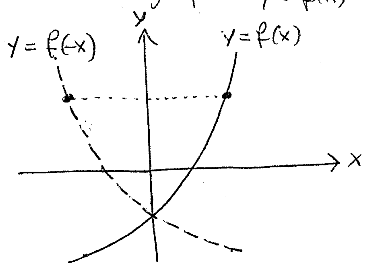
Operazioni sui grafici (II)

$\boxed{-f(x)}$ Data una funzione $f(x)$, il grafico $y=-f(x)$ si ottiene riflettendo (ribaltando) il grafico $y=f(x)$ rispetto all'asse delle x.



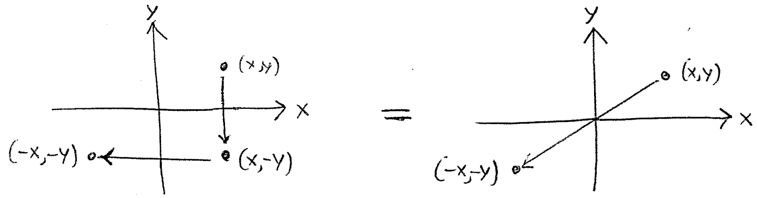
Il fatto è che il punto $(x,-f(x))$ è ottenuto riflettendo $(x,f(x))$ rispetto all'asse x.

$\boxed{f(-x)}$ Invece il grafico $y=f(-x)$ si ottiene riflettendo il grafico $y=f(x)$ rispetto all'asse y.



Questo perché il punto $(x, f(-x))$ si ottiene riflettendo $(-x, f(-x))$ rispetto all'asse y ← punto del grafico di f!

Osservazione: riflettere un punto (x,y) prima rispetto a un asse e poi a un altro equivale a rifletterlo rispetto all'origine



Di conseguenza:

$\boxed{-f(-x)}$ Il grafico $y=-f(-x)$ si ottiene riflettendo il grafico $y=f(x)$ rispetto all'origine.

Funzioni pari e dispari

Una funzione f si dice pari se

$$f(-x)=f(x) \quad \text{per ogni } x$$

Questo è equivalente a dire che il grafico $y=f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y.

Esempio fondamentale: $f(x)=x^n$ con n intero pari.

(Altro esempio $f(x)=e^{(x^2)}$)

Invece f si dice dispari se

$$f(-x)=-f(x) \quad \text{per ogni } x$$

cioè se $f(x)=-f(-x)$ per ogni x, il che equivale a dire che il grafico $y=f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine.

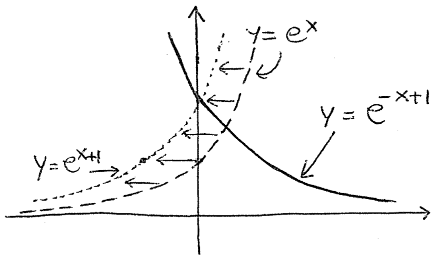
Esempio fondamentale: $f(x)=x^n$ con n dispari

Esempi

Disegnare i grafici $y=e^{-x}$; $y=-x^3$; $y=-\log(-x)$

Disegnare il grafico di $y=e^{1-x}$.

In due "mosse": $e^{x} \xrightarrow[\text{sin. di 1}]{\text{sposto a}} e^{x+1} \xrightarrow[\text{risp. asse y}]{\text{rifletto}} e^{-x+1}$



Ma attenzione: la sequenza di "mosse"

$e^{x} \xrightarrow[\text{risp. asse y}]{\text{rifletto}} e^{-x} \xrightarrow[\text{a sin. di 1}]{\text{sposto}} e^{-x+1}$

non funziona!

La ragione è che spostare il grafico $y=e^{-x}$ a sinistra di 1 dà il grafico di $y=e^{-(x+1)}$ non quello di $y=e^{-x+1}$!

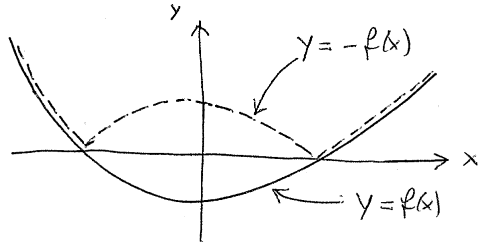
La seconda "mossa" va sostituita con

$$e^{-x} \xrightarrow[\text{destra di 1}]{\text{sposto a}} e^{-(x-1)} = e^{1-x}$$

Operazioni sui grafici (III)

$\boxed{|f(x)|}$

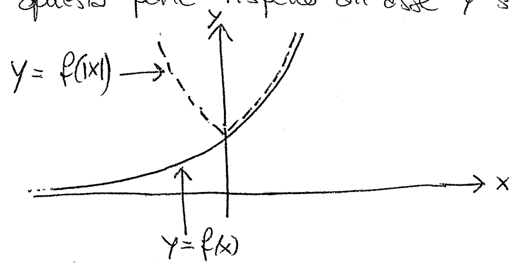
Il grafico $y=|f(x)|$ si ottiene prendendo il grafico $y=f(x)$ e ribaltandone la parte che sta sotto l'asse x rispetto all'asse x stesso.



(Perché $(x,|f(x)|)=(x,f(x))$ se $f(x)>0$ mentre $(x,|f(x)|)=(x,-f(x))$ = ribaltamento di $(x,f(x))$ rispetto all'asse x se $f(x)<0$.)

$\boxed{f(|x|)}$

Il grafico $y=f(|x|)$ si ottiene prendendo la parte del grafico $y=f(x)$ a destra dell'asse y e aggiungendo la riflessione di questa parte rispetto all'asse y stesso



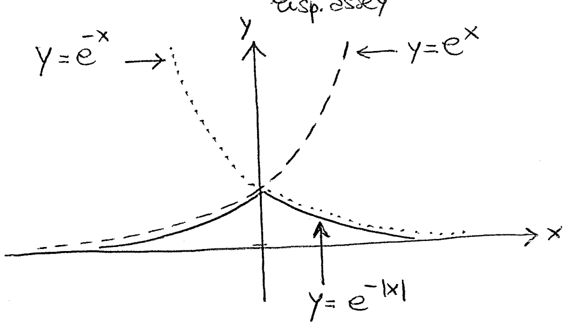
(Perché $f(|x|)=f(x)$ per $x>0$, e inoltre $f(|x|)$ è una funzione pari.)

Esempi

Disegnare il grafico $y = e^{|x|}$.

Disegnare il grafico $y = e^{-|x|}$!

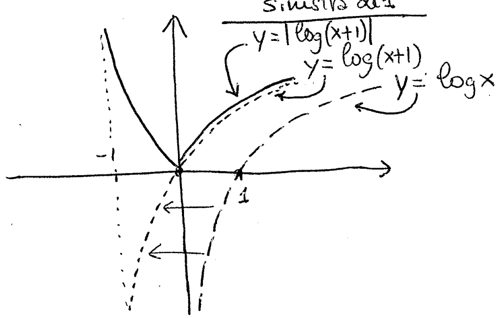
in due passaggi: $e^{x} \underset{\text{rifless. risp. asse } y}{\rightsquigarrow} e^{-x} \underset{(\dots)}{\rightsquigarrow} e^{-|x|}$



Attenzione: la sequenza $e^{x} \underset{(\dots)}{\rightsquigarrow} e^{|x|} \underset{\text{rifless. risp. asse } y}{\rightsquigarrow} e^{-|x|}$ è sbagliata. Spiegare perché!

Disegnare $y = |\log(x+1)|$

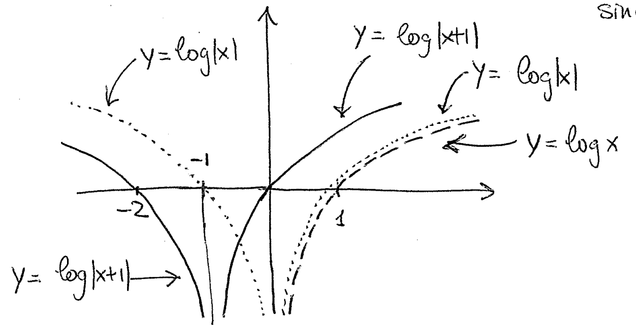
in due passaggi: $\log x \underset{\text{sposto a sinistra di 1}}{\rightsquigarrow} \log(x+1) \underset{(\dots)}{\rightsquigarrow} |\log(x+1)|$



I passaggi $\log x \rightsquigarrow |\log x| \rightsquigarrow |\log(x+1)|$ vanno ugualmente bene (verificare!).

Disegnare $y = \log|x+1|$

in due passaggi: $\log x \underset{(\dots)}{\rightsquigarrow} \log|x| \underset{\text{sposto a sin. di 1}}{\rightsquigarrow} \log|x+1|$



Attenzione: i passaggi $\log x \rightsquigarrow \log(x+1) \rightsquigarrow \log|x+1|$ non funzionano, nel senso che la mossa $f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$ applicata a $\log(x+1)$ dà $\log(|x|+1)$

AM1 gest 17/18

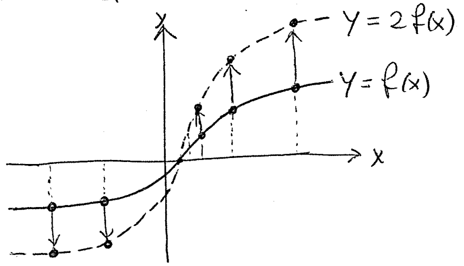
Lezione 4, 29/9/17, 2 ore

(Continua il ripasso delle nozioni di base)

Operazioni sui grafici (IV)

$\boxed{a f(x)}$ Prendiamo una funzione f e un numero a positivo.
Vogliamo disegnare il grafico $y = a \cdot f(x)$ partendo dal grafico $y = f(x)$.

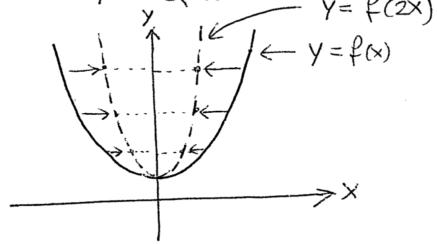
Per $a = 2$ osservo che $(x, 2f(x))$ si ottiene da $(x, f(x))$ raddoppiandone la distanza dall'asse x. Quindi



L'operazione geometrica corrisponde a "dilatare verticalmente" il grafico $y = f(x)$ di un fattore 2 (lasciando fissi i punti sull'asse delle x).

Più in generale, il grafico $y = af(x)$ si ottiene dilatando quello $y = f(x)$ di un fattore a per $a > 1$, e comprimendolo di un fattore a per $0 < a < 1$ (sempre verticalmente).

$\boxed{f(ax)}$ Per $a = 2$, osservo che $(x, f(2x))$ si ottiene da $(2x, f(2x))$ ← punto del grafico di f riducendo di metà la distanza dall'asse y. Quindi



L'operazione geometrica complessiva corrisponde a "comprimere orizzontalmente" il grafico $y = f(x)$ di un fattore $\frac{1}{2}$ (lasciando fissi i punti sull'asse y).

Più in generale il grafico $y = f(ax)$ si ottiene comprimendo orizzontalmente quello $y = f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ per $a > 1$, e dilatandolo orizzontalmente di un fattore $\frac{1}{a}$ per $0 < a < 1$.

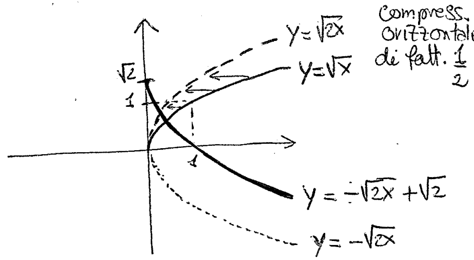
Esempi

Disegnare il grafico $y = \frac{1}{2} e^x$

Disegnare il grafico $y = \sqrt{2} - \sqrt{2x}$

in tre passaggi: $\sqrt{x} \rightsquigarrow \sqrt{2x} \rightsquigarrow -\sqrt{2x} \rightsquigarrow -\sqrt{2x} + \sqrt{2}$

compress. orizzontale di fatt. $\frac{1}{2}$ — rifless. risp. asse x — traslaz. in alto di $\sqrt{2}$

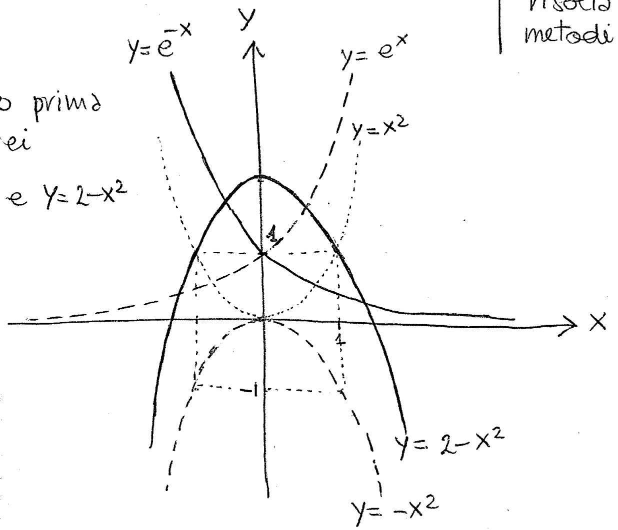


Esercizio standard

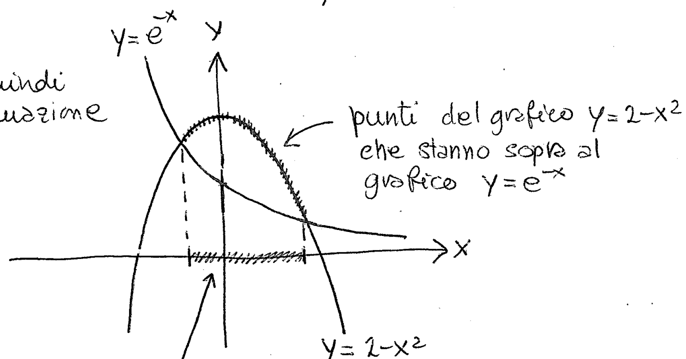
Risolvere graficamente la disequazione

$e^{-x} \leq 2-x^2$ ← non può essere risolta con metodi algebrici!

Disegno prima i grafici $y=e^{-x}$ e $y=2-x^2$



risolvo quindi la disequazione

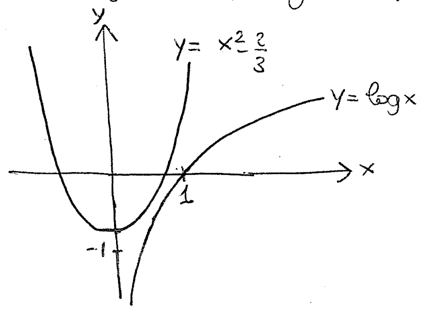


soluzioni della diseq. $e^{-x} \leq 2-x^2$

Attenzione: non sempre questa risoluzione grafica dà risultati attendibili.

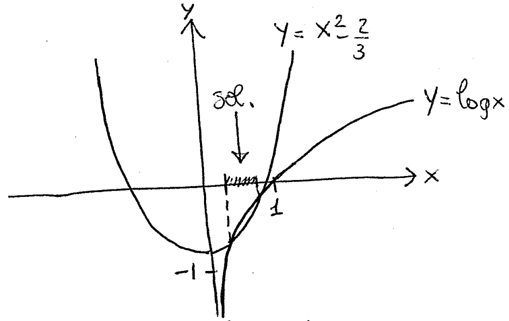
Per esempio consideriamo la diseq. $\log x \geqslant x^2 - \frac{2}{3}$

Se disegno i grafici $y=\log x$ e $y=x^2-\frac{2}{3}$ così



ne deduco che la diseq. non ha soluzioni.

Ma se invece li disegno così



allora ci sono soluzioni.

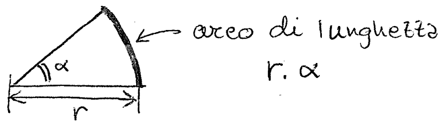
Ma senza calcoli precisi non c'è modo di capire quale dei due disegni sia corretto (almeno a livello qualitativo).

(Come vedremo usando le derivate, quello corretto è il primo...)

(Lezione 4, continua)

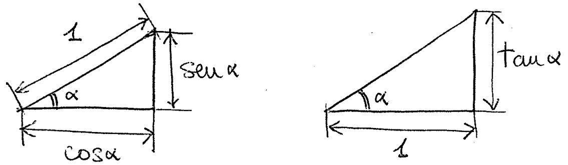
Nozioni base di trigonometria

Nota: gli angoli sono sempre misurati in radianti. Le ragioni sono (almeno) due: in questo modo le derivate di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono più semplici; inoltre vale la formula



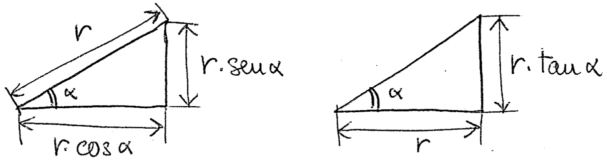
Definizione di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$

$\boxed{\text{Per } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}}$



da cui segue per similitudine che $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Inoltre, sempre per similitudine, si ottiene



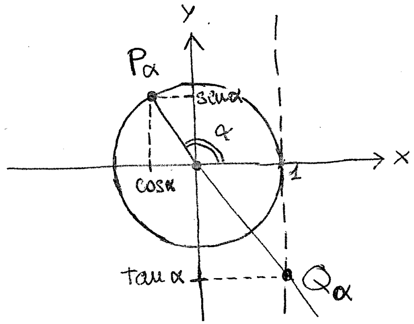
Infine il teorema di Pitagora ci dà

$$(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1$$

(In seguito scrivo $\operatorname{sen}^2\alpha$ per $(\operatorname{sen}\alpha)^2$...)

$\boxed{\text{Per } \alpha\in\mathbb{R}}$ In effetti si definisce seno, coseno e tangente per ogni angolo $\alpha\in\mathbb{R}$!

Costruisco il punto P_α sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 partendo dal punto $(1,0)$ e muovendomi lungo la circonferenza di α in senso antiorario (di $|\alpha|$ in senso orario se $\alpha<0$)



Costruisco quindi Q_α come intersezione della retta $x=1$ con la retta passante per l'origine e per P_α.

Pongo

$$\cos\alpha = \text{ascissa di } P_\alpha$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \text{ordinata di } P_\alpha$$
$$\tan\alpha = \text{ordinata di } Q_\alpha$$

Note:
- Questa definizione ha senso per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, non solo per $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$....
- Continua a valere che $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
- $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ sono coordinate, non lunghezze, e possono essere anche negative.

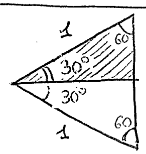
- $\tan\alpha$ non è definita per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k intero.
- per indicare i punti della circonferenza mi bastano gli angoli α compresi tra 0 e 2π oppure tra $-\pi$ e π; Tuttavia conviene per varie ragioni considerare come angoli tutti i numeri reali (per esempio perchè possiamo sempre sommare e sottrarre due angoli....)

! | Tabella di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ per alcuni valori significativi di α

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0	1	0	0
$30° = \pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45° = \pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60° = \pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$90° = \pi/2$	0	1	$=$

Spiegare come si ottengono questi valori

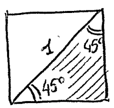
$\frac{\pi}{6} = 30°$



Il triangolo grigio è metà di un triangolo equilatero. Quindi

$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \text{altezza} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4} = 45°$



il triangolo grigio è metà di un quadrato con diagonale 1...

Coseno e tangente si calcolano a partire dal seno con le formule viste sopra....

etc.

Alcune formule utili

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (già vista)

  $\hookrightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

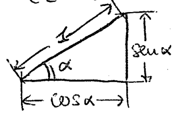
  $\hookrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

  per decidere il segno in queste formule bisogna sapere in che quadrante sta P_α

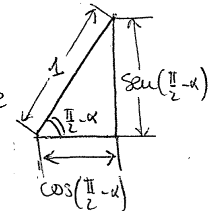
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (già vista)

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

  perchè i triangoli



  e



  sono uguali ma con basi e altezze scambiate.

- $\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$

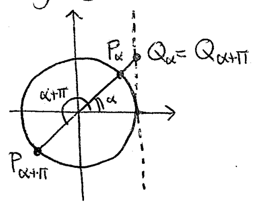
  perchè P_α e $P_{\alpha+2\pi}$ sono lo stesso punto

- $\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$

  perchè Q_α e $Q_{\alpha+\pi}$ sono lo stesso punto

- $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

  perchè P_α e $P_{\alpha+\pi}$ sono simmetrici rispetto all'origine



- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

  $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

  (Non do la dimostrazione, che è complicata.)

- In particolare per $\beta=\alpha$ otteniamo

  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

  $$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

Esercizi da fare a casa

- Completare le seguenti formule

  $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \ldots$

  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \ldots$

  $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \ldots$

  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \ldots$

- Esprimere $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ con formule che contengono solo $\tan\alpha$.

AM1 gest 17/18

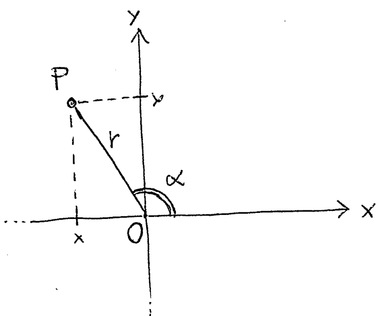
Lezione 5, 30/9/17, 3 ore

(Continua il ripasso di trigonometria)

Coordinate polari

Una volta fissati l'origine e gli assi possiamo individuare ogni punto P nel piano tramite l'ascissa x e l'ordinata y; x e y sono chiamate coordinate cartesiane.

E possibile individuare P usando anche delle altre coordinate, chiamate polari, vale a dire la distanza r di P dall'origine O e l'angolo α formato dal segmento PO con la semiretta delle x positive:



Volendo raggiungere P partendo da O, α indica in quale direzione muoversi mentre r dice di quanto muoversi....

Note

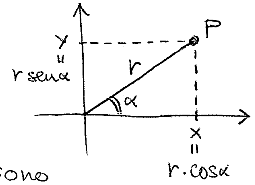
- L'angolo α non è definito se P è l'origine.
- Si può decidere di prendere α compreso tra 0 e 2π oppure tra $-\pi$ e π.
  Si può anche decidere di non porre restrizioni su α, ma in tal caso bisogna ricordare che α e $\alpha+2k\pi$ con k intero indicano la stessa direzione e sono intercambiabili...

Formule di conversione

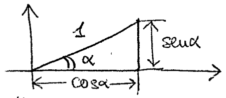
- Conoscendo r e α, otteniamo x e y tramite le formule

$$x = r\cdot\cos\alpha$$

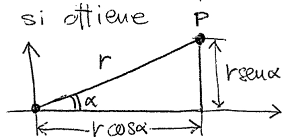
$$y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha$$



Per $r=1$ queste formule sono la definizione di senα e cosα, per r qualunque si ottengono per similitudine, osservando cioè che scalando il triangolo



di un fattore r si ottiene

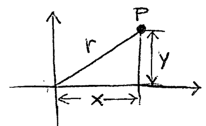


- Conoscendo x e y, otteniamo r e α tramite le formule

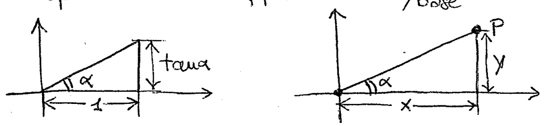
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

la prima formula è il teorema di Pitagora

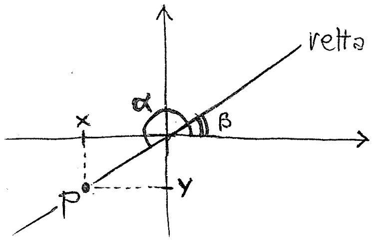


la seconda si ottiene per similitudine, cioè osservando che i seguenti triangoli sono simili e quindi il rapporto altezza/base è uguale:



Attenzione!

- La formula $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ non dà α ma solo la tangente di α, e conoscere $\tan\alpha$ non permette di determinare α, neanche se ci restringiamo a $0 \leq \alpha < 2\pi$ oppure a $-\pi < \alpha \leq \pi$. Il punto è che $\tan\alpha$ individua la retta passante per l'origine e per P, ma non dice su quale semiretta sta P



Cioè gli angoli α e β hanno la stessa tangente:

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha = \tan\beta$$

ma β non va bene come coordinata polare di P.

Siccome la funzione $\arctan t$ dà l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ con tangente t, in questo caso $\arctan\frac{y}{x} = \beta$. Quindi la formula $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ non può essere sostituita con $\alpha = \arctan\frac{y}{x}$, ma con

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Infine, la formula $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ non ha senso se $x = 0$. In questo caso va sostituita con

$$\alpha = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } y > 0 \\ -\pi/2 \ (\text{oppure } 3\pi/2) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Esempio

Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti, dati in coordinate cartesiane

$(-1, 1)$
$\downarrow$
$r = \sqrt{2}$
$\alpha = \frac{3\pi}{4}$
(in questo caso $\arctan\frac{y}{x} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$)

$(1, -\sqrt{3})$
$\downarrow$
$r = 2$
$\alpha = -\frac{\pi}{3}$

$(0, -2)$
$\downarrow$
$r = 2$
$\alpha = -\frac{\pi}{2}$

Grafici delle funzioni trigonometriche

Cominciamo col dare una definizione

Funzioni periodiche

Una funzione f si dice periodica di periodo T $(\neq 0)$, o T-periodica, se vale

$$(*) \qquad f(x+T) = f(x) \quad \text{per ogni } x$$

- Se f è T-periodica, allora è anche $(2T)$-periodica. Infatti, per ogni x si ha:

$$f(x+2T) = \underbrace{f((x+T)+T) = f(x+T)}_{\text{applico } (*) \text{ con } x+T \text{ al posto di } x} \underbrace{=}_{\text{applico } (*)} f(x)$$

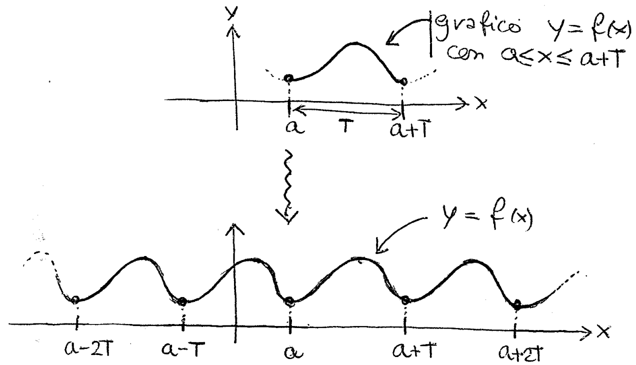
  Ed è anche $(-T)$-periodica. Infatti:

$$\underbrace{f(x-T) = f((x-T)+T)}_{\text{applico } (*) \text{ con } x-T \text{ al posto di } x} = f(x)$$

  Più in generale f è (kT)-periodica per ogni k intero $(\neq 0)$.

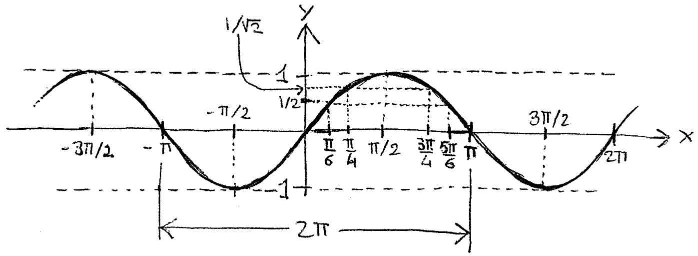
- Normalmente il termine "periodo di f" viene usato per indicare il più piccolo T positivo per cui vale $(*)$. Non seguo sempre questa regola.
- Se f è T-periodica allora traslando il grafico di f verso sinistra (o verso destra) di T si riottiene lo stesso grafico.

- Viceversa, se traslando il grafico di f verso sinistra (o verso destra) di T si riottiene lo stesso grafico, allora f è T-periodica.
- Se f è T-periodica e conosciamo il grafico di f per x in un intervallo di lunghezza T, allora possiamo ricostruire il grafico completo replicando il pezzo a disposizione "con lo stampino":

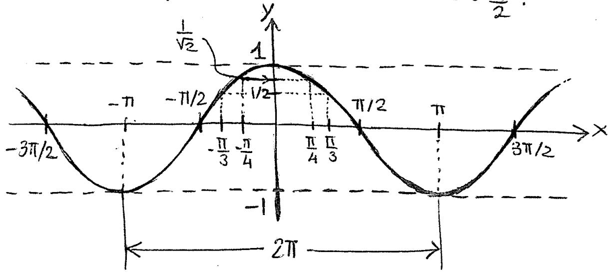


Grafici di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$.

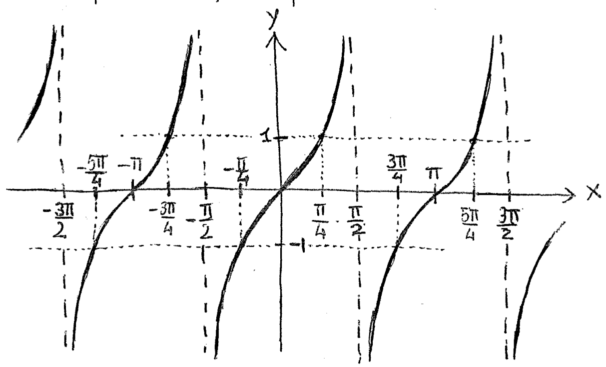
- La funzione $\operatorname{sen} x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, 2π-periodica ($\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$) e dispari ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$). Usando questi fatti e la tabella dei valori di $\operatorname{sen} x$ per $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \dots$ otteniamo



- La funzione $\cos x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è 2π – periodica, pari ($\cos(-x) = \cos x$).
Inoltre $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (verificare!) e quindi otteniamo il grafico $y = \cos x$ traslando il grafico $y = \operatorname{sen} x$ a sinistra di $\frac{\pi}{2}$.

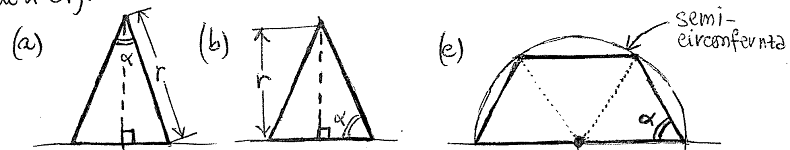


- La funzione $\tan x$ è definita per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, è π– periodica, dispari.
k intero



Esercizi

- Trovare area e perimetro delle seguenti figure (in funzione di α e r):



Triangolo isoscele — Triangolo isoscele — trapezio isoscele

(a) h = altezza $= r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b = base $= 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

uso la formula $2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta = \operatorname{sen}(2\beta)$ con $\beta = \frac{\alpha}{2}$

area $= \frac{1}{2} bh = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\operatorname{sen}\alpha$

perimetro $= r + r + b = 2r\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

(b) $h = r$

$h = \frac{b}{2} \cdot \tan\alpha \Rightarrow b = \frac{2h}{\tan\alpha} = \frac{2r}{\tan\alpha}$

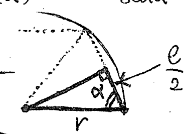
area $= \frac{r^2}{\tan\alpha}$

ℓ = lato obliquo $\Rightarrow r = \ell \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \ell = \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha}$

perimetro $= \ell + \ell + b = 2r\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha}\right) = 2r\,\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

(c) B = base maggiore $= 2r$

ℓ = lato obliquo $= 2r\cos\alpha$

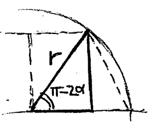


h = altezza $= r\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)$

$= r \operatorname{sen} 2\alpha = 2r \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

b = base minore $= 2r\cos(\pi - 2\alpha)$

$= -2r\cos(2\alpha) = 2r(2\operatorname{sen}^2\alpha - 1)$



area $= \frac{B+b}{2} h = 4r^2 \operatorname{sen}^3\alpha \cos\alpha$

perimetro $= B + b + \ell + \ell = 4r(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos\alpha)$

(continua lezione 5)

Funzioni

Notazione per gli intervalli (e le semirette)

$[a,b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso di estremi a,b

$(a,b) := \{x \mid a < x < b\}$ intervallo aperto di estremi a,b

$[a,b) := \ldots$

$(a,b] := \ldots$

$[a,+\infty) := \{x \mid a \leq x\}$

$(a,+\infty) := \ldots$

$(-\infty,b] := \{x \mid x \leq b\}$

$(-\infty,b) := \ldots$

In questo corso userò spesso la parola "intervallo" per indicare anche le semirette, e a volte anche tutta la retta reale. Insomma, per indicare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ "fatti di un pezzo solo".

Definizione (vaga e approssimativa) di funzione

Dati due insiemi X e Y, non necessariamente fatti di numeri reali, una funzione f da X a Y (scrivo: $f: X \to Y$) è una qualche "procedura" che ad ogni $x \in X$ associa un valore $f(x)$ in Y.

$f(x)$: "output"; x: "input"

L'insieme X viene detto dominio di f.
L'insieme Y viene detto codominio di f.
L'insieme dei valori effettivamente ottenuti facendo variare x in X viene detto immagine di f, cioè

$$\text{immagine di } f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

e in generale è un sottoinsieme di Y.

Commenti e osservazioni

- Se X e Y sono contenuti in $\mathbb{R}$ (cioè se l'input e l'output di f sono numeri reali) allora possiamo anche definire il grafico di f come l'insieme dei punti (x,y) del piano che soddisfano

$$y = f(x).$$

- Le funzioni che consideriamo più spesso in questo corso sono quelle con x e f(x) sono numeri reali, e f(x) è ottenuto a partire da x tramite una formula, come per esempio

  (a) $f(x) := x^4 - 2x^2 + 3x + 1$

  (b) $f(x) := \frac{1}{2x}$

  (c) $f(x) := \sqrt{1-x}$

  (d) $f(x) := 2$ (funzione costante, ebbene sì!)

Per queste funzioni si considera l'insieme di definizione, vale a dire l'insieme degli x per cui la formula che dà $f(x)$ ha senso.

Per esempio, per le formule date sopra, l'insieme di definizione è

(a) ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) $x \neq 0$;

(c) $x \leq 1$;

(d) ogni $x \in \mathbb{R}$.

Di solito per queste funzioni il <u>dominio</u> coincide con l'<u>insieme di definizione</u>, tuttavia in certe situazioni è naturale considerare come dominio un sottoinsieme proprio dell'insieme di definizione (faccio un esempio dopo).

!

- Consideriamo le formule x^2-1 e $(x+1)(x-1)$. Sono chiaramente diverse ma com'è noto danno lo stesso valore per ogni x.
  In questo caso, un po' in contraddizione con quanto scritto nella definizione sopra, queste due formule definiscono <u>la stessa funzione</u>.
  In altre parole, due funzioni sono uguali se hanno lo stesso dominio, e se per ogni input $x \in X$ danno lo stesso output (anche se magari usando procedure diverse).

!

- Sempre parlando di funzioni con X, Y contenuti in $\mathbb{R}$, è possibile considerare anche funzioni più complicate di quelle date da un'unica formula, per esempio

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{per } x < -1 \\ \sqrt{x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

(In questo caso l'insieme di def./dominio è: $x<-1$ e $x \geq 0$.)

- L'uso delle lettere x e y per input (variabile indipendente) e output (variabile dipendente) è puramente convenzionale; e si possono usare anche altre lettere (e a volte è opportuno farlo). Lo stesso vale per X e Y per indicare dominio e codominio.

- Le funzioni possono essere definite anche al di fuori di un contesto puramente matematico.
  Per esempio, dato un oggetto (punto) in movimento, la <u>legge oraria</u> è la funzione che ad ogni istante t associa la posizione del punto all'istante t, espressa come coppia di coordinate (se il punto si muove nel piano cartesiano, tripletta di coordinate se il punto si muove nello spazio).
  In questo caso il dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (l'insieme dei tempi considerati) e il codominio è il piano (lo spazio) e in particolare non è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
  Un altro esempio è questo: eseguo un esperimento più volte, variando un certo parametro x, e indico con $f(x)$ una misura legata al risultato dell'esperimento (per esempio lascio cadere un oggetto dall'altezza x e indico con $f(x)$ il tempo che ci mette a toccare terra). In questo caso il dominio è l'insieme dei parametri per cui ho fatto l'esperimento (e quindi contiene un numero finito di punti) e il codominio è $\mathbb{R}$ se il risultato dell'esperimento è descritto da una

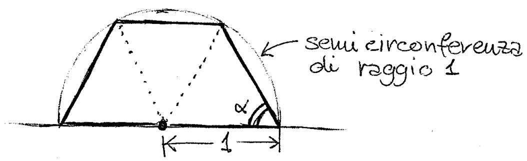
sola misura, ma è qualcosa di più complicato se i risultati sono descritti da più misure...

Un altro esempio di funzione, è quella che ad ogni targa nel registro automobilistico associa il codice fiscale del proprietario.
In questo caso il dominio è l'insieme delle targhe delle in circolazione, e il codominio è l'insieme di tutti i possibili codici fiscali (non necessaria-
-mente quelli di persone esistenti, o di proprietari di auto). Nessuno dei due è un insieme di numeri....

- Anche a livello puramente matematico è possibile considerare funzioni date da formule che richiedo come input più di un numero.
Per esempio la funzione f che per ogni coppia di numeri reali (x_1, x_2) dà come output il prodotto, cioè $f(x_1, x_2) := x_1 \cdot x_2$.
In questo caso il dominio è l'insieme X delle coppie di numeri reali, il codominio è $\mathbb{R}$.
Si parla allora di funzioni di più variabili, che verranno studiate nel corso di Analisi II.
Infine è anche possibile considerare funzioni in cui sia l'input che l'output sono dati da più di un numero, per esempio la funzione che ha come input le coordinate polari (r, α) di un punto e come output le coordinate euclidee $x = r \cdot \cos\alpha$ e $y = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$, cioè
$$f(r, \alpha) := (r \cos\alpha,\ r \operatorname{sen}\alpha)$$
(Quali sono dominio e immagine in questo caso?)

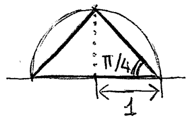
- A che serve la nozione di codominio se abbiamo quella di immagine? Sono uguali?
A priori l'immagine è un sottoinsieme del codominio. Volendo potremmo considerare solo l'immagine e non parlare mai di codominio, ma in molte situazione questo non è pratico, per esempio perché è difficile capire quale sia l'immagine.
Per esempio, data la funzione $f(x) := x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$, è ovvio che $f(x)$ deve essere un numero reale, e quindi possiamo dire che il codominio è $\mathbb{R}$, ma non è affatto facile capire quale sia l'immagine....

- Consideriamo il trapezio isoscele in figura



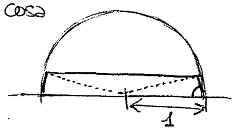
Abbiamo già visto che l'area può essere ricavata a partire da α tramite la formula
$$f(\alpha) := 4 \operatorname{sen}^3\alpha \cos\alpha$$
L'insieme di definizione di questa formula è ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Tuttavia in questo contesto conviene (è naturale) considerare come dominio l'insieme degli α che corrispondono a dei trapezi, vale a dire $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Uno può valutare se includere nel dominio anche $\alpha = \frac{\pi}{4}$ che corrisponde al caso in cui il trapezio si riduce a un triangolo

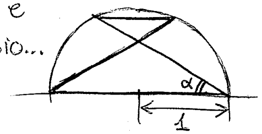


oppure $\alpha = \frac{\pi}{2}$, che corrisponde al caso limite in cui la base maggiore e quella minore coincidono, e il trapezio si riduce al diametro di base.

Ecco infatti cosa succede per α vicino a $\frac{\pi}{2}$



Certamente non ha senso considerare $\alpha < 0$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$ e neanche $\alpha < \frac{\pi}{4}$; in quest'ultimo caso infatti il trapezio non è più un trapezio...



<u>Domanda</u>: prendendo come dominio $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, qual è l'immagine di $f(\alpha) := 4 \operatorname{sen}^3\alpha \cos\alpha$?

AM1 gest 17/18

Lezione 6, 3/10/17, 2 ore

(Continuo con la teoria generale delle funzioni)

Caratterizzazione grafica dell'immagine

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, allora y appartiene all'immagine di f se esiste $x \in X$ tale che

$$y = f(x)$$

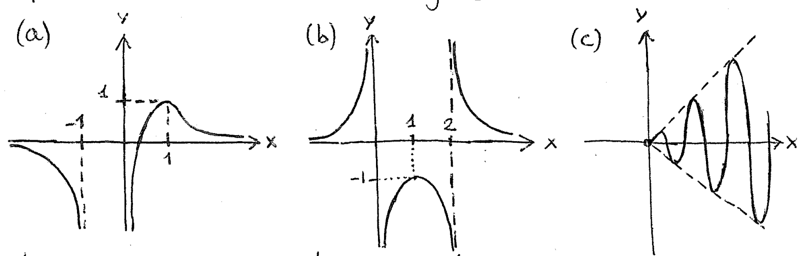
serve $X \subset \mathbb{R}$ per poter parlare di grafico di f

cioè se il grafico $y = f(x)$ interseca la retta orizzontale ad altezza y.

L'immagine di f è quindi il sottoinsieme dell'asse y di tutte le altezze delle rette orizzontali che intersecano il grafico $y = f(x)$.

Esempi/esercizi

- Per ciascuna delle funzioni disegnate sotto, specificare dominio e immagine.



(a) dominio: $x < -1$ & $x > 0$; immagine: $y \leq 1$

(b) dominio: $x \neq 0, 2$; immagine: $y > 0$ & $y \leq -1$

(c) dominio: $x \geq 0$; immagine: ogni y

- Dimostrare che l'immagine della funzione $\log x$ è tutto $\mathbb{R}$.

  Si tratta di far vedere che per ogni $y \in \mathbb{R}$ si può risolvere l'equazione $y = \log x$ ....

- Determinare insieme di definizione e immagine della funzione $(\operatorname{sen} \frac{1}{x})^2 + 1$.

  L'insieme di definizione è ovviamente $x \neq 0$.

  Per determinare quali y sono nell'immagine, cerchiamo di risolvere l'equazione $(\operatorname{sen}\frac{1}{x})^2 + 1 = y$, vale a dire $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \pm\sqrt{y-1}$.

  Si vede (subito?) che una soluzione esiste se $y - 1 \geq 0$ (affinché la radice esista) e $\sqrt{y-1} \leq 1$ (affinché sia il seno di qualche angolo $\frac{1}{x}$).

  Otteniamo quindi $1 \leq y \leq 2$.

Riprendiamo la teoria con una definizione.

Funzioni iniettive

Una funzione $f: X \longrightarrow Y$ con X, Y insiemi qualunque si dice iniettiva se input diversi danno luogo ad output diversi, cioè se

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Nota di terminologia:

"$A \Rightarrow B$" si legge "la proprietà A implica la proprietà B" o anche "se vale A allora vale B".

"$A \Leftarrow B$" si legge "la proprietà A segue dalla proprietà B" o anche "se vale B allora vale A".

Possiamo riformulare questa definizione dicendo che f è iniettiva se per ogni $y \in Y$ l'equazione $y = f(x)$ ha al più una soluzione x.

in questa equazione y è data e x è l'incognita

! Nel caso in cui X, Y sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, l'interpretazione grafica è che ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in al più un punto.

e quindi possiamo parlare di grafico di f

Funzioni surgettive

Una funzione $f: X \to Y$, insiemi qualunque, si dice surgettiva se l'immagine coincide con il codominio, cioè se per ogni $y \in Y$ l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluzione x

! Nel caso in cui X, Y sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, l'interpretazione grafica è che ogni retta orizzontale ad altezza y con $y \in Y$ interseca il grafico di f.

Infine una funzione $f: X \to Y$ si dice bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva.
Questo significa che per ogni $y \in Y$ l'equazione $y = f(x)$ ammette una ed una sola soluzione $x \in X$.

Funzione inversa

Date $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$, si dice che g è l'inversa di f (e f è l'inversa di g) se

$$g(f(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in X$$

e

$$f(g(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

(In tal caso si dice che f e g sono invertibili.)

- In altre parole, la funzione g disfa quello che ha fatto f (e viceversa). Immaginando che f e g siano funzioni/tasti della calcolatrice, se si impo sta un numero x sul display e poi si preme f, sul display appare il numero $f(x)$, e se poi si preme g riappare il numero x....
E lo stesso succede se premo prima g e poi f.
- La funzione inversa di f, se esiste, è unica. Viene spesso indicata con il simbolo f^{-1} (notazione sfortunata perché confonde l'inversa col reciproco, ma sono due cose diverse!!)
- Attenzione: non sempre l'inversa esiste. Per esempio, se $f(x) = x^2$, un eventuale inversa g deve soddisfare $g(4) = 2$, perché $f(2) = 4$, ma anche $g(4) = -2$, perché $f(-2) = 4$. Ma una funzione g non può dare due output diversi per lo stesso input....

Esempi

- Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := x^3$, allora l'inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è $g(y) := \sqrt[3]{y}$.
(infatti $f(g(y)) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$ per la definizione di radice cubica, e anche $\sqrt[3]{x^3} = x$.)
Analogamente l'inversa di $f(x) := x^n$ con n dispari è $g(y) := \sqrt[n]{y}$.
Notare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) := x^n$, n pari, non ha inversa.
- Data $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ data da $f(x) := e^x$, allora l'inversa $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è $g(y) := \log y$.
(Infatti $f(g(y)) = e^{\log y} = y$ per definizione di logaritmo, e anche $g(f(x)) = \log(e^x) = x$.)

Proposizione

Una funzione $f: X \to Y$ ammette l'inversa $g: Y \to X$ se e solo se è bigettiva.

Dimostrazione

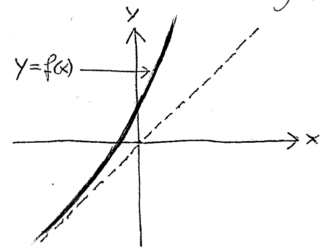
Prima parte: suppongo che f sia bigettiva e costruisco l'inversa g.
In effetti se f è bigettiva per ogni $y \in Y$ l'equazione $y = f(x)$ ammette una ed una sola soluzione $x \in X$.
Pongo allora $g(y)$ uguale a questa particolare x.
Allora, preso $y \in Y$, $f(g(y)) = y$ per costruzione.
Viceversa, preso $x \in X$, $g(f(x))$ risolve l'equazione $y = f(x)$ con $y = f(x)$. Ma l'unica soluzione di questa equazione è x stessa, e quindi $g(f(x)) = x$.

Seconda parte: suppongo che l'inversa $g: Y \to X$ esista e faccio vedere che f è bigettiva.
Dati infatti x_1, x_2 in X tali che $f(x_1) = f(x_2)$, applicando la funzione g ad entrambi i membri ottengo $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e quindi $x_1 = x_2$.
Ho quindi dimostrato che f è iniettiva.
Dato inoltre $y \in Y$, pongo $x := g(y)$ e osservo che $f(x) = f(g(y)) = y$ e dunque f è surgettiva. $\square$

Osservazioni

- Se X, Y sono contenuti in $\mathbb{R}$, ricordo che la condizione che f sia bigettiva equivale a dire che per ogni $y \in Y$ la retta orizzontale ad altezza y interseca il grafico $y = f(x)$ in uno ed un solo punto.

- Il teorema precedente ha limitata utilità, perché dice che esiste l'inversa, ma non dice come trovare una formula per l'inversa.
Per esempio, la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := e^x + x$ ha il seguente grafico



da cui si capisce che f è bigettiva e quindi ammette l'inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Tuttavia, dato $y \in \mathbb{R}$, $g(y)$ è la soluzione x dell'equazione $y = f(x)$ cioè $y = x + e^x$, e non abbiamo formule risolutive per questa equazione.
Di conseguenza $g(y)$ non ha una formula.

Esempi di calcolo dell'inversa

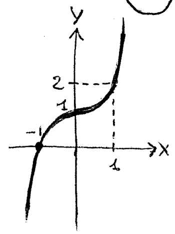
- Come si vede dal grafico, per $a \neq 0$ la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := ax + b$ è bigettiva e quindi esiste l'inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Per trovare $g(y)$ devo risolvere l'equazione
$$y = ax + b$$
esplicitando la x. Così facendo ottengo
$$x = \frac{y-b}{a}$$
e quindi $g(y) = \frac{y-b}{a}$.

- Sia $f(x) := x^3+1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  Di nuovo, il grafico mostra che f è bigettiva e quindi esiste l'inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  Per calcolare $g(y)$ risolvo l'equaz. $y = x^3+1$, esplicitando la x: $x = \sqrt[3]{y-1}$.

  Quindi $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$.



- Sia $f(x) := \frac{x+1}{x-2}$ definita per $x \neq 2$.

Provo adesso a cercare l'inversa senza stare a guardare se f è bigettiva, e senza neanche specificare dominio e codominio.

Parto quindi dall'equazione

$$(*) \qquad y = \frac{x+1}{x-2}$$

ed esplicito la x, ottenendo (dopo alcuni passaggi)

$$x = \frac{2y+1}{y-1}.$$

Quindi l'inversa di f dovrebbe essere $g(y) := \frac{2y+1}{y-1}$, definita per $y \neq 1$.

Per la precisione, il fatto che g non sia definita per $y=1$ significa che l'equazione $(*)$ non ha soluzione per $y=1$, cioè che f non assume il valore 1. Anzi l'immagine di f è l'insieme degli $y \neq 1$, ed f è invertibile se prendiamo come codominio proprio l'immagine cioè $f: X \to Y$ con $X := \{x \neq 2\}$ e $Y := \{y \neq 1\}$ ....

Vorrei ora parlare del grafico della funzione inversa. Per farlo mi serve la seguente

Osservazione

Dato un punto P di coordinate (a,b) nel piano, sia P' il punto di coordinate (b,a), cioè quello ottenuto da P scambiando le coordinate. Allora P e P' sono simmetrici rispetto alla retta $y=x$, cioè alla bisettrice del I e III quadrante (che indico con B)

Dimostrazione (traccia)

Mi basta far vedere che

(i) il punto medio tra P e P' sta sulla retta B,

(ii) la retta passante per P e P' è ortogonale a B.

In effetti il punto medio tra P e P' ha coordinate $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ e quindi appartiene a B.

Dire che la retta passante per P e P' è ortogonale alla retta B equivale a dire che ha pendenza -1, e in effetti usando P e P' per calcolare la pendenza otteniamo

$$\text{pendenza} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_{P'}}{x_P - x_{P'}} = \frac{b-a}{a-b} = -1. \qquad \square$$

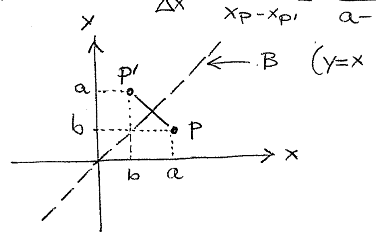


Grafico della funzione inversa

Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e sia $f: X \to Y$ una funzione con inversa $g: Y \to X$.

Allora l'equazione

(*) $$y = f(x)$$

equivale all'equazione

(**) $$x = g(y)$$

Infatti, se vale (*) e applico la funzione g ad entrambi i membri ottengo $g(y) = g(f(x)) = x$, che è (**).

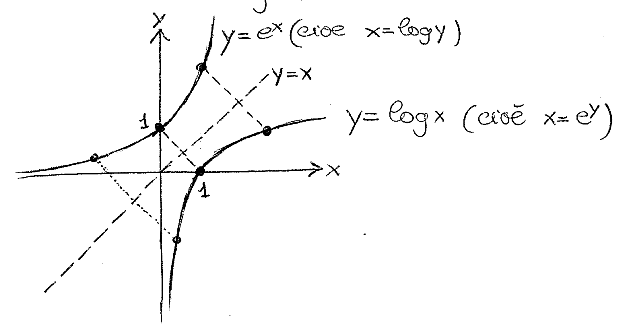
Viceversa se vale (**) e applico f ottengo $f(x) = f(g(y)) = y$, che è (*).

! Questa equivalenza significa che il grafico di eq. $y = f(x)$ e il grafico $x = g(y)$ sono lo stesso. In altre parole, f e la sua inversa hanno lo stesso grafico se usiamo x come variabile per f e y come variabile per l'inversa.

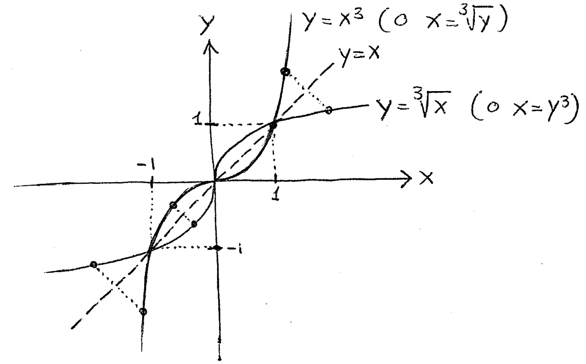
Tuttavia, se vogliamo disegnare il grafico $y = g(x)$, stiamo prendendo i punti del grafico $x = g(y)$ e stiamo scambiando le coordinate. Per quanto visto sopra

Il grafico $y = g(x)$ si ottiene riflettendo il grafico $y = f(x)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, cioè alla retta $y = x$.

In effetti possiamo verificare questa "regola" nel caso di e^x e $\log x$:



E anche nel caso x^3 e $\sqrt[3]{x}$:



AM1 gest 17/18

Lezione 7, 4/10/17, 2 ore

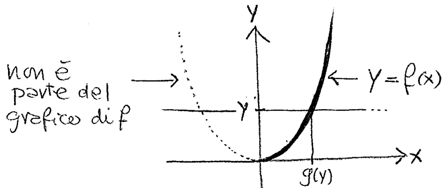
(Continua con la teoria generale delle funzioni.)

La funzione $f: \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ data da $f(x) := x^2$ è surgettiva ma non iniettiva, come si può vedere dal grafico, oppure osservando che $f(2) = f(-2) = 4$.

Pertanto non è invertibile.

In particolare la funzione $g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ data da $g(y) = \sqrt{y}$ <u>non è</u> l'inversa di f, e infatti $g(f(-2)) = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Tuttavia se restringiamo f agli x positivi, cioè consideriamo $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ data da $f(x) := x^2$, allora f è iniettiva e surgettiva (come si vede dal grafico: per ogni $y \geq 0$ la retta orizzontale ad altezza y interseca il grafico di f in uno ed un solo punto)

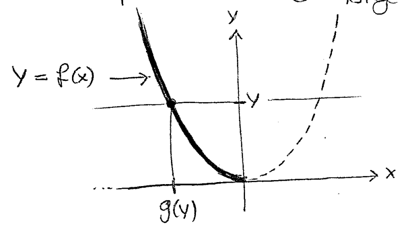


Allora f è invertibile, l'inversa di f è la funzione g definita sopra. Infatti preso $x \geq 0$, $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$, e preso $y \geq 0$, $f(g(y)) = (\sqrt{y})^2 = y$.

! In breve, la funzione $\sqrt{y}$ è l'inversa della funzione x^2 ristretta agli $x \geq 0$.

<u>Esercizio</u>

Si vede che anche la funzione $f: (-\infty, 0] \to [0,+\infty)$ data da $f(x) := x^2$ è bigettiva.



Qual è l'inversa di f?

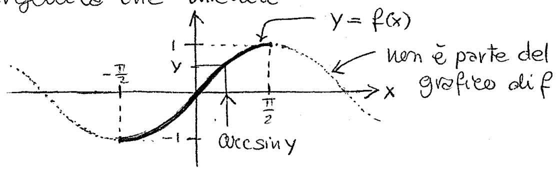
Ricordo che l'inversa $x = g(y)$ si ottiene esplicitando la x nell'equazione $y = f(x) = x^2$. Così facendo ottengo $x = \pm\sqrt{y}$ e quindi $x = -\sqrt{y}$ perché so che x deve essere negativo.

Quindi l'inversa è $x = -\sqrt{y}$.

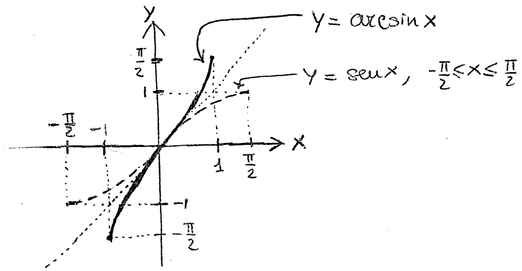
<u>Funzioni trigonometriche inverse</u>

La funzione $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ data da $f(x) := \operatorname{sen} x$ è surgettiva ma non iniettiva, come si vede dal grafico.

Tuttavia la sua restrizione $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è sia surgettiva che iniettiva

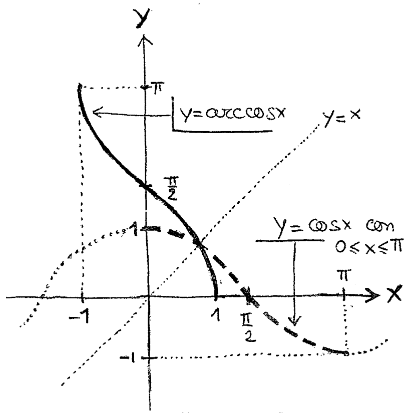


L'inversa di f si chiama arcoseno (arcsen).
Il grafico è il seguente:



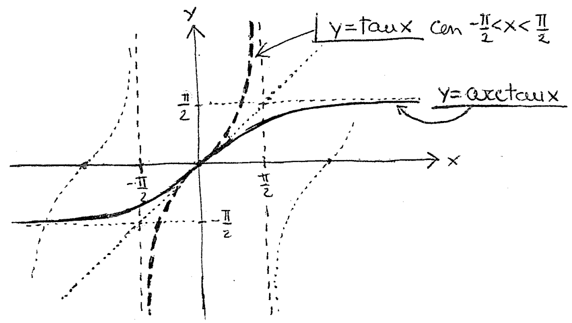
La funzione arcsin ha dominio $[-1,1]$, immagine $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e arcsin x è l'unico angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ con seno uguale a x.

Analogamente, la funzione coseno da $\mathbb{R}$ in $[-1,1]$ è surgettiva ma non iniettiva e non ha inversa. Ma la sua restrizione all'intervallo $[0,\pi]$ è bigettiva, e l'inversa si chiama arcocoseno (arccos).
Il grafico è il seguente



La funzione arccos ha dominio $[-1,1]$, immagine $[0,\pi]$ e arccos x è l'unico angolo tra 0 e π con coseno uguale a x.

Infine la funzione tangente è iniettiva e surgettiva dall'intervallo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ in $\mathbb{R}$, e l'inversa si chiama arcotangente (arctan).
Il grafico è il seguente:

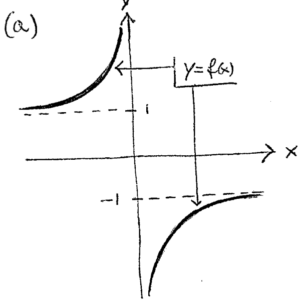


La funzione arctan ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$; arctan x è l'unico angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ con tangente uguale a x.

Esercizi

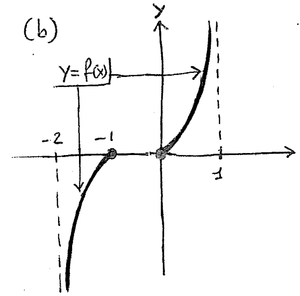
- Per ciascuna delle funzioni sotto determinare dominio, immagine, e dire se sono iniettive.

(a)



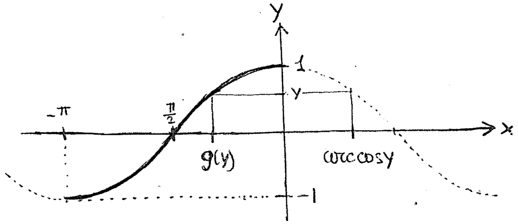
dominio: $x \neq 0$
immagine: $y < -1$ & $y > 1$
iniettiva: sì.

(b)



dominio: $x \le -1$ & $x \ge 0$
immagine: ogni y
iniettiva: NO

- Sia f la restrizione della funzione coseno all'intervallo $[-\pi, 0]$. Verificare graficamente che $f: [-\pi, 0] \to [-1, 1]$ è bigettiva. Trovare una formula per l'inversa $g: [-1,1] \to [-\pi, 0]$



Dal disegno è chiaro che $g(y) = -\arccos y$.

- Sia f la restrizione della funzione seno all'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Verificare graficamente che $f: [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è surgettiva e trovare una formula per l'inversa $g: [-1, 1] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. [da fare a casa]

- Sia $f(x) := (1+e^x)^2$. Trovare l'immagine I di f. Far vedere che $f: \mathbb{R} \to I$ è invertibile e trovare l'inversa.

Provo direttamente ad esplicitare x nell'equazione $y = f(x)$, cioè $y = (1+e^x)^2$.

$$1 + e^x = \pm\sqrt{y}$$

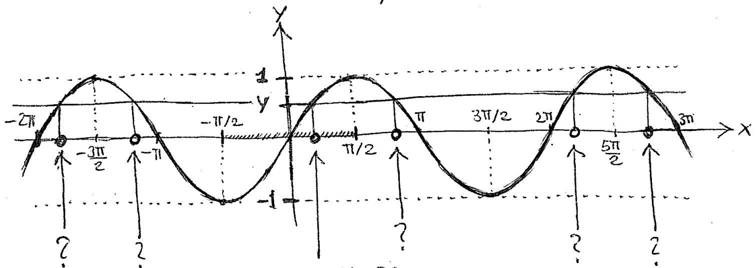
$$e^x = \pm\sqrt{y} - 1 \quad \leftarrow \text{escludo } -\sqrt{y}-1 \text{ perché è negativo...}$$

$$x = \log(\sqrt{y}-1) \quad \leftarrow \text{definito per } y > 1$$

Questo mostra che per $y \leq 1$ non ci sono soluzioni e quindi l'immagine di f è l'insieme I degli $y > 1$. Inoltre per $y > 1$ l'unica

soluzione dell'equazione è $x = \log(\sqrt{y}-1)$ e quindi f è iniettiva, e l'inversa è $g(y) = \log(\sqrt{y}-1)$.

- Come abbiamo detto, $\arcsin y$ è la soluzione x dell'equazione $y = \operatorname{sen} x$ compresa tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.
Scrivere <u>tutte</u> le soluzioni x dell'equazione
$$y = \operatorname{sen} x$$
in termini di $\operatorname{arcsen} y$.



$x = \operatorname{arcsen} y$

(La soluzione $\operatorname{arcsen} y$ è indicata, restano da trovare quelle marcate da un punto interrogativo...)

- Scrivere tutte le soluzioni x delle equazioni $y = \cos x$ e $y = \tan x$ partendo da $\arccos y$ e $\arctan y$, rispettivamente.

- Trovare le soluzioni della disequazione $\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$ con $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- Trovare le soluzioni della disequazione $\tan x \geq -1$ con $0 \leq x \leq 2\pi$.

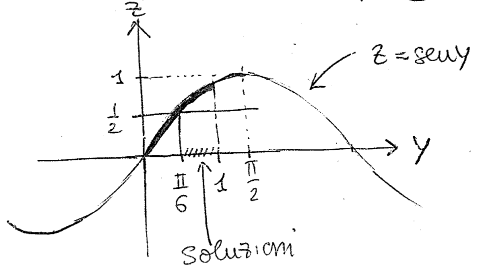
AM1 gest 17/18

Lezione 8, 5/10/17, 2 ore

Svolgimento di alcuni esercizi.

Esercizio Risolvere la disequazione $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \geq \frac{1}{2}$.

- Faccio il cambio di variabile $y = \frac{1}{1+x^2}$ e osservo che gli y che ottengo soddisfano $0 \leq y \leq 1$.
- Risolvo la disequazione $\operatorname{sen} y \geq \frac{1}{2}$ con $0 \leq y \leq 1$,



e ottengo $\frac{\pi}{6} \leq y \leq 1$.

- Ritorno alla variabile x di partenza:

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{1+x^2} \cancel{\leq 1} \quad \text{quindi} \quad \frac{6}{\pi} \geq 1+x^2, \ \dots$$

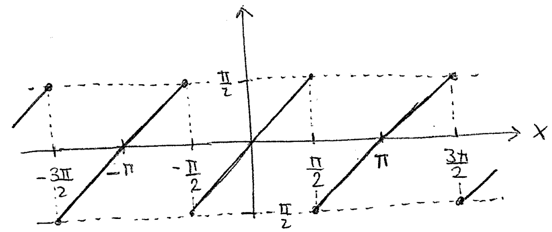
sappiamo già che è sempre vera

e alla fine ottengo $-\sqrt{\frac{6}{\pi}-1} \leq x \leq \sqrt{\frac{6}{\pi}-1}$.

- Il punto chiave è risolvere $\operatorname{sen} y \geq \frac{1}{2}$ solo per $0 \leq y \leq 1$.
- Provate a risolvere $\operatorname{sen}\left(\frac{4}{1+x^2}\right) \geq \frac{1}{2}$ ....

Esercizio disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(\tan x)$.

- L'insieme di definizione è quello di $\tan x$, cioè l'insieme degli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k intero.
- per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\arctan y$ è l'inversa di $\tan x$ e quindi $\arctan(\tan x) = x$.
  (Ma attenzione, non vale lo stesso per ogni x, per esempio $f(\pi) = \arctan(\tan\pi) = \arctan(0) = 0$, che non è π!)
  ! Quindi il grafico di $f(x)$ per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ coincide con la retta $y = x$.
- $f(x)$ ha periodo π perché $\tan x$ ha periodo π. Questo permette di completare il grafico di f, che già conosciamo sull'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

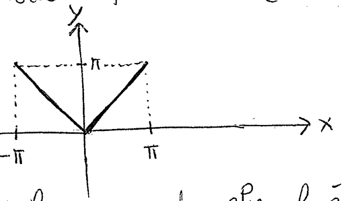


Esercizio disegnare il grafico di $f(x) := \arccos(\cos x)$.

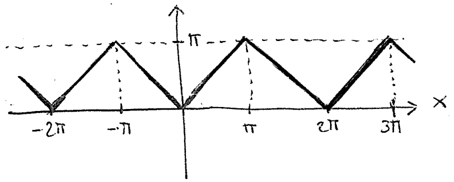
- L'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$ (verificatelo!)
- per $0 \leq x \leq \pi$, $\arccos(\cos x) = x$ (perché $\arccos y$ è l'inversa di $\cos x$ limitatamente all'intervallo $[0, \pi]$); il grafico coincide con $y = x$.
- $f(x)$ ha periodo 2π perché $\cos x$ ha periodo 2π. Questo vuol dire che conoscere il grafico di $f(x)$ per $0 \leq x \leq \pi$ non basta....

- $f(x)$ è pari perché $\cos x$ è pari.

  Usando questa informazione (e le precedenti) ottengo il grafico per $-\pi \leq x \leq \pi$

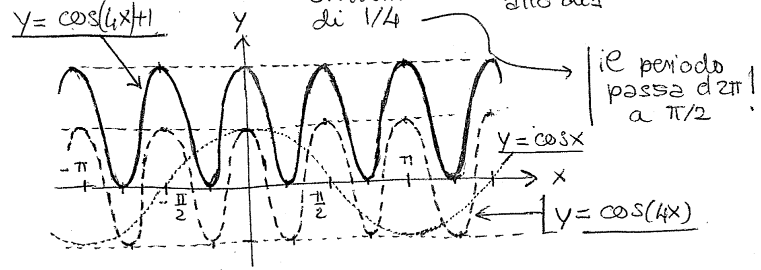


- completo il grafico usando che f è periodica di periodo 2π



Esercizio Disegnare il grafico $y = \cos(4x)+1$

due passaggi $\cos x \xrightarrow[\text{comprimo orizzont. di } 1/4]{} \cos(4x) \xrightarrow[\text{sposto in alto di } 1]{} \cos(4x)+1$

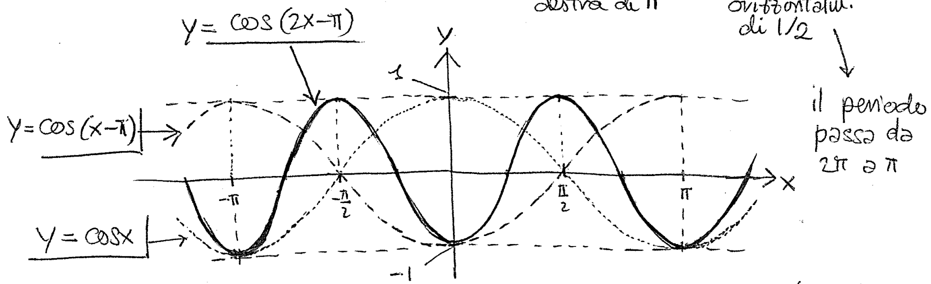


Anche i passaggi: $\cos x \rightsquigarrow \cos x+1 \rightsquigarrow \cos(4x)+1$ vanno bene...

Esercizio Disegnare il grafico $y = \cos(\pi-2x)$

Innanzitutto osservo che $\cos(\pi-4x) = \cos(2x-\pi)$ perché il coseno è pari.

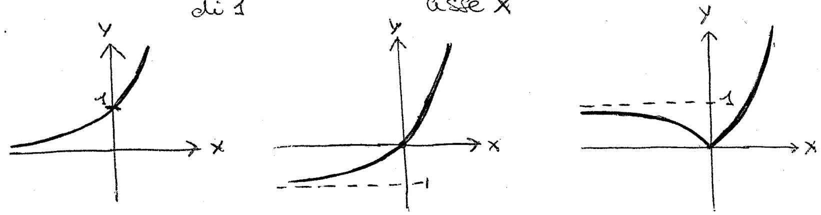
Poi due passaggi: $\cos x \xrightarrow[\text{sposto a destra di } \pi]{} \cos(x-\pi) \xrightarrow[\text{comprimo orizzontalm. di } 1/2]{} \cos(2x-\pi)$



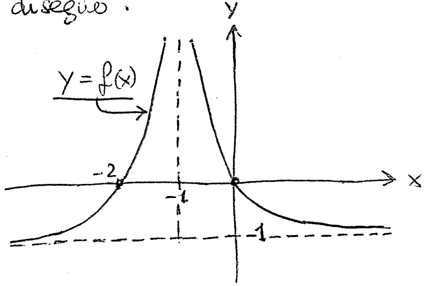
Alternativa $\cos x \xrightarrow[\text{comprimo orizzont. di } 1/2]{} \cos(2x) \xrightarrow[\text{sposto a destra di } \frac{\pi}{2}]{} \cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(2x-\pi)$

Esercizio Disegnare il grafico $y = |e^x-1|$

$e^x \xrightarrow[\text{sposto in basso di } 1]{} e^x-1 \xrightarrow[\text{rifletto la parte sotto asse } x]{} |e^x-1|$



Esercizio Trovare una formula per la funzione f data nel disegno:



Si tratta del grafico $y=\frac{1}{x^2}$ traslato a sinistra di 1 e in basso di 1.

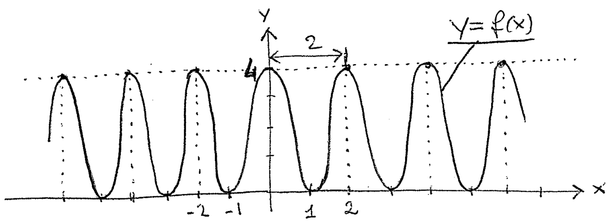
per via dell'asintoto verticale

$$\frac{1}{x^2} \rightsquigarrow \frac{1}{(x+1)^2} \rightsquigarrow \frac{1}{(x+1)^2}-1 =: f(x)$$

per via dell'asintoto orizzontale

(Si noti che questa funzione soddisfa anche $f(0)=f(-2)=0$.)

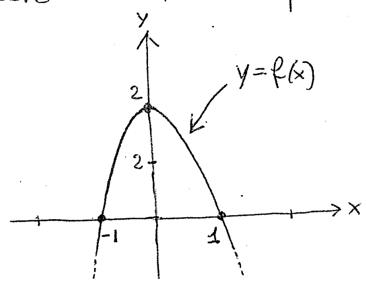
Esercizio Trovare una formula per la funzione f sotto:



Si parte dal grafico $y=\cos x$, lo si dilata verticalmente di un fattore 2, in modo da portare l'ampiezza di oscillazione da 2 a 4. Quindi lo si sposta in alto di 2, in modo da che oscilli tra 0 e 4. Infine lo comprimo di $\frac{1}{\pi}$ per portare il periodo da 2π a 2.

$$\cos x \rightsquigarrow 2\cos x \rightsquigarrow 2\cos x+2 \rightsquigarrow 2\cos(\pi x)+2 =: f(x)$$

Esercizio Trovare una formula per la funzione sotto



Parto dal grafico $y=x^2$, lo ribalto rispetto all'asse x, lo sposto in alto di 2, per far sì che passi per $(0,2)$.

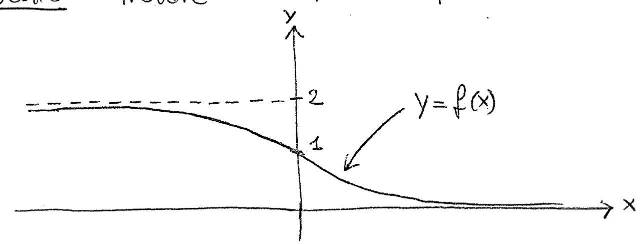
$$x^2 \rightsquigarrow -x^2 \rightsquigarrow 2-x^2$$

attenzione: non basta perché il grafico di questa funzione interseca l'asse x in $x=\pm 1$ (come quello in figura) ma in $x=\pm\sqrt{2}$.

Bisogna quindi comprimere questo grafico orizzontalmente di $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$2-x^2 \rightsquigarrow 2-(\sqrt{2}x)^2 = 2-2x^2 =: f(x)$$

Esercizio Trovare una formula per la funzione sotto:



Parto dal grafico $y=\arctan x$.

Lo rifletto rispetto all'asse x in modo che decresca da $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$ (invece di crescere da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$).

Poi lo alzo di $\frac{\pi}{2}$ in modo che decresca da π a 0, e così uno dei due asintoti orizzontali è quello giusto.

Infine lo comprimo verticalmente di $\frac{2}{\pi}$ in modo che decresca da 2 a 0, e ora entrambi gli asintoti sono a posto.

$\arctan x \rightsquigarrow -\arctan x$

$\rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - \arctan x \rightsquigarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) =$

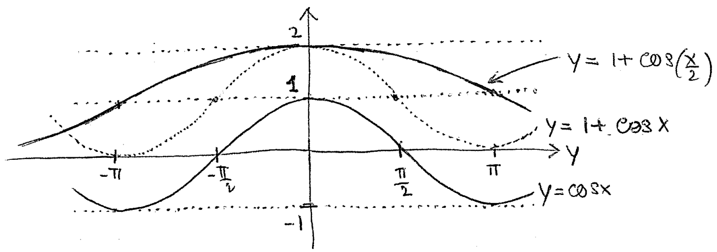
$= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan x =: f(x).$

Si noti infine che $f(0)=1$ e quindi il grafico di questa funzione passa per $(0,1)$, come richiesto.

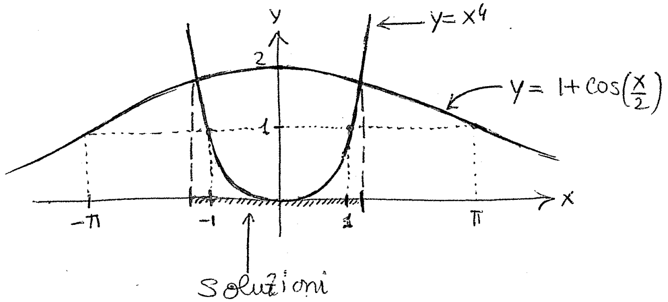
<u>Esercizio</u> Risolvere graficamente la diseq. $x^4 \leq 1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Disegno prima il grafico $y = 1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ partendo da $y=\cos x$:

$\cos x \rightsquigarrow 1+\cos x \rightsquigarrow 1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)$



Disegno quindi anche il grafico $y=x^4$ e risolvo la diseq.



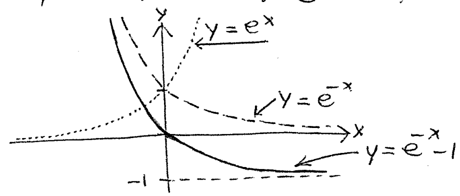
<u>Esercizio</u> Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $|y| \leq e^{-x}-1$.

! $\boxed{\text{Attenzione } |a|\leq b \text{ equivale a } -b\leq a\leq b}$

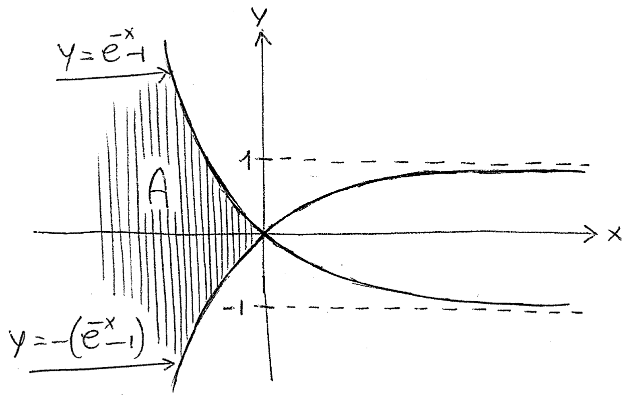
Quindi l'equazione si riscrive come

(*) $\quad -(e^{-x}-1) \leq y \leq e^{-x}-1$

Disegno $y=e^{-x}-1$: $e^{x} \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-x}-1$



Disegno anche $y=-(e^{-x}-1)$ e poi l'insieme A, osservando che (fissato x) i punti di A sono quelli sopra al grafico di $-(e^{-x}-1)$ e sotto al grafico di $(e^{-x}-1)$

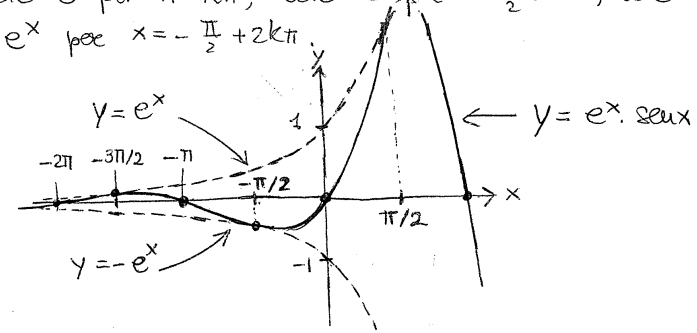


Esercizio Disegnare il grafico $y = e^x \operatorname{sen} x$

Nessuna delle tecniche viste fino ad adesso si applica, bisegna quindi "improvvisare".

Osservo che $\operatorname{sen} x$ oscilla tra -1 e 1, vale 0 per $x = k\pi$, k intero, vale 1 per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, vale -1 per $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Di conseguenza $e^x \cdot \operatorname{sen} x$ oscilla tra $-e^x$ e e^x, vale 0 per $x = k\pi$, vale e^x per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, vale $-e^x$ per $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.



da fare a casa: disegnare il grafico $y = x \cdot \operatorname{sen} x$.

da fare a casa: disegnare il grafico $y = \operatorname{sen}(\pi x^2)$

AM1 gest 17/18

Lezione 9, 6/10/17, 2 ore

Limiti di funzioni

Essendo un argomento già noto, lo tratto molto velocemente.

Notazione

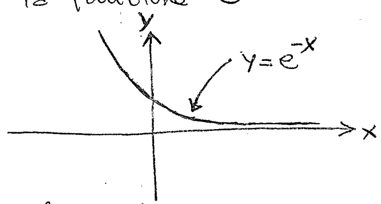
- Dati $a,b \in \mathbb{R}$, $|a-b|$ rappresenta la distanza tra i punti corrispondenti sull'asse (delle x).
  Quindi $|a-b| \le d$ significa $a-d \le b \le a+d$.
  Diciamo allora che b approssima a (o viceversa) con errore $\le d$.

- Il simbolo $\forall$ si legge "per ogni"
- Il simbolo $\exists$ si legge "esiste"
- $\nexists$ si legge "non esiste"
- $\exists!$ si legge "esiste ed è unico"

"stenografia matematica"

Limite per x che tende a $+\infty$: di che stiamo parlando?

Consideriamo la funzione e^{-x}



Guardando il grafico è chiaro che il valore e^{-x} si avvicina tanto più a 0 quanto più x cresce.

Esprimiamo questo concetto dicendo che "e^{-x} tende a 0 quando x tende a $+\infty$" oppure "il limite di e^{-x} per x che tende a $+\infty$ è 0".

Più in generale, se i valori $f(x)$ di una certa funzione f si avvicinano tanto più ad un certo numero L quanto più x cresce, diciamo che "$f(x)$ tende a L quando x tende a $+\infty$" oppure che "il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è L".
In forma più compatta scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{oppure} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \, .$$

Il problema di questa definizione formulata "a parole" è che non è poi così chiara.

Una versione più precisa di questa definizione è la seguente:
" Preso $\varepsilon > 0$, $f(x)$ approssima L con errore inferiore a ε per x abbastanza grande" (o anche "per ogni x da un certo punto in poi").

Una versione ancora più precisa (l'ultima!) si ottiene esprimendo le due frasi sottolineate in termini di disuguaglianze:

"per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un certo x_ε tale che se $x \ge x_\varepsilon$ allora $|f(x)-L| \le \varepsilon$"

Scriviamo la definizione così ottenuta usando i simboli stenografici introdotti prima

Definizione

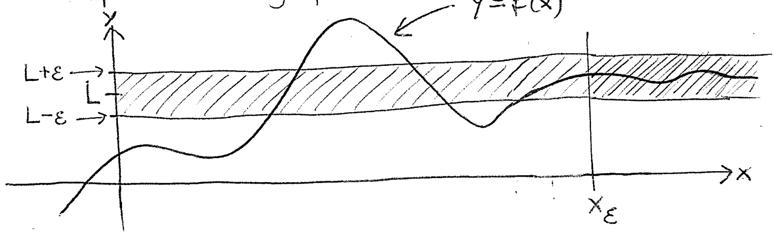
Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$, diciamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon$ t.c. $x \geq x_\varepsilon \Rightarrow \underline{|f(x)-L| \leq \varepsilon}$.

Commenti/Osservazioni

- Interpretazione grafica



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa che per ogni $\varepsilon>0$ il grafico $y=f(x)$ "entra nella striscia grigia ad un certo punto e non ne esce più."

- E' possibile verificare "graficamente" che una certa funzione $f(x)$ tende a L per $x\to+\infty$? No: in un disegno non possiamo mai vedere cosa succede fino all'infinito (ad esempio, potrebbe succedere che nella parte non visualizzata il grafico di f esce dalla striscia grigia). Inoltre in un disegno, per quanto preciso, non posso distinguere cosa succede con ε troppo piccolo.

Quindi il grafico di f, in particolare se ottenuto al computer, può servire a capire qual è il limite di f, ma non dimostra niente.

- Analogamente, non è possibile usare un computer per dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, perché ogni computer ha un margine di precisione/errore nei calcoli sotto cui non può scendere (quindi non può trattare valori di ε più piccoli di tanto).

- Verifichiamo direttamente che $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

  Per farlo, dato $\varepsilon>0$, dobbiamo trovare una "soglia" x_ε per cui $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$ per $x \geq x_\varepsilon$.
  Risolvendo la disequazione otteniamo:

  $|e^{-x}| \leq \varepsilon$; $e^{-x} \leq \varepsilon$; $-x \leq \log \varepsilon$;

  $x \geq -\log\varepsilon = \log(\frac{1}{\varepsilon})$. La soglia cercata è $x_\varepsilon := \log(\frac{1}{\varepsilon})$ (ma anche un numero più grande va bene).

- Nell'esempio precedente mostra chiaramente che il valore di "soglia" x_ε cresce al decrescere di ε. E' un fatto generale che non esiste un valore di soglia x_ε che va bene per tutti gli ε....

- Provate a dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^6+x^2+2} = 0$.

  Non è così semplice. In effetti i limiti non si calcolano a partire dalla definizione ma con tecniche apposta.

- Che informazione ci dà sapere che $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ sui valori di f?
  Purtroppo solo un'informazione "qualitativa", nel senso che fissato ε, da un certo punto x_ε in poi $f(x)$ approssima L con errore $\leq \varepsilon$. Ma non sappiamo quanto vale la soglia x_ε. Potrebbe essere 10 come 10^{10}, come 10^{1000}.

OSSERVAZIONE TECNICA IMPORTANTE

Nella definizione abbiamo chiesto che il dominio di definizione X di f sia uguale a $\mathbb{R}$.
Chiaramente non ha senso considerare funzioni con un dominio qualsiasi.
Per esempio, non ha senso chiedersi quale sia il limite di $\arcsin x$ per $x \to +\infty$, visto che $\arcsin x$ è definito solo per $-1 \leq x \leq 1$.

! Affinché la definizione di limite abbia senso serve che
"il dominio X di f contiene punti x arbitrariamente grandi" (?)
Cioè che per ogni M esiste $x \in X$ con $x \geq M$.
$(\forall M \ \exists x \in X \text{ t.c. } x \geq M)$

Vogliamo ora dare un senso preciso alla frase "$f(x)$ tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$".
L'idea è che fissato una qualunque soglia M, da un certo punto in poi i valori di $f(x)$ valgano più di M.

Definizione

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall M \ \exists x_M$ t.c. $x \geq x_M \Rightarrow f(x) \geq M$.

Analogamente si definisce cosa vuol dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (scrivete la definizione per esercizio).

Osservazione

Il limite di una funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$ può essere un numero L, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$.

! C'è una quarta possibilità: che non esista.
Esempio: il limite di $\sin x$ per $x \to +\infty$ non esiste.
Infatti, siccome $\sin x$ oscilla infinite volte tra -1 e 1, ci si "convince" facilmente che nessuna delle altre opzioni è ammissibile (questa non è una vera dimostrazione, ma....)

Vogliamo ora dare significato alla frase "$f(x)$ tende a L per x che tende a x_0".

La versione "a parole" è che per ogni $\varepsilon>0$, $f(x)$ approssima L con errore inferiore a ε per x sufficientemente vicino a x_0.

Va ora espressa in modo più preciso la frase sottolineata.

Definizione

Dato $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, L e x_0 numeri reali, diciamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

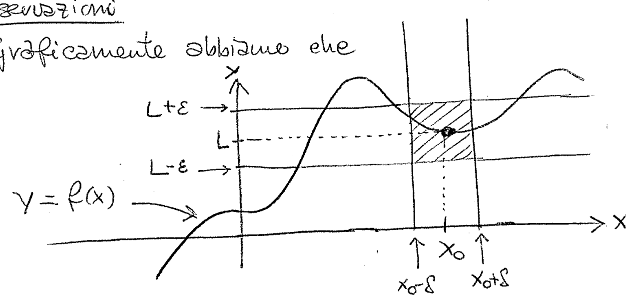
se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta_\varepsilon>0$ tale che per ogni $x\neq x_0$ con $|x-x_0|\leq\delta_\varepsilon$ vale $|f(x)-L|\leq\varepsilon$.

$(\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0$ t.c. $|x-x_0|\leq\delta_\varepsilon\ \&\ x\neq x_0 \Rightarrow |f(x)-L|\leq\varepsilon)$

[attenzione al dettaglio $x\neq x_0$, è importante!]

Osservazioni

- Graficamente abbiamo che



- Non serve che il dominio X di f sia tutto $\mathbb{R}$. Basta che X contenga punti "arbitrariamente vicini a x_0", cioè $\forall\delta>0\ \exists\, x\in X$, $x\neq x_0$ con $|x-x_0|\leq\delta$. (In gergo: "x_0 è un punto di accumulazione di X.)

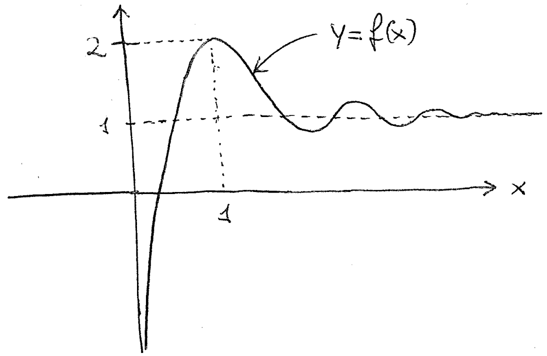
Esercizio da fare: scrivere le definizioni per i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, -\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L; +\infty; -\infty.$$

Esercizio: dimostrare a partire dalle definizioni che

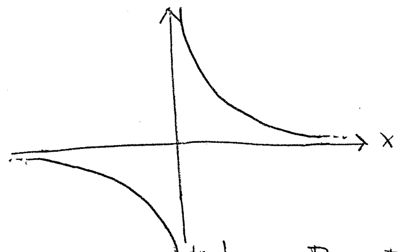
$$\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty;\quad \lim_{x\to 0}\log x = -\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Esercizio Sulla base del grafico disegnato sotto dire quali sono i limiti di $f(x)$ per $x\to+\infty$, $x\to 0$, $x\to 1$, $x\to -1$.



(L'ultima domanda non ha senso!)

Esempio Qual è il limite di $\frac{1}{x}$ per $x\to 0$?



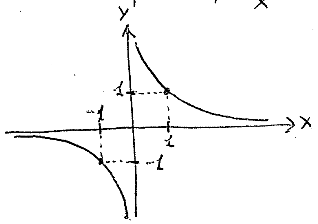
Risposta: Non esiste! Pensateci!

1

AM1 gest 17/18

Lezione 10, 7/10/17, 3 ore

Ritorniamo all'esempio $y = \frac{1}{x}$



! Il limite di $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$ non esiste.

Si vede infatti che tale limite non può essere finito, né $+\infty$, né $-\infty$. Per la precisione il limite sarebbe $+\infty$ se considerassimo solo gli $x>0$, e sarebbe $-\infty$ se considerassimo solo gli $x<0$.

Questo ci porta alla definizione di "limite destro" e "limite sinistro" di $f(x)$ in x_0, ovvero di limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 "da destra" e "da sinistra".

Definizione

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, L e x_0 numeri reali, diciamo che il limite destro di $f(x)$ per $x \to x_0$ è L, e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Diciamo invece che il limite sinistro di $f(x)$ è L, cioè

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $x_0 - \varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.

2

Osservazione importante

! Per parlare di limite destro di $f(x)$ in x_0 (risp. limite sinistro) non serve che il dominio X di f sia tutto $\mathbb{R}$, ma basta che X contenga punti "arbitrariamente vicini a x_0 e strettamente maggiori di x_0", cioè $\forall \delta > 0 \ \exists x \in X$, $x_0 < x < x_0 + \delta$.
Analogo discorso vale per il limite sinistro.

Osservazioni

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ allora $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.
- Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ sono diversi (oppure almeno uno dei due non esiste) allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste.
- Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono e sono uguali allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste (e coincide con loro).
- La definizione di limite destro/sinistro si estende anche al caso $L = +\infty$ e $L = -\infty$. Scrivete queste definizioni come esercizio...

Esercizi

- Dimostrare partendo dalla definizione che $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Ha senso parlare di $\lim_{x \to 0^-} \log x$?

Funzioni continue

Definizione

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ (con $X \subset \mathbb{R}$) è continua in $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$, $f(x)$ approssima $f(x_0)$ con errore inferiore a ε per x sufficientemente vicino a x_0, cioè:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Infine si dice che f è continua se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Osservazioni

- Attenzione: si parla di continuità di f in x_0 solo se x_0 appartiene al dominio di f (infatti serve che $f(x_0)$ sia definito).
- La definizione di continuità di f in x_0 può *quasi* essere riscritta in termini di limiti dicendo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Il "quasi" è legato al fatto che se x_0 non è un punto di accumulazione di X allora non possiamo parlare di $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

- La continuità è una proprietà molto naturale: tutte le funzioni elementari introdotte fino ad adesso sono continue.
Non solo, combinando funzioni continue tramite somme, prodotti, composizioni si ottengono sempre funzioni continue.
Quindi tutte le funzioni ottenute tramite un'unica formula che coinvolge solo funzioni elementari sono continue (sull'insieme di definizione).
Quanto appena detto è la conseguenza di diversi teoremi più o meno complicati che non enuncio e tantomeno dimostro.

- La continuità è alla base del calcolo numerico dei valori delle funzioni (cioè alla base del funzionamento delle calcolatrici tascabili):
Per calcolare π^2, la calcolatrice sostituisce π con un approssimazione x con un numero finito di cifre decimali (diciamo 10) e calcola x^2; così facendo ci si aspetta che x^2 sia una buona approssimazione di π^2. L'idea implicita è che la funzione x^2 è continua (in π).
- Per quanto detto la funzione $\frac{1}{x}$ è continua, ma questo contrasta con il fatto sentito da molte parti che $\frac{1}{x}$ è discontinua in 0.
In effetti, stando alla definizione data sopra (che è quella su cui il consenso dei matematici è unanime) non ha senso parlare di continuità di $\frac{1}{x}$ in 0, perché $\frac{1}{x}$ non è definita per $x=0$.
- L'esempio di $\frac{1}{x}$ mostra che la "definizione grafica" di continuità, cioè che f è continua se se ne può disegnare il grafico senza staccare la penna dal foglio, non va bene così com'è.
Tuttavia questa definizione è (abbastanza) accettabile se ci si limita alle funzioni f il cui dominio è un intervallo (o una semiretta, o tutto $\mathbb{R}$).

- Se f è continua (ad esempio se f è data da un'unica formula che contiene solo funzioni elementari) e x_0 appartiene al dominio di f, allora il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste e vale $f(x_0)$, e in particolare non ci sono problemi di calcolo.

  I limiti "significativi" di $f(x)$ sono allora quelli per cui x tende a $+\infty$ o $-\infty$ oppure x tende ad un estremo di uno degli intervalli che compongono il dominio/insieme di definizione.

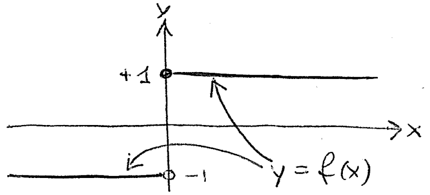
  se hanno senso...

  Per esempio, data la funzione $f(x) := \frac{e^x}{x^2-1}$, l'insieme di definizione sono gli $x \neq \pm 1$.
  I limiti significativi sono quindi quelli per x che tende a $+\infty; -\infty; 1; -1$ (da destra e sinistra).

- Ecco un esempio di funzione discontinua.

$$f(x) := \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

  Il dominio è tutto $\mathbb{R}$, e si vede subito che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$.
  Dunque il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ non esiste e quindi la funzione f non è continua in 0.



- Le funzioni discontinue capitano anche "in natura". Per esempio, il campo elettrico generato da una superfice conduttrice carica è discontinuo sui punti della superfice.

Esempi ed esercizi

nel senso spiegato alla pagina prima

- Elencare i limiti "significativi" delle funzioni elementari, ricavandoli dal grafico.

  - per $a > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$

    inoltre per a intero, $\lim_{x \to -\infty} x^a = \begin{cases} -\infty & \text{per } a \text{ dispari} \\ +\infty & \text{per } a \text{ pari} \end{cases}$

  - per $a > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a} = \lim_{x \to +\infty} x^{-a} = 0$

    $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^a} = +\infty$

    inoltre, per a intero, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^a} = 0$

    $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^a} = \begin{cases} -\infty & \text{per } a \text{ dispari} \\ +\infty & \text{per } a \text{ pari} \end{cases}$

  - per $a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

    $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

  - per $0 < a < 1$, fatelo voi...

  - $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

  - $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$

    attenzione, questi limiti sono corretti, e facili da dimostrare, ma numericamente non sono poi così evidenti...

  - $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sen} x$ N.E.

  - $\lim_{x \to \pm\infty} \cos x$ N.E.

  - $\lim_{x \to \pm\infty} \tan x$ N.E.;

    $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$, $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$

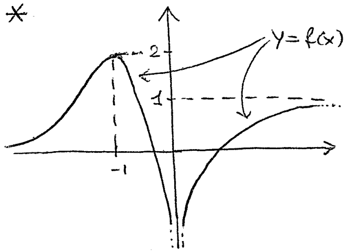
    elencate voi gli altri limiti significativi di $\tan x$

  - $\arcsin x$ e $\arccos x$ non hanno limiti significativi!

  - $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

- Per ciascuna delle funzioni disegnate sotto indicare il dominio, l'immagine, dire se sono continue (o meglio, se sembrano continue...) ed elencare i limiti significativi

*



dominio: $x \neq 0$

immagine: $y \leq 2$

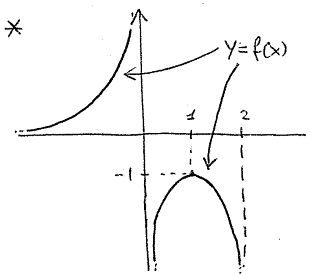
continua: sí

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

*



dominio: $x<0$ & $1<x<2$

immagine: $y>0$ & $y \leq -1$

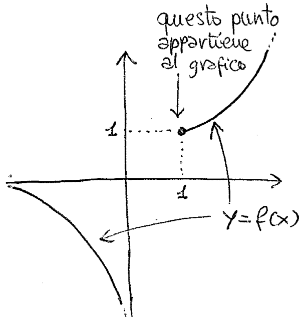
continua: sí

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ N.E. $\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

*



dominio: $x<0$ & $x \geq 1$

immagine: $y<0$ & $y \geq 1$

Continua: sí

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

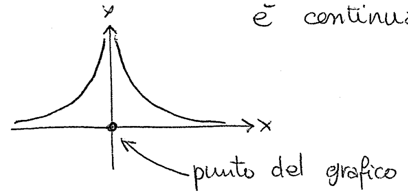
$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Dire se la funzione $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ è continua.

Non è continua.

Per la precisione, f è definita anche in $x=0$ ma $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ mentre $f(0)=0$, quindi f non è continua in $x=0$.

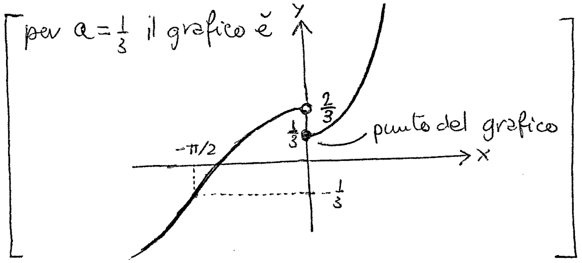


- Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \begin{cases} a+x^2 & \text{per } x \geq 0 \\ \cos x - a & \text{per } x<0 \end{cases}$ è continua.

Osservo innanzitutto che la funzione è sicuramente continua per ogni $x_0 \neq 0$.

In effetti, preso $x_0>0$, vicino a x_0 la funzione f coincide con la funzione $a+x^2$, che è continua, ed un ragionamento analogo vale per $x_0<0$.

! L'unico punto potenzialmente problematico è $x_0=0$, perché arbitrariamente vicino a 0 ci sono x in cui $f(x)=a+x^2$ e x in cui $f(x)=\cos x - a$.



Osserviamo che: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a+x^2 = a = f(0)$;

e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos x - a = \cos(0) - a = 1-a$.

Quindi f è continua (in 0) se e solo se

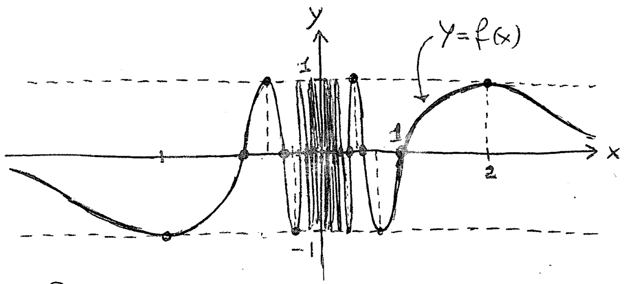
$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

cioè se e solo se $a = 1-a$, vale a dire, $a = \frac{1}{2}$.

- Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Osservo che questa funzione è <u>dispari</u>, definita per ogni $x \neq 0$, inoltre oscilla tra -1 e 1, e per la precisione

- $f(x)=0$ se $\frac{\pi}{x} = k\pi$ con k intero, cioe $x = \frac{1}{k}$.
- $f(x)=1$ se $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè $x = \frac{1}{\frac{1}{2}+2k}$
- $f(x)=-1$ se $\frac{\pi}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè $x = \frac{1}{-\frac{1}{2}+2k\pi}$



Si noti che in 0 non esistono né il limite destro, né quello sinistro.

1

AM1gest 17/18

Lezione 11, 10/10/17, 2 ore

Limiti facili

Questa lezione è dedicata a esercizi sui limiti di funzioni che possono essere calcolati basandosi sulla conoscenza dei limiti significativi delle funzioni elementari e su alcune regole "di buon senso".

Queste ultime le enuncio mano a mano che le incontriamo negli esercizi. Si tratta in realtà di teoremi che in un corso di analisi vengono dimostrati, ma che io non dimostrerò.

- $\lim_{x\to-\infty} e^x + \frac{1}{x} = 0$

  perché $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ e $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, e quindi anche la somma di queste funzioni tende a 0.

Regola: se $f_1(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L_1$ e $f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L_2$ $(L_1, L_2 \in \mathbb{R})$ allora $f_1(x)+f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L_1+L_2$.

In sintesi: il limite della somma (di due funzioni) è la somma dei limiti.

2

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \cos x = +\infty$

  perché $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} \cos(0)=1$ (ricordo che $\cos x$ è una funzione continua!), e perché vale la seguente regola:

Regola: Se $f_1(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ e $f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L$ con $L\in\mathbb{R}$ oppure $L=+\infty$ allora $f_1(x)+f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$.

In sintesi: "$+\infty + L = +\infty$", per $L\in\mathbb{R}$ oppure $L=+\infty$.

Ho messo le virgolette per ricordare che non si tratta di una regola algebrica ($+\infty$ non è un numero) ma di una regola sui limiti

- $\lim_{x\to+\infty} 2^x + x^2 = +\infty$

  perché $2^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, e "$+\infty+\infty=+\infty$".

  ↑ (vedi sopra)

Attenzione Se $f_1(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ e $f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$ a priori non è possibile dire nulla sul limite di $f_1(x)+f_2(x)$, nel senso che il risultato dipende da quali sono queste funzioni.

Il punto è che se sommo due numeri molto grandi e positivi il risultato sarà necessariamente grande e positivo (cioè "$+\infty+\infty=+\infty$") ma se prendo la differenza il risultato può essere grande o piccolo, positivo o negativo a seconda di quanto sono grandi questi

Qui per "grande" intendo a prescindere dal segno; -10^{20} è grande!

due numeri uno rispetto all'altro.
In sintesi: "$+\infty-\infty$" è una forma <u>indeterminata</u> (nel senso che il risultato dipende dalle funzioni coinvolte).

!

- $\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-2+\frac{1}{x^2}\right) = 3\cdot(-2)=-6$

perché $\frac{1}{x}=x^{-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \Rightarrow 3+\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}3$;
$\frac{1}{x^2}=x^{-2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \Rightarrow -2+\frac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}-2$;
e infine perché vale la seguente regola:

<u>Regola</u>: se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_1$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_2$ con $L_1,L_2\in\mathbb{R}$, allora $f_1(x)\cdot f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_1\cdot L_2$.
In sintesi: il limite del prodotto (di due funzioni) è il prodotto dei limiti.

- $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\cos(x+\pi) = +\infty$

perché $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$, $\cos(x+\pi)\xrightarrow[x\to0^+]{}\cos(0+\pi)=-1$
(ricordo che $\cos(x+\pi)$ è una funzione continua)
e infine perché vale questa regola:

<u>Regola</u>: Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}+\infty$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L$ allora
$f_1(x)\cdot f_2(x)\longrightarrow+\infty$ se $L>0$, incluso $L=+\infty$, e
$f_1(x)\cdot f_2(x)\longrightarrow-\infty$ se $L<0$, incluso $L=-\infty$
Il punto è che moltiplicando un numero grande e positivo per un numero vicino ad L ottengo un numero grande (in valore assoluto) con segno positivo se $L>0$ e negativo se $L<0$.
In sintesi: "$+\infty\cdot L$" $=\begin{cases}+\infty & \text{se } L>0\text{, incluso} +\infty\\ -\infty & \text{se } L<0\text{, incluso} -\infty\end{cases}$.

- $\lim_{x\to+\infty}e^x\cdot\log x = +\infty$

perché $e^x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, $\log x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, e "$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$".
(vedi sopra)

- $\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to0^+}\log x\cdot\frac{1}{x}=-\infty$

perché $\log x\xrightarrow[x\to0^+]{}-\infty$, $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$, e "$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$".
(vedi sopra)

<u>Attenzione</u> Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\pm\infty$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$,
a priori non è possibile dire nulla sul limite di $f_1(x)\cdot f_2(x)$, nel senso che il risultato dipende da quali sono queste funzioni.
Il punto è che moltiplicando un numero grande e uno molto piccolo, il risultato può essere grande o piccolo a seconda dei casi...
In sintesi: "$\pm\infty\cdot0$" è una forma indeterminata.

!

- $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\log x}=0$

perché $\cos x\xrightarrow[x\to0^+]{}\cos(0)=1$, $\log x\xrightarrow[x\to0^+]{}-\infty$, e vale

<u>Regola</u> Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\pm\infty$ $(L\in\mathbb{R})$
allora $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$.
Il punto è che dividendo un numero vicino a L per un numero molto grande (positivo o negativo) si ottiene un numero molto piccolo.

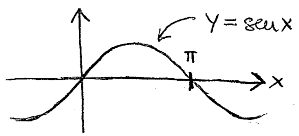
In sintesi: "$\frac{L}{\pm\infty} = 0$".

A questo punto uno sarebbe tentato di aggiungere come regola qualcosa del tipo "$1/0=\infty$", ma c'è un problema, lo stesso per cui il limite di $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$ non esiste: è vero che il reciproco di un numero molto piccolo è molto grande, ma può essere molto grande e positivo o molto grande e negativo, a seconda del segno del numero di partenza.

! Per la precisione: se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$ e f assume sia valori positivi che valori negativi arbitrariamente vicino a x_0 allora il limite di $\frac{1}{f(x)}$ per $x \to x_0$ non esiste.

Tuttavia, se f è positiva (vicino a x_0) allora $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ mentre se f è negativa (vicino a x_0) allora $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$.
In sintesi "$\frac{1}{0^+} = +\infty$" e "$\frac{1}{0^-} = -\infty$".

- $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ non esiste perché $\operatorname{sen} x > 0$ a sinistra di π e $\operatorname{sen} x < 0$ a destra di π.
- $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = +\infty$



- $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = +\infty$ perché $1+\cos x \xrightarrow[x\to\pi]{} 1+\cos(\pi) = 0$ e $1+\cos x \geq 0$ per ogni x

Generalizzando la regola precedente abbiamo che se $f_1(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L$ e $f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$ (cioè $f_2(x) \to 0$ e $f_2(x) > 0$ vicino a x_0) allora

- $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \to +\infty$ se $L > 0$ (incluso $L = +\infty$)
- $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \to -\infty$ se $L < 0$ (incluso $L = -\infty$)

In sintesi "$\frac{L}{0^+} = +\infty$" per $L>0$, "$\frac{L}{0^+} = -\infty$" per $L<0$, "$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$", "$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$" (e così via se al numeratore abbiamo 0^- invece di 0^+).

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^2} = -\infty$ perché $\log x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, $x^2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$, "$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$".
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\arctan x - \frac{\pi}{2}} = -\infty$ perché $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\arctan x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^-$

! Attenzione $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\frac{0}{0}$ sono forme indeterminate.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^3 - 3x^2 + 1}_{\substack{\text{forma indeterminata} \\ +\infty-\infty \text{ ma...}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^3}_{+\infty} \underbrace{\left(1 - \overset{0}{\frac{3}{x}} + \overset{0}{\frac{1}{x^3}}\right)}_{1-0+0} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{e^x - 4^x}_{\substack{\text{forma indeterminata} \\ +\infty-\infty \text{ ma...}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{4^x}_{+\infty} \underbrace{\left(\overset{0}{\left(\frac{e}{4}\right)^x} - 1\right)}_{-1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}_{\text{forma indet. } +\infty-\infty \text{ ma....}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \overset{+\infty}{\frac{1}{x^2}} \overset{1-\infty=-\infty}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty$

7

! **Regola di cambio di variabile**: Se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y)$.

Nella pratica scriveremo

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio di} \\ \text{variabile} \\ y=f(x)}}{=} \lim_{y\to y_0} g(y)$$

- $\lim_{x\to -\infty} \cos(e^x) = \lim_{y\to 0} \cos(y) = \cos(0)=1$

  ↑ cambio variabile $y=e^x$, notare che $y\to 0$ per $x\to -\infty$ ↑ $\cos y$ è continua

- $\lim_{x\to 0^+} \arctan(\log x) = \lim_{y\to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$

  ↑ cambio variabile $y=\log x$, notare che $y\to -\infty$ per $x\to 0^+$ ↑ noto...

- $\lim_{x\to +\infty} \log(\log(\log x)) = \lim_{y\to +\infty} \log(\log(y)) = \lim_{t\to +\infty} \log t = +\infty$

  ↑ cambio var. $y=\log x$ ($y\to +\infty$ per $x\to +\infty$) ↑ cambio var. $t=\log y$

(Questo limite è corretto, ma se sostituite a x il numero più grande che riuscite a impostare sulla calcolatrice il valore ottenuto di $\log(\log(\log x))$ non oltrepassa 2...)

! Attenzione: la regola di cambio di variabile è più delicata di quello che sembra; in particolare può non valere se $\lim_{y\to y_0} g(y)$ non esiste, nel senso che in tal caso può succedere che invece $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ esiste.

Per esempio, abbiamo visto che $\lim_{x\to\pi} \frac{1}{1+\cos x} = +\infty$. Ma applicando il cambio di var. $y=1+\cos x$ si ha $\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}$ N.E.

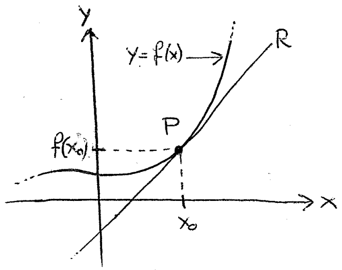
AM1 gest 17/18

Lezione 12, 11/10/17, due ore

Derivate

Definizione e motivazioni

Cominciamo con una motivazione di tipo geometrico: trovare l'equazione della retta tangente R al grafico $y = f(x)$ nel punto P di ascissa x_0



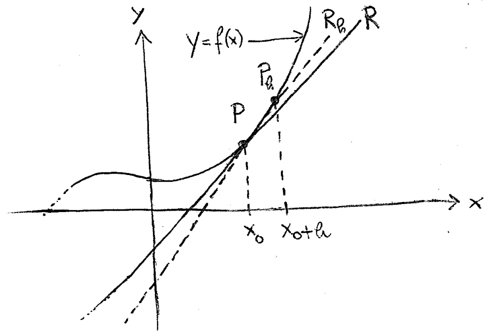
Le rette passanti per $P = (x_0, f(x_0))$ hanno equazione della forma

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficiente angolare} \\ = \\ \text{pendenza}}}{m}\,(x - x_0) + f(x_0)$$

[In effetti riscrivendo l'eq. nella forma $y = mx + \overbrace{(f(x_0) - mx_0)}^{\text{costante}}$ si vede che si tratta di rette, e sostituendo x_0 al posto di x si ottiene $y = f(x_0)$, per cui queste rette passano tutte per P....]

Resta dunque da trovare la pendenza m.

Per farlo, prendo $h \neq 0$ e considero la retta R_h passante per P e per il punto $P_h := (x_0 + h, f(x_0 + h))$.



- La pendenza m_h della retta R_h è facile da calcolare partendo dai punti P e P_h:

$$m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

[Δy e Δx denotano gli incrementi delle variabili y e x passando dal punto P al punto P_h; pertanto il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ è chiamato anche "rapporto incrementale".]

- Mi aspetto che la retta R_h sia tanto più vicina alla retta R quanto più h è piccolo, e in particolare mi aspetto che la pendenza di R sia il limite della pendenza di R_h per $h \to 0$:

$$m = \lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Questa formula porta alla seguente definizione:

Definizione

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la derivata di f in x, indicata con $f'(x)$, è data dal seguente limite, quando esiste:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Osservazioni

- Per definire la derivata di f in x, non è necessario che il dominio X di f coincida con $\mathbb{R}$; basta che x appartenga a X e sia un <u>punto di accumulazione</u> di X, cioè che esistano h arbitrariamente piccoli t.c. $x+h$ appartiene a X.

  Se X è un'unione di intervalli (e semirette) questa condizione è verificata da ogni x.
  (Ovviamente questo non vuol dire che la derivata esiste ma solo che ha senso parlare di limite del rapporto incrementale.)

- La derivata $f'(x)$ dipende da x, e quindi è una funzione (definita su un sottoinsieme del dominio di f).
- Se la derivata di f in x esiste ed è un numero finito (cioè non è $\pm\infty$) allora si dice che f è differenziabile in x.

- Il limite che definisce la derivata è solitamente una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, e quindi non si calcola facilmente.

  Tuttavia è possibile calcolare in modo approssimato il valore della derivata $f'(x)$ sostituendolo con il rapporto incrementale per h molto piccolo.
  Per esempio, se $f(x) := e^x$, la derivata in 2 dovrebbe essere circa

$$f'(2) \cong \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{e^{2+h} - e^2}{h}$$

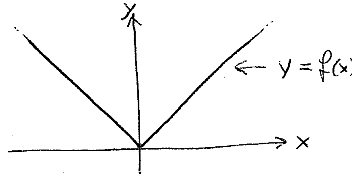
prendo $h = 10^{-6}$ e uso la calcolatrice... $\longrightarrow$ $= 7{,}38905979\ldots$

E in effetti sappiamo che $f'(2) = 7{,}389056098\ldots$
(Attenzione: se rifate lo stesso calcolo con $h = 10^{-20}$ ottenete 0. Cercate di spiegare perché...)

!
- La derivata, come tutti i limiti, può anche non esistere. Per esempio, se $f(x) = |x|$, il rapporto incrementale in $x = 0$ è

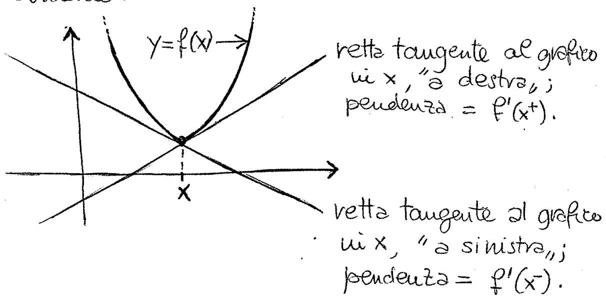
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{per } h > 0 \\ -1 & \text{per } h < 0 \end{cases}$$

Quindi il limite per $h \to 0^+$ è 1, quello per $h \to 0^-$ è -1, e in particolare il limite non esiste, e quindi non esiste neanche la derivata.
Graficamente la cosa è evidente:



non è infatti chiaro quale dovrebbe essere la retta tangente al grafico di f in $x=0$. I due plausibili candidati sarebbero la retta $y=x$, che è tangente al grafico a destra di 0, e la retta $y=-x$, tangente a sinistra di 0; in effetti le pendenze di queste due rette corrispondono ai limiti destro e sinistro del rapporto incrementale...

- Motivata dall'esempio precedente, si da la definizione di derivata destra di f in x, $f'(x^+)$, e di derivata sinistra $f'(x^-)$ rispettivamente come limiti destro e sinistro del rapporto incrementale. Il significato geometrico è evidente:



Attenzione può succedere che non esistano neanche le derivate destra e sinistra.

! • La derivata può essere anche $+\infty$ (o $-\infty$). Per esempio, se $f(x) = x^a$ con $0<a<1$, allora

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^a}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{a-1} = +\infty$$

attenzione, l'espon. $(a-1)$ è negativo!

In particolare la derivata di $\sqrt{x}$ in 0 è $+\infty$.

- Se una funzione f è derivabile in x (con derivata finita quindi!) allora f è continua in x.
(Il contrario non è vero: gli esempi dati sopra di funzioni non derivabili, o con derivata infinita, sono tutte continue.)

Questo enunciato è graficamente plausibile, ma la dimostrazione non può essere "grafica". Il punto è che nei disegni noi vediamo solo funzioni con un "bel" grafico, ma ci sono funzioni il cui grafico è difficile se non impossibile da disegnare, e non è chiaro quindi se una dimostrazione che si basa su un disegno funziona anche in questi casi....
Per questa ragione, le dimostrazioni in Analisi non si basano (quasi) mai su disegni.
Questa è forse la maggior differenza tra Analisi e "Calculus".

- A titolo d'esempio, calcolo la derivata della funzione $f(x) := x^2$ a partire dalla definizione. Il rapporto incrementale è:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h} = 2x+h$$

e quindi, passando al limite per $h\to 0$ otteniamo

$$f'(x) = 2x.$$

Questo esempio ci fa anche capire che la derivata di una funzione non può essere veramente calcolata a partire dalla definizione.

In effetti il calcolo delle derivate si basa sulla conoscenza delle derivate delle funzioni elementari e su una serie di risultati ("regole di derivazione") che permettono di combinarle per ottenere le derivate di funzioni più complicate.

Notazione per le derivate

La derivata viene scritta in tanti modi.

- Noi usiamo quasi sempre

$$f'(x) \quad ; \quad \dot{f}(x)$$

si legge "effe primo di x" — si legge "effe punto di x"

e spesso scriviamo semplicemente f' o $\dot{f}$, omettendo la variabile x.

- Un altro modo è

$$\frac{df}{dx}(x) \text{ e più spesso } \frac{df}{dx}$$

Questa notazione ricorda quella del rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, dove Δx rappresenta l'incremento della x, vale a dire $\Delta x = (x+h)-x = h$, mentre Δf rappresenta il corrispondente incremento del valore di f, cioè $\Delta f = f(x+h)-f(x)$.

Attenzione: non ha senso (almeno in questo corso) dare un significato indipendente a df e dx e vedere la derivata come un rapporto. In altre parole, l'espressione $\frac{df}{dx}$ non è "scomponibile" ma è un "blocco" unico....

La notazione $\frac{df}{dx}$ è particolarmente comoda quando nella formula di f appaiono più lettere e si vuole ricordare che la variabile indipendente è la x (e non un'altra lettera).

Nel corso di Analisi II vedrete anche funzioni di più variabili, per esempio $f(t,x)$. In tal caso scrivo $\frac{\partial f}{\partial x}$ per indicare la derivata rispetto alla variabile x (e t si tratta come una costante) e $\frac{\partial f}{\partial t}$ per la derivata rispetto a t....

∂ è una variante della lettera greca δ (delta minuscola)

- Un'ultima notazione che vale la pena segnalare (usata in particolare da fisici e ingegneri) usa solo le variabili y e x, con y (variabile dipendente) legata alla x (variabile indipendente) dalla formula $y=f(x)$: allora si indica il rapporto incrementale con $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e la derivata come $\frac{dy}{dx}$ (limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per $\Delta x \to 0$).

Altre interpretazioni (significati) della derivata

La rilevanza della nozione di derivata non è dovuta al significato geometrico accennato all'inizio, ma al fatto che appare in tanti altri campi oltre alla matematica.

- **Velocità istantanea (scalare)**

Un punto P comincia a muoversi all'istante $t=0$, e indico con $d(t)$ la **distanza** percorsa da P fino all'istante t. Allora:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t+\Delta t)-d(t)}{\Delta t} = \frac{\text{distanza percorsa da } t \text{ a } (t+\Delta t)}{\text{tempo passato da } t \text{ a } (t+\Delta t)}$$

$=$ velocità media di P nell'intervallo da t a $(t+\Delta t)$ (intesa come scalare)

Si definisce allora la velocità di P all'istante t (velocità istantanea scalare) come

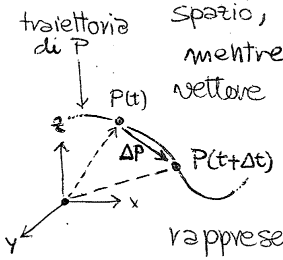
$$v(t) := \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{d(t+\Delta t)-d(t)}{\Delta t}$$

Osserviamo infine che l'ultimo limite è proprio il limite di un rapporto incrementale (ottenuto mettendo d al posto di f, t al posto di x e Δt al posto di h).
Quindi

$$v := \text{derivata della funzione } d$$

("La velocità (scalare) è la derivata della distanza percorsa rispetto al tempo.")

- **Velocità istantanea (vettore)**



Tornando all'esempio del punto in movimento, indico con $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la posizione di P all'istante t, espressa nelle tre coordinate cartesiane (immagino che P si muove nello spazio, quindi il dominio di P è contenuto in $\mathbb{R}$, mentre il codominio è lo spazio). Quindi, il vettore

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$$
$$= \left(x(t+\Delta t)-x(t),\ y(t+\Delta t)-y(t),\ z(t+\Delta t)-z(t)\right)$$

rappresenta lo spostamento di P dall'istante t all'istante $t+\Delta t$.
Si definisce allora la velocità di P al tempo t come il vettore

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$$

e di nuovo si tratta di una derivata

$$\vec{v} = \text{derivata della funzione } P .$$

("La velocità (vettore) è la derivata della posizione rispetto al tempo.")

Analogamente si definisce l'accelerazione $\vec{a}$ come la derivata della velocità $\vec{v}$ rispetto al tempo....

- Portata di una condottura

Considero una condottura, un tubo, da cui esce un qualche liquido, e indico con $V(t)$ il volume di liquido uscito da un certo istante iniziale t_0 fino all'istante t. Allora $\Delta V = V(t+\Delta t) - V(t)$ è il volume di liquido uscito tra l'istante t e $t+\Delta t$, e

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

rappresenta la portata media della condottura nell'intervallo di tempo che va da t a $t+\Delta t$.

Si definisce allora la portata istantanea all'istante t come

$$P(t) := \lim_{t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

e di nuovo si vede che si tratta di una derivata:

$$P = \text{derivata della funzione } V$$

AM1 gest 17/18

Lezione 13, 12/10/17, due ore

Calcolo delle derivate

Le derivate delle funzioni date da una formula che contiene solo funzioni elementari si calcolano usando le derivate di queste funzioni elementari più una serie di "regole di derivazione".

In questa lezione elenco le derivate delle funzioni elementari, le regole, e do qualche esempio di come si usano. Le dimostrazioni sono rimandate alle lezioni successive.

Elenco delle derivate delle funzioni elementari

(x è la variabile; a, b sono costanti)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	
$ax+b$	a	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
x^a $(a\neq 0)$	$a x^{a-1}$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
e^x	e^x	$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
a^x $(a>0)$	$\log a \cdot a^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Regole

(f, g sono funzioni; a, b costanti)

Derivata della somma: $(f+g)' = f' + g'$.

Caso particolare: $(f+a)' = f'$.

esempio: $(e^x + x^2)' = (e^x)' + (x^2)' = e^x + 2x$.

Derivata del prodotto: $(f\cdot g)' = f'g + f g'$.

Caso particolare: $(af)' = af'$.

derivata della combinazione lineare: $(af+bg)' = af' + bg'$.

esempi: $(x^3 \log x)' = (x^3)' \cdot \log x + x^3 \cdot (\log x)'$

$$= 3x^2 \cdot \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\log x + 1).$$

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = (2x^{\frac12} - 3x^{-1})' = 2(x^{\frac12})' - 3(x^{-1})'$$

$$= x^{-\frac12} + 3x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^{3/2}+3}{x^2}.$$

Derivata del rapporto: $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'\cdot f - g\cdot f'}{f^2}$.

caso particolare: $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

esempio: $\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Derivata della funzione composta: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

caso particolare: $(f(ax+b))' = a\, f'(ax+b)$.

Nel fare i conti conviene a volte usare questa regola indicando con y la funzione $g(x)$ senza esplicitarla subito. Per esempio:

$$\Big(e^{\overbrace{x^2+1}^{y}}\Big)' = (e^y)' \cdot y' = e^y \cdot (x^2+1)' = e^{x^2+1} \cdot 2x$$

$$\Big(\sqrt{\underbrace{1-2x}_{y}}\Big)' = (\sqrt{y})' \cdot y' = (y^{\frac12})' \cdot y' = \frac12 y^{-\frac12} \cdot (1-2x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}(-2) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

[Posto $y = g(x)$ e $z = f(y)$ la derivata di $z = f(g(x))$ si scrive anche nella forma $(f(g(x)))' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dz} = f'(y)\cdot g'(x)$.]

Esercizi di calcolo delle derivate

- $(e^{\text{sen}\,x})' = (e^{y})'\cdot y' = e^{y}\,(\text{sen}\,x)' = e^{\text{sen}\,x}\cdot\cos x.$

  $y = \text{sen}\,x$

- $(x\sqrt{1-x^2})' = (x)'\sqrt{1-x^2} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} + x\left((\underbrace{1-x^2}_{y})^{\frac12}\right)'$

  $= \sqrt{1-x^2} + x\,(y^{\frac12})'\,y' = \sqrt{1-x^2} + x\,\frac12\,y^{-\frac12}(1-x^2)'$

  $= \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

  $= \frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

- $[\log(\log(\log x))]' = (\log y)'\cdot y' = \frac1y\,(\log(\underbrace{\log x}_{z}))'$

  $y = \log(\log x)$

  $= \frac{1}{\log(\log x)}\cdot(\log z)'\,z'$

  $= \frac{1}{\log(\log x)}\cdot\frac1z\cdot(\log x)' = \frac{1}{\log(\log x)\cdot\log x\cdot x}$

- $\left(\arctan x + \arctan\left(\underbrace{\tfrac1x}_{y}\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + (\arctan y)'\cdot y'$

  $= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}\left(\frac1x\right)'$

  $= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$

> Questo significa che $f(x) := \arctan x + \arctan\frac1x$ è una funzione costante! La costante in questione si ottiene calcolando la funzione per un x per cui è facile fare i conti, per esempio $x=1$: cioè
> $f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
> Provate a dare una dimostrazione di questo fatto senza usare le derivate...

- $\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]' =$

  prima di calcolare questa derivata conviene semplificare la funzione usando le proprietà di potenze e logaritmi!

$\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right) = \log\left(\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}\right)^{\frac14}\right) = \log\left(\frac{(x+1)^{\frac34}}{(x-1)^{\frac32}}\right)$

$= \log\left((x+1)^{\frac34}\right) - \log\left((x-1)^{\frac32}\right)$

$= \frac34\log(x+1) - \frac32\log(x-1).$

Quindi $\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]' = \left(\frac34\log(x+1) - \frac32\log(x-1)\right)'$

$= \frac34(\log(x+1))' - \frac32(\log(x-1))'$

$= \frac34\,\frac{1}{x+1} - \frac32\,\frac{1}{x-1} = \frac{3(x-1)-6(x+1)}{4(x^2-1)}$

$= -\frac34\cdot\frac{x+3}{x^2-1}$

- $\left(\sqrt[3]{1-3x}\right)' = \left((1-3x)^{\frac13}\right)' = \frac13(1-3x)^{-\frac23}\cdot(-3) = -(1-3x)^{-\frac23}$

- $\left(\log\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)\right)' = \left(\log(\underbrace{x^3+1}_{z}) - \log(\underbrace{x^3-1}_{y})\right)' = (\log z)'\,z' - (\log y)'\,y'$

  $= \frac1z(x^3+1)' - \frac1y(x^3-1)' = \frac{3x^2}{x^3+1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{-6x^2}{x^6-1}$

- $(x^x)' =$

  Conviene scrivere la potenza x^x come esponenziale in base e, usando la formula $a^b = e^{b\cdot\log a}$, cioè $x^x = e^{x\cdot\log x}$.

  $= (e^{\underbrace{x\log x}_{y}})' = (e^y)'\,y' = e^y\,(x\log x)'$

  $= e^{x\log x}\left((x)'\log x + x(\log x)'\right) = x^x(\log x + 1)$

AM1 gest 17/18

Lezione 14, 13/10/17, due ore

1

Dimostrazioni

delle regole di derivazione e delle formule delle derivate delle funzioni elementari

Regola: $(f+g)' = f'+g'$ (derivata della somma)

Enunciato preciso: Date $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, x punto di accumulazione di X, se f e g sono derivabili in x allora $f+g$ è derivabile in x e

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x).$$

serve per dire che f e g sono derivab. in x

Dimostrazione

Parto dal rapporto incrementale di $f+g$:

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)+g'(x)$$

perché $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)$

e $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} g'(x)$

$\square$

2

Regola: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ (derivata del prodotto)

Enunciato preciso: Date $f,g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, x punto di accumulazione di X, se f e g sono derivabili in x allora $f\cdot g$ è derivabile in x e

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Dimostrazione

Parto come prima dal rapporto incrementale di $f\cdot g$

$$\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

"trucco" chiave: aggiungo e sottraggo $f(x)\cdot g(x+h)$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g(x)} + f(x)\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x)} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

$\square$

Regola: $[f(g(x))]' = f'(y)\cdot g'(x)$ con $y := g(x)$ (derivata della funzione composta)

Enunciato preciso: Data $g: X \to Y$ e $f: Y \to \mathbb{R}$, x punto di acc. di X, $y := g(x)$ punto di acc. di Y, se g è derivabile in x e f è derivabile in y allora $f(g(x))$ è derivabile in x e

$$[f(g(x))]' = f'(y)\cdot g'(x).$$

Dimostrazione

Porto come al solito dal rapporto incrementale della funzione composta:

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =$$

"trucco chiave": moltiplico e divido per $g(x+h)-g(x)$

$$= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ricordo che $y := g(x)$, e pongo $k := g(x+h)-g(x)$ da cui segue $g(x+k) = g(x)+k = y+k$

$$= \frac{f(y+k)-f(y)}{k} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(y)\cdot g'(x)$$

perché $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} g'(x)$

e $\frac{f(y+k)-f(y)}{k} \xrightarrow[k\to 0]{} f'(y)$

! Attenzione: siccome $k := g(x+h)-g(x)$ (e g è continua in x...) quando $h \to 0$ si ha che $k \to 0$.

□

! Questa dimostrazione è incompleta: ad un certo punto moltiplico e divido per $g(x+h)-g(x)$, ma questo passaggio non è corretto se $g(x+h)-g(x)=0$. Questo caso andrebbe considerato a parte...

Per procedere serve un'ultima regola, quella per la derivata della funzione inversa.

Derivata della funzione inversa

Sia $g(y)$ la funzione inversa di $f(x)$ (uso di proposito due variabili diverse). Allora

$$g'(y) = \frac{1}{f(x)}$$

dove le variabili y e x sono collegate dalla relazione $x = g(y)$ (ovvero $y = f(x)$).

! Questa regola si usa quasi solamente nelle dimostrazioni. Infatti se della funzione g conosco la formula, non ho bisogno di questa regola per calcolarne la derivata.... Evito di darne l'enunciato preciso. (Provateci voi!)

Dimostrazione

Parto dalla formula che lega g ed f:

$$g(f(x)) = x$$

Siccome queste due funzioni, x e $g(f(x))$, coincidono, hanno la stessa derivata. La derivata di x è 1, quella di $g(f(x))$ la ottengo tramite la formula per la derivata della funzione composta, e quindi

$$g'(y)\cdot f'(x) = 1 \quad \text{con } y = f(x) \text{ ovvero } x = g(y)$$

e da questa uguaglianza ottengo subito la tesi.

□

Attenzione: In questa dimostrazione ho dato per scontato che g sia derivabile. In realtà questo punto è delicato (per esempio, se $f'(x)=0$ allora g non è derivabile in y). La dimostrazione completa di questo teorema è più complicata....

La dimostrazione della regola di derivazione del rapporto la do dopo. Passo adesso alla dimostrazione delle derivate delle funzioni elementari.

$\boxed{(ax+b)' = a}$

Parto dal rapporto incrementale della funzione $ax+b$:

$$\frac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h} = \frac{\cancel{ax}+ah\cancel{+b}\cancel{-ax}\cancel{-b}}{h} = a$$

e quindi è chiaro che il limite per $h \to 0$ è sempre a.

$\boxed{(e^x)' = e^x}$

Una vera dimostrazione di questa formula richiederebbe una definizione precisa del numero "e", che non darò adesso.

! Dico invece che per me "e" è il numero caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

Sulla base di questa proprietà otteniamo che $(e^x)'=e^x$, infatti, partendo dal rapp. increm. di e^x,

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} e^x$$

durante il corso, usando il fatto che $(e^x)'=e^x$, otterremo diverse formule per "e" ....

$\boxed{(a^x)' = \log a \cdot a^x}$

Scrivo a^x in base e, cioè $a^x = e^{x\cdot \log a}$. Quindi

$$(a^x)' = (e^{x\cdot\log a})' \underset{\substack{\text{derivata della}\\ \text{funzione composta}\\ y=\log a\cdot x}}{=} (e^y)'\, y' \overset{\text{uso che } (e^y)'=e^y}{=} e^y \cdot (\log a \cdot x)'$$

$$= e^{x\cdot\log a} \cdot \log a \underset{\text{uso che } (\log a\cdot x)'=\log a}{=} a^x \cdot \log a.$$

$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}}$

Uso il fatto che $g(y):=\log y$ è l'inversa di $f(x):=e^x$, ed applico la formula per la derivata della funzione inversa:

$$(\log y)' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} \overset{\text{ricordo che } y=f(x)=e^x}{=} \frac{1}{y}$$

$\boxed{(x^a)' = a x^{a-1}}$

Scrivo x^a in base e; $x^a = e^{a\cdot\log x}$, e ottengo

$$(x^a)' = (e^{a\cdot\log x})' \underset{\substack{\text{derivata funz.}\\ \text{composta}\\ y=a\cdot\log x}}{=} (e^y)'\cdot y' = e^y\,(a\cdot\log x)'$$

$$= e^{a\cdot\log x}\cdot a\,(\log x)'$$

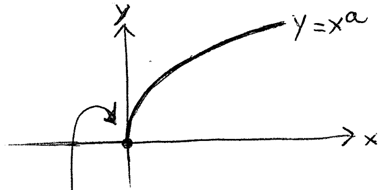
$$= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a x^{a-1}$$

! Attenzione: questa dimostrazione permette di calcolare la derivata di x^a solo per $x>0$ (si usa $\log x$....), ma nella versione completa la formula $(x^a)'=ax^{a-1}$ vale anche per altri x.
Per la precisione vale anche per $x=0$ se $a>0$, per $x\leq 0$ se a è intero >0, per $x<0$ se a è intero <0.

<u>Attenzione</u>: se $0<a<1$, $f(x) := x^a$ è definita anche per $x=0$, ma non è derivabile in 0, e per la precisione $f'(0) = +\infty$.

Infatti

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^a}{h} = h^{a-1} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty$$



la retta tangente al grafico $y=x^a$ in $x=0$ è verticale; questo torna con il fatto che la derivata di x^a in $x=0$ è $+\infty$....

$\boxed{\text{Regola}: \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$ (non do l'enunciato preciso)

Scrivo $\frac{1}{f(x)}$ come $g(f(x))$ con $g(y) = \frac{1}{y}$, e applico la formula della derivata della funzione composta (e il fatto che $g'(y) = \left(\frac{1}{y}\right)' = (y^{-1})' = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2}$):

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = [g(f(x))]' \underset{\substack{\uparrow \\ y=f(x)}}{=} g'(y)\, y' = -\frac{1}{y^2}\, f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$\boxed{\text{Regola}: \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \left(g\cdot\frac{1}{f}\right)' = g'\frac{1}{f} + g\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{g'}{f} - g\frac{f'}{f^2} = \frac{g'f-gf'}{f^2}.$$

AM1 gest 17/18

Lezione 15, 14/10/17, tre ore.

Continuano le dimostrazioni delle derivate delle funzioni elementari, in particolare delle funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse.

$$\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \cos x}$$

Partiamo (per l'ultima volta) dal rapporto incrementale.

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \cdot \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

formula per il seno della somma di due angoli

$$= \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{1-\cos h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x$$

Qui si usano i seguenti fatti che dimostrerò dopo:

$(*)$ $\quad \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$,

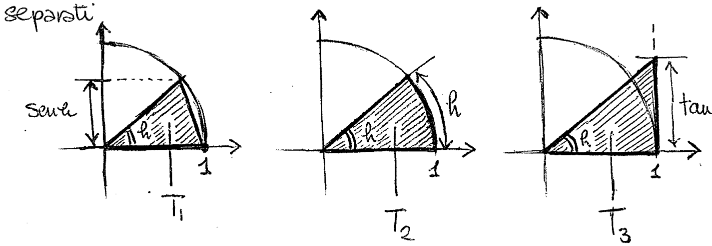
$(**)$ $\quad \dfrac{1-\cos h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. $\square$

Restano da dimostrare i limiti $(*)$ e $(**)$.
Attenzione, limiti del genere, in seguito, si calcolano usando il Teorema di de L'Hôpital, oppure gli sviluppi di Taylor. Queste tecniche presuppongo però che si sappia che la derivata del seno è il coseno etc.

e quindi non possono essere usate adesso!

$$\boxed{(*) \quad \frac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1}$$

Considero i seguenti tre insiemi T_1, T_2, T_3 contenuti uno nell' altro (anche se li disegno separati)



Siccome $T_1 \subset T_2 \subset T_3$ abbiamo che

$$\operatorname{area}(T_1) \leq \operatorname{area}(T_2) \leq \operatorname{area}(T_3)$$
$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$
$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} h \qquad \tfrac{1}{2} h \qquad \tfrac{1}{2}\tan h = \tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$$

T_1 triangolo di base 1 e altezza sen h

T_2 settore circolare di un cerchio di raggio 1 con arco di lunghezza h

T_3 triangolo di base 1 e altezza tan h

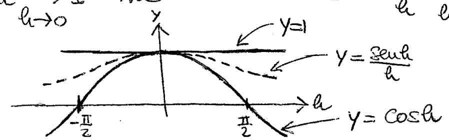
Quindi

$$\operatorname{sen} h \leq h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$$

Dalla prima disequazione ottengo $\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \leq 1$, dalla seconda $\cos h \leq \dfrac{\operatorname{sen} h}{h}$, e quindi

$$(1) \qquad \cos h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{h} \leq 1$$

Siccome $\cos h \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ ne deduco che $\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$.



Attenzione le disuguaglianze in (1) sono state dimostrate geometricamente per $0<h<\frac{\pi}{2}$.
Si può dimostrare che valgono anche per $-\frac{\pi}{2}<h<0$ usando il fatto che $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ è una funzione pari, come pure $\cos h$. □

$$\boxed{(**)\quad \frac{1-\cos h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)} = \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(1+\cos h)} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\downarrow_{h\to 0}\; 1} \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{\operatorname{sen} h}^{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}}{1+\cos h}}_{\downarrow_{h\to 0}\; 1+\cos(0)=2} \xrightarrow[h\to 0]{} 1\cdot\frac{0}{2}=0.$$

$$\boxed{(\cos x)' = \operatorname{sen} x}$$

Parto dall'identità $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$:

$$(\cos x)' = \Big(\operatorname{sen}\underbrace{\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)}_{y}\Big)' = (\operatorname{sen} y)'\, y' = \cos y\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)'$$

$$= -\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) \underset{\uparrow}{=} -\operatorname{sen} x$$

ricordo che $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\boxed{(\tan x)' = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Parto dall'identità $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - \operatorname{sen} x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \nearrow = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\searrow = 1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Uso il fatto che $g(y):=\arctan y$ è l'inversa di $f(x):=\tan x$ (ristretta a $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$) ed applico la formula per la derivata della funzione inversa:

$$(\arctan y)' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{1+y^2}.$$

ricordo che $y=f(x)=\tan x$

$$\boxed{(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Uso il fatto che $g(y):=\arcsin y$ è l'inversa di $f(x):=\operatorname{sen} x$ (ristretta a $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$) ed applico la formula per la derivata della funzione inversa:

$$(\operatorname{arcsen} y)' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

in generale $\cos x = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$ ma per $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ il coseno è positivo....

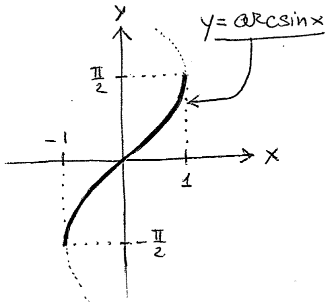
ricordo che $y=f(x)=\operatorname{sen} x$

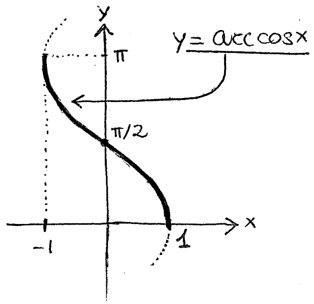
$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Questa dimostrazione è analoga alla precedente e la lascio per esercizio....

NOTA le funzioni arcsen x e arccos x sono definite per $-1\le x\le 1$, ma la formula per

la derivata non ha senso in $x=\pm 1$.
In effetti si può far vedere che la derivata di $\arcsin x$ in ± 1 è $+\infty$ (e in effetti la retta tangente al grafico in entrambe i punti è verticale)
Invece la derivata di $\arccos x$ in ± 1 è $-\infty$.





(Provate a dimostrare queste due affermazioni partendo dal rapporto incrementale....)

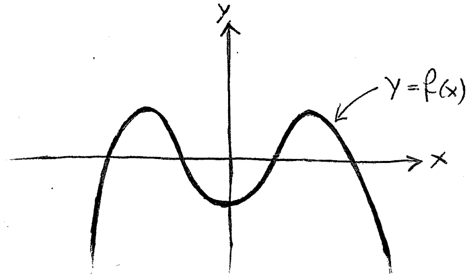
Più in generale, una funzione data da un'unica formula che contiene funzioni elementari è continua in ogni punto dell'insieme di definizione, ma può non essere derivabile. Inoltre può succedere che la derivata esista in qualche punto ma non possa essere calcolata usando le solite formule...

Esercizi svolti in aula dagli studenti

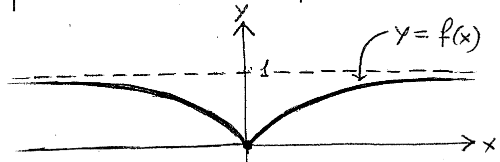
1) Trovare le coordinate polari di $(-2,-2)$; $(-\sqrt{3},3)$.

2) Trovare le soluzioni di $\tan(2x)\leq 1$ con $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$.

3) Disegnare l'insieme dei punti (x,y) t.c. $f(x)\leq y\leq 2f(x)$ dove $f(x)$ è la funzione il cui grafico è dato in figura



4) Proporre una formula per la funzione $f(x)$ sotto:



5) Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1}{\sin(2x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\sin x$.

6) Determinare l'immagine di $f(x):=e^{x^2+1}$.

[Suggerimento: determinare prima l'immagine della funzione x^2+1 e poi usare il cambio di variabile $y=x^2+1$....]

(Lezione 15, continua)

Massimi e minimi

Cominciamo dando un po' di definizioni più o meno ovvie.

Consideriamo un insieme Y di numeri reali (vale a dire $Y \subset \mathbb{R}$).

- Il <u>massimo</u> di Y ($\max(Y)$) è l'elemento y_M di Y più grande di tutti gli altri, cioè tale che $y_M \geq y \ \forall y \in Y$.
- Il <u>minimo</u> di Y ($\min(Y)$) è l'elemento y_m di Y più piccolo di tutti gli altri, cioè tale che $y_m \leq y \ \forall y \in Y$.

<u>Esempi</u>

- Il massimo di $[1,3]$ è 3, il minimo è 1.
- Il massimo di $\mathbb{R}$ non esiste (non c'è il numero più grande di tutti) e nemmeno il minimo.
- Il massimo di $(0,2]$ è 2 ma il minimo non esiste! (Infatti 0 non appartiene all'insieme, e nessun altro $y \in (0,2]$ può essere minimo perché $\frac{y}{2}$ appartiene all'insieme ed è più piccolo...)
- Il massimo di $(-\infty, 1) \cup (2,3]$ è 3, il minimo non esiste.

Dunque l'intervallo (a,b) non ha né massimo né minimo, perché a e b non sono punti dell'intervallo. La terminologia per indicare questi punti è che b è l'estremo superiore ed a l'estremo inferiore. Estendiamo queste due nozioni a insiemi più generali:

- Se Y si scrive come unione finita di intervalli (anche illimitati), l'<u>estremo superiore</u> di Y ($\sup(Y)$) è il più grande degli estremi superiori di questi intervalli.
- Se Y si scrive come unione finita di intervalli (anche illimitati), l'<u>estremo inferiore</u> di Y ($\inf(Y)$) è il più piccolo degli estremi inferiori di questi intervalli.

<u>Osservazioni</u>

- Se l'estremo superiore appartiene a Y allora è il massimo; se non ci appartiene allora il massimo non esiste. Stesso vale per l'estremo inf.
- Si possono definire l'estremo superiore e inferiore di qualunque insieme Y ma la definizione è molto più complicata. (Ed "esistono" insiemi molto più complicati che le unioni di intervalli....)

Esempi

- L'estremo superiore di $(-2,1] \cup (3,4]$ è 4 ed è anche il massimo, l'estremo inferiore è -2 ma il minimo non esiste.
- L'estremo superiore di $(1,3] \cup [4,+\infty)$ è $+\infty$, l'estremo inferiore è 1, massimo e minimo non esistono
- $((-1,2) \cup (3,5] \cup (6,7)) \cap (-\infty, 6)$ ha estremo inferiore -1, massimo 5, e non ha minimo (controllare....)

Passo adesso ai massimi e minimi di funzioni. Consideriamo dunque una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ (dove X non è necessariamente contenuto in $\mathbb{R}$) e indichiamo con $Im(f)$ l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori $f(x)$ al variare di $x \in X$, $\{f(x) \mid x \in X\}$.

- Il valore massimo di f, $\max f$; (o anche $\max\limits_{x \in X} f(x)$) è il massimo dei valori di f, cioè il massimo di $Im(f)$. La definizione di minimo, $\min f$ $\left(\min\limits_{x \in X} f(x)\right)$ è analoga.
- Se il (valore) massimo non esiste, e se $Im(f)$ è un unione di intervalli, possiamo comunque definire l'estremo superiore di f, $\sup f$ $\left(\sup\limits_{x \in X} f(x)\right)$, come l'estremo superiore di $Im(f)$.

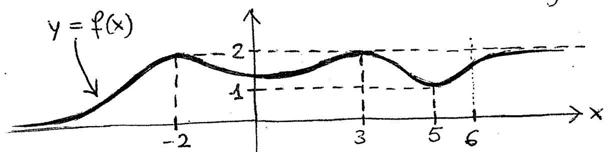
In seguito questa ipotesi verrà tolta

La definizione di estremo inferiore di f, $\inf f$ o $\inf\limits_{x \in X} f(x)$, è analoga.

- I punti $x \in X$ in cui il valore $f(x)$ coincide con il valore massimo sono detti punti di massimo, quelli in cui $f(x)$ coincide col valore minimo sono detti punti di minimo.
- Dato X' sottoinsieme di X, il (valore) massimo di f relativo a X', $\max\limits_{x \in X'} f(x)$, è il massimo dell'insieme
$$\{f(x) \mid x \in X'\}$$
- Se il **massimo** di tale insieme non esiste, prendiamo l'estremo superiore, che chiamiamo estremo superiore di f relativo a X', $\sup\limits_{x \in X'} f(x)$.
- I punti $x \in X'$ dove $f(x)$ coincide con il massimo di f relativo a X' sono chiamati punti di massimo di f relativi a X'.

[Le definizioni di $\min\limits_{x \in X'} f(x)$, $\inf\limits_{x \in X'} f(x)$, e di punti di minimo di f relativi a X' sono analoghe.]

Esempio 1 Sia f la funzione data nel disegno sotto:

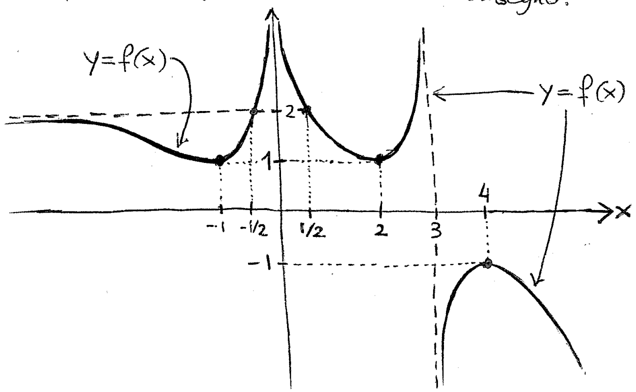


L'immagine è $(0,2]$, il valore massimo è $y=2$ e i punti di massimo sono $x=-2$ e $x=3$.

Il valore minimo non esiste, e quindi non esistono neanche punti di minimo; l'estremo inf. è 0.

Relativamente all'insieme $[3,6]$ il valore massimo è $y=2$ il punto di massimo è $x=3$ il valore minimo e $y=1$, il punto di minimo è $x=5$.

<u>Esempio 2</u> Sia f la funzione nel disegno:



Il dominio è l'insieme degli $x \neq 0, 3$.
L'immagine è $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, quindi l'estremo superiore di f è $+\infty$, quello inferiore è $-\infty$, il massimo, il minimo, i punti di massimo e di minimo non esistono.

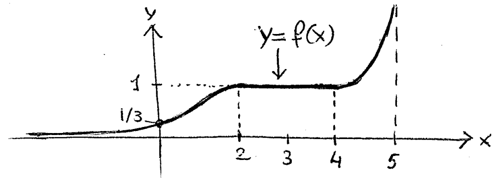
Relativamente all'insieme $(-\infty,0) \cup (0,3)$, l'estremo superiore di f è $+\infty$ (niente massimo e niente punti di massimo) mentre il minimo di f è $y=1$ e i punti di minimo sono $x=-1$ e $x=2$.

Relativamente all'insieme $(3,+\infty)$, il massimo è $y=-1$ e il punto di massimo è $x=4$, l'estremo inferiore è $-\infty$ (niente minimo, niente punti di minimo).

Relativamente all'insieme $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ il valore massimo è $y=2$, il punto di massimo è $x=-\frac{1}{2}$, il valore minimo è $y=2$, il punto di minimo $x=-1$.

Relativamente all'insieme $(0,\frac{1}{2}]$, l'estremo superiore è $+\infty$ (niente massimo né punti di massimo), il minimo è $y=2$, il punto di minimo è $x=\frac{1}{2}$.

<u>Esempio 3</u> Sia f la funzione nel disegno:



Il dominio di f è l'insieme degli $x<5$.
L'immagine è $(0,+\infty)$ e quindi l'estremo superiore di f è $+\infty$, quello inferiore è 0, non esistono né massimo né minimo.

Relativamente all'insieme $[0,4]$ il massimo di f è $y=1$ e i punti di massimo sono tutti gli x con $2 \leq x \leq 4$; il minimo di f è $y=\frac{1}{3}$ e il punto di minimo è $x=0$.

Relativamente all'insieme $[3,5)$ l'estremo superiore di f è $+\infty$ (niente punti di massimo); il minimo di f è $y=1$ e i punti di minimo sono tutti gli x con $3 \leq x \leq 4$.

Relativamente all'insieme $[2,3]$ tutti i punti sono sia di massimo che di minimo (perché f è costante).

Esercizi da fare a casa.

Per ciascuna delle funzioni che seguono trovare i valori massimi e minimi (ed i corrispondenti punti di massimo e minimo) e se non esistono trovare gli estremi inferiori e superiori dei valori.

- $f(x) = e^x$ relativamente a $(-\infty, 1]$, $[0, 2]$ e $[2, +\infty)$.
- $f(x) = x^2$ relativamente a $[-1, 2]$ e $(-1, 2)$.
- $f(x) = \operatorname{sen} x$ relativamente a $[0, 2\pi]$, $[0, \pi]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$.
- $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$ relativamente a $[0, 3]$, $[0, +\infty)$.
- $f(x)$ come nell'esempio 1 relativamente a $[-2, 6]$, $[3, +\infty)$, $[5, +\infty)$ e $(5, +\infty)$.
- $f(x)$ come nell'esempio 2, relativamente a $[\frac{1}{2}, 2]$, $[\frac{1}{2}, 3)$, $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ e $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

AM1 gest 17/18

Lezione 16, 17/10/18, due ore.

Riprendo il discorso su massimi e minimi, completando la lista di definizioni data nella lezione precedente.

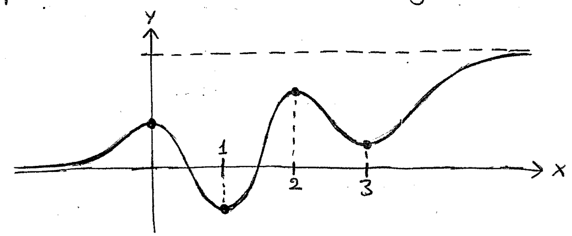
Considero $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con X sottoinsieme di $\mathbb{R}$. (Nella lezione precedente non si richiedeva che X fosse contenuto in $\mathbb{R}$, ora è necessario.)

- Un punto $x_0 \in X$ si dice di <u>massimo locale</u> (per la funzione f) se esiste un intervallo I t.c.
  - x_0 è interno a I (cioè non è un estremo);
  - x_0 è punto di massimo di f relativ. a $I \cap X$.
- La definizione di punto di <u>minimo locale</u> è analoga...

<u>Note</u>

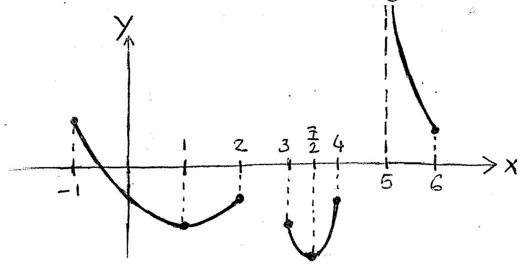
- Non è importante che I sia chiuso o aperto, ma che x_0 sia interno a I.
- Non è detto che I sia contenuto in X, anzi in alcuni casi si deve prendere I non contenuto in X.
- I punti di massimo sono anche di max. locale!
- A parole: x_0 è punto di max. locale se "per x vicino a x_0, si ha che $f(x) \leq f(x_0)$".

<u>Esempio 1</u> Sia f come nel disegno sotto:



si ha che
- $x=1$ è il punto di massimo (assoluto);
- $x=0$ è un punto di massimo locale: infatti è di massimo relativamente all'intervallo $I := [-1,1]$ (che è contenuto nel dominio di f);
- $x=2$ è punto di massimo locale: infatti è di massimo relativamente a $I := [1,3]$;
- $x=3$ è punto di minimo locale: infatti è di minimo relativamente a $I := [2,4]$.

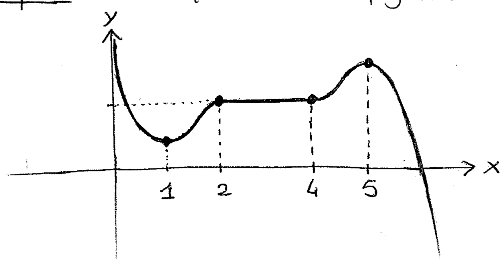
<u>Esempio 2</u> Data f come nel disegno:



il dominio è $X := [-1,2] \cup [3,4] \cup (5,6]$.
- $x=-1$ è un punto di massimo locale: infatti è di massimo relativamente a $[-1,0] = X \cap I$ con $I = [-2,0]$ (per avere x interno a I non possiamo prendere I contenuto in X...)
- $x=1$ è punto di minimo locale; infatti è di minimo relativamente a $I := [0,2]$;
- $x=2$ è punto di massimo locale: infatti è di massimo relativamente a $(1,2] = X \cap I$ con $I := (1,3)$.
- $x=3$ è punto di massimo locale (trovate I....);

- $x = \frac{7}{2}$ è il punto di minimo assoluto;
- $x = 4$ è punto di massimo locale (spiegare!);
- $x = 6$ è punto di minimo locale (spiegare!).

Esempio 3 Data f come in figura:



- $x=1$ è punto di minimo locale (....);
- $x=5$ è punto di massimo locale (....);
- ogni $x \in [2,4)$ è punto di massimo locale: infatti è punto di massimo relativamente all'intervallo $[1,4]$; attenzione, $x=4$ non è punto di massimo locale (spiegare perché!);
- ogni $x \in (2,4]$ è punto di minimo locale: infatti è punto di minimo relativamente all'intervallo $[2,5]$; attenzione, $x=2$ non è punto di minimo locale (spiegare perché!);
- in particolare, ogni $x \in (2,4)$ è punto sia di massimo che di minimo locale (e infatti la funzione f è costante in $[2,4]$...)

! Voglio ora affrontare il seguente problema: quando esistono i punti di minimo e di massimo di una funzione? E se esistono, come fare a trovarli?

Attenzione, non si tratta di un problema puramente matematico, ma anzi di un problema di grande interesse concreto: quando si progetta una rete telefonica si cerca di minimizzare i costi, e quindi di disegnare la rete con linee di minima lunghezza; quando si progetta un aereo, si cerca la forma che rende minima la resistenza dell'aria a velocità di crociera, etc. etc.

In questo corso ci limitiamo al caso dei minimi e massimi di funzioni di una variabile date da una formula. Nel corso di Analisi II considererete il caso di funzioni di più variabili, (sempre date da una formula).
Questi casi sono solo l'inizio...

Comincio da un problema teorico: quando esistono massimo e minimo di una funzione?

Teorema (di Weierstrass).
Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f ha un valore massimo e un valore minimo, e quindi ha punti di massimo e di minimo.

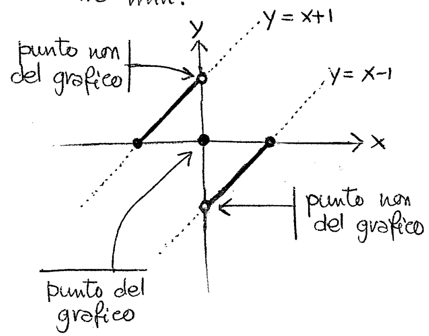
Osservazioni

- Non dimostro questo teorema.
  La ragione è che una dimostrazione "grafica" non ha senso: facendo dei disegni ci si convince facilmente che il teorema deve essere vero, ma i disegni non possono coprire tutti i casi possibili, e resta il dubbio che ci sia sia qualche caso a cui non si è pensato dove il teorema è falso...
  Una dimostrazione "non grafica" e "completa" (cioè rigorosa) esiste e la trovate sui libri di Analisi, ma è piuttosto complicata e astratta.
  In particolare questa dimostrazione non permette di trovare i punti di massimo e minimo, nel senso che non suggerisce un algoritmo per trovarli, neanche con l'aiuto di un computer.
- Come già detto, questo teorema garantisce solo che, sotto certe ipotesi su f, massimo e minimo esistono, ma resta aperto il problema di trovare questi valori (e i corrispondenti punti di max. e min.).
- L'ipotesi che il dominio X di f sia un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ può essere indebolita chiedendo che X sia un'unione finita di intervalli chiusi e limitati.
- L'ipotesi che X sia un intervallo limitato è necessaria: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x):=x$ (o anche $f(x):=e^x$) non ha né massimo né minimo.

- L'ipotesi che X sia un intervallo chiuso è pure necessaria: la funzione $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ data da $f(x):=\tan x$ non ha né massimo né minimo.
- L'ipotesi che f sia continua è necessaria: la funzione $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x):=\begin{cases} x+1 & \text{per } -1\leq x<0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ x-1 & \text{per } 0<x\leq 1 \end{cases}$$

ha immagine $(-1,1)$ ed in particolare non ha né max. né min.



Esercizio: trovare (come formula o come disegno) una funzione continua su un intervallo semiaperto (cioè della forma $[a,b)$ o $(a,b]$) che non ha né massimo né minimo.

La procedura per la ricerca dei punti di max. e min. che spiego tra poco è basata sul seguente fatto:

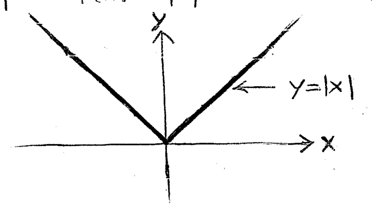
Proposizione

Consideriamo una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ con X intervallo, e x_0 punto di massimo o minimo (locale) di f. Supponiamo inoltre che x_0 sia interno a X (cioè non è uno degli estremi) e che f sia derivabile in x_0. Allora

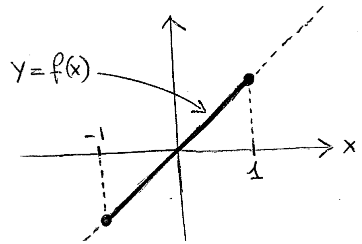
$$f'(x_0)=0.$$

Osservazioni

- L'ipotesi che f sia derivabile è necessaria, nel senso che può succedere che in un punto di minimo (o massimo) la derivata non esista (per esempio: $f(x):=|x|$ ha minimo in $x=0$...)

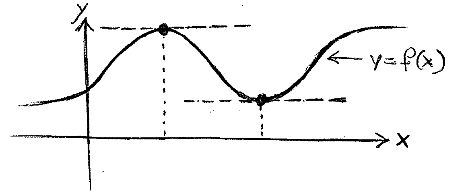


- L'ipotesi che x_0 sia interno a X è necessaria: la funzione $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x):=x$ ha minimo in $x=-1$, massimo in $x=1$, ma la derivata in questi punti non è 0.



- Non è necessario che il dominio X di f sia un intervallo. Può anche essere un'unione di intervalli (e allora x_0 non deve essere nessuno degli estremi) oppure un insieme qualunque (in tal caso "x_0 interno a X" significa che esiste $\delta>0$ t.c. $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset X$).

A livello grafico questa proposizione è evidente: appena provo a disegnare una funzione, nel punto di massimo (o minimo) la retta tangente è orizzontale, quindi la pendenza, che è la derivata, è zero.



Al solito, il problema è che con i disegni non si può escludere che ci siano esempi a cui non abbiamo pensato in cui le cose vanno diversamente.

Per questa ragione do adesso una dimostrazione "da corso di analisi", cioè che non ricorre ad alcun disegno.

Dimostrazione

Mi limito al caso in cui x_0 è un punto di minimo. Gli altri casi (x_0 punto di minimo locale, punto di max...) si dimostrano più o meno allo stesso modo.

Considero $h>0$ (t.c. $x_0+h \in X$); siccome x_0 è un punto di minimo si ha

$$f(x_0+h) \geq f(x_0)$$

quindi $f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0$ e dividendo per h

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0.$$

Passando al limite per $h\to 0^+$ ottengo allora che

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0.$$

Analogamente, prendendo $h<0$ ottengo $f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0$ e dividendo per h

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0,$$

e passando al limite per $h\to 0^-$,

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0.$$

Siccome $f'(x_0)$ è sia ≥ 0 che ≤ 0, l'unica possibilità è che $f'(x_0)=0$. $\square$

Se avete capito bene questa dimostrazione, provate a rispondere alle seguenti domande:

- se x_0 è un punto di minimo (locale) dove la derivata $f'(x_0)$ non esiste, ma esistono le derivate destre e sinistre

$$f'_+(x_0):=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0):=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Cosa si può dire su queste derivate?

- E se x_0 è un punto di massimo?
- Se x_0 non è interno all'intervallo X ma è l'estremo sinistro, ed è un punto di minimo (locale) cosa si può dire su $f'(x_0)$?

Una conseguenza della proposizione precedente è la seguente:

Corollario

Se x è un punto di massimo o minimo (locale) di $f: X\to\mathbb{R}$, allora x soddisfa almeno una delle seguenti opzioni:

(a) x è un estremo di X;

(b) la derivata $f'(x)$ non esiste;

(c) $f'(x)=0$.

Procedura per la ricerca di min. e max

! **se** f ammette dei punti di minimo e/o di massimo la procedura per trovarli è la seguente:

Passo 1: si trovano tutti i punti $x\in X$ che soddisfano una (o più) delle condizioni (a), (b), (c);

passo 2: se questi punti sono in numero finito, si calcola il valore di f per ciascuno: i punti di minimo saranno quelli per cui il valore di f è più basso, i punti di massimo quelli per cui è più alto.

Esempio

Trovare i punti di massimo e minimo di $f(x):=x^3-3x$ relativamente all'intervallo $-2\leq x\leq 3$.

- Risolvo l'equazione $f'(x)=0$, $3x^2-3=0$, $x=\pm 1$.
- I punti da considerare sono quindi $-2,-1,1,3$.
- Calcolo i valori di f: $f(-2)=-2$, $f(-1)=2$, $f(1)=-2$, $f(3)=18$.

- Ne deduco che:

  $y=-2$ è il valore minimo (di f relativ. a $[-2,3]$);

  $x=-2$ e $x=1$ sono i punti di minimo (....);

  $y=18$ è il valore massimo;

  $x=3$ è il punto di massimo.

<u>Attenzione</u>: la procedura è corretta perché so (dal Teorema di Weierstrass) che i punti di massimo e minimo di f in questo caso esistono.

Ma se non esistono, la procedura può dare risultati sbilenchi, come nel seguente esempio:

<u>Esempio</u> (di procedura applicata male)

Trovare i punti di massimo e minimo di $f(x) := x^3 - 3x$ (senza restrizioni sulla x).

- Risolvo l'equazione $f'(x)=0$ ed ottengo $x=\pm 1$.
- Siccome non ci sono estremi, i punti da considerare sono $-1, +1$.
- Calcolo f in questi punti: $f(-1)=2$; $f(1)=-2$.
- Ne deduco che $y=-2$ è il valore minimo di f e $x=1$ il punto di minimo, mentre $y=2$ è il valore massimo e $x=-1$ il punto di massimo.

!

Ma le cose non stanno così perché $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$ e a $-\infty$ per $x\to-\infty$, e quindi f non ha né massimo né minimo (l'estremo superiore dei valori è $+\infty$, quello inferiore è $-\infty$).

La procedura spiegata sopra va quindi applicata solo quando si sa in partenza che i punti di max (e min) esistono.

Quindi per $f: X \to \mathbb{R}$ continua, con X unione finita di intervalli chiusi.

Vedremo nella prossima lezione una variante di questa procedura che può essere applicata anche ad altri casi.

AM1gest 17/18

Lezione 17, 18/10/17, due ore

Nella lezione precedente ho spiegato una procedura per la ricerca dei punti di min. e max. di una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, che ha un difetto fondamentale: funziona correttamente solo se i punti di min. e max. esistono.
In pratica questo significa che tale procedura può essere applicata solo nel caso in cui f è continua e X è un intervallo chiuso e limitato (o un'unione finita di intervalli chiusi e limitati).

Oggi presento una variante di quella procedura che ha il pregio di funzionare in un gran numero di situazioni.

Seconda procedura per la ricerca di min. e max.

Considero una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ continua, con X unione finita di intervalli, che possono essere limitati o illimitati, aperti, chiusi o semiaperti.

Passo 1 Si prendono i seguenti punti:
(a) gli estremi degli intervalli di cui è composto X, anche se non appartengono a X, anche se $\pm\infty$;

(b) i punti di X dove f' non esiste;
(c) i punti di X dove f' esiste ed è 0.

Passo 2 Si calcolano i valori di f in tutti i punti trovati al passo 1; per quelli che non appartengono a X si calcola il limite di f.

Passo 3 Si confrontano i valori così ottenuti. Se il valore più alto è ottenuto in un punto di X allora quello è il valore massimo, e il punto è un punto di massimo. Se invece il valore più alto è ottenuto in un estremo di X dove f non è definita, allora quello è l'estremo superiore dei valori (e il valore massimo non esiste).
Analogo discorso vale per il valore minimo.

Esempio Trovare i punti di massimo e minimo di $f(x) = x^3 - 3x$ (senza restrizioni su x).
In questo caso il dominio di f è $X = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, e la derivata $f'(x) = 3(x^2-1)$ si annulla in $x = \pm 1$.
I punti da considerare sono quindi: $\pm 1, \pm\infty$.
I valori sono

$$f(1) = -2;$$
$$f(-1) = +2;$$
$$\text{“}f(+\infty)\text{”} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right) = (+\infty)\cdot\left(1-\frac{3}{+\infty}\right) = +\infty;$$
$$\text{“}f(-\infty)\text{”} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right) = (-\infty)\cdot\left(1-\frac{3}{+\infty}\right) = -\infty.$$

Quindi $+\infty$ è l'estremo superiore dei valori e
...

il valore massimo non esiste, e $-\infty$ è l'estremo inferiore dei valori, e il valore minimo non esiste.

<u>Esempio</u> Trovare i punti di massimo e minimo di $f(x) = \arctan(2x^3-3x^2)$ relativamente a $x \geq -1$.

In questo caso il dominio di f è $X = [-1, +\infty)$, e la derivata $f'(x) = \dfrac{6x(x-1)}{1+(2x^3-3x^2)^2}$ si annulla in $x=0$ e $x=1$.

I punti da considerare sono quindi $-1, 0, +1, +\infty$.

I valori sono:

$f(-1) = \arctan(-5) = -\arctan 5 \simeq -1{,}37;$

$f(0) = \arctan(0) = 0;$

$f(1) = \arctan(-1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \simeq -0{,}78;$

$f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(2x^3-3x^2) = \text{"}\arctan(+\infty)\text{"} = \frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57.$

Uso che $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-3x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(2-\frac{3}{x}\right) = (+\infty)\cdot\left(2-\frac{3}{+\infty}\right) = +\infty.$

Pertanto $y = -\arctan 5 \simeq -1{,}37$ è il valore minimo e $x=-1$ è il punto di minimo, mentre $y = \frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ è l'estremo superiore dei valori, non c'è valore massimo e non ci sono punti di massimo.

<u>Esempio</u> Trovare i punti di max. e min. di $f(x) = \dfrac{1}{x^5-5x}$ (senza restrizioni sulla x).

soluzioni di $x^5-5x=0$

In questo caso il dominio di f è $X = \{x \neq 0, \pm\sqrt[4]{5}\}$ $= (-\infty, -\sqrt[4]{5}) \cup (-\sqrt[4]{5}, 0) \cup (0, \sqrt[4]{5}) \cup (\sqrt[4]{5}, +\infty)$.

La derivata $f'(x) = \dfrac{5(1-x^4)}{(x^5-5x)^2}$ si annulla in ± 1.

I punti da considerare sono quindi $\pm\infty, 0, \pm\sqrt[4]{5}, \pm 1$.

Calcolo i valori:

$\text{"}f(+\infty)\text{"} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^5-5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^5\left(1-\frac{5}{x^4}\right)} = \dfrac{1}{(+\infty)\left(1-\frac{5}{+\infty}\right)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0;$

$\text{"}f(-\infty)\text{"} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^5-5x} = \dots = 0;$

$\text{"}f(0^-)\text{"} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^5-5x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x(x^4-5)} = \dfrac{1}{0^-\cdot(-5)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

0 come estremo <u>destro</u> dell'intervallo $(-\sqrt[4]{5}, 0)$; si calcola quindi il limite <u>sinistro</u> di $f(x)$ per $x\to 0$

$\text{"}f(0^+)\text{"} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^5-5x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x(x^4-5)} = \dfrac{1}{0^+\cdot(-5)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

0 come estremo <u>sinistro</u> di $(0, \sqrt[4]{5})$; si calcola quindi il limite <u>destro</u> di $f(x)$ per $x\to 0$.

! E qui mi fermo con i calcoli: siccome $f(0^-) = +\infty$ e $f(0^+) = -\infty$, so già che $+\infty$ è l'estremo superiore dei valori, $-\infty$ l'estremo inferiore, e non ci sono quindi né punti di max., né di min.

<u>Osservazioni sulla procedura spiegata sopra</u>

- Se x_0 è l'estremo <u>destro</u> di un intervallo (aperto) che compone il dominio X di f, allora tra i valori da considerare va messo il limite <u>sinistro</u> di $f(x)$ per $x \to x_0$.
  Se invece x_0 è l'estremo <u>sinistro</u> di un intervallo che compone X, allora tra i valori da considerare va messo il limite <u>destro</u> di $f(x)$ per $x \to 0$.

Se infine x_0 è l'estremo destro di un intervallo e l'estremo sinistro di un altro, allora tra i valori vanno considerati sia il limite destro che quello sinistro (come nell'ultimo esempio).

! | Il presupposto di questa procedura è, implicitamente, che tali limiti esistano....

- La dimostrazione che questa procedura funziona correttamente, cioè individua **effettivamente** i valori di max. e min. (e i punti di massimo e minimo) richiede un'opportuna variante del teorema di Weierstrass, che non enuncio neanche...

- Un metodo alternativo per individuare i punti di min. e max. (e capire se esistono) consiste nello studiare la monotonia della funzione (cioè vedere "dove sale e dove scende") e disegnarne il grafico.

  Questo approccio, che presenterò in seguito, è più sicuro, perché si basa sulla visualizzazione del grafico, mentre la procedura descritta sopra è un po' "alla cieca".

  Tuttavia la procedura "alla cieca" richiede meno lavoro, e soprattutto può essere estesa alle funzioni di più variabili, mentre non è possibile visualizzare il grafico di funzioni di più di due variabili (e anche per le funzioni di due variabili non è cosa facile).

Cominciamo ora un nuovo argomento.

Funzioni crescenti e decrescenti

<u>Definizione</u> Data una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$, diciamo che f è <u>crescente</u> se "aumentando il valore della x aumenta il valore di $f(x)$", vale a dire che

(*) per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) \leq f(x_2)$.

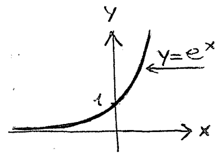
Analogamente dico che f è <u>decrescente</u> se "aumentando il valore della x cala quello di $f(x)$", cioè

(**) per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) \geq f(x_2)$.

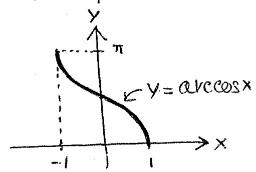
Dato inoltre $X' \subset X$, diciamo che f è <u>crescente su X'</u> (o relativamente a X') se (*) vale solo per ogni $x_1, x_2 \in X'$, e diciamo che f è <u>decrescente su X'</u> se (**) vale solo per $x_1, x_2 \in X'$.

<u>Esempi</u>

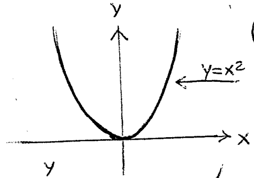
(1) La funzione e^x è crescente (su tutto l'insieme di definiz. $\mathbb{R}$)



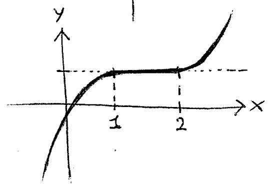
(2) La funzione $\arccos x$ è decrescente (su tutto l'insieme di def. $[-1,1]$)



(3) La funzione x^2 è crescente su $[0,+\infty)$, decrescente $(-\infty,0]$ (ma su $\mathbb{R}$ non è né cresc. né decr.)



(4) La funzione nel disegno è crescente!



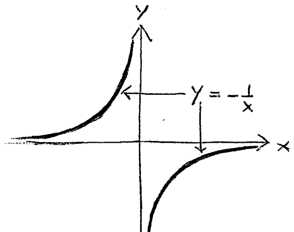
Attenzione: che questa funzione sia crescente nonostante che un pezzo del grafico sia orizzontale è legato al fatto che nella (*) ho scritto $f(x_1) \leq f(x_2)$ e non $f(x_1) < f(x_2)$. In effetti questo significa che f è crescente "se aumentando il valore di x il valore di f(x) aumenta o resta uguale".

In particolare le funzioni costanti (il cui grafico è una retta orizzontale) sono sia crescenti che decrescenti)

(5) La funzione $-\frac{1}{x}$ è crescente sia su $(-\infty,0)$ che su $(0,+\infty)$

! ma non è crescente su tutto l'insieme di definizione, cioè su $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Infatti preso $x_1=-1$ e $x_2=1$ ho che $x_1 < x_2$ ma $f(x_1)=1 > f(x_2)=-1$.



Attenzione: se questo fatto vi pare strano, forse state confondendo il concetto di funzione crescente con quello di funzione con pendenza (della retta tangente) sempre positiva. Sono concetti collegati ma non equivalenti.

Definizione Data f come prima, diciamo che f è **strettamente crescente** se

per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$

Analogamente si definisce il concetto di funzione **strettamente decrescente**, e di funzione **strettam. crescente / decrescente su un sottoinsieme** del dominio. (Queste definizioni scrivetele per esercizio.)

Nota In tutti gli esempi precedenti tranne il (4) dove c'è scritto "crescente" si può mettere in realtà "strettamente crescente" e dove c'è scritto "decrescente" si può mettere "strettam. decrescente".
Nell'esempio (4) la funzione è strettamente crescente su $(-\infty,1]$ e su $[2,+\infty)$ ma non su tutto $\mathbb{R}$.
(Domanda: è strettamente crescente su $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$?)

Il teorema principale a proposito delle funzioni crescenti o decrescenti (anche dette funzioni monotóne) è il seguente:

accento sull'ultima "o"

Teorema
Considero una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ derivabile, con X intervallo (aperto o chiuso, limitato o illimitato).

(a) f è crescente se e solo se $f' \geq 0$ su X;
(b) f è decrescente se e solo se $f' \leq 0$ su X;
(c) f è strettamente crescente se $f' > 0$ su X;
(d) f è strettamente decrescente se $f' < 0$ su X.

Osservazioni

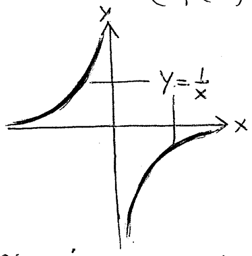
- Graficamente, gli enunciati di questo teorema sono quasi evidenti. Come già detto, i disegni danno delle indicazioni molto forti ma non delle vere dimostrazioni perché non c'è alcuna garanzia che nei disegni siano inclusi tutti i casi possibili.
- L'enunciato (a) dice che essere crescente è equivalente ad avere derivata positiva, cioè

$$\boxed{f' \geq 0} \iff \boxed{f \text{ crescente}}$$

In pratica, l'implicazione che usiamo di più è $\Rightarrow$. Cioè usiamo il fatto che la derivata è positiva per dire che f è crescente.

Attenzione per questa implicazione è essenziale che il dominio di f sia un intervallo.

! In effetti la funzione $f(x) := -\frac{1}{x}$, definita su $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, ha derivata positiva $\left(f'(x) = \frac{1}{x^2}\right)$ ma non è crescente $(f(-1) = 1 > f(1) = -1)$.



(Invece l'implicazione opposta è vera anche se X non è un intervallo, come vedremo.)

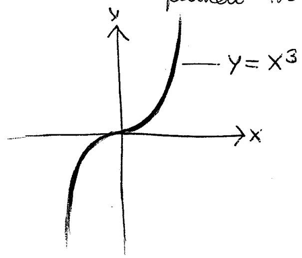
- Un discorso analogo vale per l'enunciato (b):

$$\boxed{f' \leq 0} \iff \boxed{f \text{ decrescente}}$$

L'implicazione più rilevante è $\Rightarrow$, e per questa è essenziale che il dominio di f sia un intervallo. L'implicazione $\Leftarrow$ invece non richiede che il dominio sia un intervallo.

- L'enunciato dice che $\boxed{f' > 0} \Rightarrow \boxed{f \text{ strettam. crescente}}$

Attenzione: l'implicazione opposta ($\Leftarrow$) non è vera. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente, ma la derivata $f'(x) = 3x^2$ si annulla in 0 e quindi non è sempre >0.



La dimostrazione "rigorosa" del Teorema precedente richiede un po' di lavoro preparatorio, ed è rimandata alla prossima lezione.

AM1 gest 17/18

Lezione 18, 13/10/17 ; due ore

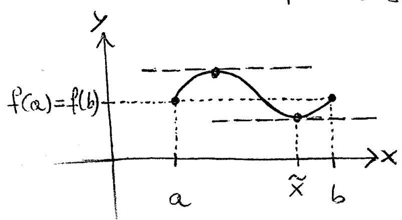
Inizio questa lezione dimostrando il teorema enunciato nella lezione precedente.

Per una volta darò una dimostrazione "da libro di analisi" (o quasi).

Questa dimostrazione richiede alcuni risultati preliminari il cui significato non è del tutto trasparente, purtroppo. In effetti questi risultati si usano (quasi) esclusivamente per fare dimostrazioni.

<u>Proposizione</u> (Teorema di Rolle)
Considero una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>derivabile</u>. Se $f(a)=f(b)$ esiste allora $\tilde{x}$ con $a<\tilde{x}<b$ tale che $f'(\tilde{x})=0$.

Il significato geometrico è chiaro: se $f(a)=f(b)$ allora esiste un punto compreso tra a e b dove la retta tangente è orizzontale (e in effetti di punti simili ce ne può essere più d'uno).



<u>Dimostrazione</u> Siccome f è derivabile è anche continua, e siccome il dominio $[a,b]$ è un intervallo <u>chiuso</u> e <u>limitato</u>, per il teorema di Weierstrass f ammette almeno un punto di minimo x_m e almeno un punto di massimo x_M.

Ci sono ora due possibilità.

(a) almeno uno tra x_m e x_M è interno ad $[a,b]$, e allora in tal punto la derivata di f è 0 (lo abbiamo fatto vedere due lezioni fa...) e prendo come $\tilde{x}$ proprio questo punto;

(b) sia x_m che x_M sono uguali ad a o b. Siccome $f(a)=f(b)$, abbiamo allora che
$$\underset{\text{val. min}}{f(x_m)} = \underset{\text{val. max}}{f(x_M)}$$
e questo significa che f è costante, e quindi ha derivata 0 in tutti i punti di $[a,b]$; prendo $\tilde{x}$ uguale a uno qualunque di questi punti.

$\square$

Proposizione (Teorema di Cauchy)

Considero due funzioni $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili. Se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ allora esiste $\tilde{x}$ con $a < \tilde{x} < b$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}$$

(L'ipotesi che $g' \neq 0$ garantisce che $g(b) \neq g(a)$ e quindi il rapporto a sinistra dell'uguale ha senso. Per farlo vedere si usa il Teorema di Rolle)

Dimostrazione Pongo

$$m := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \text{e} \quad F(x) := f(x) - m \cdot g(x).$$

Osservo che $F(a) = F(b)$. Infatti

$$F(b) - F(a) = \big(f(b) - m\cdot g(b)\big) - \big(f(a) - m \cdot g(a)\big)$$

$$= f(b) - f(a) - m \cdot \big(g(b) - g(a)\big)$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}\cancel{\big(g(b)-g(a)\big)}$$

$$= 0$$

Per il Teorema di Rolle esiste allora $\tilde{x}$ con $a < \tilde{x} < b$ t.c. $F'(\tilde{x}) = 0$. Siccome $F' = f' + m g'$, ottengo

$$0 = f'(\tilde{x}) - m\, g'(\tilde{x})$$

e quindi $f'(\tilde{x}) = m g'(\tilde{x})$, $\dfrac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = m = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\square$

(Domanda: nella dimostrazione precedente dove abbiamo usato l'ipotesi che $g'(x) \neq 0$?)

Concludo con un corollario del Teorema di Cauchy che è in effetti un caso particolare, ma significativo.

Corollario (Teorema di Lagrange)

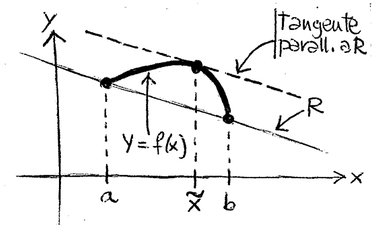
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, esiste $\tilde{x}$ con $a < \tilde{x} < b$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\tilde{x}).$$

Dimostrazione Applicare il Teorema di Cauchy con $g(x) = x$.

Osserviamo ora che $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è la pendenza della retta R che passa per i punti del grafico di f di ascissa a e b, e quindi il Teorema di L. dice che tale retta è parallela a una retta tangente del grafico

cioè ha la stessa pendenza



Posso ora dimostrare il teorema enunciato nella lezione precedente.
In effetti dimostro solo alcuni enunciati; gli altri sono lasciati per esercizio.

Nel seguito $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile.

Dimostrazione che f crescente $\Rightarrow f' \geq 0$

Preso $h > 0$ (tale che $x + h \in X$) ho che
$$f(x+h) \geq f(x)$$
(perché f è crescente) e quindi
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$
e pertanto, passando al limite per $h \to 0^+$,
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$
e siccome questo limite è la derivata ottengo
$$f'(x) \geq 0.$$
$\square$

L'idea di questa dimostrazione è che il fatto che f crescente significa che i rapporti incrementali sono positivi, e passando al limite si deduce che la derivata deve essere positiva.

Per dimostrare l'implicazione opposta partiamo dal fatto che la derivata è positiva e vogliamo dedurne che i rapporti incrementali sono positivi e per farlo usiamo il Teorema di Lagrange.

Dimostrazione che $f' \geq 0 \Rightarrow f$ crescente

In questa dimostrazione è essenziale che il dominio X di f sia un intervallo.

Prendiamo $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Vogliamo dimostrare che $f(x_1) \leq f(x_2)$, cioè che $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$.

Per farlo applico il Teorema di Lagrange con x_1 e x_2 al posto di a e b, e trovo $\tilde{x}$ con $x_1 < \tilde{x} < x_2$ tale che
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\tilde{x})$$
e ora uso l'ipotesi che f' è positiva per concludere.

$\square$

Domanda: dove ho usato l'ipotesi che X sia un intervallo?

! Osservazione: modificando appena quest'ultima dimostrazione si ottiene che $f' > 0 \Rightarrow f$ strett. crescente.

Esercizio

Dati a,b numeri reali, considero la funzione

$$f(x) := \begin{cases} a+b(x+1)^2 & \text{per } x<0 \\ e^x & \text{per } x\geq 0 \end{cases}$$

Per quali a,b questa funzione è continua?
E per quali è derivabile?

Osservo innanzitutto che il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.
Inoltre in ogni punto $x_0\neq 0$ la funzione è sia continua che derivabile, e la ragione è che per i punti x vicini ad x_0 la funzione $f(x)$ è definita da una sola delle due formule sopra, e queste formule danno funzioni continue e derivabili.

Il discorso cambia per $x_0=0$. In questo punto e a destra, $f(x)=e^x$ ma a sinistra $f(x)=a+b(x+1)^2$.
Pertanto $f(0)=e^0=1$, e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$,
mentre $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a+b(x+1)^2 = a+b$.
Dunque f è continua in 0 se e solo se $a+b=1$.

Passiamo alla derivabilità. Dobbiamo sempre supporre che f sia continua (in 0) e quindi che $a+b=1$.
In questo caso la derivata destra di f in 0 è la derivata di e^x, cioè $f'_+(0) = (e^x)'_{(\text{con } x=0)} = e^0 = 1$.
Invece la derivata sinistra è la derivata di $a+b(x+1)^2$, cioè $f'_-(0) = (a+b(x+1)^2)'_{(\text{con } x=0)} = 2b(x+1)_{(\text{con } x=0)} = 2b$.

In particolare f è derivabile in 0 se le due derivate (destra e sinistra) coincidono, cioè se $2b=1$ (oltre alla condizione $a+b=1$).
Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2b=1 \\ a+b=1 \end{cases}$ ottengo $a=b=\frac{1}{2}$.

Esercizio

Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{x^5-5x}$.

Si tratta di un esercizio molto standard (e già visto ...)

Comincio dall'insieme di definizione: si tratta dell'insieme degli x t.c. $x^5-5x\neq 0$, e siccome $x^5-5x = x(x^4-5)$ ciò vuol dire $x\neq 0$, $x\neq \pm\sqrt[4]{5}$.

Usando quanto appena fatto possiamo anche studiare il segno di $f(x) = \dfrac{1}{x(x^4-5)}$

		$-\sqrt[4]{5}$		0		$\sqrt[4]{5}$	
segno x	$-$		$-$		$+$		$+$
segno x^4-5	$+$		$-$		$-$		$+$
segno $f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Calcolo quindi i limiti significativi di f

$$f(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x^4-5)} = \frac{1}{(+\infty)(+\infty)} = 0$$

$$f(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} f(x) = \dots = 0$$

$$f(0^+) := \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x^4-5)} = \frac{1}{0^+\cdot(-5)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$f(0^-) = \dots = +\infty$$

$$f((\sqrt[4]{5})^+) = \lim_{x\to(\sqrt[4]{5})^+} \frac{1}{x(x^4-5)} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}\cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

9

$$f((\sqrt[4]{5})^-) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$f((-\sqrt[4]{5})^+) = \frac{1}{(-\sqrt[4]{5})\cdot 0^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f((-\sqrt[4]{5})^-) = \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

Studio infine il segno della derivata

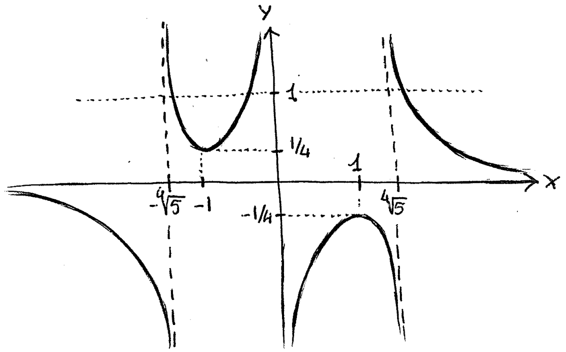
$$f'(x) = \frac{5(1-x^4)}{(x^5-5x)^2}$$

per capire dove f cresce e dove decresce:

	↘		↗		↘
segno $f'(x)$ = segno $(1-x^4)$	$-$	-1	$+$	1	$-$

$\Rightarrow$ 1 = punto di max.loc., $f(1) = -1/4$; -1 = punto di min. loc., $f(-1) = 1/4$

Possiamo ora disegnare il grafico di f



(Osservare che $f(x)$ è dispari risparmia un po' di calcoli)

Esercizio

Presa f come nell'esercizio precedente, quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x)=1$?

Dal disegno sopra si vede subito che la risposta è 3.
(Notate che l'eq. $f(x)=1$ non è risolubile esplicitamente.)

10

Esercizio

Dire se la disequazione $e^x \geq \frac{5}{2}x$ vale per ogni x oppure no.

Per risolvere questo problema lo riduco al calcolo di un valore minimo

$$e^x \geq \frac{5}{2}x \quad \text{per ogni } x$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{e^x - \frac{5}{2}x}_{f(x)} \geq 0 \quad \text{per ogni } x$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geq 0$$

! Si tratta quindi di calcolare il valore minimo m di $f(x) := e^x - \frac{5}{2}x$ (e se il valore minimo non esiste va sostituito con l'estremo inferiore dei valori di $f(x)$....).
Se $m \geq 0$ allora la disuguaglianza di partenza è vera per ogni x, sennò no.

Siccome l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$, confronto i valori di f in $\pm\infty$ (gli "estremi" di $\mathbb{R}$) e nel punto in cui si annulla $f'(x) = e^x - \frac{5}{2}$, cioè $\log(5/2)$.

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} e^x - \frac{5}{2}x = +\infty$$

Questo non è ovvio, datemelo buono per ora...

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \frac{5}{2}x = 0-(-\infty) = +\infty$$

$$f(\log(5/2)) = e^{\log(5/2)} - \frac{5}{2}\log\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(1-\log\left(\frac{5}{2}\right)\right).$$

Pertanto $x = \log(5/2)$ è il punto di minimo di f e il valore minimo è $m = \frac{5}{2}\left(1 - \log\frac{5}{2}\right)$.

Siccome $m > 0$ (perchè $\frac{5}{2} < e$ e quindi $\log(\frac{5}{2}) < \log e = 1$) ho che la disequazione di partenza è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazioni sull' ultimo esercizio

- Una soluzione puramente grafica di questo esercizio, affidata cioè al disegno dei grafici $y = e^x$ e $y = \frac{5}{2}x$ non è affidabile: i due grafici sono troppo vicini per poterne dedurre con certezza che il primo sta sopra al secondo (come in effetti è).
- Questo problema può essere ricondotto al calcolo di un minimo in più di un modo.
  Per esempio

$$e^x \geq \frac{5}{2}x \quad \text{per ogni } x$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x \geq \frac{5}{2}x \quad \text{per ogni } x \leq 0 \quad \text{(ovviamente vera!)}$$

$$\&$$

$$e^x \geq \frac{5}{2}x \quad \text{per ogni } x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{5}{2} \quad \text{per ogni } x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{x>0} \frac{e^x}{x} \geq \frac{5}{2}.$$

Quindi se $m := \min_{x>0} \frac{e^x}{x}$ è $\geq \frac{5}{2}$ la disuguaglianza di partenza è sempre vera, sennò no.

Per calcolare il valore minimo di $f(x) := \frac{e^x}{x}$ per $x > 0$ confronto i valori di $f(x)$ in $0^+, +\infty$ (gli estremi della semiretta $\{x>0\}$) e nei punti in cui si annulla la derivata $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, cioè $x = 1$:

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{(datemelo per buono)}$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(1) = e \quad \longleftarrow \text{valore minimo!}$$

Quindi $m := \min_{x>0} \frac{e^x}{x} = \min_{x>0} f(x) = e$, e siccome $e > \frac{5}{2}$, la disuguaglianza di partenza vale per ogni x.

AM1gest 17/18

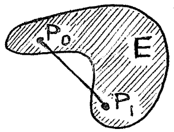
Lezione 19, 20/10/17, due ore

Funzioni convesse e concave

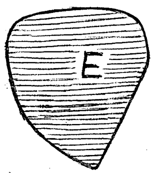
Comincio con la definizione di insieme convesso nel piano.

Definizione di insieme convesso Un insieme E nel piano si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $P_0, P_1 \in E$, il segmento che li congiunge è contenuto in E.

Per esempio, l'insieme accanto non è convesso, come si vede dal disegno.



Invece l'insieme in questo disegno è convesso, per quanto si può vedere scegliendo un po' di coppie di punti $x_0, x_1, \ldots$



(in effetti per esserne sicuri bisognerebbe fare la prova per tutte le possibile coppie di punti....)

Voglio ora esprimere il concetto di convessità di un insieme in forma più analitica, cioè usando delle formule....

Per farlo mi serve il seguente fatto.

Parametrizzazione dei punti di un segmento

Dati due punti del piano, $P_0 = (x_0; y_0)$ e $P_1 = (x_1; y_1)$, voglio trovare una formula, dipendente da un parametro t che varia tra 0 e 1 per esprimere tutti i punti P_t **del segmento di** estremi P_0 e P_1.

Immagino dunque che P_t sia la posizione al tempo t di un punto che si muove a velocità costante (e quindi in linea retta), che al tempo $t=0$ è nella posizione P_0 e al tempo $t=1$ è nella posizione P_1.

Allora la velocità è data dal vettore

$$\vec{v} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_1 - P_0}{1-0} = P_1 - P_0 = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$$

e la posizione è data da, per $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned} P_t = P_0 + \vec{v}\, t &= P_0 + t(P_1 - P_0) \\ &= (1-t)P_0 + tP_1 \\ &= ((1-t)x_0 + tx_1 ; (1-t)y_0 + ty_1). \end{aligned}$$

Caratterizzazione analitica della convessità (traduzione in formule della definizione precedente).

Un insieme E nel piano è convesso se e solo se $\forall P_0, P_1 \in E$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha che $P_t := (1-t)P_0 + tP_1$ appartiene ad E.

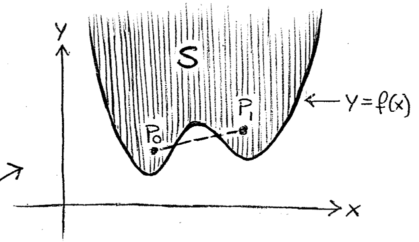
Definizione di funzione convessa

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ con X intervallo (aperto, chiuso, limitato oppure no...) si dice convessa se il sopragrafico, cioè l'insieme

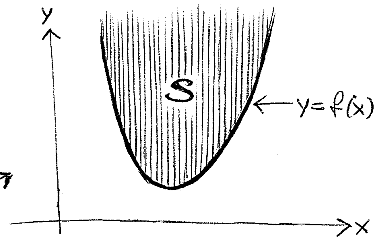
$$S := \{(x,y) \mid x \in X \text{ e } y \geq f(x)\},$$

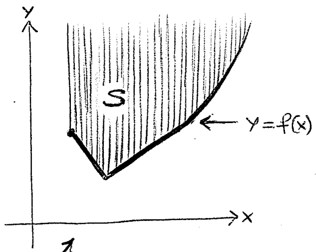
è convesso.

insieme dei punti che stanno sopra il grafico $y = f(x)$



Esempio di funzione non convessa.





Esempi di funzioni convesse.

Osservazioni

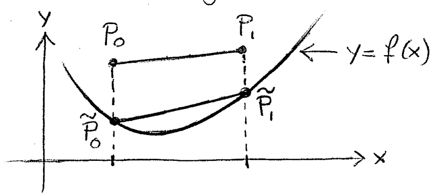
- La definizione di insieme convesso "funziona" anche per insiemi nello spazio, e più in generale per insiemi in uno spazio vettoriale.
- Non esiste una nozione di insieme concavo.
- Nella definizione di funzione convessa richiedo che il dominio X sia un intervallo. Si può

però dimostrare che questa richiesta è ridondante, se infatti f è convessa, necessariamente il dominio di f è un intervallo.

- Per verificare che una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ è convessa bisogna far vedere che **per ogni coppia di punti** P_0, P_1 nel sopragrafico, allora il segmento che li congiunge è contenuto nel sopragrafico (cioè sta sopra il grafico).

  In realtà basta verificare questa proprietà per ogni coppia di punti nel grafico: infatti se è vera in questo caso allora è automaticamente vera per tutte le coppie di punti nel sopragrafico.

  Presi infatti P_0 e P_1 nel sopragrafico, posso trovare due punti del grafico, $\tilde{P}_0$ e $\tilde{P}_1$, che stanno sotto, e se per ipotesi il segmento che congiunge $\tilde{P}_0$ e $\tilde{P}_1$ sta sopra il grafico, allora lo stesso vale per il segmento che congiunge P_0 e P_1



- Dati due punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ del grafico cosa vuol dire che il segmento che li congiunge sta sopra il grafico di f?

  Vuol dire che i punti del segmento in questione $P_t = (x_t, y_t)$ soddisfano

$$f(x_t) \leq y_t .$$

Ricordando che

$$P_t = \Big(\underbrace{(1-t)x_0+tx_1}_{x_t}\,;\,\underbrace{(1-t)f(x_0)+tf(x_1)}_{y_t}\Big)$$

otteniamo la seguente

Caratterizzazione analitica

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ con X intervallo è convessa se e solo se $\forall\, x_0, x_1 \in X$ e $\forall t \in [0,1]$ vale

$$f((1-t)x_0+tx_1) \leq (1-t)f(x_0)+tf(x_1).$$

Definizione di funzione concava

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ con X intervallo si dice concava se il sottografico, vale a dire l'insieme

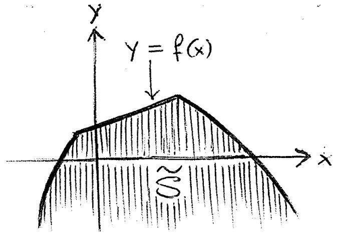
$$\tilde{S} := \{(x,y) \mid x \in X \text{ e } y \leq f(x)\}$$

è convesso.

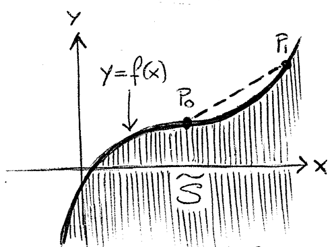
Questo è equivalente a dire che $-f$ è convessa.

Vale inoltre la seguente caratterizzazione: una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ con X intervallo è concava se per ogni $x_0, x_1 \in X$ il segmento che congiunge i punti del grafico $P_0 := (x_0, f(x_0))$ e $P_1 := (x_1, f(x_1))$ sta sotto al grafico, cioè per ogni $t \in [0,1]$

$$f((1-t)x_0+tx_1) \geq (1-t)f(x_0)+tf(x_1).$$



esempio di funzione concava

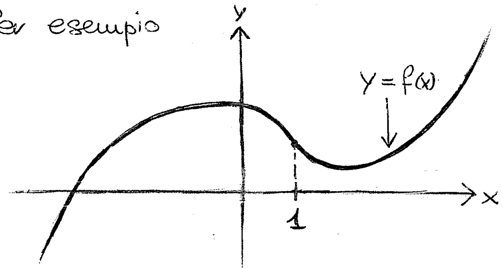


esempio di funzione non concava

Osservazioni

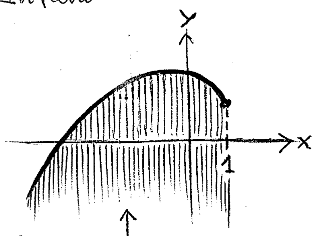
- Data $f: X \to \mathbb{R}$ e X' intervallo contenuto in X, dico che f è convessa (concava) su X' se la restrizione di f a X' è convessa (concava).

Per esempio

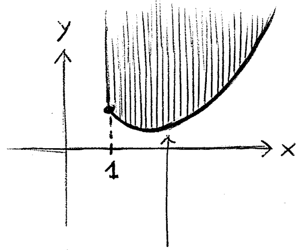


f è concava su $(-\infty, 1]$ convessa su $[1, +\infty)$.

Infatti

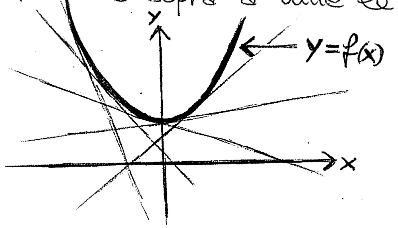


il sottografico di f ristretta a $x \leq 1$ è convesso.



il sopragrafico di f ristretta a $x \geq 1$ è convesso.

- Le funzioni convesse sono caratterizzate anche da un'altra proprietà (che però non dimostro): il grafico sta sopra a tutte le rette tangenti



La caratterizzazione più importante delle funzioni convesse (e delle funzioni concave) si basa sul segno della derivata seconda, vale a dire la derivata della derivata.

Notazione

Data una funzione f (di una variabile) si chiama <u>derivata seconda</u> di f la derivata della derivata, e la si indica con il simbolo f''.
Analogamente la <u>derivata terza</u>, indicata con f''', è la derivata della derivata seconda, e così via.
La <u>derivata d-esima</u> si indica spesso con $f^{(d)}$ (le parentesi servono a distinguerla dalla potenza di f).

Teorema

cioè f è derivabile su X) e la derivata è a sua volta derivabile

Dati X intervallo e $f: X \to \mathbb{R}$ funzione derivabile due volte, si ha che:

$$f \text{ convessa} \iff f' \text{ crescente} \iff f'' \geq 0.$$

(E analogamente: f concava $\iff f'$ decrescente $\iff f'' \leq 0$.)

Osservazioni

- In particolare: f convessa $\iff f'' \geq 0$ (e similmente f concava $\iff f'' \leq 0$). L'implicazione che si usa di più è probabilmente che $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convessa.
- L'equivalenza f' crescente $\iff f'' \geq 0$ segue da quanto visto nelle lezioni precedenti!

- L'unica equivalenza da dimostrare è che f convessa $\iff f'$ crescente.
  Notare che questa equivalenza vale anche se f è solo derivabile, non serve che sia derivabile due volte.

Dimostrazione (del teorema)

Quella che segue è in effetti solo una traccia della dimostrazione, basata per di più su disegni. La dimostrazione completamente analitica è più complicata.

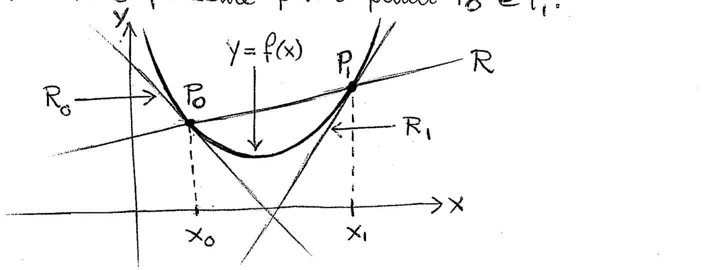
Dimostrerò solo l'equivalenza

$$f \text{ convessa} \iff f' \text{ decrescente}$$

Cominciamo dall'implicazione $\Rightarrow$

Suppongo quindi che f sia convessa e faccio vedere che presi $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 < x_1$ si ha $f'(x_0) \leq f'(x_1)$.
Per farlo, considero le seguenti tre rette:

R_0 retta tangente al grafico nel punto $P_0 := (x_0, f(x_0))$
R_1 " " " " " " $P_1 := (x_1, f(x_1))$
R retta passante per i punti P_0 e P_1.



Indico con m_0, m_1 e m le pendenze di R_0, R_1, R.

Dal disegno è chiaro che $\underset{\substack{\parallel \\ f'(x_0)}}{m_0} \le m$ e $m \le \underset{\substack{\parallel \\ f'(x_1)}}{m_1}$.
Quindi $f'(x_0) \le f'(x_1)$.

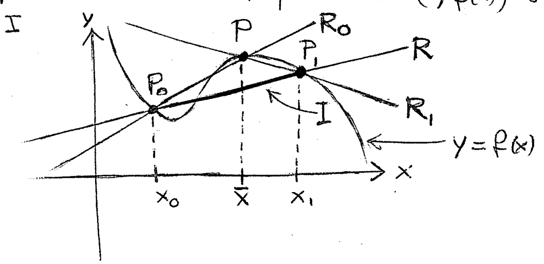
Queste due disuguaglianze possono anche essere dimostrate in maniera analitica, cioè senza ricorrere ad alcun disegno.

Per esempio, preso h in modo che $x_0 \le x_0+h \le x_1$ si ha che, per la convessità di f, il punto del grafico $P_h = (x_0+h, f(x_0+h))$ sta sotto la retta R. Usando questo fatto si ottiene che la retta R_h passante per P_0 e P_h ha pendenza $m_h \le m$. Passando al limite per $h \to 0^+$ si ottiene $m_0 \le m$....

<u>Passiamo all' implicazione $\Leftarrow$</u>

Conviene dimostrarla per assurdo. Suppongo quindi che f non sia convessa e faccio vedere che allora f' non è crescente.

Per la precisione, suppongo di avere due punti del grafico, $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ per cui il segmento I che li congiunge non sta sopra il grafico. Questo significa che esiste $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x_1 per cui $P := (\bar{x}, f(\bar{x}))$ sta sopra I



Considero ora le seguenti rette ($\longrightarrow$ disegno sopra)

R retta passante per P_0 e P_1 (pendenza m)
R_0 " " " " P_0 e P (" " m_0)
R_1 " " " " P e P_1 (" " m_1)

Chiaramente, siccome P sta sopra a R si ha che $m_0 > m$ e $m > m_1$. In particolare

$$m_0 > m_1$$

Ora $m_0 = \dfrac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0}$ e quindi per il Teorema di Lagrange esiste $\tilde{x}_0$ con $x_0 < \tilde{x}_0 < \bar{x}$ tale che

$$m_0 = \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0} = f'(\tilde{x}_0).$$

Per la stessa ragione, esiste $\tilde{x}_1$ con $\bar{x} < \tilde{x}_1 < x_1$ t.c.

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(\bar{x})}{x_1 - \bar{x}} = f'(\tilde{x}_1).$$

Ma allora $f'(\tilde{x}_0) > f'(\tilde{x}_1)$ mentre $\tilde{x}_0 < \tilde{x}_1$; e questo dimostra che f' non è crescente.

$\square$