ESERCIZI PER IL RICEVIMENTO DEL 28.10.2014

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

   a) $\sqrt{\log(x^2-1)+1}$

   b) $\arcsin(x^2-3)+\log x$

2. Determinare l'immagine di

   a) $y = e^{-x}-3$

   b) $y = 4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

3. Trovare un $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui vale l'identità

   a) $\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = \cos(x+\alpha) \quad \forall x$

   b) $\cos(x+\pi) = \sin(x-\alpha) \quad \forall x$

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di

   a) $f(x) = \exp(2x^3) - \exp(3x^2)$

   b) $f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

5. Calcolare i seguenti limiti

   a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x^2)}{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-3}-x$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+x)^3$

   f) $\lim\limits_{x\to-\infty} 8x + x\sin^2 x$

6. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

   a) $\log_3\sqrt{x+2}$ b) $\dfrac{x^2-1}{3x^3+2}$ c) $\arcsin(3x^2+4)$

   d) $\dfrac{3^{x-1}}{9x-3}$ e) $\sqrt[3]{x^5-2x^3+x}$ f) $\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}$

7. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che

a) $\arctan(2x) \le y \le 2\log(x+1)$

b) $e^{-2x} \le y \le \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2$

8. Risolvere graficamente le disequazioni

a) $\sin x - 1 \le e^{x}+3$

b) $\frac{1}{x} \le \log(x+2)$

9. Disegnare l'insieme dei punti A tale che

$0 \le x \wedge |y| \le 1 \wedge x+y \le 1$

10. Disegnare

a) $y = \log(1+|x|)$

b) $y = \log|1+x|$

c) $y = 1+|\log x|$

d) $y = 1+\log|x|$

ESERCIZI PER IL RICEVIMENTO DEL 4.11.14

1. Determinare l'insieme di definizione di

a) $\sqrt{\dfrac{(x-2)(x+3)}{\log(x+1)}}$

b) $\arctan(x-1) + e^{\frac{x}{x-1}}$

2. Determinare l'immagine di

a) $y = 2\arctan(2x+\pi)$

b) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

3. Trovare un α tale che le seguenti identità valgono $\forall x$

a) $\sin(x-\pi) = \cos(\alpha - x)$

b) $\tan(x+\pi) = \cot(x-\alpha)$

4. Risolvere i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(\sin x + 3)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\sqrt{1+2\log^2 x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cdot\cos x$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{8x^{14}-3x^5+x^3}}{5x^4-x^2+x}$

5. Calcolare le derivate di:

a) $\dfrac{4^{x+2}}{2^{3x+1}}$

b) $\log(\log(x^2))$

c) $\dfrac{e^{x}+6x}{x-x^2}$

d) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot x^3$

e) $\cos(2x)+3x^2$

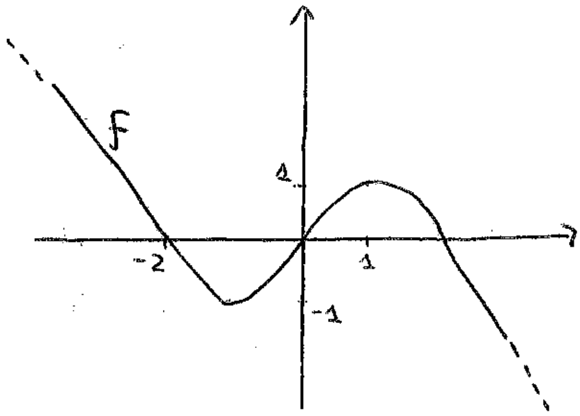
f) $2x^{(\sin x)}$

6. Risolvere graficamente le disequazioni

a) $x^2 \leq \cos x + 3$

b) $e^{-x} - 2 \leq -e^{-x}$

7. Data f come nel disegno disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che



a) $y \leq f(x)$

b) $y \geq f(x)$

c) $y \leq f(x) \ \vee \ y \leq -f(x)$

d) $y \geq f(x) \ \wedge \ y \geq -f(x)$

e) $y \leq |f(x)|$

f) $y \leq f(|x|)$

g) $y \geq 2f(x)$

h) $y \geq f(2x)$

---

8. Studiare le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \sqrt{x} \log x$

b) $f(x) = \dfrac{6x^2 - 3}{x - |x-2| + 1}$

9. Si considerino $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$ con $a \in \mathbb{R}$. Si discuta al variare di a l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica per quale valore di a i grafici di f e g sono tangenti.

10. Dato $a > 0$ si consideri $f(x) = (x^2 + a)^3$. Dimostrare che la funzione $f(x)$ e' convessa su tutto $\mathbb{R}$

11. Dare un esempio di funzione con un massimo relativo in $(1,3)$ ed un minimo relativo in $(-1,2)$

12. Trovare l'area del triangolo che ha come vertici i punti di interazione con l'asse x della funzione $f(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$ e il terzo vertice nel suo punto di minimo relativo

ESERCIZI PER IL RICEVIMENTO DI MARTEDI' 11.11.14

1. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di:

   a) $f(x) = \exp(2x^3) - \exp(3x^2)$

   b) $f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$

2. Risolvere i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log \sin x}{\log x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\tan x - x}$$

3. Scrivere un intervallo in cui è possibile definire l'inversa della funzione $f(x) = 4x^2 - 4$ e calcolarla.

4. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni di
$$\frac{x}{x + \log(x+1)} = \alpha x$$

5. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^5 - ax^3 + 9x$ e per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \frac{5x^3}{3} - \frac{3a}{2}x^2 + 9x$ è crescente?
   Disegnare f e g per $a = -5$.

6. Data la funzione $f(x) = x^5(x-9)$, per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con l'asse delle x, quando esiste.
   Calcolare $g(a)$ $\forall a > 0$. Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

7. Data $a > 0$ consideriamo le funzioni $f(x) = \dfrac{ax}{x^3+1}$ e $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
   Trovare le parti principali di $f(x)$, $g(x)$, $f(x) - g(x)$ per $x \to +\infty$

ESEMPIO COMPITINO PARTE 1, 1 ORA DI TEMPO

1. Determinare il dominio di: $y = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{\log|x|}}$

2. Risolvere le derivate:

a) $y = \sqrt{(\log(3x-4))^2}$ b) $y = \sqrt[5]{\sin^3 x}$

c) $y = \frac{-1}{x^2+4x+6}$

3. Calcolare i limiti: a) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\log(1+5x^2) - 2x^2}$

b) $\lim_{x \to 0^+} x^{\log x}$ c) $\lim_{x \to 1} \frac{e^x - 1}{(x-1)^2}$

4. Trovare i valori a e b per cui $f(x) = a \sin x + b \cos x$ si può scrivere come $-4\cos(x - \frac{\pi}{3})$

5. Scrivere l'immagine di $y = 3\log(x-2) + 4$

6. Data la funzione $y = 2\sin(4\pi x) + 2$
Determinare se è pari / dispari, trovare un intervallo in cui è iniettiva, scrivere il periodo, il valore minimo e il valore massimo.

7. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $+e^{-x} \leq y \leq -\frac{1}{x}$

8. Data la funzione $f(x) = -x + 3$
Vale il teorema di Weierstrass se considero

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
b) $f: [-2, 0) \to \mathbb{R}$
c) $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$
d) $f: (-3, 1] \to \mathbb{R}$

Calcolare i punti di massimo e minimo assoluto, e i rispettivi valori quando è possibile.

ESERCIZI PER IL 18.11.2014

"TIPO II^A PARTE"

1. Attraverso uno studio della funzione

$f(x) = e^{2x} - a^2 x$ (con $a \in \mathbb{R}$)

sulla semiretta $x \geq 0$

dire per quali valori di a essa è monotona.

2. Determinare il più grande intero positivo K

per cui $e^{|x|} - |x| + \cos x \geq K \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

$\forall a > 0$, quante sono le soluzioni x

dell'equazione $f(x) = a$ che soddisfano $x \leq 2$?

$\forall a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più grande

di tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$

(stavolta <u>non</u> richiediamo più che $x \leq 2$)

determinare la parte principale di $x(a)$

per $a \to 0^+$

4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax+b & \text{se } x > c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

determinare a e b in funzione di c, in modo

che esista $f'(c)$.

5. Calcolare al variare di a e $b \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\cos x - be^x + \sin x}{x^2}$$

6. Assegnata $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + m + |m|}$ con $m \in \mathbb{R}$

Scrivere il dominio e il dominio della derivata

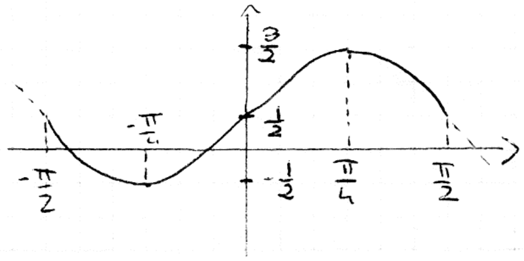
Calcolare per quale m la funzione ammette

una derivata che risulti nulla per $x = 1$

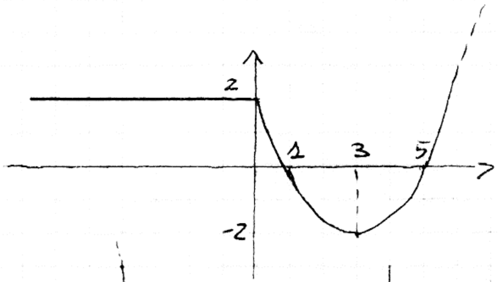
"TIPO I^a PARTE"

1. Proporre un'equazione per:

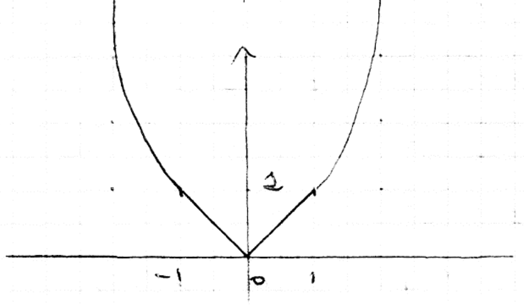
a)



b)



c)



2. Scrivere dominio e immagine di:

a. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$

b. $g(x) = -e^{-x} + 3$

c. $h(x) = \log\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + 2$

3. Calcolare i seguenti limiti:

I) $\lim_{x \to +\infty} 2^x - x^2$ II) $\lim_{x \to +\infty} \log x - \sqrt{x}$

III) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log(x^3+1)}{x}$ IV) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1-e^{2x}}$

V) $\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$ VI) $\lim_{x \to 0^+} x^x$

VII) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ VIII) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin^3 x} - 1}{\log(1-x^3)}$

4. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare i punti di massimo o minimo relativo:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ per $x \in [0, 2]$

b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$ per $x \in (0, 3]$

c) $f(x) = x^{2/3}(x-5)$ per $x \in [0, 4]$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ per $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

5. Verificare che, per $x \to 0$, vale lo sviluppo

a) $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + o(x^2)$

b) $\log(\cos x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

6. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 4bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = \frac{1}{6}$

7. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1? Vero o falso?

8. Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di 50 cm², margini superiore ed inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

ESERCIZI PER IL 25 NOVEMBRE 2014

PRIMA PARTE

1. DETERMINARE IL DOMINIO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE $f(x) = x^2 + \sqrt{-\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|}$

2. CALCOLARE LE DERIVATE DELLE SEGUENTI FUNZIONI:

a) $y = x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})$

b) $y = \dfrac{\cos(3x^2+1)}{2x-3}$

c) xe^{-2x}

3. CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x^2}{3\sin x - x}$

b) $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-4x+3} + x)$

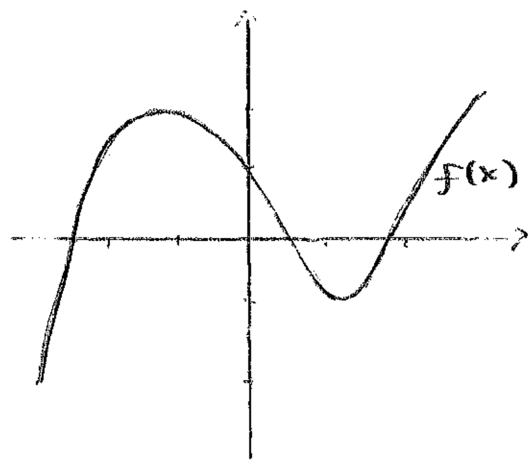
c) $\lim_{x\to \infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$

4. DETERMINARE LA PARTE PRINCIPALE PER $x\to+\infty$ DI $\sin\left(\dfrac{2x}{1+x^3}\right)$

5. DISEGNARE L'INSIEME DEI PUNTI (x,y) TALI CHE
$y \geq e^x - 1 \ \wedge\ y \geq 1 - e^x$

6. DETERMINARE h, k E t IN MODO CHE
$y = h\sin(kx) + t$
ABBIA PERIODO 2, ABBIA VALORE MASSIMO 4 E PASSI PER $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

7. SIA $f(x)$ LA FUNZIONE IN FIGURA
DISEGNARE $f(|x|)$ E $|f(x)|$



8. TROVARE I VALORI DI MINIMO E DI MASSIMO DI $\log(5-x^2)$ RELATIVAMENTE ALL'INTERVALLO $[-1, 2]$

SECONDA PARTE

1. a) PER OGNI NUMERO REALE $a > 0$ DETERMINARE IL NUMERO DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$$4 - x = \frac{a}{x^3} \qquad (*)$$

b) SIA $x(a)$ LA PIU' PICCOLA DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $(*)$ PER OGNI $a > 0$ PER CUI ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE. DETERMINARE LA PARTE PRINCIPALE DI $x(a)$ PER $a \to 0^+$.

2. SI CONSIDERI LA SEGUENTE RELAZIONE TRA LE VARIABILI REALI X E Y:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{a}$$

CON a PARAMETRO REALE POSITIVO.

a) ESPRIMERE Y IN FUNZIONE DI X E STUDIARE LA FUNZIONE COSI' OTTENUTA, DISEGNANDONE IL GRAFICO

b) DETERMINARE PER QUALI VALORI DI a LA CURVA DISEGNATA RISULTA TANGENTE O SECANTE ALLA RETTA t DI EQUAZIONE $X + Y = 4$

3) UNA MACCHINA STAMPA UN CERTO OGGETTO DI PLASTICA, E LA VELOCITA' DI STAMPA v (NUMERO DI PEZZI PRODOTTI IN UN SECONDO) PUO' ESSERE FISSATA A PIACERE TRA 1 E 10.
TUTTAVIA, QUANTO MAGGIORE E' v, QUANTO MAGGIORE E' LA FRAZIONE p DI PEZZI CHE RISULTANO ESSERE DIFETTOSI E VANNO QUINDI SCARTATI; SI SA ANZI CHE IN PRIMA APPROSSIMAZIONE $p = \frac{v^3}{10}$

DETTA v_{eff} LA VELOCITA' EFFETTIVA DELLA MACCHINA (CIOE' IL NUMERO DI PEZZI NON DIFETTOSI PRODOTTI IN UN SECONDO) COME BISOGNA PRENDERE v IN MODO DA RENDERE v_{eff} IL PIU' GRANDE POSSIBILE?

ESERCIZI PER MARTEDI' 2 DICEMBRE

I)

CALCOLARE LE PRIMITIVE DELLE SEGUENTI FUNZIONI

$$\int \frac{x^2-6}{x-4}\,dx \qquad \int \frac{-3x^4+x^2-1}{x-2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \qquad \int \frac{x+7}{x^2+16}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2}{x^2+2}\,dx \qquad \int \frac{1-x}{5+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{e^x}}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx \qquad \int \sqrt[3]{x}\,\log x\,dx$$

II)

CONSIDERARE LA REGIONE R FINITA DELIMITATA DA $x=0$, $y=0$ E DA $y=6-x^2$

a) SI CALCOLI L'AREA DI R

b) SI CALCOLI IL VOLUME DEL SOLIDO GENERATO DALLA ROTAZIONE COMPLETA DI R ATTORNO ALL'ASSE y

c) SI CALCOLI IL VOLUME DEL SOLIDO GENERATO DALLA ROTAZIONE COMPLETA DI R ATTORNO ALLA RETTA $y=6$

d) SI DETERMINI IL VALORE DI k COSTANTE POSITIVA PER CUI LA RETTA $y=k$ DIMEZZA L'AREA DI R

III)

CALCOLARE I SEGUENTI INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_1^{-\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^4-16}\,dx \qquad \int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

IV)

CONSIDERARE LE DUE PARABOLE $y=ax^2-2x+2$ E $y=2ax^2-2x+1$ CON $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

DETERMINARE a AFFINCHE' RISULTI MINIMA LA DISTANZA TRA I VERTICI DELLE DUE PARABOLE. CALCOLARE L'AREA DELLA PARTE FINITA DI PIANO DELIMITATA DALLE DUE PARABOLE.

V) CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{8^{\sin x}-1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x+3\sin x}{3x+4\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \log(\sin 3x)-\log(3x) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left[e^{-x}\left(e+\frac{2}{x}\right)^{x}\right] \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-6}{x+8}\right)^{-x^2+2x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3}$$

VI) SIA $f(x) = a\cdot 2^{x} + b\, 2^{-x} + c$
TROVARE a, b, c TALI CHE f SIA PARI, $f(0)=2$
E $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\log 2$

VII) CALCOLARE LE DERIVATE

$y=(1-x^2)^{\pi}$ $\qquad y=\log(x^2+3)(9x^2-12x)$ $\qquad y=e^{\frac{x-2}{x}}$

$y=a^{\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}$ CON $a>0$ $\qquad y=\tan(\log(1+x^2))$ $\qquad y=\log(1+\arctan^2 x)$

VIII) SIA $y=K e^{-\lambda x^2}$ CON K, λ PARAMETRI POSITIVI.

a) SI DISEGNI LA FUNZIONE
b) SI DETERMINI IL RETTANGOLO DI AREA MASSIMA CHE HA UN LATO SULL'ASSE X E I VERTICI DEL LATO OPPOSTO SULLA FUNZIONE
c) SAPENDO CHE $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ E ASSUMENDO $\lambda=\frac{1}{2}$, SI TROVI IL VALORE DA ATTRIBUIRE A K AFFINCHE' AREA COMPRESA TRA LA FUNZIONE E L'ASSE X SIA 1.

IX) RAPPRESENTARE $f(x)=|x|+|x+3|$. DEDURRE DAL GRAFICO SE ESISTONO INTERVALLI DEL DOMINIO IN CUI f E' MONOTONA.
f E' INVERTIBILE NEL SUO DOMINIO? f E' INVERTIBILE NELL'INTERVALLO $[-3,0]$?

X) TROVARE LA PARTE PRINCIPALE PER $x\to 0$ DI

$$f(x)=\cos(x^3)-\cos(x^2)$$

$$f(x)=\frac{x^4(x+4)}{\log(1+2x^3)}$$

$$f(x)=\frac{1-\exp(x^3)}{x(x+4)}$$

Esercizi: integrali

Esercizio 1: calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

$$1) \int \frac{x-1}{x+1}dx\,, \qquad 2) \int \frac{x}{x^2+4x+5}dx\,,$$
$$3) \int \frac{3x+1}{x^2-3x+2}dx\,, \qquad 4) \int \frac{1}{4x^2-20x+25}dx\,,$$
$$5) \int \frac{2}{2x-x^2-1}dx\,, \qquad 6) \int \frac{1}{2x^2-6x+7}dx\,,$$
$$7) \int \frac{3}{2(x+1)\sqrt{x}}dx\,, \qquad 8) \int \exp(4x+1)dx\,,$$
$$9) \int 5x\sin(2x)dx\,, \qquad 10) \int 3x^2\log(x)dx\,,$$

Esercizio 2: calcolare i seguenti integrali:

$$1) \int_0^1 (x+2)(x-3)dx\,, \qquad 2) \int_5^6 \frac{x+3}{x^2-4x+5}dx\,,$$
$$3) \int_{-1}^1 \sqrt{2+x}dx\,, \qquad 4) \int_1^4 \frac{\exp\left(2+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx\,,$$
$$5) \int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-4}dx\,, \qquad 6) \int_1^e x\log x dx\,,$$
$$7) \int_0^1 x\arctan x dx\,, \qquad 8) \int_0^1 x\arctan x dx\,,$$

Esercizio 3: calcolare i seguenti integrali impropri:

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2+4x+4}dx\,,$$
$$2) \int_{-1}^0 \log\left(\frac{1}{x^2}\right)dx\,,$$
$$3) \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2+6x+10}dx\,,$$
$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^2x+1}dx\,.$$

Esercizio 4: nel primo quadrante di un riferimento cartesiano sono assegnati l'arco di circonferenza di centro 0 e di estremi $A\,(3,0)$ e $B\,(0,3)$ e la parabola $x^2 = 9-6y$.
Sia r la retta tangente in A alla parabola.
a) Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione racchiusa tra la parabola e l'arco di circonferenza.

b) La regione e' la base di un solido le cui sezioni ottenute tagliandolo con piani perpendicolari all'asse x hanno area $S(x) = \exp(5 - 3x)$. Si determini il volume.
c) Si calcoli il volume di un secondo solido ottenuto dalla rotazione della regione attorno all'asse delle x.

Esercizio 5: e' assegnato il settore circolare AOB di raggio 2 e angolo $\frac{\pi}{6}$ come base di un solido le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a OB sono quadrati. Calcolare il volume.

Esercizio 6: calcolare l'area dell'insieme N dato da

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{5} \leq x \leq -1, \frac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} \leq y \leq 0\}.$$

Raccolta di integrali dei temi esami dell'anno scorso (prima parte)

Esercizio 1: Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^{2a}e^{-x}dx$ risulta essere finito.

Esercizio 2: Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1-3x}dx$.

Esercizio 3: Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int e^{3\sin x+1}\cos x\, dx$.

Esercizio 4: Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{+\infty} xe^{1-2x^2}dx$.

Esercizio 5: Calcolare il seguente integrale: $\int_3^4 \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx$.

Esercizio 6: Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1+x^{2a}}{e^x}dx$ risulta essere finito.

Esercizio 7: Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-2(x-1)^2)dx\sqrt{\pi}$.

Esercizio 8: Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_a^4 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ e' improprio e semplice.

Esercizio 9: Per ogni $a > 0$ calcolare $\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx$.

Esercizio 10: Per ogni $a > 0$ calcolare $\int(\sin x+1)^a \cos x dx$.

Esercizio 11: Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{x^a+x^{3a}}{2^x}dx$ risulta essere finito.

Altri esercizi su integrali:
Esercizio 1: Calcolare i seguenti integrali:

$\int_0^3 |x-1|dx\,,$

$\int_1^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx\,,$

$\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}dx\,,$

$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx\,.$

Esercizio 2: Calcolare l'area della regione piana T compresa tra la curva $y = x^4 - 2x^3 + 2$, l'asse delle x e le rette $x = -1$ e $x = 2$.

Esercizio 3: Calcolare l'area della regione piana T compresa tra la curva $y = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \neq 1$, l'asse delle x e le rette di equazione $x = a$, $x = b$ (con $0 < a < b$).

Esercizio 4: Calcolare:

$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx\,,$

$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx\,,$

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx\,,$

$\int_2^{+\infty} \frac{x+5}{x^3-x^2+5x-5} dx\,.$

Esercizi per il ricevimento di mercoledi 17.12.14

Esercizio 1:

Calcolare il valore delle serie

a)$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$

b)$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}$

Esercizio 2:

Considerare un triangolo equilatero di altezza 1 che contiene infiniti cerchi con centro sull'altezza, tangenti ai lati del triangolo e tra di loro. Quale frazione della superficie del triangolo e' occupata dai cerchi?

Esercizio 3:

Calcolare il valore delle serie

a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$

Esercizio 4:

Dire se le seguenti serie convergono

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$

g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$

Esericizio 5:

Utilizzando il criterio degli integrali stabilire il carattere della serie:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

Esercizio 6:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ converge assolutamente? Converge?

Esercizio 7:

Utilizzando il criterio di convergenza assoluta e di Leibniz discutere la convergenza delle serie:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

Esercizio 8:

Dire per quali $a > 0$ le serie convergono ad un numero finito:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^a+n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\sin n}{n^a+n^3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3a}}{n^a+3^n}$