appunti per il corso di Analisi in più Variabili 2
corso di laurea in Matematica, a.a. 2012-13
Giovanni Alberti

Capitolo 3. Spazi di Hilbert

[versione: 30/10/2012]

Spazi di Hilbert reali: definizione e teorema fondamentale

3.1. Spazi di Hilbert. Consideriamo uno spazio vettoriale X (sul campo reale) di dimensione non necessariamente finita, dotato di un prodotto scalare $\langle\ ;\ \rangle$.

Come già visto nel corso di algebra lineare, questo significa che $\langle x\,;\,y\rangle$ è un numero reale definito per ogni coppia di vettori $x, y \in X$, e che valgono le seguenti proprietà:

(i) $x \mapsto \langle x\,;\,y\rangle$ è un'applicazione lineare da X in $\mathbb{R}$ per ogni $y \in X$;

(ii) $\langle x\,;\,y\rangle = \langle y\,;\,x\rangle$ per ogni $x, y \in X$;

(iii) $\langle x\,;\,x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in X$, e $\langle x\,;\,x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

In altre parole, $\langle\ ;\ \rangle$ è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su X.

Al prodotto scalare è associata la norma

$$\|x\| := \sqrt{\langle x\,;\,x\rangle}\,,$$

e si dice che X è uno *spazio di Hilbert* se questa norma—o meglio la distanza da essa definita—è completa.

Si noti che se X è uno spazio con prodotto scalare di dimensione finita d, allora esiste un isomorfismo di X in $\mathbb{R}^d$ che conserva il prodotto scalare e quindi anche la norma, e di conseguenza la norma di X è completa. Dunque in dimensione finita la nozione di spazio di Hilbert non si distingue da quella di spazio con prodotto scalare. Il discorso cambia quando consideriamo spazi di dimensione infinita.

A meno che non si specifichi altrimenti, in questo capitolo la lettera X indicherà sempre uno spazio di Hilbert reale di dimensione infinita.

3.2. Osservazioni. (a) Ricordo che il prodotto scalare può essere ricostruito a partire dalla norma ad esso associata tramite la *formula di restituzione*

$$\langle x\,;\,y\rangle = \frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big]\,. \tag{3.1}$$

(b) Una conseguenza importante del fatto che la norma in X deriva prodotto scalare è l'*identità del parallelogramma* (cfr. esercizi 3.2, 3.15 e 3.16):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{per ogni } x, y \in X. \tag{3.2}$$

L'interpretazione geometrica di questa identità è la seguente: se l_1, l_2 sono le lunghezze dei lati del parallelogramma di vertici $0, x, y, x+y$ e d_1, d_2 sono le lunghezze delle diagonali, allora $d_1^2 + d_2^2 = 2l_1^2 + 2l_2^2$.

(c) D'ora in poi considereremo su X la distanza indotta dalla norma. Notare che la norma, come applicazione da X in $\mathbb{R}$, è continua (questo è un fatto noto), e lo stesso vale per il prodotto scalare come applicazione da $X \times X$ in $\mathbb{R}$ (questo segue dalla formula di restituzione (3.1) e dalla continuità della norma).

Fermo restando che esistono molti esempi di spazi di Hilbert di dimensione infinita, in questo corso ci limiteremo a considerarne due: $L^2(E)$ e ℓ^2.

3.3. Lo spazio di Hilbert $L^2(E)$. Dato E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^d$ con misura positiva, definiamo sullo spazio $L^2(E)$ il prodotto scalare

$$\langle f\,;\,g\rangle := \int_E f(x)\,g(x)\,dx \tag{3.3}$$

per ogni $f, g \in L^2(E)$. Si noti che la norma L^2 è proprio la norma associata a questo prodotto scalare:

$$\|f\|_2^2 = \int_E |f(x)|^2\,dx = \langle f\,;\,f\rangle\,.$$

Dobbiamo verificare che

(a) $\langle f\,;\,g\rangle$ è ben definito per ogni $f, g \in L^2(E)$;
(b) $\langle\ ;\ \rangle$ soddisfa le proprietà del prodotto scalare;
(c) la norma associata a $\langle\ ;\ \rangle$ è completa.

Per prima cosa osserviamo che per ogni $f, g \in L^2(E)$ la funzione fg è sommabile e quindi l'integrale in (3.3) è un ben definito numero reale: usando la disuguaglianza di Hölder si ottiene infatti che

$$\int_E \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \le \|f\|_2\|g\|_2 < +\infty\,.$$

Notiamo poi che il valore dell'integrale in (3.3) non cambia se si modificano le funzioni f e g in insiemi di misura nulla, e quindi $\langle f\,;\,g\rangle$ dipende dalle classi di equivalenza di f e g, ma non dagli specifici rappresentanti di queste classi. Questo conclude la dimostrazione di (a).

La verifica di (b) è lasciata per esercizio, mentre la completezza della norma L^2 (enunciato (c)) è stata dimostrata nel capitolo precedente.

3.4. Lo spazio di Hilbert ℓ^2. Indichiamo con ℓ^2 lo spazio delle successioni di numero reali $x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty\,.$$

Su questo spazio definiamo un prodotto scalare ponendo

$$\langle x\,;\,y\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \tag{3.4}$$

per ogni $x = (x_0, x_1, \dots)$ e $y = (y_0, y_1, \dots) \in \ell^2$. Dobbiamo verificare che

(a) ℓ^2 è uno spazio vettoriale;
(b) $\langle x\,;\,y\rangle$ è ben definito per ogni $x, y \in \ell^2$;
(c) $\langle\ ;\ \rangle$ soddisfa le proprietà del prodotto scalare;
(d) la norma associata a $\langle\ ;\ \rangle$ è completa.

Si possono evitare queste verifiche osservando che ℓ^2 coincide con lo spazio delle funzioni L^2 definite sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali dotato della misura μ che conta i punti (esercizio 3.3), a cui si può estendere quanto detto nel paragrafo precedente. Un'altra via è suggerita nell'esercizio 3.4.

Ciò detto, può essere un utile esercizio fare le verifiche di cui sopra senza ricorrere a scorciatoie.

3.5. Sistemi ortonormali e basi di Hilbert. Un sottoinsieme $\mathscr{F}$ di X è un *sistema ortonormale* se per ogni $e, e' \in \mathscr{F}$ si ha

$$\langle e\,;\, e'\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } e \neq e', \\ 1 & \text{se } e = e'. \end{cases}$$

$\mathscr{F}$ si dice una *base di Hilbert* di X se soddisfa l'ulteriore ipotesi che $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è denso in X, cioè se è un sistema ortonormale *completo*.

Un esempio di base di Hilbert per lo spazio ℓ^2 è l'insieme $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ dove e_n è il vettore con coordinate tutte nulle tranne la n-esima, che vale uno (verificare che questi vettori formano un sistema ortonormale è immediato, per la completezza si veda l'esercizio 3.8).

Un esempio di base di Hilbert per $L^2(0,1)$ è descritto nell'esercizio 3.21; altri esempi di base di Hilbert per spazi L^2 saranno dati nel prossimo capitolo.

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo capitolo e alcune delle sue conseguenze più immediate.

3.6. Teorema. *Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale in X, e per ogni $x \in X$ ed ogni $n = 0, 1, \dots$ poniamo*

$$x_n := \langle x\,;\, e_n\rangle\,.$$

Allora

(i) $\sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$ *(disuguaglianza di Bessel);*

(ii) *la serie $\sum_n x_n e_n$ converge a un elemento $\bar{x}$ della chiusura di* $\mathrm{Span}(\{e_n\})$*;*[1]

(iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$*;*

(iv) *$x - \bar{x} \perp e_n$ per ogni n, e di conseguenza $x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\{e_n\})}$;*[2]

(v) *se $\{e_n\}$ è una base di Hilbert di X si ha $x = \bar{x}$ e inoltre*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \quad \text{e} \quad \|\bar{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\,. \tag{3.5}$$

3.7. Osservazioni. (a) I numeri x_n sono detti *coordinate* di x rispetto alla base $\{e_n\}$.

(b) Nel caso in cui X ha dimensione finita, e quindi il sistema $\{e_n\}$ è finito, i vari enunciati di questo teorema sono noti dal corso di algebra lineare. In questo contesto, infatti, $\bar{x}$ non è altro che la proiezione ortogonale di x sul sottospazio generato da $\{e_n\}$ (questo segue dell'enunciato (iv)), e di conseguenza la norma di $\bar{x}$ è minore o uguale a quella di x (questo è il significato della disuguaglianza di Bessel). Analogamente l'enunciato (v) dice che se $\{e_n\}$ è una base allora le coordinate di x rispetto a questa base sono date dal prodotto scalare di x con gli elementi della base, e che la norma di x al quadrato è uguale alla somma dei quadrati delle coordinate (il teorema di Pitagora).

(c) L'enunciato (v), che è la parte più rilevante di questo teorema, dice che ogni vettore $x \in X$ si scrive come combinazione lineare (infinita!) degli elementi di una base di Hilbert $\{e_n\}$, e come nel caso di dimensione finita i coefficienti x_n sono dati dal prodotto scalare di x con i vettori della base e_n.

(d) Se X ha dimensione finita, l'unicità della rappresentazione di un vettore x in termini di una base (ortonormale o meno) segue immediatamente dal fatto che gli elementi della base sono linearmente indipendenti. In dimensione infinita l'unicità della rappresentazione non è altrettanto immediata, ed è infatti il contenuto dell'enunciato che segue.

---

[1] Questo vuol dire che le somme parziali $S_m := \sum_{n=0}^{m} x_n e_n$ convergono a $\bar{x}$ per $m \to +\infty$.

[2] Al solito, scriviamo $x \perp y$ per dire che x è ortogonale a y, cioè $\langle x\,;\, y\rangle = 0$, e scriviamo $x \perp F$ con F sottoinsieme di X per dire che x è ortogonale ad ogni elemento di F. Infine indichiamo con $F^\perp$ l'insieme dei vettori $x \in X$ tali che $x \perp F$.

3.8. Proposizione. *Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base di Hilbert di X. Siano dati inoltre un vettore x in X, e una successione di numeri reali a_n tali che $\sum_n a_n^2 < +\infty$ e la serie $\sum_n a_n e_n$ converge a x. Allora $a_n = \langle x\,;\, e_n\rangle$ per ogni n.*

3.9. Proposizione (Identità di Parseval). *Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base di Hilbert di X. Dati due vettori $x, y \in X$ con coordinate rispettivamente x_n e y_n, si ha che*

$$\langle x\,;\, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \,. \tag{3.6}$$

3.10. Osservazioni. (a) La versione completa dell'enunciato di questa proposizione specifica che la serie a destra dell'uguale in (3.6) converge assolutamente.

(b) Non sorprendentemente, la versione in dimensione finita dell'identità (3.6) è un fatto noto dal corso di algebra lineare.

(c) Si può leggermente rafforzare l'enunciato della proposizione precedente dimostrando che l'applicazione ϕ che ad ogni $x \in X$ associa la successione dei coefficienti $(x_0, x_1, \dots)$ è un isomorfismo lineare di X in ℓ^2 che conserva il prodotto scalare, cioè un'isometria (esercizio 3.5)

Per la dimostrazione del teorema 3.6 e delle proposizioni 3.8 e 3.9 abbiamo bisogno del seguente lemma.

3.11. Lemma. *Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale in X, e sia data una successione di numeri reali a_n tali che $\sum_n a_n^2 < +\infty$. Allora la serie $\sum_n a_n e_n$ converge a un qualche $\bar{x} \in X$. Inoltre $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$ e $\langle \bar{x}\,;\, e_n\rangle = a_n$ per ogni n.*

Dimostrazione. Poiché X è completo, per dimostrare la convergenza della serie ci basta far vedere che le somme parziali

$$y_m := \sum_{n=0}^{m} a_n e_n \tag{3.7}$$

formano una successione di Cauchy in X.

In effetti, presi m ed m' con $m < m'$ si ha

$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n$$

e siccome questa è una somma *finita* di vettori a due a due ortogonali, per quanto visto nel corso di algebra lineare si ha

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 \,.$$

Ora, la seconda serie in questa formula è la coda di una serie convergente, e quindi tende a 0 quando m tende all'infinito. Per la precisione, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m_0 tale che

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } m \geq m_0,$$

e quindi

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } m, m' \geq m_0,$$

ovvero la successione (y_m) è di Cauchy in X.

Dimostriamo ora la seconda parte dell'enunciato. Dalla formula (3.7) (e dal corso di algebra lineare) otteniamo che

$$\|y_m\|^2 = \sum_{n=0}^{m} a_n^2 \,,$$

e passando al limite in questa uguaglianza per $m \to +\infty$ si ha

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

(uso il fatto che y_m converge a $\bar{x}$ e la continuità della norma, cfr. osservazione 3.2(ii)).

Sempre dalla formula (3.7) si ottiene che

$$\langle y_m \,;\, e_n \rangle = a_n \quad \text{per ogni } m, n \text{ con } m \geq n,$$

e passando al limite in questa uguaglianza per $m \to +\infty$ si ha

$$\langle \bar{x} \,;\, e_n \rangle = a_n \quad \text{per ogni } n$$

(qui uso invece la continuità del prodotto scalare, cfr. osservazione 3.2(c)). □

Dimostrazione del teorema 3.6. Cominciamo con la dimostrazione dell'enunciato (i). Fissato un intero positivo m, scriviamo x come

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m + y$$

con $y := x - (x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m)$, ed osserviamo che gli $m+1$ vettori nella somma a destra dell'uguale sono a due a due ortogonali.[3] Pertanto sappiamo dal corso di algebra lineare che

$$\|x\|^2 = \|x_1 e_1\|^2 + \cdots + \|x_m e_m\|^2 + \|y\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^{m} x_n^2 \,,$$

e prendendo l'estremo superiore su tutti gli m otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \,;$$

questo conclude la dimostrazione dell'enunciato (i).

(ii) Il fatto che la serie $\sum_n x_n e_n$ converge a qualche $\bar{x}$ in X segue dal lemma 3.11 e dalla stima in (i). Poiché inoltre le somme parziali di questa serie appartengono a $\mathrm{Span}(\{e_n\})$, il limite $\bar{x}$ deve appartenere alla chiusura di $\mathrm{Span}(\{e_n\})$.

(iii) L'uguaglianza $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n x_n^2$ segue sempre dal lemma 3.11; il resto segue da (i).

(iv) Sempre dal lemma 3.11 so che $\langle \bar{x} \,;\, e_n \rangle = x_n$ per ogni n, quindi

$$\langle x - \bar{x} \,;\, e_n \rangle = \langle x \,;\, e_n \rangle - \langle \bar{x} \,;\, e_n \rangle = x_n - x_n = 0 \,,$$

e dunque $x - \bar{x} \perp e_n$. Da questo segue, per ragioni puramente algebriche, che $x - \bar{x} \perp \mathrm{Span}(\{e_n\})$, e quindi $x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\{e_n\})}$ per la continuità del prodotto scalare.[4]

[3] La verifica utilizza solo la linearità del prodotto scalare ed il fatto che i vettori $e_1, \dots, e_m$ formano un sistema ortonormale. Per esempio, per ogni $n = 1, \dots, m$ si ha

$$\langle y \,;\, x_n e_n \rangle = x_n \langle y \,;\, e_n \rangle = x_n \langle x \,;\, e_n \rangle - x_n \big[x_1 \langle e_1 \,;\, e_n \rangle + \cdots + x_m \langle e_m \,;\, e_n \rangle \big] = x_n^2 - x_n^2 = 0 \,.$$

[4] Dato y in $\overline{\mathrm{Span}(\{e_n\})}$, esiste una successione di vettori y_m in $\mathrm{Span}(\{e_n\})$ che converge a y; per la continuità del prodotto scalare si ha che $\langle x - \bar{x} \,;\, y \rangle$ è uguale al limite per $m \to +\infty$ di $\langle x - \bar{x} \,;\, y_m \rangle$, e d'altra parte quest'ultimo è zero.

(v) Siccome per ipotesi $X = \overline{\mathrm{Span}(\{e_n\})}$, dall'enunciato (iv) otteniamo che $x - \bar{x} \perp X$, il che significa che $x - \bar{x} = 0$, vale a dire $x = \bar{x}$. Una volta stabilito questo, il resto dell'enunciato segue dai punti precedenti. $\square$

Dimostrazione della proposizione 3.8. Basta applicare il lemma 3.11. $\square$

Dimostrazione della proposizione 3.9. L'identità di Parseval (3.6) segue dalla formula di restituzione e dalla seconda identità in (3.5). Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned}\langle x\,;\,y\rangle &= \frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[\sum_n (x_n+y_n)^2 + \sum_n (x_n-y_n)^2\Big] \\ &= \sum_n \frac{1}{4}\big[(x_n+y_n)^2 + (x_n-y_n)^2\big] = \sum_n x_n y_n\,. \end{aligned}$$ $\square$

COMPLEMENTI SULLE BASI DI HILBERT

Iniziamo questa sezione spiegando come modificare l'enunciato del teorema 3.6 e delle successive proposizioni nel caso in cui si considerino sistemi ortonormali o basi più che numerabili.

3.12. Sistemi ortonormali più che numerabili. Data una famiglia $\{a_i : i \in I\}$ di numeri *positivi* si pone

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{ finito}}} \sum_{i\in J} a_i\,.$$

Si noti che la somma definita in questo modo coincide con l'integrale della funzione $i \mapsto a_i$ sull'insieme I dotato della misura che conta i punti.[5]

Un'osservazione fondamentale è la seguente: se $\sum_i a_i < +\infty$ allora gli indici i tali che $a_i \neq 0$ sono in quantità al più numerabile (esercizio 3.6).

Detto questo, nel caso in cui il sistema ortonormale $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ nel teorema 3.6 venisse sostituito con un sistema ortonormale più che numerabile $\{e_i : i \in I\}$, vanno introdotte le seguenti modifiche: negli enunciati (i), (iii) e (v) si sostituisce la serie $\sum_n x_n^2$ con $\sum_i x_i^2$ (definita come sopra); dalla disuguaglianza di Bessel nell'enunciato (i) si ottiene quindi che gli indici i per cui $x_i \neq 0$ sono in quantità al più numerabile, e possono essere quindi indicati con $\{i_n\}$,[6] e quindi negli enunciati (ii) e (v) si sostituisce la serie $\sum_n x_n e_n$ con $\sum_i x_i e_i$, dove questa espressione va intesa come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{i_n} e_{i_n}\,.$$

Ad essere precisi, si può dimostrare che il valore di questa serie non dipende dal modo in cui gli indici i tali che $x_i \neq 0$ sono stati numerati. Questa precisazione vale anche per l'enunciato originale del teorema 3.6: presa una qualunque permutazione (bigezione) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si ha che $\bar{x} = \sum_n x_n e_n = \sum x_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$.

Continuiamo con una caratterizzazione delle basi di Hilbert.

---

[5] Seguendo l'analogia con la teoria dell integrazione, si può quindi definire la somma $\sum_i a_i$ con a_i numeri a segno variabile quando almeno una tra le somme $\sum_i a_i^+$ e $\sum_i a_i^-$ è finita.

[6] Il caso in cui questi indici sono in numero finito è analogo, e anzi più semplice.

3.13. Proposizione. *Sia $\mathscr{F}$ un sistema ortonormale in X. Allora $\mathscr{F}$ è una base di Hilbert (cioè* $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ *è denso in X) se e solo se $\mathscr{F}$ è massimale nella classe dei sistemi ortonormali in X ordinati per inclusione.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Dati $\mathscr{F}$ base di Hilbert e $\mathscr{F}'$ sistema ortonormale che contiene $\mathscr{F}$, dobbiamo dimostrare che $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$. Supponiamo per assurdo che non sia così e prendiamo $e \in \mathscr{F}' \setminus \mathscr{F}$: allora $e \perp \mathscr{F}$, da cui segue che

$$e \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{F})} = X$$

e dunque $e = 0$, in contraddizione col fatto che gli elementi di $\mathscr{F}'$ hanno tutti norma 1.

($\Leftarrow$) Supponiamo che $\mathscr{F}$ non sia una base di Hilbert e dimostriamo che $\mathscr{F}$ è strettamente contenuto in un altro sistema ortonormale. Dato dunque $x \in X \setminus \overline{\mathrm{Span}(\mathscr{F})}$, prendiamo $\bar{x}$ come nel teorema 3.6 e poniamo $\tilde{x} := x - \bar{x}$. Pertanto $\tilde{x} \perp \mathscr{F}$ per via dell'enunciato (iv) del teorema 3.6. Inoltre, siccome $\bar{x}$ appartiene a $\overline{\mathrm{Span}(\mathscr{F})}$, abbiamo che $\bar{x} \neq x$ e quindi $\tilde{x} \neq 0$. Pertanto, posto $e := \tilde{x}/\|\tilde{x}\|$, si ha che $\{e\} \cup \mathscr{F}$ è un sistema ortonormale che contiene strettamente $\mathscr{F}$. □

3.14. Costruzione di basi di H. via lemma di Zorn. Una conseguenza importante della proposizione 3.13 è che ogni sistema ortonormale $\mathscr{F}$ in X può essere *completato* ad una base di Hilbert, cioè esiste una base di Hilbert che lo contiene. Usando infatti il lemma di Zorn possiamo infatti trovare un sistema ortonormale massimale tra tutti quelli che contengono $\mathscr{F}$,[7] e questo è una base di Hilbert.

3.15. Costruzione di basi di H. via ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Un'altro modo per costruire una base di Hilbert per uno spazio di Hilbert *separabile* è il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Si parte da una famiglia numerabile $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di X tale che $\mathrm{Span}(\{x_n\})$ è denso in X; a patto di eliminare alcuni elementi, possiamo supporre che x_n non sia mai nello span dei vettori $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Costruiamo quindi i vettori $\tilde{x}_n$ ed e_n con la seguente procedura induttiva:

- $\tilde{x}_0 := x_0$ ed $e_0 := \tilde{x}_0/\|\tilde{x}_0\|$;
- $\tilde{x}_1 := x_1 - \langle x_1\,;\, e_0\rangle e_0$ ed $e_1 := \tilde{x}_1/\|\tilde{x}_1\|$;
- $\tilde{x}_2 := x_2 - \langle x_2\,;\, e_0\rangle e_0 - \langle x_2\,;\, e_1\rangle e_1$ ed $e_2 := \tilde{x}_2/\|\tilde{x}_2\|$;
- $\cdots$

In altre parole, al passo n-esimo si definisce $\tilde{x}_n$ come x_n meno le sue componenti lungo le direzioni $e_0, \dots, e_{n-1}$, e si definisce e_n come la normalizzazione di $\tilde{x}_n$. Si verifica facilmente (per induzione) che i vettori $\tilde{x}_n$ sono a due a due ortogonali e mai nulli, che i vettori e_n formano un sistema ortonormale, e che gli span delle famiglie $\{x_n\}$, $\{\tilde{x}_n\}$ e $\{e_n\}$ coincidono. In particolare $\mathrm{Span}(\{e_n\})$ è denso in X, e quindi $\{e_n\}$ è una base di Hilbert.

3.16. Proposizione. *Sia X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Se X ammette una base di Hilbert numerabile allora X è separabile. Viceversa se X è separabile allora tutte le basi di Hilbert di X sono numerabili.*

Da questa proposizione segue che se una base di Hilbert di X è numerabile, allora anche tutte le altre basi lo sono. Questo è un caso particolare di un enunciato più generale: le basi di Hilbert di un dato spazio di Hilbert hanno tutte la stessa cardinalità (esercizio 3.11).

Per la dimostrazione della proposizione 3.16 abbiamo bisogno del seguente lemma.

[7] Sia S la classe dei sistemi ortonormali in X che contengono $\mathscr{F}$, ordinati per inclusione: poiché ogni catena in S ammette un maggiorante (l'unione dei sistemi ortonormali nella catena), per il lemma di Zorn S ammette anche un elemento massimale, che ovviamente risulta essere massimale anche nella classe di tutti i sistemi ortonormali in X.

3.17. Lemma. *Sia (M, d) uno spazio metrico, e supponiamo che esistano un sottoinsieme F di M ed un numero $\delta > 0$ tali che $d(x_1, x_2) \geq \delta$ per ogni $x_1, x_2 \in F$ con $x_1 \neq x_2$. Allora ogni insieme D denso in X deve avere cardinalità maggiore o uguale a quella di F. In particolare se X è separabile allora F deve essere al più numerabile.*

Dimostrazione. Ci basta costruire una mappa $\phi : F \to D$ iniettiva. Dato $x \in F$ prendiamo dunque come $\phi(x)$ un qualunque elemento di $D \cap B(x, \delta/3)$ (questa intersezione non è vuota perché D è denso). Si verifica facilmente che ϕ è iniettiva: dati infatti $x_1, x_2 \in F$ con $x_1 \neq x_2$ si ha che $d(x_1, x_2) \geq \delta$, quindi le palle $B(x_1, \delta/3)$ e $B(x_2, \delta/3)$ hanno intersezione vuota e pertanto $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ non possono essere lo stesso punto. □

Dimostrazione della proposizione 3.16. Sia $\mathscr{F}$ una base di Hilbert numerabile di X, e sia

$$D := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{F})$$

l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di $\mathscr{F}$ con coefficienti *razionali*. Si verifica facilmente che D è numerabile e denso in $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ (i dettagli sono lasciati per esercizio), e poiché $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è denso in X, abbiamo che anche D è denso in X, e quindi X è separabile.

Dimostriamo ora la seconda parte dell'enunciato: se X è separabile e $\mathscr{F}$ è una una base di Hilbert di X, allora $\mathscr{F}$ è numerabile per via del lemma 3.17. □

Sottospazi chiusi e funzionali lineari continui

Completiamo questa breve esposizione della teoria degli spazi di Hilbert estendendo a spazi di Hilbert di dimensione infinita di due risultati elementari di algebra lineare: il fatto che uno spazio X con prodotto scalare si scrive come somma diretta di un qualunque sottospazio e del suo ortogonale, e il fatto che gli elementi del duale di X si rappresentano come elementi di X tramite il prodotto scalare. È importante notare che le estensioni infinito-dimensionale di questi enunciati non sono una pura questione di algebra lineare, e richiedono anzi ipotesi di tipo topologico.

3.18. Teorema. *Sia Y un sottospazio chiuso di X. Allora*

(i) *ogni $x \in X$ esistono $\bar{x} \in Y$ e $\tilde{x} \in Y^\perp$ tali che $x = \bar{x} + \tilde{x}$;*

(ii) *questa scomposizione è unica;*

(iii) *$\bar{x}$ è univocamente determinato come l'elemento di Y di minima distanza da x.*

3.19. Osservazioni. (a) Gli enunciati (i) e (ii) dicono che X si scrive come somma diretta di Y e $Y^\perp$, cioè $X = Y \oplus Y^\perp$.

(b) Il vettore $\bar{x}$ è la *proiezione* di x su Y sia in senso algebrico, cioè nel senso dalla scomposizione $X = Y \oplus Y^\perp$, sia in senso metrico, cioè come elemento di Y che minimizza la distanza da x. Analogamente, $\tilde{x}$ è la proiezione di x su $Y^\perp$.

(c) L'ipotesi che Y sia chiuso è necessaria. Se infatti X ha dimensione infinita, allora contiene sottospazi Y che sono propri e densi (per esempio lo span di una qualunque base di Hilbert, cfr. esercizio 3.9), e per tali Y si ha

$$Y^\perp = \overline{Y}^\perp = X^\perp = \{0\}\,;$$

quindi i vettori $x \in X \setminus Y$ non si possono scrivere come somma di un vettore in Y e di un vettore in $Y^\perp$.

(c) Se X è uno spazio con prodotto scalare ma non è completo—cioè non è uno spazio di Hilbert—allora questo teorema non vale: è infatti sempre possibile trovare un sottospazio Y chiuso e proprio tale che $Y^\perp = \{0\}$ (cfr. esercizio 3.20).

Dimostrazione del teorema 3.18. Ci limitiamo a dimostrare il teorema nel caso in cui X è separabile; la dimostrazione nel caso generale richiede la generalizzazione del teorema 3.6 discussa nel paragrafo 3.12.

(i) Siccome Y è un sottospazio chiuso di X, è uno spazio di Hilbert per conto suo, ed essendo X separabile anche Y è separabile;[8] pertanto Y ammette una base di Hilbert numerabile $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. In particolare si ha che Y coincide con la chiusura di $\mathrm{Span}(\{e_n\})$.

Prendiamo quindi $\bar{x}$ come nel teorema 3.6 e poniamo $\tilde{x} := x - \bar{x}$. L'enunciato (ii) di quel teorema dice che $\bar{x}$ appartiene Y, mentre l'enunciato (iv) dice che $\tilde{x}$ appartiene a $Y^\perp$.

(ii) Supponiamo di avere due scomposizioni di x come somma di elementi di Y e $Y^\perp$, vale a dire che $x = \bar{x}_1 + \tilde{x}_1 = \bar{x}_2 + \tilde{x}_2$ con $\bar{x}_i \in Y$ e $\tilde{x}_i \in Y^\perp$. Allora

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \,,$$

quindi il vettore $y := \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$ appartiene sia a Y che a $Y^\perp$ e pertanto deve essere nullo, ovvero $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ e $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1$.

(iii) Dobbiamo far vedere che $\bar{x}$ è l'unico punto di minima distanza di Y da x, ovvero che per ogni $y \in Y$ con $y \neq \bar{x}$ si ha $\|x - y\| > \|x - \bar{x}\|$. Scriviamo $x - y$ come

$$x - y = (x - \bar{x}) + (\bar{x} - y)\,;$$

siccome $x - \bar{x}$ appartiene a $Y^\perp$ e $\bar{x} - y$ appartiene a Y, questi due vettori sono ortogonali, e quindi

$$\|x - y\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2 > \|x - \bar{x}\|^2 \,. \qquad \square$$

3.20. Teorema. *Sia $\omega : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare e continua. Allora esiste un vettore $x_0 \in X$ tale che*

$$\omega(x) = \langle x\,;\,x_0\rangle \quad \textit{per ogni } x \in X. \tag{3.8}$$

3.21. Osservazioni. (a) L'ipotesi che ω sia continua è necessaria. Se X ha dimensione infinita è infatti possibile costruire applicazioni lineari $\omega : X \to \mathbb{R}$ che non sono continue (cfr. paragrafo 3.23), e queste non possono essere rappresentate nella forma (3.8) perché ogni applicazione lineare della forma $x \mapsto \langle x\,;\,x_0\rangle$ è continua.

(b) Se X è uno spazio con prodotto scalare ma non è completo questo teorema non vale (cfr. esercizio 3.20).

Per dimostrare il teorema 3.20 abbiamo bisogno del seguente lemma di algebra lineare.

3.22. Lemma. *Sia V uno spazio vettoriale reale, e siano ω_1, ω_2 applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$ tali che $\ker(\omega_1) \subset \ker(\omega_2)$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\omega_2 = c\omega_1$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $\ker(\omega_1) \neq V$, altrimenti $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0$ e non c'è nulla da dimostrare.

Prendiamo quindi $x_0 \in V \setminus \ker(\omega_1)$, cioè tale che $\omega_1(x_0) \neq 0$; a patto di moltiplicare x_0 per un opportuna costante possiamo supporre che $\omega_1(x_0) = 1$.

Vogliamo ora dimostrare che $\omega_2 = c\omega_1$ con $c := \omega_2(x_0)$. Dato un qualunque $x \in V$, lo scriviamo come

$$x = \omega_1(x)\,x_0 + y$$

con $y := x - \omega_1(x)\,x_0$, e osserviamo che $y \in \ker(\omega_1) \subset \ker(\omega_2)$: infatti

$$\omega_1(y) = \omega_1\big(x - \omega_1(x)\,x_0\big) = \omega_1(x) - \omega_1(x)\,\omega_1(x_0) = 0\,.$$

Pertanto

$$\omega_2(x) = \omega_2\big(\omega_1(x)\,x_0 + y\big) = \omega_1(x)\,\omega_2(x_0) + \omega_2(y) = c\omega_1(x)\,. \qquad \square$$

[8] Ogni sottospazio di uno spazio metrico separabile è separabile (si noti che questo non è sempre vero negli spazi topologici).

Dimostrazione del teorema 3.20. Se $\omega \equiv 0$ prendiamo $x_0 := 0$. Altrimenti $Y := \ker(\omega)$ è un sottospazio *chiuso* e proprio di X,[9] e quindi $Y^\perp$ è un sottospazio non banale di X.[10]

Prendiamo dunque un vettore non nullo $x_1 \in Y^\perp$, e poniamo $\omega_1(x) := \langle x\,;\, x_1\rangle$. Allora

$$\ker(\omega_1) = x_1^\perp \supset \ker(\omega)$$

(l'uguaglianza segue dalla definizione di ω_1, l'inclusione dalla scelta di x_1) e quindi per il lemma 3.22 esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\omega_1 = c\omega$, e $c \neq 0$ perché l'applicazione ω_1 non è identicamente nulla. Dunque $\omega = \frac{1}{c}\omega_1$, e questo significa che la formula (3.8) è soddisfatta prendendo $x_0 := \frac{1}{c}x_1$. □

3.23. Costruzione di un'applicazione lineare non continua. Sia X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, e sia $\mathscr{F}$ una base di Hilbert di X. Siccome $\mathscr{F}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti ma non è una *base algebrica* di X,[11] (cfr. esercizio 3.9), e possibile trovare una base algebrica $\mathscr{F}'$ di X che contiene strettamente $\mathscr{F}$. Per la definizione di base algebrica, ogni vettore x di X si scrive in modo unico come combinazione lineare finita di elementi di $\mathscr{F}'$, e per la precisione esistono dei coefficienti $c(x,e)$ con $e \in \mathscr{F}'$, tutti nulli tranne che un numero finito di e, tali che

$$x = \sum_{e \in \mathscr{F}'} c(x,e)\, e\,.$$

Inoltre, per ogni $e \in \mathscr{F}'$, l'applicazione da X in $\mathbb{R}$ data da $x \mapsto c(x,e)$ è lineare.

Si prenda ora $\bar{e} \in \mathscr{F}' \setminus \mathscr{F}$, e sia $\omega : x \mapsto c(x,\bar{e})$; vogliamo far vedere ω non è continua. Infatti $\omega(e) = 0$ per ogni $e \in \mathscr{F}$ e quindi $\omega = 0$ su $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$; se per assurdo ω fosse continua, allora avremmo $\omega = 0$ sulla chiusura di $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$, cioè su tutto X, in contraddizione col fatto che $\omega(\bar{e}) = 1$.

SPAZI DI HILBERT COMPLESSI

In questa sezione ci limitiamo a dare la definizione di spazio di Hilbert sul campo complesso, e ad indicare alcune delle modifiche che vanno apportate alla teoria nel passare dal campo reale a quello complesso.

3.24. Spazi di Hilbert complessi. Sia X uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$, e sia $\langle\ ;\ \rangle$ un prodotto scalare (o prodotto Hermitiano) su X, vale a dire che

(i) $x \mapsto \langle x\,;\, y\rangle$ è un'applicazione lineare da X in $\mathbb{C}$ per ogni $y \in X$;

(ii) $\langle x\,;\, y\rangle = \overline{\langle y\,;\, x\rangle}$ per ogni $x, y \in X$;[12]

(iii) $\langle x\,;\, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in X$, e $\langle x\,;\, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.[13]

Come nel caso reale, al prodotto scalare è associata la norma $\|x\| := \sqrt{\langle x\,;\, x\rangle}$, e si dice che X è uno spazio di Hilbert (complesso) se questa norma è completa.

Per gli spazi di Hilbert complessi vale l'identità del parallelogramma come enunciata in precedenza, cfr. (3.2), mentre la formula di restituzione va opportunamente modificata, cfr. esercizio 3.2.

---

[9] Il fatto che l'insieme $Y := \ker(\omega) = \omega^{-1}(0)$ sia chiuso segue dal fatto che ω e continua. Questo è l'unico punto della dimostrazione in cui si usa l'ipotesi di continuità, ma è un punto essenziale.

[10] Che $Y^\perp$ non sia banale segue dal fatto che $X = Y \oplus Y^\perp$, come dimostrato nel teorema 3.18.

[11] Cioè una base secondo la definizione data nel corso di algebra lineare.

[12] Al solito $\bar{z}$ è il coniugato del numero complesso z. Le proprietà (i) e (ii) implicano che $y \mapsto \langle x\,;\, y\rangle$ è un'applicazione *antilineare* da X in $\mathbb{C}$, ed in particolare si ha che $\langle x\,;\, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x\,;\, y\rangle$.

[13] Per via della proprietà (ii) si ha che $\langle x\,;\, x\rangle = \overline{\langle x\,;\, x\rangle}$, e dunque $\langle x\,;\, x\rangle$ è sempre un numero reale.

3.25. Esempi di spazi di Hilbert complessi. (a) Lo spazio $L^2(E, \mathbb{C})$ delle funzioni L^2 a valori *complessi* sull'insieme misurabile E, vale a dire lo spazio delle funzioni misurabili $f : E \to \mathbb{C}$ tali che $\int_E |f(x)|^2 dx < +\infty$, quozientato rispetto al sottospazio delle funzioni nulle quasi ovunque, e dotato del prodotto scalare

$$\langle f \,;\, g \rangle := \int_E f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \,.$$

(b) Lo spazio $\ell^2_{\mathbb{C}}$ delle successioni $x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tali che $\sum_n |x_n|^2 < +\infty$, dotato del prodotto scalare

$$\langle x \,;\, y \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n} \,.$$

La definizione di base di Hilbert non richiede modifiche, a parte il fatto (ovvio!) che in questo contesto lo span va inteso in senso complesso e non reale. Il teorema 3.6 si estende al caso complesso senza modifiche nell'enunciato e modifiche minime nella dimostrazione; l'unica cosa a cui porre attenzione è la definizione dei coefficienti x_n come $\langle x \,;\, e_n \rangle$ e non $\langle e_n \,;\, x \rangle$ (nel caso reale non c'è differenza perché il prodotto scalare è simmetrico, ma nel caso complesso la differenza c'è). Analogo discorso vale per gli altri risultati e definizioni.

Mi limito dunque a riportare una sintesi dei risultati essenziali:

3.26. Teorema. *Sia X uno spazio di Hilbert complesso, sia $\{e_n\}$ una base di Hilbert di X. Dato $x \in X$ si ponga $x_n := \langle x \,;\, e_n \rangle$.*

Allora $\sum_n |x_n|^2 = \|x\|^2$ e la serie $\sum_n x_n e_n$ converge a x in X. Viceversa, data una successione di numeri complessi a_n tale che $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$ e la serie $\sum_n a_n e_n$ converge a x in X, allora $a_n = x_n$ per ogni n.

Infine, preso $y \in X$ con coefficienti y_n, si ha $\langle x \,;\, y \rangle = \sum x_n \overline{y_n}$ (identità di Parseval).

Appendice: proiezione su un convesso chiuso

Nel teorema 3.18 abbiamo definito la proiezione (ortogonale) di un elemento x di X su un sottospazio chiuso Y come il vettore $\bar{x}$ nella scomposizione $x = \bar{x} + \tilde{x}$ con $\bar{x} \in Y$ e $\tilde{x} \in Y^\perp$. Nello stesso teorema abbiamo dimostrato che $\bar{x}$ è caratterizzato dal fatto di essere l'elemento di Y che minimizza la distanza da x.

Questa caratterizzazione può essere usata per definire la proiezione su sottoinsiemi di X che non siano necessariamente sottospazi. Vale infatti il seguente risultato.

3.27. Teorema. *Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di X. Dato $x \in X$ esiste allora uno ed un solo punto $\bar{x} \in C$ che minimizza la distanza da x.*

Inoltre tale punto è univocamente caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\langle y - \bar{x} \,;\, x - \bar{x} \rangle \le 0 \quad \textit{per ogni } y \in C. \tag{3.9}$$

3.28. Osservazioni. (a) Il punto $\bar{x}$ è detto *proiezione* di x sul convesso C; la proprietà (3.9) dice che il convesso C è contenuto nel S semispazio (affine) costituito dagli $y \in X$ tali che

$$\langle y \,;\, x - \bar{x} \rangle \le \langle \bar{x} \,;\, x - \bar{x} \rangle$$

mentre $\bar{x}$ appartiene alla frontiera di tale semispazio, vale a dire l'iperpiano degli y per cui vale l'uguale nella precedente disuguaglianza.

(b) Se X ha dimensione finita, l'esistenza del punto di minima distanza $\bar{x}$ può essere dimostrata sotto la sola ipotesi che C sia chiuso: detta d la distanza di x da C (vale a dire l'estremo inferiore di $\|x - y\|$ tra tutti gli $y \in C$), si prende una successione di punti $y_n \in C$ tale che $\|x - y_n\|$ converge a d per $n \to +\infty$; si osserva quindi che questa successione è limitata e si estrae una sottosuccessione convergente, e a questo punto è chiaro che il limite della sottosuccessione sarà il punto $\bar{x}$ cercato: infatti $\bar{x}$ appartiene a C perché C è chiuso, e $\|x-\bar{x}\| = d$ per la continuità della norma.

Si noti che questa dimostrazione non funziona quando X ha dimensione infinita perché non è più vero che ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente (esercizio 3.14).

(c) In dimensione infinita l'ipotesi che C sia convesso è necessaria (esercizio 3.18).

Dimostrazione del teorema 3.27. Come prima cosa dimostriamo l'esistenza di $\bar{x}$. Sia dunque d la distanza di x da C e sia y_n una successione di punti in C tale che $\|x-y_n\|$ converge a d per $n \to +\infty$.

Vogliamo far vedere che (y_n) è una successione di Cauchy; una volta fatto questo è chiaro che il limite di questa successione ci darà il punto $\bar{x}$ cercato.

Per ogni n poniamo

$$\delta_n := \sup_{m \geq n} \left(\|x-y_n\|^2 - d^2 \right).$$

Presi quindi $m, m' \geq n$, applicando l'identità del parallelogramma (3.2) ai vettori $x - y_m$ e $x - y_{m'}$ otteniamo

$$\|2x - (y_m + y_{m'})\|^2 + \|y_m - y_{m'}\|^2 = 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_{m'}\|^2 \,;$$

pertanto, tenuto conto del fatto che $\frac{1}{2}(y_m + y_{m'})$ appartiene a C perché questo insieme è convesso,

$$\begin{aligned} \|y_m - y_{m'}\|^2 &= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_{m'}\|^2 - 4\big\|x - \tfrac{1}{2}(y_m+y_{m'})\big\|^2 \\ &\leq 2(d^2+\delta_n) + 2(d^2+\delta_n) - 4d^2 = 4\delta_n \,, \end{aligned}$$

e siccome δ_n tende a 0 per $n \to +\infty$ abbiamo ottenuto che la successione (y_n) è di Cauchy.

Dimostriamo ora che il punto di minima distanza è unico. Supponiamo per assurdo che esistano due punti distinti $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in C$ tali che $\|x-\bar{x}_1\| = \|x-\bar{x}_2\| = d$. Applicando l'identità del parallelogramma (3.2) ai vettori $x - \bar{x}_1$ e $x - \bar{x}_2$ otteniamo

$$\|2x - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\|^2 + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2 = 2\|x-\bar{x}_1\|^2 + 2\|x-\bar{x}_2\|^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \big\|x - \tfrac{1}{2}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\big\|^2 &= \frac{1}{2}\|x-\bar{x}_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x-\bar{x}_2\|^2 - \frac{1}{4}\|\bar{x}_1-\bar{x}_2\|^2 \\ &= d - \frac{1}{4}\|\bar{x}_1-\bar{x}_2\|^2 < d \,. \end{aligned}$$

D'altra parte $\frac{1}{2}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)$ appartiene a C, e quindi questa disuguaglianza contraddice il fatto che d sia la distanza di x da C.

Dimostriamo ora che il punto $\bar{x}$ soddisfa la proprietà (3.9). Preso $y \in C$ definiamo, per ogni $t \in [0,1]$,

$$\phi(t) := \|x - y(t)\|^2 \quad \text{con} \quad y(t) := (1-t)\bar{x} + ty \,.$$

Si ha che $\phi(0) = \|x-\bar{x}\|^2 = d^2$ e $\phi(t) = \|x-y(t)\|^2 \geq d^2$ per ogni $t \in [0,1]$ perché $y(t)$ appartiene a C (è una combinazione convessa di $\bar{x}$ e y); in particolare 0 è un punto di minimo di ϕ su $[0,1]$ e quindi deve essere $\phi'(0) \geq 0$.

D'altra parte

$$\phi(t) = \|(x-\bar{x}) - t(y-\bar{x})\|^2 = \|x-\bar{x}\|^2 - 2t\langle y-\bar{x}\,;\, x-\bar{x}\rangle + t^2\|y-\bar{x}\|^2 \tag{3.10}$$

da cui segue che

$$\phi'(0) = -2\langle y-\bar{x}\,;\, x-\bar{x}\rangle \,,$$

e quindi la disuguaglianza $\phi'(0) \geq 0$ equivale alla disuguaglianza in (3.9).

Concludiamo la dimostrazione facendo vedere che dato un punto $\bar{x} \in C$ che soddisfa la proprietà (3.9), allora $\|x - \bar{x}\| \leq \|x - y\|$ per ogni $y \in C$, ovvero $\bar{x}$ minimizza la distanza da x tra tutti i punti di C.

L'equazione (3.10) mostra che la funzione ϕ definita sopra è convessa, mentre la (3.9) implica che $\phi'(0) \geq 0$. Da questo segue che 0 è un punto di minimo di ϕ su $[0,1]$ e in particolare $\phi(0) \leq \phi(1)$; ricordando la definizione di ϕ questa disuguaglianza diventa $\|x - \bar{x}\|^2 \leq \|x - y\|^2$. □

ESERCIZI DI SVILUPPO E COMPLETAMENTO DELLA TEORIA

Esercizio 3.1. Sia X uno spazio con prodotto scalare. Verificare $\|x\| := \sqrt{\langle x\,;\,x\rangle}$ è effettivamente una norma su X.

Esercizio 3.2. (a) Sia X uno spazio con prodotto scalare. Dimostrare la formula di restituzione (3.1) e l'identità del parallelogramma (3.2).

(b) Sia X uno spazio con prodotto scalare sul campo complesso. Verificare che l'identità del parallelogramma (3.2) vale anche in questo caso, mentre la formula di restituzione (3.1) va modificata come segue:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle x\,;\,y\rangle &= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] \\
\mathrm{Im}\langle x\,;\,y\rangle &= \frac{1}{4}\left[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 3.3 [m]. Sia $L^2(\mathbb{N},\mu)$ lo spazio delle funzioni L^2 sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ dotato della misura μ che conta i punti. Ricordando che una successione di numeri reali indicizzata in $n \in \mathbb{N}$ non è altro che una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, verificare che lo spazio ℓ^2 coincide con $L^2(\mathbb{N},\mu)$, e che il prodotto scalare definito in (3.4) corrisponde al prodotto scalare su $L^2(\mathbb{N},\mu)$ definito dall'opportuno analogo della formula (3.3).

Esercizio 3.4. (a) Sia X l'insieme delle funzioni in $L^2(0,+\infty)$ che sono costanti sugli intervalli $(k, k+1]$ per ogni $k = 0, 1, \dots$ Dimostrare che X è un sottospazio chiuso di $L^2(0,+\infty)$, e che quindi X dotato del prodotto scalare di $L^2(0,+\infty)$ è uno spazio di Hilbert.

(b) Sia ϕ l'applicazione che ad ogni successione di numeri reali $x = (x_0, x_1, \dots)$ associa la funzione costante a tratti $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) := x_k$ per $t \in (k, k+1]$, $k = 0, 1, \dots$. Dimostrare che ϕ è una bigezione che porta ℓ^2 in X e soddisfa

$$\langle \phi(x)\,;\,\phi(y)\rangle = \langle x\,;\,y\rangle \quad \text{per ogni } x, y \in \ell^2,$$

dove il prodotto scalare a sinistra dell'uguale è quello definito in (3.3), mentre quello a destra è definito in (3.4).

(c) Usare quanto fatto nei punti precedenti per far vedere che ℓ^2 è effettivamente uno spazio di Hilbert.

Esercizio 3.5. Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base di Hilbert di X, e sia ϕ l'applicazione che ad ogni $x \in X$ associa la successione dei coefficienti $(x_0, x_1, \dots)$. Dimostrare quanto segue:

(a) ϕ ň applicazione lineare da X in ℓ^2;

(b) ϕ è una bigezione da X in ℓ^2;

(c) ϕ conserva il prodotto scalare.

Esercizio 3.6. Sia $\{a_i : i \in I\}$ una famiglia di numeri positivi. Dimostrare che se la somma $\sum_i a_i$ (definita nel paragrafo 3.12) è finita allora l'insieme I' degli indici i tali che $a_i \neq 0$ è al più numerabile.

Suggerimento. Scrivere I' come unione degli insiemi I_n degli indici i tali che $a_i \geq 1/n$.

Esercizio 3.7. Sia $\mathscr{F}$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert X. Dimostrare che $\mathscr{F}$ è massimale se e solo se $\mathscr{F}^\perp = \{0\}$.

Esercizio 3.8. Per ogni $n = 0, 1, \dots$ sia e_n il vettore in ℓ^2 dato da

$$e_n := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-esima coordinata}}}{1}, 0, \dots) .$$

(a) Verificare che $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale.

(b) Dimostrare che $\mathrm{Span}(\{e_n\})$ è denso in ℓ^2, e quindi $\{e_n\}$ è una base di Hilbert di ℓ^2.

Suggerimento. Dato $x = (x_0, x_1, \dots)$ in ℓ^2, dimostrare che x è il limite per $n \to +\infty$ dei vettori y_n ottenuti sostituendo con 0 tutte le coordinate di x dopo l'n-esima, vale a dire

$$y_n := (x_0, \dots, x_n, 0, \dots) .$$

(c) Dimostrare direttamente, cioè senza usare il fatto che $\{e_n\}$ è una base, che $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale massimale, ovvero che

$$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\} .$$

Commento. Questo è un altro modo di dimostrare che $\{e_n\}$ è una base di Hilbert di ℓ^2.

Esercizio 3.9. Sia X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Dimostrare che lo span di una base di Hlbert è sempre un sottospazio *proprio* di X, e di conseguenza una base di Hilbert non può mai essere una base algebrica di X.

Suggerimento. Presa una successione di elementi distinti e_n di una base di Hilbert $\mathscr{F}$, far vedere che la serie $\sum_n 2^{-n} e_n$ converge ad un elemento di X che non appartiene a $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$.

Esercizio 3.10 [i]. Dato uno spazio vettoriale V ed un nsieme F di vettori linearmente indipendenti di V, sia

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(F)$$

l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di F con coefficienti razionali. Dimostrare che se F è infinito allora $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(F)$ ha la cardinalità di F.

Esercizio 3.11 [i]. Sia X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Dimostrare che due basi di Hilbert $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ di X hanno la stessa cardinalità.

Suggerimento. Posto $D := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(F)$, dimostrare che $\mathrm{card}(\mathscr{F}) \leq \mathrm{card}(D)$ costruendo una mappa iniettiva da $\mathscr{F}$ in D come nella dimostrazione della proposizione 3.16. Usare quindi l'esercizio precedente per ottenere che $\mathrm{card}(\mathscr{F}) \leq \mathrm{card}(\mathscr{F}')$, e analogamente $\mathrm{card}(\mathscr{F}') \leq \mathrm{card}(\mathscr{F})$; concludere la dimostrazione usando il fatto che le cardinalità sono totalmente ordinate (teorema di Cantor-Bernstein).

Esercizio 3.12 [m]. Sia I un insieme qualunque; su I consideriamo la misura μ che conta i punti (definita su tutti i sottoinsiemi di I) e costruiamo lo spazio di Hilbert $L^2(I, \mu)$ al solito modo. Per ogni $i \in I$ indichiamo quindi con e_i la funzione indicatrice dell'insieme $\{i\}$, vale a dire la funzione che vale 1 in i e 0 in tutti gli altri punti.

Dimostrare che $\{e_i : i \in I\}$ è una base di Hilbert di $L^2(I, \mu)$.

Commento. Lo spazio $L^2(I, \mu)$ viene talvolta indicato con $\ell^2(I)$ e per I più che numerabile è un esempio di spazio di Hilbert non separabile.

Esercizio 3.13. Sia X uno spazio di Hilbert, Y un sottospazio chiuso di X, e per ogni $x \in X$ si prendano $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ come nel teorema 3.18. Dimostrare che le applicazioni $x \mapsto \bar{x}$ e $x \mapsto \tilde{x}$ da X in sé sono lineari e continue.

Esercizio 3.14. Sia X uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, e sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale contenuto in X. Dimostrare quanto segue:

(a) la successione $\{e_n\}$ è limitata che non ammette sottosuccessioni convergenti;

(b) la palla unitaria chiusa $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ non è compatta.

ESERCIZI

Esercizio 3.15 [*]. Sia X uno spazio spazio vettoriale dotato di una norma $\|\ \|$ che soddisfa l'identità del parallelogramma (3.2). Dimostrare che esiste un prodotto scalare $\langle\ ;\ \rangle$ su X che genera questa norma, cioè tale che $\|x\|^2 = \langle x\,;\, x\rangle$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 3.16. Verificare che la norma di $L^p(E)$ non soddisfa l'identità del parallelogramma (3.2) per alcun $p \neq 2$.

Suggerimento. Prendere come x e y le funzioni indicatrici di due insiemi disgiunti con misure diverse.

Esercizio 3.17. Dato X spazio di Hilbert X, sia $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Dimostrare che la palla B è un insieme *strettamente convesso*, cioè che per ogni coppia di punti distinti $x, y \in \partial B$ e per ogni $\lambda \in (0, 1)$ il punto $\lambda x + (1 - \lambda)y$ è interno a B.

Esercizio 3.18. Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert X, e sia

$$C := \big\{(1 + 2^{-n}e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}\,.$$

Dimostrare che:

(a) C è un sottoinsieme chiuso e limitato di X;

(b) C non è compatto;

(c) non esiste un punto di C che minimizza la distanza dall'origine.

Esercizio 3.19. Sia X uno spazio di Hilbert. Dimostrare quanto segue:

(a) dato F sottoinsieme di X, $F^\perp$ è un sottospazio chiuso di X;

(b) dato Y sottospazio chiuso di X, $(Y^\perp)^\perp = Y$;

(c) dato F sottoinsieme di X, $(F^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Span}(F)}$.

Esercizio 3.20. Sia X lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[-1, 1]$ dotato del prodotto scalare e della norma di $L^2(-1, 1)$, sia $\omega : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare data da

$$\omega(f) := \int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx\,,$$

e sia $Y := \ker \omega$. Dimostrare che:

(a) ω è continua, e quindi Y è un sottospazio chiuso di X;

(b) non esiste alcun $g \in X$ tale che $\omega(f) = \langle f\,;\, g\rangle$ per ogni $f \in X$;

(c) $Y^\perp = \{0\}$, e di conseguenza $(Y^\perp)^\perp = X \supsetneq Y$ e $Y \oplus Y^\perp = Y \subsetneq X$.

Esercizio 3.21 (Base di Haar). Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1/2 \\ -1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ ed ogni $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ sia $g_{n,k} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$g_{n,k}(x) := 2^{n/2}\, g(2^n x - k)\,.$$

Dimostrare che l'insieme $\mathscr{F}$ formato dalle funzioni $g_{n,k}$ e dalla funzione costante 1 è una base di Hilbert di $L^2(0,1)$.

Suggerimento. La verifica del fatto che $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale non presenta difficoltà. Per verificare che Span($\mathscr{F}$) è denso in $L^2(0,1)$ dimostrare che per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ ed ogni $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ le indicatrici degli intervalli diadici $I_{n,k} := [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ appartengono a Span($\mathscr{F}$), e usare quindi il fatto, dimostrato in precedenza, che lo span di queste indicatrici è denso in $L^2(0,1)$.

Commento. $\mathscr{F}$ è nota come *base di Haar* di $L^2(0,1)$.

Esercizio 3.22 [*]. Per ogni $n, k \in \mathbb{Z}$ si definisca la funzione $g_{n,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esattamente come nell'esercizio precedente. Dimostrare che $\mathscr{F} := \{g_{n,k} : n, k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.23. Sia Y l'insieme delle funzioni in $L^2(0,1)$ tali che $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

(a) Dimostrare che Y è un sottospazio chiuso di $L^2(0,1)$.

(b) Determinare $Y^\perp$, e per ogni $f \in L^2(0,1)$ scrivere le proiezioni di f su Y e su $Y^\perp$.

Esercizio 3.24. Sia Y l'insieme delle *funzioni pari* in $L^2(-1,1)$, cioè le funzioni f tali che $f(-x) = f(x)$ per q.o. x.

(a) Dimostrare che Y è un sottospazio chiuso di $L^2(-1,1)$.

(b) Determinare $Y^\perp$, e per ogni $f \in L^2(-1,1)$ scrivere le proiezioni di f su Y e su $Y^\perp$.

Esercizio 3.25. Sia C l'insieme delle funzioni in $L^2(0,1)$, tali che $|f(x)| \le 1$ per q.o. x. Dimostrare che:

(a) Y è un sottoinsieme convesso e chiuso di $L^2(-1,1)$;

(b) per ogni $f \in L^2(-1,1)$ la proiezione di f su C è la funzione $g := (f \wedge 1) \vee -1$.

Esercizio 3.26. Sia Y il sottospazio vettoriale di $L^2(-1,1)$ dato dalle funzioni polinomiali di grado al più 3. Trovare una base ortonormale di Y applicando la procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla successione di funzioni $1, x, x^2, x^3$.

Esercizio 3.27. Calcolare il minimo tra tutti gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ della quantità

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2\,dx\,.$$

Suggerimento. Osservare che la quantità da calcolare è la distanza di un elemento di un opportuno spazio di Hilbert da un sottospazio.

Esercizio 3.28. Siano $p_0, p_1, p_2, \dots$ i polinomi ottenuti applicando la procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt in $L^2(-1,1)$ alla successione di funzioni $1, x, x^2, x^3, \dots$ Dimostrare che:

(a) i polinomi p_n formano una base ortonormale di $L^2(-1,1)$;

(b) ciascun p_n è pari o dispari a seconda che n sia pari o dispari.

Suggerimento. Per il punto (a) usare il fatto che i polinomi sono densi in $L^2(-1,1)$.

Esercizio 3.29. Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $\varphi(x) > 0$ per q.o. $x \in I$. Indichiamo quindi con $L^2_\varphi(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ tali che

$$\int_I |f(x)|^2\,\varphi(x)\,dx < +\infty\,,$$

quozientato rispetto al sottospazio delle funzioni quasi ovunque nulle, e su tale spazio definiamo il prodotto scalare

$$\langle f\,;\,g\rangle_\varphi := \int_I f(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

(a) Costruire un'applicazione lineare bigettiva da $L^2_\varphi(I)$ in $L^2(I)$, ed usarla per dimostrare che $L^2_\varphi(I)$ è uno spazio di Hilbert.

(b) Dimostrare che $L^2_\varphi(I) \supset L^2(I)$ se esiste $m_1 < +\infty$ tale che $\varphi \leq m_1$ q.o.

(c) Dimostrare che $L^2_\varphi(I) \subset L^2(I)$ se esiste $m_2 > 0$ tale che $\varphi \geq m_2$ q.o.

(d) Dimostrare che sia nell'enunciato (b) che (c) vale anche il "solo se".

Esercizio 3.30. Sia $X := L^2(0,1)$, sia Y il sottospazio delle funzioni continue su $[0,1]$, e sia $\omega : Y \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $\omega(f) := f(0)$. Dimostrare che:

(a) Y è denso in X;

(b) ω non è continua nella topologia indotta da X.

Commento. Poiché ogni applicazione lineare definita su un sottospazio di uno spazio vettoriale può essere estesa ad un'applicazione lineare su tutto lo spazio, possiamo prendere un'estensione di ω a tutto X, ottenendo così un altro esempio di applicazione lineare da X in $\mathbb{R}$ non continua.

Esercizio 3.31. Sia $X := L^2(\mathbb{R})$ e sia Y il sottospazio delle funzioni con supporto limitato, e sia $\omega : Y \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $\omega(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$. Dimostrare che:

(a) Y è denso in X;

(b) ω non è continua nella topologia indotta da X.

Esercizio 3.32. Il teorema 3.27 è stato enunciato per uno spazio di Hilbert sul campo reale. Enunciare e dimostrare questo teorema nel caso di spazi di Hilbert sul campo complesso (è necessario modificare la condizione (3.9)).

appunti per il corso di Analisi in più Variabili 2
corso di laurea in Matematica, a.a. 2012-13
Giovanni Alberti

Capitolo 4. Serie di Fourier

[versione: 15/11/2012]

Serie di Fourier complessa: definizione e teorema fondamentale

Lo scopo della serie di Fourier è rappresentare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di periodo 2π come combinazione lineare (infinita) delle funzioni e^{inx} con $n \in \mathbb{Z}$.[1] Per la precisione ci si chiede sotto quali ipotesi è possibile scrivere la funzione f come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,, \tag{4.1}$$

e come determinare i coefficienti c_n; in seconda battuta ci si chiede in che senso la serie converge.

Una prima risposta a queste domande la si ottiene notando che le funzioni e_n definite per ogni $n \in \mathbb{Z}$ da

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx} \tag{4.2}$$

formano una base di Hilbert dello spazio di Hilbert *complesso* $L^2(-\pi, \pi)$.[2] Usando questo fatto (la cui dimostrazione rimandiamo a dopo) e la definizione del prodotto scalare si ottiene infatti che

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f\,;\, e_n\rangle\, e_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny} dy\right]}_{\substack{\shortparallel \\ c_n}} e^{inx}\,.$$

I numeri $c_n = c_n(f)$ vengono detti *coefficienti di Fourier* della funzione f, e la serie $\sum_n c_n e^{inx}$ è detta *serie di Fourier* di f.[3] Il teorema che segue esprime in modo preciso quanto appena detto.

4.1. Teorema. *Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ definiamo*

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Allora vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\,, \tag{4.4}$$

---

[1] L'utilità di una simile rappresentazione è l'argomento del prossimo capitolo.

[2] A meno che non si specifichi altrimenti, in questo capitolo $L^2(-\pi, \pi)$ indicherà sempre lo spazio vettoriale complesso delle funzioni L^2 su $[-\pi, \pi]$ a valori in $\mathbb{C}$ (cfr. paragrafo 3.25); in particolare il prodotto scalare è

$$\langle f\,;\, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\, dx\,.$$

[3] Per la precisione si parla di coefficienti di Fourier *complessi* e di serie di Fourier *complessa*; la serie di Fourier reale verrà introdotta più tardi.

e la serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

converge alla funzione f in $L^2(-\pi,\pi)$; per la precisione questo significa che le somme parziali simmetriche

$$S_m(x) = S_m f(x) := \sum_{-m}^{m} c_n\, e^{inx}$$

convergono in $L^2(-\pi,\pi)$ alla funzione f quando $m \to +\infty$.[4]

Nella proposizione che segue esplicitiamo alcune conseguenza più o meno evidenti di questo teorema:

4.2. Proposizione. *Siano f e g funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$ con coefficienti di Fourier c_n e d_n rispettivamente. Allora*

(i) *i coefficienti determinano univocamente la funzione: se $c_n = d_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ allora $f = g$ (quasi ovunque);*

(ii) *la rappresentazione di f in termini delle funzioni e^{inx} è unica: se $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è una famiglia di numeri complessi tali che $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$ e la serie $\sum_n a_n e^{inx}$ converge ad $f(x)$ in $L^2(-\pi,\pi)$, allora $a_n = c_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;*

(iii) *vale l'identità di Parseval nella forma più generale*

$$\langle f\,;\, g\rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \overline{d_n}\,. \tag{4.5}$$

4.3. Osservazioni. (a) Quando la funzione f è chiara dal contesto i coefficienti di Fourier verranno indicati con c_n invece che $c_n(f)$; lo stesso discorso vale per le somme parziali della serie di Fourier.

(b) La convergenza nella norma L^2 delle somme parziali $S_m f$ alla funzione f implica la convergenza in misura, ma non necessariamente la convergenza puntuale in quasi ogni punto. In altre parole, il teorema 4.1 non implica che l'identità (4.1) vale per quasi ogni x.[5] Nella prossima sezione vedremo che sotto opportune ipotesi (sulla regolarità della funzione f) le somme parziali $S_m f$ convergono ad f uniformemente.

(c) Nel teorema 4.1 e nella proposizione 4.2 abbiamo supposto che f sia una funzione in $L^2(-\pi,\pi)$. Tuttavia l'enunciato si applica anche a funzioni f definite su tutto $\mathbb{R}$, di periodo 2π, e la cui restrizione all'intervallo $[-\pi,\pi]$ appartiene a L^2; in tal caso le somme parziali $S_m f$ convergono a f in $L^2(I)$ per ogni intervallo limitato I. Questo spazio di funzioni viene indicato con L^2_{per}, e per certi versi costituisce il contesto naturale per la serie di Fourier (cfr. esercizi 4.6 e 4.7).

(d) È possibile usare la formula (4.3) per definire i coefficienti di Fourier $c_n(f)$ di una qualunque funzione f in $L^1(-\pi,\pi)$. In questo contesto è ancora vero che una funzione è univocamente determinata dai coefficienti di Fourier (esercizio 4.3), ma non si può dire quasi nulla sulla convergenza della serie di Fourier.

Dimostrazione del teorema 4.1 e della proposizione 4.2. Otteniamo entrambi gli enunciati applicando allo spazio $L^2(-\pi,\pi)$ e alla base formata dalle funzioni e_n in (4.2) i risultati generali sulle basi di Hilbert dimostrati nel capitolo precedente, vale a dire il teorema 3.6

[4] In generale con $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ si intende il limite per $m \to +\infty$ delle somme parziali simmetriche $\sum_{-m}^{m} a_n$.

[5] In realtà è vero che per q.o. x la somma parziale $S_m f(x)$ tende a $f(x)$ e quindi vale la (4.1), ma questo è un risultato tutt'altro che elementare e relativamente recente (Lennart Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Mathematica*, 116 (1966), pagg. 135-157).

(o meglio la sua variante per gli spazi complessi, cioè il teorema 3.26) e la proposizione 3.8. Dunque dobbiamo solo dimostrare che $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Hilbert di $L^2(-\pi, \pi)$.

Verifichiamo innanzitutto che questo sistema è ortonormale:

$$\begin{aligned}\langle e_n ; e_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \overline{\frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 1 & \text{se } n = m, \\ \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases}\end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione dobbiamo far vedere che $\mathrm{Span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è denso in $L^2(-\pi, \pi)$. Osserviamo che questo span coincide con l'insieme $\mathscr{A}$ dei *polinomi trigonometrici complessi*—cioè le combinazioni lineari (complesse) delle funzioni e^{inx} con $n \in \mathbb{Z}$.[6] La dimostrazione di questo fatto è divisa in vari passi. Il punto chiave è il risultato di densità dato nel primo passo.

Passo 1: $\mathscr{A}$ è denso rispetto alla norma del sup nell'insieme

$$X := \big\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} : \ f \text{ è continua e } f(\pi) = f(-\pi) \big\} .$$

Uno dei corollari del teorema di Stone-Weierstrass (corollario 4.19) dice infatti che i polinomi trigonometrici complessi sono densi rispetto alla norma del sup nello spazio C_{per} delle funzioni continue e 2π-periodiche su $\mathbb{R}$. Basta quindi osservare che le funzioni in X coincidono con le restrizioni all'intervallo $[-\pi, \pi]$ delle funzioni in C_{per}.

Passo 2: $\mathscr{A}$ è denso in X rispetto alla norma di $L^2(-\pi, \pi)$. Ricordiamo che sugli insiemi di misura finita, come ad esempio $[-\pi, \pi]$, la convergenza uniforme implica la convergenza in L^p per ogni $p \geq 1$; quindi essendo $\mathscr{A}$ denso in X rispetto alla norma del sup (passo 1) è denso anche rispetto alla norma L^2.

Passo 3: X è denso in $C([-\pi, \pi])$ rispetto alla norma di $L^2(-\pi, \pi)$.[7] Approssimiamo una qualunque funzione $f \in C([-\pi, \pi])$ tramite le funzioni $f_\varepsilon \in X$ date da

$$f_\varepsilon := f \cdot \sigma_\varepsilon$$

dove $\sigma_\varepsilon : [-\pi, \pi] \to [0, 1]$ è una qualunque funzione continua che vale 0 in $\pm\pi$ e vale 1 in $[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

Si verifica subito che f_ε appartiene a X e che $f_\varepsilon(x)$ converge a $f(x)$ per ogni $x \neq \pm\pi$ quando $\varepsilon \to 0$; per ottenere che f_ε converge a f in L^2 basta quindi applicare il teorema di convergenza dominata all'integrale $\int |f - f_\varepsilon|^2$, usando come dominazione

$$|f - f_\varepsilon|^2 = |f|^2 (1 - \sigma_\varepsilon)^2 \leq |f|^2 .$$

Conclusione. Mettendo insieme i passi 2 e 3 ed il fatto, già visto, che $C([-\pi, \pi])$ è denso in $L^2(-\pi, \pi)$ si ottiene che $\mathscr{A}$ è denso in $L^2(-\pi, \pi)$. □

Regolarità della funzione e convergenza della serie di Fourier

Come osservato nel capitolo precedente, sotto la sola ipotesi che la funzione f sia di classe L^2 l'unica informazione disponibile sui coefficienti di Fourier c_n è che $\sum |c_n|^2 < +\infty$;

[6] Con leggero abuso di notazione, $\mathscr{A}$ indica sia l'insieme dei polinomi trigonometrici intesi come funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ sia, in questo contesto, le loro restrizioni all'intervallo $[-\pi, \pi]$.

[7] Si noti che rispetto alla norma del sup X è un sottospazio chiuso e proprio di $C([-\pi, \pi])$, e di conseguenza non è denso in $C([-\pi, \pi])$.

questo implica che le somme parziali della serie di Fourier convergono a f nella norma L^2, e quindi in misura, ma non se ne può derivare alcun risultato di convergenza puntuale.

L'osservazione chiave da cui partiamo in questa sezione è che se f è di classe C^1 su $[-\pi,\pi]$ e assume valori uguali in $\pm\pi$, allora i coefficienti della derivata f' sono dati dalla formula $c_n(f') = in\, c_n$ (proposizione 4.4). Grazie a questa uguaglianza e all'identità di Parseval (4.4) applicata alla funzione f' otteniamo che $\sum_n n^2|c_n|^2 < +\infty$, e questo ci permette di dimostrare che $\sum_n |c_n| < +\infty$; poiché inoltre $|c_n|$ è la norma del sup della funzione $c_n e^{inx}$, questo significa che la serie $\sum_n c_n e^{inx}$ converge a f totalmente, e quindi uniformemente (teorema 4.5).

Nella seconda parte di questa sezione generalizziamo queste considerazioni facendo vedere che la regolarità della funzione (vale a dire il grado di differenziabilità) è strettamente legata al comportamento asintotico dei coefficienti per $n \to +\infty$: tanto più la funzione è regolare quanto più velocemente i coefficienti tendono a 0, e viceversa.

Cominciamo con una semplice osservazione: data una funzione f con coefficienti di Fourier c_n, derivando l'identità $f(x) = \sum_n c_n\, e^{inx}$ otteniamo, almeno formalmente, che $f'(x) = \sum_n inc_n\, e^{inx}$ e quindi i coefficienti di Fourier di f' *dovrebbero* essere inc_n.

Il condizionale è dovuto al fatto che questa dimostrazione è puramente formale (in generale la derivata di una somma infinita di funzioni non coincide con la somma delle derivate). Possiamo tuttavia dimostrare il seguente risultato:

4.4. Proposizione (coefficienti di Fourier della derivata). *Sia f una funzione di classe C^1 su $[-\pi,\pi]$ tale che $f(-\pi) = f(\pi)$. Allora*

$$c_n(f') = in\, c_n(f) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.[8] \tag{4.6}$$

L'ipotesi $f(-\pi) = f(\pi)$ è necessaria: un semplice calcolo mostra infatti che i coefficienti della funzione x sono $c_n(x) = (-1)^n/(in)$ per $n \neq 0$ e $c_0(x) = 0$, mentre i coefficienti della derivata di x, cioè della funzione 1, sono ovviamente $c_n(1) = 0$ per $n \neq 0$ e $c_n(0) = 1$, e quindi non soddisfano la formula (4.6). (Vedere anche l'esercizio 4.8.)

Dimostrazione. Applichiamo la formula di integrazione per parti alla definizione dei coefficienti $c_n(f')$:

$$\begin{aligned} c_n(f') &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big| f(x)\, e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, (e^{-inx})' dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = in\, c_n(f)\,. \end{aligned}$$ □

4.5. Teorema (convergenza uniforme della serie di Fourier). *Sia f una funzione di classe C^1 su $[-\pi,\pi]$ tale che $f(-\pi) = f(\pi)$. Allora i coefficienti di Fourier $c_n = c_n(f)$ soddisfano*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty\,, \tag{4.7}$$

e la serie di Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ converge a f uniformemente su $[-\pi,\pi]$.

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno del seguente lemma.

[8] Si noti che la funzione f' è continua su $[-\pi,\pi]$ e di conseguenza i coefficienti $c_n(f')$ sono ben definiti.

4.6. Lemma. *Per ogni numero reale a ed ogni successione di numeri complessi c_n si ha che*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2a}|c_n|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{b}|c_n| < +\infty \text{ per ogni } b < a - \frac{1}{2}.$$

Poiché l'espressione 0^α non ha senso per $\alpha < 0$, ad essere precisi dovremmo modificare questo enunciato considerando in ciascuna somma solo gli indici $n \neq 0$.

Dimostrazione. Scriviamo la serie $\sum_n |n|^b|c_n|$ nella forma $\sum_n a_n b_n$ con $a_n := |n|^{b-a}$ e $b_n := |n|^a|c_n|$ e applichiamo la disuguaglianza di Schwartz

$$\sum_n a_n b_n \leq \Big(\sum_n a_n^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_n b_n^2\Big)^{1/2}.$$

Così facendo otteniamo

$$\sum_n |n|^b|c_n| \leq \Big(\sum_n |n|^{2(b-a)}\Big)^{1/2} \Big(\sum_n |n|^{2a}|c_n|^2\Big)^{1/2},$$

ed entrambi i fattori del prodotto a destra del $\leq$ sono finiti, il primo perché $2(b-a) < -1$ e il secondo per ipotesi. $\square$

Dimostrazione del teorema 4.5. Siccome f' è una funzione continua su $[-\pi, \pi]$, è anche limitata e quindi

$$+\infty > \|f'\|_\infty^2 \geq \frac{1}{2\pi}\|f'\|_2^2 = \sum_n \big|c_n(f')\big|^2 = \sum_n |n|^2|c_n|^2,$$

dove la prima uguaglianza segue dall'identità di Parseval (4.4), e la seconda dalla formula (4.6). Applicando quindi il lemma 4.6 con $a = 1$ e $b = 0$ otteniamo la (4.7).

Poiché inoltre $|c_n|$ coincide con la norma del sup della funzione $c_n e^{inx}$ su $\mathbb{R}$, dalla (4.7) segue che la serie di Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$, e quindi anche uniformemente, ad una funzione continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Non ci resta che dimostrare che la funzione g coincide con f su $[-\pi, \pi]$. Siccome la convergenza uniforme implica quella in L^2 su ogni insieme di misura finita, la serie di Fourier converge a g anche in $L^2(-\pi, \pi)$, ma noi sappiamo che il limite della serie di Fourier in questo spazio è f, e dunque g deve coincidere con f come elemento di $L^2(-\pi, \pi)$, il che significa che $f = g$ quasi ovunque in $[-\pi, \pi]$. Infine, siccome f e g sono funzioni continue il "quasi ovunque" può essere eliminato, e quindi $f = g$ in $[-\pi, \pi]$. $\square$

Per estendere il teorema 4.5 a funzioni con regolarità superiore, abbiamo bisogno di richiamare alcuni fatti più o meno noti sulle funzioni regolari e di introdurre alcune definizioni.

4.7. Funzioni regolari su un intervallo. Dato un intero $k = 0, 1, \ldots$ e un intervallo I chiuso e limitato, indichiamo al solito con $C^k(I)$ lo spazio della funzioni f su I con derivate continue fino all'ordine k,[9] Su tale spazio si definisce la norma

$$\|f\|_{C^k(I)} := \sum_{h=0}^{k} \|D^h f\| \tag{4.8}$$

dove $\|\ \|$ indica la norma del sup su I.

[9] Scriviamo $C(I)$ al posto di $C^0(I)$. Scriviamo inoltre $C^k(I;\mathbb{R})$ o $C^k(I;\mathbb{C})$ quando vogliamo specificare se si tratta di funzioni a valori reali o complessi; in questo capitolo il default è considerare funzioni complesse.

Ricordo il seguente fatto fondamentale: se le funzioni $f_n \in C^1(I)$ convergono uniformemente (su I) ad una funzione f e le derivate f_n' convergono uniformemente ad una funzione g, allora f appartiene a $C^1(I)$ e $f' = g$.

Questo enunciato si generalizza come segue: se le funzioni $f_n \in C^k(I)$ convergono uniformemente ad una funzione f e per ogni $h = 1, \dots, k$ le derivate di $D^h f_n$ convergono uniformemente ad una funzione g_h, allora f appartiene a $C^k(I)$ e $D^h f = g_h$ per ogni $h = 1, \dots, k$. Da questo enunciato e dalla completezza delle funzioni continue rispetto alla norma del sup segue immediatamente che lo spazio $C^k(I)$, dotato della norma definita in (4.8), è completo.

Di conseguenza, data una successione di funzioni $g_n \in C^k(I)$ tale che

$$\sum_n \|g_n\|_{C^k(I)} < +\infty \,,$$

si ha che la serie $\sum_n g_n$ converge uniformemente con tutte le derivate fino all'ordine k ad una funzione f in $C^k(I)$; per la precisione questo significa che dette f_m le somme parziali della serie, $D^h f_m$ converge a $D^h f$ per ogni $h = 0, \dots, k$.

4.8. Funzioni regolari e 2π-periodiche. Dato $k = 0, 1, \dots$ indichiamo con C^k_{per} lo spazio delle funzioni di classe C^k su $\mathbb{R}$ con periodo 2π.[10] Definiamo la norma di C^k_{per} come nel paragrafo precedente, vale a dire

$$\|f\|_{C^k_{\mathrm{per}}} := \sum_{h=0}^{k} \|D^h f\| \tag{4.9}$$

dove $\| \;\|$ è la norma del sup su tutto $\mathbb{R}$. Per questo spazio valgono tutte le osservazioni sulla completezza fatte nel paragrafo precedente per lo spazio $C^k(I)$.

In seguito diremo, in modo leggermente improprio, che una funzione f definita su $[-\pi, \pi]$ appartiene a C^k_{per} quando coincide con la restrizione all'intervallo $[-\pi, \pi]$ di una funzione in C^k_{per}; questo equivale a dire che f è di classe C^k e soddisfa le condizioni di periodicità

$$D^h f(-\pi) = D^h f(\pi) \quad \text{per ogni } h = 0, \dots, k.$$

4.9. Proposizione. *Dato $k = 1, 2, \dots$, sia f una funzione in C^k_{per} con coefficienti di Fourier c_n. Allora*

(i) $c_n = o(|n|^{-k})$ *per* $n \to \pm\infty$;

(ii) $\sum_n |n|^{2k} |c_n|^2 < +\infty$;

(iii) $\sum_n |n|^a |c_n| < +\infty$ *per ogni* $a < k - \frac{1}{2}$;

(iv) *la serie di Fourier* $\sum_n c_n e^{inx}$ *converge a f uniformemente su $\mathbb{R}$ con tutte le derivate fino all'ordine* $k - 1$.

4.10. Osservazioni. (a) Gli enunciati (i), (ii) e (iii) corrispondono a diversi modi di quantificare la velocità con cui i coefficienti c_n tendono a zero quando $n \to \pm\infty$. Notare che queste condizioni non sono equivalenti: per la precisione (ii) implica sia (i) che (iii), ma in nessuno dei due casi vale il viceversa.

(b) Il motivo per cui, oltre a specificare l'ordine di infinitesimo dei coefficienti c_n come nell'enunciato (i), usiamo anche altri modi di esprimere la velocità di decadimento dei c_n è il seguente: la condizione (ii) è quella che si ottiene naturalmente a partire dal fatto che f appartiene a C^k_{per}, mentre la (iii) è la condizione che serve per dimostrare l'enunciato (iv).

(c) In sostanza questa proposizione afferma che quanto più la funzione f è regolare (cioè quanto più grande è k) tanto più velocemente i suoi coefficienti di Fourier tendono a zero.

[10] Scriviamo C_{per} al posto di C^0_{per}. Anche qui possiamo considerare sia funzioni a valori reali che complessi; il default in questo capitolo sono le funzioni complesse.

Il prossimo risultato mostra che vale anche il viceversa: se i coefficienti di Fourier tendono a zero velocemente, allora la funzione deve essere regolare.

4.11. Proposizione. *Sia $k = 1, 2, \dots$ e sia f una funzione in $L^2(-\pi, \pi)$ con coefficienti di Fourier c_n. Supponiamo inoltre che valga almeno una delle seguenti condizioni:*

(i) $c_n = O(|n|^{-a})$ *per* $n \to \pm\infty$ *con* $a > k + 1$*;*

(ii) $\sum_n |n|^{2b} |c_n|^2 < +\infty$ *con* $b > k + \frac{1}{2}$*;*

(iii) $\sum_n |n|^k |c_n| < +\infty$*.*

Allora f coincide quasi ovunque in $[-\pi, \pi]$ con una funzione $g \in C^k_{\mathrm{per}}$.

Passiamo ora alla dimostrazione di queste due proposizioni.

Dimostrazione delle proposizione 4.9. Questa dimostrazione è una modifica di quella del teorema 4.5. Lo schema è il seguente: prima dimostriamo l'enunciato (ii), poi facciamo vedere che questo implica sia (i) che (iii), ed infine mostriamo che l'enunciato (iii) con $a := k - 1$ implica (iv).

(ii) Applicando ripetutamente la proposizione 4.4 si ottiene che

$$c_n(D^k f) = (in)^k c_n(f) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z},$$

e quindi

$$+\infty > \|D^k f\|_\infty^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|D^k f\|_2^2 = \sum_n \left|c_n(D^k f)\right|^2 = \sum_n |n|^{2k} |c_n|^2 .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Poiché la somma di tutti gli $|n|^{2k}|c_n|^2$ è finita, questi numeri devono tendere a zero per $n \to \pm\infty$, ovvero $c_n = o(|n|^{-k})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Basta applicare il lemma 4.6.

[(iii) con $a := k - 1$] $\Rightarrow$ (iv). Si osservi che per $n \neq 0$

$$\left\|c_n e^{inx}\right\|_{C^{k-1}_{\mathrm{per}}} = \sum_{h=0}^{k-1} \left\|c_n (in)^h e^{inx})\right\| = \sum_{h=0}^{k-1} |n|^h |c_n| \leq k\, |n|^{k-1} |c_n| .$$

Quindi l'enunciato (iii) con $a := k-1$ implica che la somma delle norme C^{k-1}_{per} delle funzioni $c_n e^{inx}$ è finita, e per quanto detto in precedenza (§4.7 e §4.8) questo implica che la serie $\sum_n c_n e^{inx}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ e con tutte le derivate fino all'ordine $k - 1$ ad una funzione $g \in C^{k-1}_{\mathrm{per}}$.

Per far vedere che g coincide con f si procede come nella dimostrazione del teorema 4.5.

□

Dimostrazione della proposizione 4.11. Lo schema della dimostrazione è il seguente: prima facciamo vedere che sia la condizione (i) che la (ii) implicano la (iii), e poi che questa implica la tesi.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Basta osservare che $|n|^k |c_n| = O(|n|^{k-a})$ e che la serie $\sum_n |n|^{k-a}$ è finita perché $k - a < -1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Basta applicare il lemma 4.6.

Supponiamo ora che valga la (iii). Procedendo come nella dimostrazione precedente si ottiene che la somma delle norme C^k_{per} delle funzioni $c_n e^{inx}$ è finita, e quindi la serie $\sum_n c_n e^{inx}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ e con tutte le derivate fino all'ordine k ad una funzione $g \in C^k_{\mathrm{per}}$.

Per far vedere che g coincide con f quasi ovunque in $[-\pi, \pi]$ si procede come nella dimostrazione del teorema 4.5. □

APPENDICE: SULLA CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

Nel teorema 4.5 abbiamo dimostrato che se f è una funzione di classe C^1 su $[-\pi, \pi]$ che soddisfa $f(-\pi) = f(\pi)$ allora la sua serie di Fourier converge uniformemente a f. In questa sezione discutiamo brevemente alcune estensioni di questo risultato a classi di funzioni più ampie.

Osserviamo per cominciare se la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f allora quest'ultima deve necessariamente essere una funzione continua su $[-\pi, \pi]$ che soddisfa la condizione di periodicità $f(-\pi) = f(\pi)$, ovvero deve essere (la restrizione di) una funzione in C_{per}. Infatti questa proprietà vale per le somme parziali della serie di Fourier ed è stabile per convergenza uniforme.

Tuttavia l'essere una funzione in C_{per} non è sufficiente a garantire che la serie di Fourier converge uniformemente: esistono funzioni $f \in C_{\text{per}}$ ed insiemi D densi in $\mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in D$ le somme parziali $S_m f(x)$ non convergono ad $f(x)$ ma sono anzi illimitate, cioè il limsup di $|S_m f(x)|$ per $m \to +\infty$ è infinito.[11]

In effetti i risultati di convergenza uniforme richiedono che la funzione f, oltre ad essere in C_{per}, soddisfi qualche ulteriore condizione di regolarità.

4.12. Funzioni C^k a tratti. Dato $k = 0, 1, \ldots$, una funzione f su un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ è di classe C^k *a tratti* se esiste un numero finito di punti $x_0, \ldots, x_n$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, tale che f coincide su ogni intervallo aperto (x_{i-1}, x_i) con una funzione f_i di classe C^k definita sull'intervallo chiuso $[x_{i-1}, x_i]$.[12] Di conseguenza, in ciascuno dei punti x_i esistono sia il limite sinistro che quello destro:

$$f(x_i^-) := \lim_{x \to x_i^-} f(x) = f_i(x_i)\,, \quad f(x_i^+) := \lim_{x \to x_i^+} f(x) = f_{i+1}(x_i)\,,$$

e in particolare f è continua in x_i se e solo se $f(x_i) = f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i)$ (quanto appena detto va opportunamente modificato nel caso dei punti x_0 e x_n).

Inoltre per $k \geq 1$ la derivata f' (o meglio, qualunque funzione ottenuta estendendo f' in modo arbitrario nei punti dove f non è derivabile) è di classe C^{k-1} a tratti.

Diciamo infine che una funzione su $\mathbb{R}$ è di classe C^k a tratti se la sua restrizione a qualunque intervallo chiuso e limitato è di classe C^k a tratti.

Possiamo ora enunciare una prima estensione del teorema 4.5.

4.13. Proposizione. *Sia f una funzione in C_{per} e di classe C^1 a tratti con coefficienti di Fourier c_n. Allora $\sum_n |c_n| < +\infty$, e di conseguenza la serie di Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ converge uniformemente a f.*

Il punto chiave della dimostrazione è far vedere che la funzione f soddisfa la formula $c_n(f') = in\, c_n(f)$ (esercizio 4.10); fatto questo è possibile ripetere passo passo la dimostrazione del teorema 4.5 (la verifica è lasciata per esercizio).

Ci si può ora chiedere cosa succede se f è C^1 a tratti ma non continua. In questo caso la convergenza della serie di Fourier non può essere uniforme, ma vale il seguente risultato:

4.14. Proposizione. *Sia f una funzione su $\mathbb{R}$ di periodo 2π e di classe C^1 a tratti con coefficienti di Fourier c_n. Allora*

---

[11] Le funzioni f con questa proprietà sono in realtà la maggior parte, nel senso che formano un insieme *residuale* nello spazio di Banach C_{per}, cioè un insieme che contiene un'intersezione numerabile di aperti densi. La dimostrazione non è particolarmente complicata, ma richiede alcune nozioni di base di analisi funzionale e va quindi al di là degli scopi di questo corso.

[12] In particolare non si impongono condizioni sul valore assunto da f nei punti x_i.

(i) *la somma parziale S_m della serie di Fourier di f converge a uniformemente a f per $m \to +\infty$ su ogni intervallo chiuso e limitato I che non contiene punti di discontinuità di f; in particolare $S_m(x)$ converge a $f(x)$ in tutti i punti x in cui f è continua;*

(ii) *$S_m(x)$ converge alla semisomma $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ del limite destro e sinistro di f in x in tutti i punti x in cui f è discontinua.*

Traccia della dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità che la funzione f coincida con la semisomma $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ in tutti i punti di discontinuità.

Sia $g_0(x)$ la funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ la cui restrizione all'intervallo $[0, 2\pi)$ è data da

$$g_0(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \pi - x & \text{se } 0 < x < 2\pi, \end{cases} \tag{4.10}$$

e per ogni $h \in [-\pi, \pi)$ sia g_h la traslazione di g data da $g_h(x) := g(x - h)$. Dunque g_h è una funzione C^1 a tratti e 2π-periodica la cui unica discontinuità nel periodo $[-\pi, \pi)$ è nel punto h. In tale punto i limiti destro e sinistro di g_h sono rispettivamente π e $-\pi$, mentre il valore della funzione è 0, e quindi coincide con la semisomma di limite destro e sinistro.

Passo 1. Detto D l'insieme dei punti di discontinuità di f contenuti nel periodo $[-\pi, \pi)$, scomponiamo la funzione f come

$$f(x) = f_c(x) + \sum_{h \in D} d_h \, g_h(x) \quad \text{con } d_h := \frac{f(h^+) - f(h^-)}{2\pi}.$$

Dimostrare che la funzione f_c è di classe C^1 a tratti e *continua*.

Passo 2. Usare la proposizione 4.13 per far vedere che la somma parziale $S_m f_c$ della serie di Fourier di f_c converge uniformemente a f_c.

Passo 3. Dimostrare direttamente gli enunciati (i) e (ii) nel caso in cui f è la funzione g_0 (questo è il punto più delicato: una traccia dettagliata è data nell'esercizio 4.12).

Passo 4. Usare il punto 3 e il fatto che $S_m g_h(x) = S_m g_0(x - h)$ (cfr. esercizio 4.7(c)) per dimostrare gli enunciati (i) e (ii) nel caso in cui f è la funzione g_h.

Passo 5. Usare i punti 2 e 4 e il fatto che

$$S_m f(x) = S_m f_c(x) + \sum_{h \in D} d_h \, S_m g_h(x)$$

per far vedere che f soddisfa (i) e (ii). □

4.15. Funzioni Hölderiane. Dato $\alpha \in (0, 1]$ e una funzione f definita su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^d$ (o più in generale su uno spazio metrico), si dice che f è *Hölderiana di esponente* α (o α-Hölderiana) se esiste una costante finita C tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in E. \tag{4.11}$$

Le funzioni Hölderiane di esponente 1 sono dette *Lipschitiziane.*

4.16. Proposizione. *Sia f una funzione in C_{per} e α-Hölderiana con coefficienti di Fourier c_n. Allora*

$$\sum_{n \neq 0} |n|^\beta |c_n| < +\infty \quad \textit{per ogni } \beta < \alpha - \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

In particolare se $\alpha > \frac{1}{2}$ allora $\sum_n |c_n| < +\infty$, e di conseguenza la serie di Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ converge uniformemente a f.

Traccia della dimostrazione. La quantità chiave da considerare è

$$I(\gamma) := \int_0^1 \frac{1}{h^{2\gamma}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx \, dh \,.$$

Passo 1. Usare il fatto che f è α-Hölderiana per dimostrare che

$$I(\gamma) < +\infty \quad \text{per ogni } \gamma < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Passo 2. Usare il fatto che i coefficienti di Fourier della funzione traslata $f(x+h)$ sono $e^{inh} c_n$ (esercizio 4.7(b)) e l'identità di Parseval (4.4) per dimostrare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx = 2\pi \sum_n |e^{inh} - 1|^2 \, |c_n|^2 \, ;$$

dedurne quindi che

$$I(\gamma) = \sum_n a(\gamma, n) \, |c_n|^2 \quad \text{con } a(\gamma, n) := 2\pi \int_0^1 \frac{|e^{inh} - 1|^2}{h^{2\gamma}} \, dh \,.$$

Passo 3. Usare il cambio di variabile $t = nh$ nell'integrale che definisce $a(\gamma, n)$ per dimostrare che $a(\gamma, n) \geq a(\gamma) \, n^{2\gamma - 1}$ per un opportuno numero $a(\gamma) > 0$, e dunque

$$I(\gamma) \geq a(\gamma) \sum_n |n|^{2\gamma - 1} |c_n|^2 \,.$$

Passo 4. Usare quanto fatto nei passi 1 e 3 per dimostrare che

$$\sum_{n \neq 0} |n|^{2\gamma - 1} |c_n|^2 < +\infty \quad \text{per ogni } \gamma < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Usare quindi il lemma 4.6 per ottenere la (4.12). □

APPENDICE: IL TEOREMA DI STONE-WEIERSTRASS

Sia K uno spazio topologico compatto e separato (cioè di Hausdorff, o T_2) e al solito indichiamo con $C(K)$ lo spazio delle funzioni continue su K a valori reali o complessi dotato della norma del sup.

Dato un sottoinsieme $\mathscr{A}$ di $C(K)$ si dice che

- $\mathscr{A}$ è una *sottoalgebra* di $C(K)$ se è un sottospazio vettoriale chiuso rispetto al prodotto di funzioni;
- $\mathscr{A}$ *separa i punti* se dati $x_1 \neq x_2$ in K esiste $f \in \mathscr{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$;

inoltre, nel caso di funzioni a valori complessi, si dice che

- $\mathscr{A}$ è chiuso per *coniugio* se $f \in \mathscr{A}$ implica che $\bar{f} \in \mathscr{A}$.

4.17. Teorema (di Stone-Weierstrass). *Sia $\mathscr{A}$ una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti, contiene le funzioni costanti e, nel caso complesso, è chiusa per coniugio. Allora $\mathscr{A}$ è densa in $C(K)$.*

L'ipotesi che K sia compatto è necessaria: se indichiamo con $C(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ e con $\mathscr{A}$ il sottospazio di quelle che ammettono limite a $\pm\infty$, si vede subito che $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra (propria) che separa i punti, contiene le costanti, ma non è densa rispetto alla convergenza uniforme, e anzi è chiusa.

Prima di passare alla dimostrazione di questo teorema, enunciamo e dimostriamo due corollari particolarmente significativi.

4.18. Corollario (teorema di Weierstrass). *Dato un intervallo chiuso e limitato I, i polinomi reali (complessi) sono densi rispetto alla norma del sup nello spazio $C(I)$ delle funzioni continue su I a valori reali (complessi).*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Stone-Weierstrass nel caso reale con K uguale a I e $\mathscr{A}$ uguale all'insieme dei polinomi. Che $\mathscr{A}$ soddisfi le ipotesi del teorema è pressoché immediato. □

In vista del prossimo corollario ricordo alcune definizioni. Si dicono *polinomi trigonometrici* le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si scrivono come le combinazioni lineari delle funzioni 1, $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$ Si dicono invece *polinomi trigonometrici complessi* le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ che si scrivono come combinazioni lineari a coefficienti complessi delle funzioni e^{inx} con $n \in \mathbb{Z}$. Al solito, indichiamo con C_{per} lo spazio delle funzioni continue e 2π-periodiche su $\mathbb{R}$ (a valori reali o complessi) dotato della norma del sup.

4.19. Corollario. *I polinomi trigonometrici reali sono densi nello spazio reale C_{per}. Analogamente polinomi trigonometrici complessi sono densi nello spazio complesso C_{per}.*

Dimostrazione. Caso complesso. Com'è noto dal corso di base di topologia, le funzioni continue e 2π-periodiche su $\mathbb{R}$ si identificano in modo canonico con le funzioni continue sullo spazio quoziente $K := \mathbb{R}/\sim$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$x \sim y \text{ se } x - y \text{ è un multiplo di } 2\pi.$$

Pertanto, detto $\mathscr{A}$ l'insieme dei polinomi trigonometrici complessi, la densità di $\mathscr{A}$ in $C_{\text{per}} \simeq C(K)$, segue dal teorema di Stone-Weierstrass una volta verificato che $\mathscr{A}$ soddisfa le ipotesi del teorema. In effetti:

- $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra di $C(K)$ (che sia un sottospazio vettoriale segue dalla definizione, e che sia chiuso rispetto al prodotto di funzioni segue dal fatto che $e^{inx} \cdot e^{imx} = e^{i(n+m)x}$);
- $\mathscr{A}$ separa i punti (basta osservare che la funzione e^{ix} è iniettiva su K);
- $\mathscr{A}$ è chiuso per coniugio (segue dal fatto che $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$);
- $\mathscr{A}$ contiene le funzioni costanti (ovvio).

Caso reale. Per quanto appena dimostrato, una funzione f in C_{per} a valori reali è limite uniforme di una successione di polinomi trigonometrici complessi f_n. Ne segue che f è anche limite uniforme delle parti reali $\operatorname{Re} f_n$, e queste sono polinomi trigonometrici reali. □

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema di Stone-Weierstrass. Nel caso reale il teorema è una conseguenza dei prossimi quattro lemmi; il caso complesso segue da quello reale.

4.20. Lemma. *Dato $m > 0$ esiste una successione di polinomi p_n su $\mathbb{R}$ tali che*

(i) *$p_n(t)$ converge a $\sqrt{t}$ uniformemente in $[0, m]$;*

(ii) *$p_m(0) = 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che è sufficiente trovare una successione successione di polinomi $p_n(t)$ che soddisfa (i), e poi prendere $p_n(t) - p_n(0)$ per ottenere una successione che soddisfa anche (ii).

Passo 1. Detto q_n il polinomio di Taylor di grado n della funzione $\sqrt{t}$ nel punto m, facciamo vedere che $q_n(t)$ converge a $\sqrt{t}$ uniformemente in $t \in [\varepsilon, 2m - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$. Consideriamo infatti la funzione olomorfa $\sqrt{z}$ definita su $\mathbb{C}$ meno la semiretta S dei numeri reali negativi o nulli;[13] poiché il dominio di questa funzione contiene il disco aperto di centro m e raggio m, la sua serie di Taylor centrata nel punto m ha raggio di convergenza R maggiore o uguale a m; dunque i polinomi $q_n(z)$, convergono a $\sqrt{z}$ uniformemente su tutti i dischi con centro m e raggio strettamente inferiore a R, e questi dischi includono tutti i segmenti della retta reale della forma $[\varepsilon, 2m-\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$.[14]

Passo 2. Fissato $\varepsilon > 0$, sia q_ε un elemento della successione di polinomi definita al passo 1 che soddisfa

$$|q_\varepsilon(t) - \sqrt{t}| \le \varepsilon \quad \text{per } t \in [\varepsilon, 2m-\varepsilon]$$

e sia p_ε il polinomio definito da $p_\varepsilon(t) := q_\varepsilon(t+\varepsilon)$. Per ogni $t \in [0, 2m-2\varepsilon]$ si ha

$$|p_\varepsilon(t) - \sqrt{t}| \le |q_\varepsilon(t+\varepsilon) - \sqrt{t+\varepsilon}| + |\sqrt{t+\varepsilon} - \sqrt{t}| \le \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,,$$

e dunque $p_\varepsilon(t)$ converge a $\sqrt{t}$ uniformemente in $t \in [0,m]$ quando $\varepsilon \to 0$. □

4.21. Lemma. *Sia $\mathscr{A}$ una sottoalgebra chiusa dello spazio reale $C(K)$. Allora $\mathscr{A}$ è chiusa rispetto alla composizione con la funzione valore assoluto, vale a dire che per ogni $f \in \mathscr{A}$ si ha $|f| \in \mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Sia f una funzione in $\mathscr{A}$ e sia m il massimo di f^2 (tale massimo esiste ed è finito perché K è compatto). Presi allora i polinomi p_n come nel lemma precedente si ha che $|f| = \sqrt{f^2}$ è il limite uniforme di $p_n(f^2)$ e queste funzioni appartengono ad $\mathscr{A}$ perché sono combinazioni lineari di potenze (pari) di f ed $\mathscr{A}$ è un algebra.[15] Infine, essendo $\mathscr{A}$ chiusa, anche $|f|$ appartiene ad $\mathscr{A}$. □

4.22. Lemma. *Sia $\mathscr{A}$ un sottospazio dello spazio reale $C(K)$ chiuso rispetto alla composizione per la funzione valore assoluto. Allora $\mathscr{A}$ è un reticolo, vale a dire che per ogni $f, g \in \mathscr{A}$ si ha che $f \vee g, f \wedge g \in \mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2}\,, \quad f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2}\,,$$

ed usare il fatto che $\mathscr{A}$ è uno spazio vettoriale ed è chiuso rispetto alla composizione per il valore assoluto: se f, g appartengono ad $\mathscr{A}$ allora $f-g$ appartiene ad $\mathscr{A}$, quindi anche $|f-g|$ appartiene $\mathscr{A}$, e così via. □

4.23. Lemma. *Sia $\mathscr{A}$ un reticolo contenuto nello spazio reale $C(K)$ tale che soddisfa la seguente ipotesi di* separazione forte*: per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \ne x_2$ ed ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ esiste $g \in \mathscr{A}$ tale che $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$.*

Allora $\mathscr{A}$ è denso in $C(K)$.

Dimostrazione. Dato $f \in C(K)$ ed $\varepsilon > 0$ vogliamo trovare $h \in \mathscr{A}$ tale che $f-\varepsilon \le h \le f+\varepsilon$.

Passo 1. Cominciamo la costruzione di h osservando che, per via delle ipotesi su $\mathscr{A}$, per ogni $x, x' \in K$ possiamo trovare una funzione $g_{x,x'} \in \mathscr{A}$ tale che

$$g_{x,x'}(x) = f(x)\,, \quad g_{x,x'}(x') = f(x')\,.$$

---

[13] Per la precisione si pone $\sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2}\log z)$ dove $\log z$ è la determinazione standard del logaritmo definita in $\mathbb{C} \setminus S$.

[14] Il raggio di convergenza R è esattamente uguale a m, e quindi questo ragionamento non permette di ottenere la convergenza uniforme sul segmento $[0,m]$. In realtà è vero che $q_n(t)$ converge a $\sqrt{t}$ uniformemente in $[0,m]$, ma la dimostrazione di questo fatto non è semplice, e l'abbiamo quindi evitata. Per inciso, R può essere calcolato a partire dai coefficienti della serie senza scomodare la teoria delle funzioni olomorfe, ma dove questa teoria serve è al momento di dimostrare che la serie coincide con la funzione, cioè che i polinomi $q_n(t)$ convergono a $\sqrt{t}$ e non a qualcos'altro.

[15] In questo punto è essenziale che i polinomi p_n non abbiano il termine di grado zero, cioè che $p_n(0) = 0$.

Passo 2. Fissiamo x. Siccome per ogni $x' \in K$ si ha $g_{x,x'}(x') = f(x') < f(x') + \varepsilon$, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno aperto $U_{x'}$ di x' tale che $g_{x,x'} < f + \varepsilon$ in $U_{x'}$. Inoltre, poiché la famiglia $\{U_{x'} : x' \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K e K è compatto, possiamo trovare un numero finito di punti $x'_1, \dots, x'_n$ tali che i rispettivi $U_i := U_{x'_i}$ ricoprono K. Poniamo dunque

$$h_x := g_{x,x'_1} \wedge \cdots \wedge g_{x,x'_n} \,.$$

La funzione h_x appartiene ad $\mathscr{A}$ perché questo è un reticolo. Inoltre h_x soddisfa

$$h_x(x) = f(x)\,, \quad h_x \le f + \varepsilon \text{ in } K$$

(l'uguaglianza segue dal fatto che $g_{x,x'_i}(x) = f(x)$ per ogni i; la disuguaglianza segue dal fatto che $h_x \le g_{x,x'_i} \le f + \varepsilon$ in U_i e gli insiemi U_i ricoprono tutto K).

Passo 3. Siccome per ogni $x \in K$ si ha $h_x(x) = f(x) > f(x) - \varepsilon$, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno aperto U_x di x tale che $h_x > f - \varepsilon$ in U_x. Inoltre, poiché la famiglia $\{U_x : x \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K e K è compatto, possiamo trovare un numero finito di punti $x_1, \dots, x_m$ tali che i rispettivi $U_j := U_{x_j}$ ricoprono K.

La funzione h cercata è allora

$$h := h_{x_1} \vee \cdots \vee h_{x_m} \,.$$

Infatti h appartiene ad $\mathscr{A}$ perché $\mathscr{A}$ è un reticolo, $h \le f + \varepsilon$ in K perché $h_{x_j} \le f + \varepsilon$ in K per ogni j, e $h \ge f - \varepsilon$ in K perché $h \ge h_{x_j} \ge f - \varepsilon$ in U_j e gli insiemi U_j ricoprono tutto K. □

Dimostrazione del teorema 4.17. Caso reale. Sia $\mathscr{A}'$ la chiusura di $\mathscr{A}$ in $C(K)$; è facile verificare che anche $\mathscr{A}'$ è una sottoalgebra, ed ovviamente separa i punti e contiene le costanti. Pertanto $\mathscr{A}'$ è chiusa rispetto alla composizione per la funzione valore assoluto (lemma 4.21), ed è quindi un reticolo (lemma 4.22).

Per poter applicare il lemma 4.23 e concludere che $\mathscr{A}'$ (e pertanto anche $\mathscr{A}$) è denso in $C(K)$ dobbiamo verificare che $\mathscr{A}'$ soddisfa l'ipotesi di separazione forte, vale a dire che per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \ne x_2$ ed ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $g \in \mathscr{A}'$ tale che $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$.

Siccome $\mathscr{A}$ separa i punti, esiste $f \in \mathscr{A}$ tale che $f(x_1) \ne f(x_2)$, e a questo punto basta prendere $g := \alpha + \beta f$ con α, β opportuni (g appartiene ad $\mathscr{A}$ perché quest'ultimo è uno spazio vettoriale e contiene le costanti).

Caso complesso. Sia $\mathscr{A}''$ l'insieme delle funzioni in $\mathscr{A}$ con valori reali. Si vede subito che $\mathscr{A}''$ è una sottoalgebra dello spazio *reale* $C(K;\mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti (reali).

Dimostriamo ora che $\mathscr{A}''$ separa i punti: dati $x_1 \ne x_2$, esiste una funzione $f \in \mathscr{A}$ tale che $f(x_1) \ne f(x_2)$, e quindi $\operatorname{Re} f(x_1) \ne \operatorname{Re} f(x_2)$ oppure $\operatorname{Im} f(x_1) \ne \operatorname{Im} f(x_2)$ e per concludere la dimostrazione di questo punto basta osservare che

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

appartengono ad $\mathscr{A}$ e quindi anche ad $\mathscr{A}''$ (qui si usa l'ipotesi che $\mathscr{A}$ è chiusa per coniugio).

Applicando quindi la versione reale del teorema di Stone-Weierstrass si ottiene che la sottoalgebra $\mathscr{A}''$ è densa nello spazio reale $C(K;\mathbb{R})$. Questo significa che la chiusura di $\mathscr{A}$ in $C(K;\mathbb{C})$ contiene $C(K;\mathbb{R})$, e poiché questa chiusura è un sottospazio vettoriale complesso, deve contenere anche $C(K;\mathbb{C})$.[16] □

---

[16] Ricordo che ogni funzione $f \in C(K;\mathbb{C})$ si scrive come $f = f_1 + if_2$ con $f_1, f_2 \in C(K,\mathbb{R})$.

ESERCIZI DI SVILUPPO E COMPLETAMENTO DELLA TEORIA

Esercizio 4.1. Sia f una funzione in $L^2(-\pi,\pi)$. Dimostrare che i coefficienti di Fourier di f tendono a 0 per $n \to \pm\infty$.
Suggerimento. Usare l'identità di Parseval.

Esercizio 4.2. Sia g una funzione nello spazio complesso $L^\infty(-\pi,\pi)$. Dimostrare che esiste una successione di funzioni equilimitate in C_{per} che converge a g quasi ovunque.

Esercizio 4.3. Sia f una funzione in $L^1(-\pi,\pi)$ con coefficienti di Fourier c_n (cfr. osservazione 4.3(d)). Dimostrare che se $c_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ allora $f = 0$ quasi ovunque; dedurne che due funzioni in $L^1(-\pi,\pi)$ con gli stessi coefficienti di Fourier coincidono quasi ovunque.
Traccia. Far vedere che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = 0 \tag{4.13}$$

nei seguenti casi

- g è un polinomio trigonometrico complesso;
- g è una funzione in C_{per} (usare il corollario 4.19);
- g è una funzione in $L^\infty(-\pi,\pi)$ (usare l'esercizio precedente).

Concludere la dimostrazione considerando la (4.13) con $g(x) := \varphi(f(x))$ dove

$$\varphi(z) := \begin{cases} \bar{z}/|z| & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

□

Esercizio 4.4. Sia f una funzione in $L^1(-\pi,\pi)$. Dimostrare che i coefficienti di Fourier di f tendono a 0 per $n \to \pm\infty$.
Traccia. Fissato $\varepsilon > 0$, usare il fatto che L^2 è denso in L^1 per scomporre f come $f = f_1 + f_2$ in modo tale che $\|f_1\|_1 \leq \varepsilon$ e $f_2 \in L^2$. Osservare quindi che

- $c_n(f) = c_n(f_1) + c_n(f_2)$ per ogni n;
- $|c_n(f_1)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f_1\|_1 \leq \varepsilon$ per ogni n;
- $|c_n(f_2)| \to 0$ perché f_2 appartiene a L^2 (esercizio 4.1).

Dedurne che $\limsup_{n\to\pm\infty} |c_n(f)| \leq \varepsilon$ e concludere usando l'arbitrarietà di ε. □

Esercizio 4.5. Sia f una funzione misurabile di periodo T su $\mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\int_0^T f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4.6. Dato $p \in [1, +\infty)$ indichiamo con L^p_{per} lo spazio delle funzioni misurabili e 2π-periodiche su $\mathbb{R}$ la cui restrizione a $[-\pi,\pi]$ appartiene a L^p (cfr. osservazione 4.3(c)). Dimostrare che

(a) se $f \in L^p_{\text{per}}$ allora la restrizione di f ad ogni intervallo limitato I appartiene a L^p;

(b) se f è una funzione misurabile e 2π-periodica su $\mathbb{R}$ e I è un intervallo di lunghezza almeno 2π tale che la restrizione di f a I appartiene a L^p, allora f appartiene a L^p_{per}.

Esercizio 4.7. (a) Sia f una funzione in L^1_{per}. Dimostrare che

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z} \text{ e ogni } a \in \mathbb{R}.$$

(b) Dato $h \in \mathbb{R}$, sia $\tau_h f$ la traslazione di f definita da $\tau_h f(x) := f(x-h)$. Dimostrare che

$$c_n(\tau_h f) = e^{-inh} c_n(f) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

(c) Dato $h \in \mathbb{R}$ dimostrare che

$$S_m(\tau_h f) = \tau_h(S_m f) \quad \text{per ogni } m = 1, 2, \dots$$

dove $S_m f$ è la somma parziale m-esima della serie di Fourier di f.

Esercizio 4.8. Sia f una funzione di classe C^1 su $[-\pi, \pi]$ Dimostrare la seguente generalizzazione della formula (4.6):

$$c_n(f') = in\, c_n(f) + \frac{(-1)^n}{2\pi}\big(f(\pi) - f(-\pi)\big) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.14}$$

Esercizio 4.9. Sia f una funzione su $[-\pi, \pi]$ tale che

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} g(t)\, dt \quad \text{per ogni } x \in [-\pi, \pi], \tag{4.15}$$

con g funzione in $L^1(-\pi, \pi)$. Dimostrare che

(a) f è continua;
(b) $f(\pi) = f(-\pi)$ se e solo se g ha integrale nullo su $[-\pi, \pi]$;
(c) se g è continua nel punto x allora f è derivabile in x e $f'(x) = g(x)$;
(d) $c_n(g) = in\, c_n(f) + \frac{(-1)^n}{2\pi}\big(f(\pi) - f(-\pi)\big)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Suggerimento. Per dimostrare la formula al punto (d) per $n \neq 0$ far vedere che

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \iint_D f(t)\, e^{-inx} dt\, dx$$

dove $D := \{(t, x) : -\pi \leq t \leq x \leq \pi\}$ ed applicare il teorema di Fubini.

Commento. In un certo senso g fa le funzioni della derivata di f; infatti se f è di classe C^1 la formula (4.15) vale con f' al posto di g, e sostituendo f' a g la formula al punto (d) diventa la (4.14).

Esercizio 4.10. Sia f una funzione in C_{per} di classe C^1 a tratti. Dimostrare che f soddisfa la (4.6), vale a dire che $c_n(f') = in\, c_n(f)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Suggerimento. Far vedere che vale la (4.15) con $g := f'$. (Attenzione! La funzione f non è C^1 ma solo C^1 a tratti, e quindi la (4.15) non segue direttamente dal teorema fondamentale del calcolo integrale.)

Esercizio 4.11. Supponiamo di avere delle sequenze di numeri complessi a_n, b_n, A_n, B_n con $m_1 \leq n \leq m_2$, per cui valgono le relazioni

$$a_n = A_n - A_{n-1}\,, \quad b_n = B_n - B_{n-1}\,.$$

Vale allora la seguente *formula di sommazione per parti di Abel*:

$$\sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n B_n = A_{m_2} B_{m_2} - A_{m_1} B_{m_1} - \sum_{n=m_1+1}^{m_2} A_{n-1} b_n\,. \tag{4.16}$$

Traccia. Verificare che $A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1} = a_n B_n + A_{n-1} b_n$ e sommare questa identità su tutti gli n con $m_1 + 1 \leq n \leq m_2$. $\square$

Commento. Se interpretiamo le sequenze a_n e b_m come "derivate discrete" delle sequenze A_n e B_n, e la sommatoria come un "integrale discreto", allora la formula (4.16) può essere vista come l'analogo discreto della formula di integrazione per parti (da cui il nome).

Esercizio 4.12. Sia g_0 la funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ definita dalla formula (4.10), e siano $S_m(x)$ le somme parziali della serie di Fourier di g_0.

(a) Verificare che $S_m(0) = 0$ per ogni m;

(b) dimostrare direttamente, cioè senza usare la proposizione 4.14, che S_m converge a g_0 uniformemente nell'intervallo $I_\varepsilon := [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Traccia. Calcolare i coefficienti di Fourier di g_0 e dimostrare che

$$S_m(x) = 2\operatorname{Im} T_m(x) \quad \text{con } T_m(x) := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} e^{inx}.$$

Applicare quindi la formula di sommazione per parti (4.16) alla somma che definisce T_m ponendo

$$a_n(x) := e^{inx}, \quad B_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } n > 0, \\ 1 & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Così facendo si ottiene

$$A_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}, \quad b_n := B_n - B_{n-1} = \begin{cases} -\frac{1}{n(n-1)} & \text{per } n > 1, \\ 0 & \text{per } n = 1, \end{cases}$$

e quindi

$$T_m(x) = \frac{1}{n} A_m(x) - 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} A_{n-1}(x).$$

Usando il fatto che le funzioni A_n sono uniformemente limitate sull'intervallo I_ε, si dimostra facilmente che le funzioni T_m convergono uniformemente su I_ε, e quindi lo stesso vale per le funzioni S_m. Che il limite della S_m sia la funzione g_0 segue dal fatto che già sappiamo che S_m tende a g_0 in $L^2(-\pi, \pi)$. □

Esercizio 4.13. Dimostrare la seguente estensione del teorema di Stone-Weierstrass (teorema 4.17): se $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra dello spazio $C(K)$ che separa i punti (e, nel caso complesso, è chiusa per coniugio), allora $\overline{\mathscr{A}} = C(K)$ oppure esiste $x_0 \in K$ tale che

$$\overline{\mathscr{A}} = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}. \tag{4.17}$$

Traccia. Ci limitiamo al caso reale. Osserviamo per cominciare che nella dimostrazione del teorema di Stone-Weierstrass l'ipotesi che $\mathscr{A}$ contenga le costanti è stata usata solo per dimostrare che $\mathscr{A}$ soddisfa l'ipotesi di separazione forte nel lemma 4.23, vale a dire che per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ ed ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ esiste $g \in \mathscr{A}$ tale che $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$.

Passo 1. Far vedere che $\mathscr{A}$ soddisfa l'ipotesi di separazione forte, ed è quindi densa in $C(K)$, se vale una qualunque delle seguenti condizioni:

- per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in K$ esiste $h \in \mathscr{A}$ tale che $h(x_1) \neq h(x_2)$ e $h(x_1), h(x_2) \neq 0$ (l'ipotesi di separazione è soddisfatta prendendo $g = \alpha h + \beta h^2$ con α e β opportuni);
- esiste $h_* \in \mathscr{A}$ tale che $h_* > 0$ ovunque (ci si riconduce al caso precedente prendendo $h = h_* + \alpha f$ con f funzione in $\mathscr{A}$ che separa i punti x_1 e x_2 e α opportuno);
- per ogni $x \in K$ esiste $h_x \in \mathscr{A}$ tale che $h_x(x) \neq 0$ (ci si riconduce al caso precedente prendendo $h_* = h_{x_1}^2 + \cdots + h_{x_n}^2$ con $x_1, \dots, x_n$ opportuni).

Passo 2. Se esiste x_0 tale che $f(x_0) = 0$ per ogni $f \in \mathscr{A}$ allora vale la (4.17). Per la precisione si tratta di far vedere che la chiusura di $\mathscr{A}$ contiene ogni funzione in $C(K)$ nulla in x_0. Detta $\mathscr{A}'$ la somma diretta della chiusura di $\mathscr{A}$ e del sottospazio delle funzioni costanti, dimostrare che $\mathscr{A}'$ è una sottoalgebra chiusa di che contiene le costanti e separa i punti (il punto non immediato è la chiusura). Quindi $\mathscr{A}' = C(K)$ e pertanto ogni f in $C(K)$ si scrive come $f = g + c$ con g nella chiusura di $\mathscr{A}$ e $c \in \mathbb{R}$; se inoltre $f(x_0) = 0$ allora $c = 0$ e quindi f appartiene alla chiusura di $\mathscr{A}$. $\square$

Esercizi

Esercizio 4.14. Calcolare i coefficienti di Fourier di $f(x) := e^{|x|}$ con $x \in [-\pi, \pi]$.

Esercizio 4.15. Dato h con $0 < h < \pi$, sia f la funzione su $[-\pi, \pi]$ data dall'indicatrice dell'intervallo $[-h, h]$. Calcolare i coefficienti di Fourier di $f(x)$.

Esercizio 4.16. Calcolare i coefficienti di Fourier di $\cos^4 x - 2\sin^2 x$.
Suggerimento. Usare le identità $\cos x = \frac{1}{2}[e^{ix} + e^{-ix}]$ e $\sin x = \frac{1}{2i}[e^{ix} - e^{-ix}]$.

Esercizio 4.17. Sia $f(x) := x$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) calcolare i coefficienti di Fourier di f direttamente;

(b) calcolare i coefficienti di Fourier di f usando la formula (4.14);

(c) applicare l'identità di Parseval (4.4) a f per ottenere la nota formula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Esercizio 4.18. Sia $f(x) := x^2$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) calcolare i coefficienti di Fourier di f direttamente;

(b) calcolare i coefficienti di Fourier di f usando la formula (4.6) e l'esercizio precedente;

(b) calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Esercizio 4.19. Dato $k = 0, 1, \dots,$ sia $g_k(x) := x^k$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Trovare una formula ricorsiva per calcolare i coefficienti di Fourier di g_k a partire da quelli di g_{k-1}.

Esercizio 4.20. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Esercizio 4.21. Dato $k = 0, 1, \dots,$ sia $g_k(x) := (\pi^2 - x^2)^k$ con $x \in [-\pi, \pi]$, e sia $c_{k,n} := c_n(g_k)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Determinare il massimo intero h tale che g_k appartiene a C^h_{per};

(b) calcolare $c_{0,n}$ e $c_{1,n}$;

(c) dimostrare che $\ddot{g}_k$ si scrive come combinazione lineare di g_{k-1} e g_{k-2};

(d) trovare una formula ricorsiva per calcolare $c_{k,n}$ a partire $c_{k-1,n}$ e $c_{k-2,n}$;

(e) dimostrare per ogni k esistono a_k e d_k tali che $c_{k,n} \sim a_k/|n|^{d_k}$ per $n \to \pm\infty$; calcolare esplicitamente d_k a trovare una formula ricorsiva per a_k.

Commento. Esercizio assegnato nella prova scritta del 5 settembre 2012.

Esercizio 4.22. Sia f una funzione in $L^1(-\pi, \pi)$ con coefficienti di Fourier c_n. Scrivere i coefficienti di Fourier della funzione $\bar{f}$ in termini dei c_n.
Commento. Una prima soluzione è la seguente: per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$c_n(\bar{f}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, e^{-inx}\, dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx} = \overline{c_{-n}}\,.$$

Un'altra soluzione la si ottiene applicando il coniugio all'identità $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$; così facendo si ha

$$\overline{f(x)} = \sum_n \overline{c_n e^{inx}} = \sum_n \overline{c_n}\, e^{-inx} = \sum_n \overline{c_{-n}}\, e^{inx}\,;$$

dunque l'ultima di queste serie è la serie di Fourier di $\bar{f}$, e quindi $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}}$. Questa procedura formale può essere resa rigorosa se f appartiene a L^2 usando il fatto che la serie di Fourier converge in L^2, e l'unicità della rappresentazione in serie di Fourier (proposizione 4.2(ii)). Tuttavia questo ragionamento non vale se f appartiene solo a L^1.

Esercizio 4.23. Sia f una funzione in $L^1(-\pi, \pi)$ con coefficienti di Fourier c_n. Esprimere i coefficienti di Fourier delle funzioni $f(-x)$ e $f(kx)$ con $k = 2, 3, \dots$ in funzione dei c_n.

Esercizio 4.24. Caratterizzare le funzioni $f \in L^1(-\pi, \pi)$ che soddisfano ciascuna delle condizioni che seguono in termini dei loro coefficienti di Fourier:

- f è pari, cioè $f(x) = f(-x)$ per q.o. x;
- f è dispari, cioè $f(x) = -f(-x)$ per q.o. x;
- f è reale, cioè $\operatorname{Im} f(x) = 0$ per q.o. x;
- f è puramente immaginaria, cioè $\operatorname{Re} f(x) = 0$ per q.o. x.
- f è π-periodica.

Esercizio 4.25. Sia f una funzione in C_{per} con coefficienti di Fourier c_n. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) f appartiene a C^∞_{per};
(ii) $c_n = O(|n|^{-a})$ per $n \to \pm\infty$ per ogni $a > 0$;
(iii) $\sum_n |n|^a |c_n| < +\infty$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4.26. Sia f una funzione in C_{per} che soddisfa la (4.15) con $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Dimostrare che, detti c_n i coefficienti di fourier di f,

(a) $\sum_n |n|^2 |c_n|^2 < +\infty$;
(b) $\sum_n |c_n| < +\infty$;
(c) la serie d Fourier d f converge uniformemente a f.

Suggerimento. Per (a) applicare quanto fatto nell'esercizio 4.9. I punti (b) e (c) seguono da (a) come nella dimostrazione del teorema 4.5.

Esercizio 4.27 [*][c]. Sia f una funzione in C_{per} i cui coefficienti di Fourier c_n soddisfano

$$\limsup_{|n| \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1\,.$$

Dimostrare che f è analitica, cioè è sviluppabile in serie di potenze in un intorno di ogni punti di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.28. Sia $I = [0, 1]$. Dimostrare che i polinomi reali pari, cioè quelli che contengono solo termini di grado pari, sono densi in $C(I)$ e quindi in $L^p(I)$ per ogni $p < +\infty$.

Esercizio 4.29. Sia K lo spazio ottenuto a partire da $[-\pi, \pi]$ identificandone gli estremi, e sia $\mathscr{A}$ il sottospazio dello spazio complesso $C(K)$ generato delle funzioni e^{inx} con $n = 0, 1, \dots$ [17] Dimostrare che:

(a) $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti e contiene le funzioni costanti, ma non è chiusa per coniugio;

(b) $\mathscr{A}$ non è densa in $C(K)$.

[17] Identifico le funzioni continue sullo spazio quoziente K con le funzioni continue su $[-\pi, \pi]$ con valori uguali in $\pm\pi$.

Esercizio 4.30. Sia $I := [0, \pi]$ e sia $\mathscr{A}$ il sottoinsieme dello spazio reale $C(I)$ dato dallo span delle funzioni $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \ldots$ Dimostrare che la chiusura di $\mathscr{A}$ in $C(I)$ è data dal sottospazio X delle funzioni nulle in 0 e π.

Traccia. Che la chiusura di $\mathscr{A}$ sia contenuta in X è ovvio. Per dimostrare l'uguaglianza si consideri lo spazio quoziente K ottenuto a partire da I identificandone gli estremi, e si dimostri che $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti. Usare quindi l'estensione del teorema di Stone-Weierstrass data nell'esercizio 4.13 per dimostrare che la chiusura di $\mathscr{A}$ coincide con X. $\square$