CORSO: **Teoria delle correnti**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CORSO DI STUDIO: **dottorato in Matematica**
DURATA: **30 ore**
ANNO ACCADEMICO: **2013-14**

Introduzione. La teoria delle correnti rettificabili, nella forma messa a punto da Federer e Fleming, costituisce una parte fondamentale della Teoria Geometrica della Misura e in tempi più o meno recenti ha trovato applicazioni in diverse aree dell'analisi matematica (oltre che al problema di Plateau omologico, che costituisce la motivazione iniziale dietro allo sviluppo di questa teoria). In questo corso mi propongo di illustrare i fondamenti e alcuni aspetti più avanzati della teoria delle correnti (rettificabili e non).

Programma del corso [versione: 10 giugno 2014].

1. NOZIONI DI BASE
   - 1.1 Prerequisiti di teoria geometrica teoria della misura: misure di Hausdorff, dimensione di Hausdorff, formula dell'area, densità; insiemi rettificabili, fibrato tangente di un insieme rettificabile.
   - 1.2 Prerequisiti di algebra multilineare: k-vettori semplici e applicazioni k-lineari alternanti; k-forme e differenziale esterno; orientazione di una superficie regolare e orientazione del bordo; teorema di Stokes. Definizione di k-vettori e k-covettori, massa e co-massa.
2. CORRENTI
   - 2.1 Correnti normali, rettificabili e intere. Bordo e massa di una corrente. Compattezza delle correnti normali. Enunciati dei teoremi fondamentali sulle correnti intere: teorema di rettificabilità del bordo e teorema di chiusura di Federer e Fleming.
   - 2.2 Constancy lemma. Prodotto di correnti e formula per il bordo del prodotto. Push-forward di correnti e formula per il bordo del push-forward. Correnti normali supportate su un insieme rettificabile.
   - 2.3 Norma flat e sue caratterizzazioni. Teorema di deformazione poliedrale. Applicazioni del teorema di deformazione poliedrale: approssimazione in norma flat, disuguaglianza isoperimetrica, classi di omologia (di una varietà) definite tramite correnti intere o normali.
   - 2.3 Slicing di di correnti rettificabili e di correnti normali. Caratterizzazione delle correnti intere per slicing. Dimostrazione del teorema di rettificabilità del bordo. Dimostrazione del teorema di chiusura di Federer e Fleming.

Prerequisiti. È richiesta una buona conoscenza della teoria delle misura di base e dell'integrazione astratta, e di alcuni aspetti dell'analisi funzionale collegati. Una conoscenza delle basi della teoria geometrica della misura (per esempio la formula dell'area) è auspicabile ma non strettamente necessaria.

Testi di riferimento.

- S.G. Krantz, H.R. Parks: *Geometric Integration Theory.* Birkhäuser, Boston, 2008.
- F. Morgan: *Geometric Measure Theory: a beginner's guide.* Academic Press, San Diego, 2008.
- L. Simon: *Lectures on Geometric Measure Theory.* Proccedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3. Australian National University, 1983.

Modalità d'esame. L'esame consiste di due parti: un seminario e un orale di stampo classico sugli argomenti fondamentali del corso. Una lista di possibili argomenti per i seminari è la seguente (in molti casi so tratta di sviluppare e completare la traccia vista a lezione):

- Teorema di Gołab (la misura di Hausdorff 1-dimensionale è semicontinua inferiormente sulla classe dei sottoinsiemi connessi e compatti di $\mathbb{R}^n$ dotati della distanza di Hausdorff).
- Approssimazione in massa delle correnti intere e normali tramite correnti poliedrali.
- Teorema isoperimetrico per correnti intere in un aperto regolare U di $\mathbb{R}^n$ o in una varietà.
- Decomposizione delle correnti intere in componenti indecomponibili.
- Forma di Kähler, disuguaglianza di Wirtinger, e minimalità delle superfici complesse.
- Slicing e dimostrazione del teorema di chiusura di Federer e Fleming.
- Caratterizzazione degli insiemi rettificabili per proiezione.
- Chiusura del supporto delle correnti intere di massa minima.