Versione: 14 febbraio 2012

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Geologiche

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Matematica

a.a. 2011/12

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
`www.dm.unipi.it/~alberti`

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Matematica per Scienze Geologiche si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno quattro risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. FUNZIONI, GRAFICI, NUMERI COMPLESSI
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, funzione inversa. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni. Grafici logaritmici e semi-logaritmici.
   - 1.3 Coordinate polari di un punto nel piano. Numeri complessi. Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi.

2. DERIVATE E INTEGRALI
   - 2.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 2.2 Applicazione delle derivate allo studio dei grafici di funzioni. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione.
   - 2.3 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccolo).
   - 2.4 Sviluppo di Taylor e parte principale di una funzione. Fattoriale, coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton. *Rappresentazione delle costanti π ed e come somme infinite tramite gli sviluppi di Taylor di* $\arctan x$ *ed* e^x.
   - 2.5 Definizione dell'integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti. Calcolo dell'area di una figura piana. *Calcolo del volume di una figura solida.*

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI
   - 3.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica; significato dei dati iniziali.
   - 3.2 Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.
   - 3.3 *Equazione dell'oscillatore armonico smorzato e forzato, risonanza.*

4. VETTORI E MATRICI
   - 4.1 Vettori nel piano, nello spazio, e in dimensione qualune. Somma di vettori. Prodotto scalare di vettori: definizione analitica e geometrica. Esempi di grandezze vettoriali: spostamento, velocità, accelerazione, forza.
   - 4.2 Matrici. Somma, prodotto, determinante ed inversa. Risoluzione dei sistemi di n equazioni lineari in n incognite tramite vettori e matrici.
   - 4.3 Prodotto vettoriale nello spazio: definizione geometrica ed analitica.

TESTI

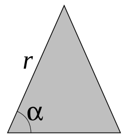
Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2-3) \geq 0$.
2. Determinare il dominio di definizione di $\sqrt{2-e^x}$.
3. Determinare le coordinate polari r e α per ciascuno dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(1,-1)$; b) $(-2,0)$; c) $(-1,-\sqrt{3})$.
4. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\exp(-x^2)$; b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; c) $\dfrac{\log(x^2)}{\log x}$.
5. Trovare a per cui vale la seguente identità di funzioni: $\cos(x+a) = -\sin x$.
6. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2+4z+5=0$.
7. Calcolare $(1-i)^6$.
8. Disegnare il grafico di $y = -1 + \dfrac{1}{1+x}$.

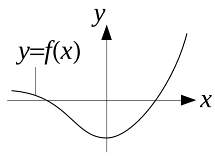
Seconda parte.

1. a) Risolvere la disequazione $\cos x \geq 1/\sqrt{2}$ con $-\pi \leq x \leq \pi$.
   b) Risolvere la disequazione $\cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) \geq 1/\sqrt{2}$.
2. a) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := (1+x^2)\, e^x$, e dimostrare che questa funzione è sempre crescente.
   b) Dire per quali valori del parametro a la funzione $f(x) := (1+x^2)\, e^{ax}$ è sempre crescente.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

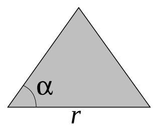


1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{1+\log x}$.
2. Esprimere l'area del triangolo isoscele nella figura accanto in termini di r e α.
3. Trovare i valori di x compresi tra 0 e 2π tali che $2\sin x \geq \sqrt{2}$.
4. Disegnare l'insieme dei punti del piano le cui coordinate polari r ed α soddisfano le seguenti condizioni: $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ e $r \geq 1$.
5. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{2+x^2}$; b) $1+\sin(x^2)$; c) $-\exp(2\log x)$.
6. Scrivere $\sqrt{2}(1-i)$ in forma esponenziale e calcolare $(\sqrt{2}(1-i))^6$.
7. Sia $f(x)$ la funzione li cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $y \geq -2x$ e $y \geq f(x)$.

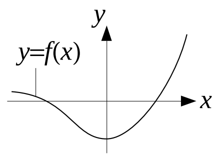


8. Disegnare il grafico di $-\log(1+x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2



1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(4-x^2)$.
2. Esprimere l'altezza del triangolo isoscele nella figura accanto in termini di r e α.
3. Trovare i valori di x compresi tra 0 e 2π tali che $2\cos x \leq 1$.
4. Disegnare l'insieme dei punti del piano le cui coordinate polari r ed α soddisfano le seguenti condizioni: $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ e $r \leq 2$.
5. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x+\exp(-\log x)$; b) $\sqrt{1-x}$; c) $1-\cos(1+x^2)$.
6. Scrivere $\sqrt{3}-i$ in forma esponenziale e calcolare $(\sqrt{3}-i)^6$.
7. Sia $f(x)$ la funzione li cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $f(x) \leq y \leq x/3$.



8. Disegnare il grafico di $\sqrt{-x}-1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. Si considerino le funzioni $f_1(x) := \dfrac{1}{x-1} + 1$ e $f_2(x) := \sqrt{3}\,x + 1 - \sqrt{3}$.

   a) Disegnare i grafici di queste funzioni e l'insieme dei punti (x,y) tali che $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.

   b) Risolvere la disequazione $f_1(x) \leq f_2(x)$.

   c) Calcolare l'angolo compreso tra le rette tangenti ai grafici di f_1 ed f_2 nei punti in cui questi si intersecano.

2. Si consideri la funzione $f(x) := \exp\left(\dfrac{-9}{2+x}\right)$.

   a) Determinarne l'insieme di definizione e la derivata di f, e dire in quali intervalli f è crescente ed in quali è decrescente.

   b) Dato un numero reale $a \neq -2,\ 0$, scrivere l'equazione della retta r_a passante per il punto $(0,0)$ ed il punto del grafico di f di ascissa a.

   c) Per quali valori di a la retta r_a è anche tangente al grafico di f (nel punto di ascissa a)?

3. Calcolare le radici quarte del numero complesso $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. Si considerino le funzioni $f_1(x) := \dfrac{1}{x+1} - 1$ e $f_2(x) := \sqrt{3}\,x - 1 + \sqrt{3}$.

   a) Disegnare i grafici di queste funzioni e l'insieme dei punti (x, y) tali che $f_1(x) \geq y \geq f_2(x)$.

   b) Risolvere la disequazione $f_1(x) \geq f_2(x)$.

   c) Calcolare l'angolo compreso tra le rette tangenti ai grafici di f_1 ed f_2 nei punti in cui questi si intersecano.

2. Si consideri la funzione $f(x) := \exp\left(\dfrac{1}{6+x}\right)$.

   a) Determinarne l'insieme di definizione e la derivata di f, e dire in quali intervalli f è crescente ed in quali è decrescente.

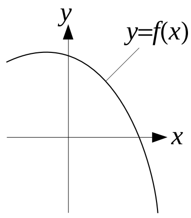
   b) Dato un numero reale $a \neq -6,\, 0$, scrivere l'equazione della retta r_a passante per il punto $(0, 0)$ ed il punto del grafico di f di ascissa a.

   c) Per quali valori di a la retta r_a è anche tangente al grafico di f (nel punto di ascissa a)?

3. Calcolare le radici quarte del numero complesso $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

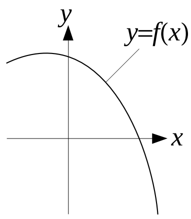
1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{3 + \log x}$
2. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan x > \sqrt{3}$ comprese tra $-\pi/2$ e $\pi/2$.
3. Trovare le coordinate polari r e α dei seguenti punti: a) $(-2, -2)$; b) $(-4, 0)$; c) $(-1, \sqrt{3})$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{x^2+1}$; b) $\sin(3x + 1)$; c) $\exp(x^2)$.
5. Trovare le soluzioni *complesse* dell'equazione $z^2 - 2z + 5 = 0$.
6. Calcolare $\dfrac{1}{2-i} + \dfrac{1}{2+i}$.
7. Sia $f(x)$ la funzione li cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x$, indicando le soluzioni direttamente sull'asse delle x.



8. Disegnare il grafico di $f(x) = -\log(1 + x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{2 + \log x}$
2. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan x < -\sqrt{3}$ comprese tra $-\pi/2$ e $\pi/2$.
3. Trovare le coordinate polari r e α dei seguenti punti: a) $(4, 0)$; b) $(-2, 2)$; c) $(-\sqrt{3}, 1)$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: c) $\exp(2x)$; b) $\sin(x^2 + 1)$; a) $\dfrac{x}{x^2-1}$.
5. Trovare le soluzioni *complesse* dell'equazione $z^2 + 2z + 5 = 0$.
6. Calcolare $\dfrac{1}{2-i} - \dfrac{1}{2+i}$.
7. Sia $f(x)$ la funzione li cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere graficamente la disequazione $x \geq f(x)$, indicando le soluzioni direttamente sull'asse delle x.



8. Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{1 + x} - 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Disegnare il grafico delle funzioni $f_1(x) := 1 - x^3$ e $f_2(x) := 1 - \sqrt{x}$
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \geq 0$ e $f_2(x) \leq y \leq f_1(x)$.
   c) Calcolare le coordinate dei due "spigoli" di A.
2. a) Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{x-1}$.
   b) Per ogni numero reale $a \neq 1$ scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa a.
   c) Trovare per quali a tale la retta tangente passa per il punto $(0, 1)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) Disegnare il grafico delle funzioni $f_1(x) := (x+1)^3$ e $f_2(x) := \sqrt{x+1}$
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x \geq -1$ e $f_2(x) \geq y \geq f_1(x)$.
   c) Calcolare le coordinate dei due "spigoli" di A.

2. a) Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{x+1}$.
   b) Per ogni numero reale $a \neq -1$ scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa a.
   c) Trovare per quali a tale la retta tangente passa per il punto $(0, -1)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\cos(\log(1-x^2))$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\exp(1-x^2)$; b) $x^2\log x$; c) $\log\big(\sqrt[3]{4x^2}\big)$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\cos(2^{-x})$; b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$; c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+2x^2)}{x^2(1+x)}$.
4. Disegnare l'insieme dei punti le cui coordinate polari r e α soddisfano $r\geq 1$ e $\dfrac{\pi}{4}\leq\alpha\leq\dfrac{3\pi}{4}$.
5. Trovare la parte principale per $x\to 0$ di $\log(1+2\sin(x^2))$.
6. Tra tutte le primitive di $\dfrac{1}{3-2x}$ trovare quella che vale 2 per $x=1$.
7. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x^2\log x\,dx$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $0\leq y\leq -\cos(x+\pi/2)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\exp(\log(x^2-1))$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\big(\sqrt[4]{5x^3}\big)$; b) $x(1+e^x)$; c) $\log(1+x^2)$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-x)}{\log(1+2x)}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^{100}}$; c) $\lim_{x\to+\infty}e^x(1-x)$.
4. Disegnare l'insieme dei punti le cui coordinate polari r e α soddisfano $r\leq 2$ e $-\dfrac{\pi}{4}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{4}$.
5. Trovare la parte principale per $x\to 0$ di $\sin(\log(1-x^3))$.
6. Tra tutte le primitive di $\dfrac{1}{(3-2x)^2}$ trovare quella che vale 1 per $x=1$.
7. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x^3\log x\,dx$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $-\sin(x-\pi/2)\leq y\leq 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x):=xe^{-x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $x/e\leq y\leq f(x)$, e calcolarne l'area.
   b) Disegnare l'insieme B dei punti (x,y) tali che $y\leq f(x)$ e $0\leq y\leq x/e$, e calcolarne l'area.
2. a) Dimostrare che $2x^2-1\geq\log x$ per ogni $x>0$.
   b) Dire per quali valori del parametro reale a si ha che $2x^2-a\geq\log x$ per ogni $x>0$.
   [*Suggerimento: ricondursi allo studio della funzione* $2x^2-\log x$.]
3. a) Determinare la parte principale per $x\to 0$ di $\log(1+2x)-2x\,e^x$.
   b) Determinare la parte principale per $x\to 0$ di $\log(1+2x)-2x\,e^{-x}$.

Seconda parte, gruppo 2

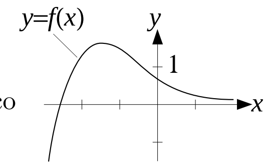
1. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := xe^x$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq x/e$, e calcolarne l'area.
   b) Disegnare l'insieme B dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y$ e $x/e \leq y \leq 0$, e calcolarne l'area.

2. a) Dimostrare che $2 \log x \leq x^2 - \dfrac{1}{2}$ per ogni $x > 0$.
   b) Dire per quali valori del parametro reale a si ha che $2 \log x \leq x^2 - a$ per ogni $x > 0$.
   [*Suggerimento: ricondursi allo studio della funzione* $2 \log x - x^2$.]

3. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\log(1 + 2x) - 2x\, e^{2x}$.
   b) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\log(1 + 2x) - 2x\, e^{-x}$.

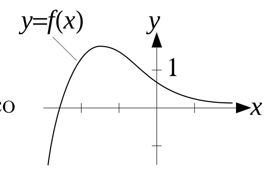
PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Risolvere la disequazione $\log(e^x - 1) \geq 0$.
2. Scrivere il numero complesso $1 - i$ in forma esponenziale e calcolare $(1 - i)^6$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^2 + 1)$; b) $x(1 + e^x)$; c) $\log\left(\dfrac{x^3}{x+1}\right)$.
4. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $1 - \cos(2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\, dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 2xt$ tale che $x(2) = e$.
7. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Risolvere la disequazione $f(x) \geq -x^3$ dove f è la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Risolvere la disequazione $\log(e^x - 2) \geq 0$.
2. Scrivere il numero complesso $1 + i$ in forma esponenziale e calcolare $(1 + i)^4$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x(1 + \log x)$; b) $\exp(1 - x^2)$; c) $\log\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$.
4. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $1 - \cos(4x^3)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\, dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 3xt^2$ tale che $x(1) = 1$.
7. Calcolare $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
8. Risolvere la disequazione $f(x) \leq x^2 - 1$ dove f è la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto.



SECONDA PARTE.

1. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x}{3 + x^4}$.
   b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 1/4$.
   c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ al variare di $a > 0$.
2. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $xe^x + \log(1 - x)$.
   b) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $2xe^x + \log(1 - 2x)$.
3. Dato la funzione $a(t)$, si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = a(t) \qquad (*)$$

a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a(t) := 4e^{-t}$.
b) Trovare la soluzione della (*) con $a(t) := 4e^{-t}$ che soddisfa $x(0) = 0$ e tende a 0 per $t \to +\infty$.
c) Trovare la soluzione generale della (*) per $a(t) := 5e^{-2t}$.

4. Risolvere l'equazione differenziale $t\dot{x} - x = x^2 \cos t$. [*Utilizzando il cambio di variabile* $x = 1/y$ *ci si riconduce ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine.*]

5. Sia T il triangolo nello spazio di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, e sia P un prisma obliquo con base T per cui uno dei vertici della faccia opposta a T è $(0, 1, 1)$ (notare che P non è univocamente determinato).
a) Calcolare il volume di P. La risposta è univoca?
b) Calcolare l'area di T.
c) Calcolare l'altezza di P relativamente alla base T.

Prima parte.

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti, dati in coordinate cartesiane:
a) $(1, -\sqrt{3})$; b) $(0, -2)$; c) $(-2, -2)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) e^{1-2x}; b) $x \log x$; c) $\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

3. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 4 & a & 1 \end{pmatrix}$ e dire per quali $a \in \mathbb{R}$ questa è invertibile.

4. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
a) x^{10}; b) 3^{1-x}; c) 2^x.

5. Calcolare la seguente primitiva $\displaystyle\int x \cos x \, dx$.

6. Calcolare la parte principale per $x \to +\infty$ di $\dfrac{x + \log x}{1 - x^2}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 - 1 \le y \le 1 - x$.

Seconda parte.

1. a) Dimostrare che $\log x \le \sqrt{x}$ per ogni $x > 0$. [*Suggerimento: studiare* $f(x) := \log x/\sqrt{x}$.]
b) Determinare i numeri reali $a > 0$ tale che $\log x \le a\sqrt{x}$ per ogni $x > 0$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\sqrt[3]{1+x} - 1$.
b) Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $\sqrt[3]{1+x^3} - x$. [*Suggerimento: raccogliere* x *e usare quanto fatto in a).*]

3. a) Trovare una primitiva della funzione $e^{\sin t} \sin t \cos t$. [*Usare il cambio di variabile* $x = \sin t$.]
b) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + x \cos t = \cos t \sin t$.

PRIMA PARTE.

1. Semplificare il più possibile la espressione $\dfrac{\sqrt[4]{a^4 b^2}}{\sqrt[6]{a^5 b^2}}$ (a e b sono numeri reali positivi).

2. Scrivere il numero complesso $\sqrt{3} - i$ in forma esponenziale e calcolare $\big(\sqrt{3} - i\big)^4$.

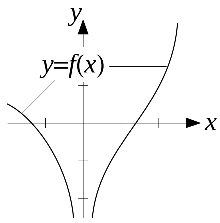
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x e^{-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 di $\log(1 - 2x^3)$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ i vettori $(a, 5, 3)$ e $(a, a, 2)$ sono ortogonali.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx$.

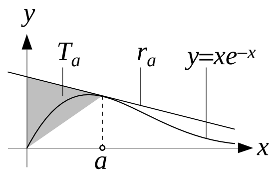


8. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x/2$ dove f è la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto.

SECONDA PARTE.

1. a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 3e^{-4t}\,. \qquad (*)$$
b) Trovare la soluzione dell'equazione (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{2x}{1 + x^4}\,.$$
b) Usando il cambio di variabile $y = x^2$ trovare una primitiva di $f(x)$.
c) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|y| \leq f(x)$ e calcolare l'area.



3. Dato $a > 0$ numero reale, sia T_a il triangolo dato nella figura accanto, dove r_a è la retta tangente al grafico di $f(x) = xe^{-x}$ nel punto di ascissa a.
a) Trovare le coordinate del punto di intersezione della retta r_a con l'asse delle y e calcolare l'area del triangolo T_a.
b) Determinare il valore di a per cui l'area del triangolo T_a risulta essere massima.

PRIMA PARTE.

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - x - 1) \geq 0$.
2. Calcolare $\dfrac{1}{1-i} - \dfrac{1}{1+i}$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log(3x^2)$; b) e^{2x+1}; c) $x \exp(x^2)$.
4. Trovare i valori di massimo e di minimo della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ per x che varia nell'intervallo $[0, 3]$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)}{2+x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}x^3$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^3)}{x^3}$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_1^e x \log x \, dx$. [*Suggerimento: integrare per parti.*]
7. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 3)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $-e^x \leq y \leq 2e^x$.

SECONDA PARTE.

1. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq x^2$ e $y \leq 4/x^2$, e calcolarne l'area.
2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := e^x/x$.
   b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = e$.
   c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ per ogni numero reale $a > 0$.
3. Si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - \frac{2}{t}\dot{x} + \frac{2}{t^2}x = 0\,. \tag{*}$$
   a) Cercare soluzioni di (*) della forma $x(t) = t^\alpha$.
   b) Scrivere la soluzione generale della (*).

Prima parte.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(e^x - 2)$.
2. Scrivere i seguenti numeri complessi in forma esponenziale: a) $1 - i$; b) $\dfrac{1}{1-i}$; c) -3.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{1-x}$; b) $\arctan(2x)$; c) $\log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.
4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $\dfrac{x - x^3}{1 + x + e^{-x}}$.
5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4\sin(1-2x)\,dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x\,\sin t$ che soddisfa $x(0) = 1$.
7. Scrivere il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 - x_1 + 1 = 0 \\ 1 + x_3 = x_2 \end{cases}$ nella forma $A\vec{x} = \vec{a}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Seconda parte.

1. a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 2e^{-t}\,. \tag{*}$$
b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.
2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\sin(x^2) - x^2$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\sin(x^2) - (\sin x)^2$.
3. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = 2xe^{-x}$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} \leq y \leq 2xe^{-x}$ e calcolarne l'area.

S O L U Z I O N I

Prima parte.

1. La disequazione equivale a $x^2 - 3 \geq 1$ ovvero $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$.

2. Deve essere $2 - e^x \geq 0$, ovvero $x \leq \log 2$.

3. a) $r = \sqrt{2}$ e $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$; b) $r = 2$ e $\alpha = \pi$; c) $r = 2$ e $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$.

4. a) $-2x \exp(-x^2)$; b) $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$; c) 0.

5. $a = \pi/2$.

6. $z = -2 \pm i$.

7. $(1-i)^6 = \big(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\big)^6 = 8e^{-3\pi i/2} = 8e^{\pi i/2} = 8i$.

8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1 e poi verso il basso di 1.

Seconda parte.

1. a) Guardando il grafico di $\cos x$ vede subito che deve essere $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.
   b) Osserviamo innanzitutto che $1 + x^2 > 1$ per ogni x, da cui segue che l'argomento del coseno, vale a dire $t := 1/(1+x^2)$, è sempre compreso tra 0 e 1, ed in particolare appartiene all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Pertanto, per quanto visto al punto precedente, $\cos t \geq 1/\sqrt{2}$ se e solo se $t \leq \pi/4$ (giacché sappiamo che $t > 0$). In altre parole, la disequazione da risolvere si riduce a
   $$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{4}$$
   Vale a dire $x^2 \geq 4/\pi - 1$, ovvero
   $$x \geq \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \quad \text{oppure} \quad x \leq -\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}\,.$$

2. a) Il calcolo della derivata di f dà
   $$f'(x) = (1 + x^2 + 2x)\, e^x = (1+x)^2\, e^x\,,$$
   da cui risulta chiaro che $f'(x) \geq 0$ per ogni x (si ricordi che sia l'esponenziale che il quadrato sono sempre positivi), e pertanto f è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   b) In questo caso
   $$f'(x) = (a + ax^2 + 2x)\, e^{ax}\,.$$
   Dunque, essendo l'esponenziale sempre positivo, dire che f è crescente su tutto $\mathbb{R}$ equivale a dire che il polinomio $ax^2 + 2x + a$ è positivo o nullo per ogni valore di x. Quest'ultimo fatto si verifica quando il coefficiente del termine di secondo grado è strettamente positivo e il discriminante è negativo o nullo, vale a dire
   $$a > 0 \ \text{ e } \ 4 - 4a^2 \leq 0, \ \text{ ovvero } \ a \geq 1.$$
   (Il caso $a = 0$ va trattato a parte perché il polinomio si riduce a $2x$, che non è di secondo grado: comunque sia $2x$ non è sempre positivo, e dunque $a = 0$ è non fa parte della soluzione.)

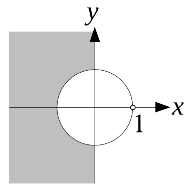
Prima parte, gruppo 1

1. Deve essere $1 + \log x \geq 0$, vale a dire $x \geq 1/e$.

2. area $= \dfrac{1}{2}$base $\cdot$ altezza $= \dfrac{1}{2}(2r\cos\alpha) \cdot (r \sin\alpha) = r^2 \cos\alpha \, \sin\alpha$.

3. $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{4}$.

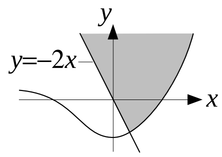
4. Si tratta dell'area in grigio nella figura a destra. $\longrightarrow$



5. a) $\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}$; b) $2x\,\cos(x^2)$; c) $\big[-\exp(2\log x)\big]' = (-x^2)' = -2x$.

6. $\sqrt{2}(1-i) = 2\,e^{-\pi i/4}$ e quindi $(2(1-i))^6 = (2\,e^{-\pi i/4})^6 = 64\,e^{-3\pi i/2} = 64i$.

7. Si tratta dell'area in grigio nella figura a destra. $\longrightarrow$



8. Si tratta del grafico di $\log x$ traslato verso sinistra di 1 e poi riflesso rispetto all'asse delle x.

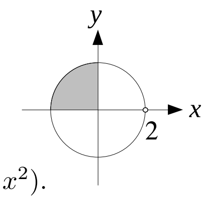
Prima parte, gruppo 2

1. Deve essere $4 - x^2 > 0$, vale a dire $-2 < x < 2$.

2. altezza $= \dfrac{r}{2}\tan\alpha$.

3. $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$.

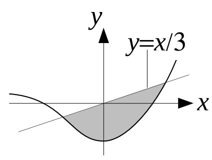
4. Si tratta dell'area in grigio nella figura a destra. $\longrightarrow$



5. a) $\big[x + \exp(-\log x)\big]' = (x + x^{-1})' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; b) $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$; c) $2x\,\sin(1+x^2)$.

6. $\sqrt{3} - i = 2\,e^{-\pi i/6}$ e quindi $(\sqrt{3}-i)^6 = (2\,e^{-\pi i/6})^6 = 64\,e^{-\pi i} = -64$.

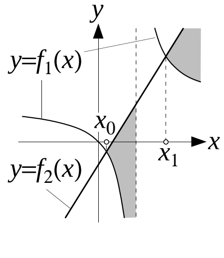
7. Si tratta dell'area in grigio nella figura a destra. $\longrightarrow$



8. Si tratta del grafico di $\sqrt{x}$ traslato verso il basso di 1 e poi riflesso rispetto all'asse delle y.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Il grafico di f_1 coincide con quello di $1/x$ traslato verso destra di 1 e poi verso l'alto di 1, mentre quello di f_2 è una retta (vedere la figura accanto). L'insieme dei punti cercato è quello disegnato in grigio nella figura accanto.



   b) L'equazione $f_1(x) = f_2(x)$ ha come soluzioni

$$x_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{e} \quad x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,.$$

   Utilizzando il disegno dei grafici fatto al punto precedente si vede subito che x risolve la disequazione $f_1(x) \leq f_2(x)$ se

$$x_0 \leq x < 1 \quad \text{oppure} \quad x \geq x_1\,.$$

c) Le derivate di f_1 e f_2 sono

$$f_1'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{e} \quad f_2'(x) = \sqrt{3}\,.$$

In particolare $f'(x_0) = \sqrt{3}$ e $f_1'(x_0) = -\sqrt{3}$, e dunque la retta tangente al grafico di f_0 in x_0 (che non è altro il grafico stesso di f_0) forma un angolo di $\pi/3$ rispetto alla direzione orizzontale, mentre la retta tangente al grafico di f_1 forma un angolo di $-\pi/3$. Pertanto l'angolo tra le due rette è uguale a $2\pi/3$. Lo stesso vale in x_1.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq -2$, e

$$f'(x) := \frac{9}{(2+x)^2} \exp\Big(\frac{-9}{2+x}\Big)\,.$$

Poiché la derivata è sempre positiva, la funzione cresce sia sulla semiretta $x < -2$ che sulla semiretta $x > -2$.
b) La retta r_a passa per l'origine, e quindi la sua equazione è della forma $y = mx$; il coefficiente angolare m lo si ottiene sapendo che questa retta passa anche per il punto di coordinate $(a, f(a))$: l'equazione è quindi

$$y = \frac{f(a)}{a} x\,.$$

c) Affinché la retta sia tangente al grafico di f in a, deve avere pendenza uguale a $f'(a)$, ovvero deve valere l'equazione

$$\frac{f(a)}{a} = f'(a)\,.$$

Risolvendo questa equazione si ottiene infine $a = 1, 4$.

3. Si deve risolvere l'equazione

$$z^4 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\,.$$

Procedendo al solito modo, scriviamo i numeri complessi coinvolti in forma esponenziale, vale a dire $z = re^{i\alpha}$ e $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm\pi i/3}$. L'equazione diventa quindi

$$r^4 e^{i4\alpha} = \frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-\pi i/3}} = e^{2\pi i/3}\,,$$

ed equivale al sistema

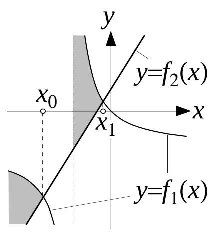
$$\begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\alpha = \frac{2}{3}\pi + k2\pi \quad \text{con } k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

che a sua volta ha come soluzioni $r = 1$ e $\alpha = \pi/6 + k\pi/2$ con $k = 0,1,2,3$. Facendo i dovuti conti si ottiene che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \pm\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \pm\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) I grafici delle due funzioni sono dati nella figura accanto. L'insieme dei punti cercato è quello disegnato in grigio.
b) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che x risolve la disequazione $f_1(x) \geq f_2(x)$ se



$$x \leq x_0 := -1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{oppure} \quad -1 < x \leq x_1 := -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,.$$

c) L'angolo tra le due rette tangenti è uguale a $2\pi/3$ in entrambi i punti di intersezione.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq -6$, e
$$f'(x) := -\frac{1}{(6+x)^2} \exp\left(\frac{1}{6+x}\right).$$
Poiché la derivata è sempre negativa, la funzione decresce sia sulla semiretta $x < -6$ che sulla semiretta $x > -6$.
b) Come per il gruppo 1, la retta r_a ha equazione $y = \frac{f(a)}{a}x$.
c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene $a = 4$, 9.

3. Analogo al gruppo 1: $z = \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno dato risposte in cui r non appare, o appare con esponente 1 invece di 2: che queste formule siano errate è evidente per ragioni di dimensione, senza scomodare la trigonometria.

- Prima parte, esercizio 5. Quasi nessuno ha usato la semplificazione $e^{a \log x} = (e^{\log x})^a = x^a$.

- Prima parte, esercizio 5. Sorprendentemente sono stati fatti molti errori nel calcolo delle derivate.

- Seconda parte, esercizio 1a). Molti hanno disegnato i grafici delle due funzioni in modo accurato, ma quasi nessuno ha individuato correttamente l'insieme dei punti tali che $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.

- Seconda parte, esercizio 1b). Ovviamente è possibile risolvere direttamente la disequazione, usando il disegno fatto al punto a) solo per una verifica finale. Così facendo nel gruppo 1 si arriva alla disequazione
$$\frac{\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1}{x-1} \geq 0\,,$$
che viene risolta studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Quasi tutti i presenti hanno scelto questa strada, facendo però molti errori di calcolo.

- Seconda parte, esercizio 1b). Nello scrivere la soluzione, solo pochi (sorprendentemente pochi!) hanno usato la semplificazione
$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,,$$
mentre altri hanno proposto semplificazioni errate, del tipo $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3}$.

- Seconda parte, esercizio 2a). Stranamente in tanti hanno scritto che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Affinché esista il logaritmo deve essere $x > 0$. Invece, affinché esista la radice, deve essere $3 + \log x \geq 0$, vale a dire $\log x \geq -3$, cioè $x \geq e^{-3}$ (che implica la condizione precedente). Dunque la funzione è definita per $x \geq e^{-3}$.

2. $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

3. a) $r = \sqrt{8}$, $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 4$, $\alpha = \pi$; c) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

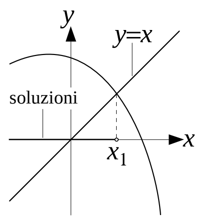
4. a) $\dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$; b) $3\cos(3x + 1)$; c) $2x \exp(x^2)$.

5. $z = 1 \pm 2i$.

6. $\dfrac{1}{2 - i} + \dfrac{1}{2 + i} = \dfrac{2 + i + 2 - i}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{4}{5}$.

7. Le soluzioni sono $x \leq x_1$ dove x_1 è dato nella figura accanto.

8. Si tratta del grafico della funzione $\log x$ traslato verso sinistra di 1 e poi riflesso rispetto all'asse delle x.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Analogo al gruppo 1: $x \geq e^{-2}$.

2. $-\dfrac{\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{3}$.

3. a) $r = 4$, $\alpha = 0$; b) $r = \sqrt{8}$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; c) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

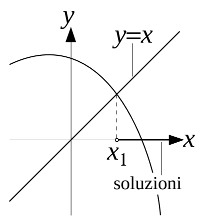
4. a) $2 \exp(2x)$; b) $2x \cos(x^2 + 1)$; c) $-\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$.

5. $z = -1 \pm 2i$.

6. $\dfrac{1}{2 - i} - \dfrac{1}{2 + i} = \dfrac{2 + i - 2 + i}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{2i}{5}$.

7. Le soluzioni sono $x \geq x_1$ dove x_1 è dato nella figura accanto.

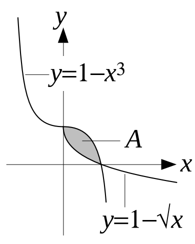
8. Si tratta del grafico della funzione $\sqrt{x}$ traslato verso sinistra di 1 e poi verso il basso di 1.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) e b) I grafici di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono ottenuti partendo da quelli di x^3 e $\sqrt{x}$ rispettivamente, riflettendoli rispetto all'asse delle x, e poi traslandoli verso l'alto di 1. L'insieme A è quindi quello disegnato nella figura accanto.

   c) Gli spigoli di A corrispondono alle intersezioni dei grafici delle due funzioni; le loro ascisse soddisfano quindi l'equazione $f_1(x) = f_2(x)$, vale a dire

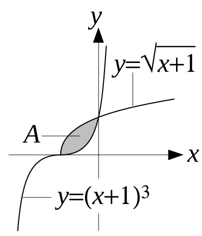


$$x^3 = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^6 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ e } x^5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ e } x = 1\,.$$

Le ordinate le troviamo calcolando il valore di $f_1(x)$ (o equivalentemente di $f_2(x)$) per $x = 0$ e $x = 1$, ottenendo quindi che i punti cercati sono $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

2. a) Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso destra di 1.
   b) Come visto a lezione, la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa a ha equazione $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, che nel caso specifico diventa
$$y = \frac{2a - 1 - x}{(a-1)^2}\,.$$
   c) Imporre che questa retta passi per il punto $(0, 1)$ equivale a dire che per $x = 0$ il corrispondente valore di y è 1, ovvero vale l'equazione
$$1 = \frac{2a - 1}{(a-1)^2}\,.$$
   Moltiplicando entrambi i termini per $(a - 1)^2$ e pertanto quello di destra a sinistra otteniamo l'equazione di secondo grado $a^2 - 4a + 2 = 0$, che ha come soluzioni
$$a = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2



1. a) e b) I grafici di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono ottenuti partendo da quelli di x^3 e $\sqrt{x}$ rispettivamente, traslandoli verso sinistra di 1. Pertanto A è l'insieme dato nella figura accanto.
   c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che i punti cercati sono $(0, 1)$ e $(-1, 0)$.

2. a) Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1.
   b) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$y = \frac{2a + 1 - x}{(a+1)^2}\,.$$
   c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$a = -2 \pm \sqrt{2}\,.$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno fatto il solito (grave) errore nel calcolo degli angoli: per esempio, il fatto che $\tan\alpha = 1$ non significa necessariamente che $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$, perché potrebbe anche essere $\alpha = 5\pi/4$ (come ripetuto più volte a lezione).

- Prima parte, esercizio 7. Molti dei presenti non hanno ancora capito cosa vuol dire risolvere graficamente una disequazione. In particolare, diversi hanno confuso questo esercizio con quelli del tipo "disegnare l'insieme dei punti del piano tali che…

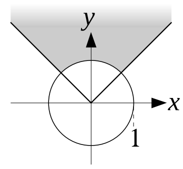
Prima parte, gruppo 1

1. Affinché la funzione sia definita basta che sia definito logaritmo, ovvero che l'argomento di quest'ultimo sia positivo: deve quindi essere $1 - x^2 > 0$, vale a dire $-1 < x < 1$.

2. a) $-2x\,\exp(1-x^2)$; b) $2x\log x + x$; c) $\dfrac{2}{3x}$ (si noti che $\log\left(\sqrt[3]{4x^2}\right) = \dfrac{1}{3}\log 4 + \dfrac{2}{3}\log x$).

3. a) 1; b) 0; c) 2.

4. Si tratta dell'area in grigio nella figura accanto.

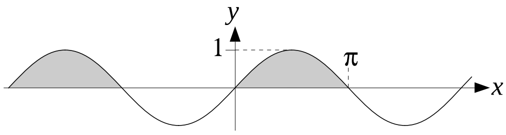


5. $\log(1+2\sin(x^2)) \sim 2\sin(x^2) \sim 2x^2$.

6. $\displaystyle\int \frac{1}{3-2x}dx = -\frac{1}{2}\log(3-2x) + c$; la primitiva cercata si ottiene ponendo $c = 2$

7. Integrando per parti si ottiene $\displaystyle\int_0^1 x^2 \log x\, dx = \left|\frac{x^3}{3}\log x\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,dx = -\frac{1}{9}$.

8. Si tratta dell'area in grigio nella figura accanto.



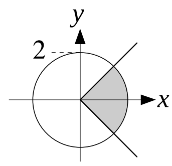
Prima parte, gruppo 2

1. Analogo al gruppo 1: deve essere $x^2 - 1 > 0$, vale a dire $x > 1$ oppure $x < -1$.

2. a) $\dfrac{3}{4x}$ (si noti che $\log\left(\sqrt[4]{5x^3}\right) = \dfrac{1}{4}\log 5 + \dfrac{3}{4}\log x$); b) $1 + e^x + xe^x$; c) $\dfrac{2x}{1+x^2}$.

3. a) 0; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

4. Si tratta dell'area in grigio nella figura accanto.

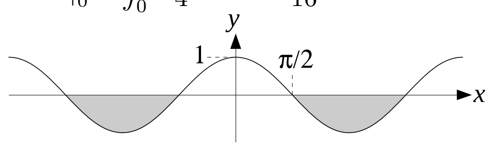


5. $\sin(\log(1-x^3)) \sim \log(1-x^3) \sim -x^3$.

6. $\displaystyle\int \frac{1}{(3-2x)^2}dx = \frac{1}{2(3-2x)} + c$; la primitiva cercata si ottiene ponendo $c = \dfrac{1}{2}$

7. Integrando per parti si ottiene $\displaystyle\int_0^1 x^3 \log x\, dx = \left|\frac{x^4}{4}\log x\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{4}\,dx = -\frac{1}{16}$.

8. Si tratta dell'area in grigio nella figura accanto.



Seconda parte, gruppo 1

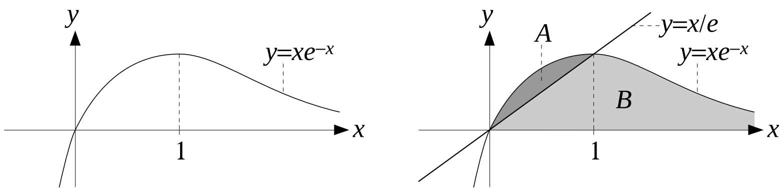
1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x > 0$ e negativa altrimenti. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Studiando il segno della derivata $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ si ottiene che la funzione cresce per $x \le 1$ e decresce per $x \ge 1$; in particolare $x = 1$ è il punto di massimo assoluto. Usando quanto appena detto possiamo quindi tracciare il grafico nella figura a sinistra qui di seguito (per rendere il disegno più leggibile sono state prese diverse unità di misura sui due assi).



b, c) Risolvendo la disuguaglianza $f(x) > x/e$ si ottiene $0 \leq x \leq 1$ (e in particolare il grafico della funzione $f(x)$ interseca quello di x/e per $x = 0$ e $x = 1$). Pertanto gli insiemi A e B sono quelli dati nella figura di destra qui sopra. Inoltre

$$\begin{aligned}\text{Area}(A) = \int_0^1 f(x) - \frac{x}{e}\,dx &= \int_0^1 xe^{-x}dx - \int_0^1 \frac{x}{e}\,dx \\ &= \Big|x(-e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx - \Big|\frac{x^2}{2e}\Big|_0^1 \\ &= -\Big|xe^{-x}\Big|_0^1 - \Big|e^{-x}\Big|_0^1 - \Big|\frac{x^2}{2e}\Big|_0^1 = 1 - \frac{5}{2e}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio abbiamo integrato per parti il primo integrale, usando il fatto che una primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$). Analogamente

$$\begin{aligned}\text{Area}(A \cup B) = \int_0^\infty xe^{-x}dx &= \Big|x(-e^{-x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})\,dx \\ &= -\Big|xe^{-x}\Big|_0^\infty - \Big|e^{-x}\Big|_0^\infty = 1\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che il limite di xe^{-x} per $x \to +\infty$ è 0). Infine

$$\text{Area}(B) = \text{Area}(A \cup B) - \text{Area}(A) = \frac{5}{2e}\,.$$

2. a) Calcoliamo il minimo della funzione $f(x) := 2x^2 - \log x$. Questa funzione è definita per ogni $x > 0$, e studiando il segno della derivata

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4x^2 - 1)$$

si ottiene che $f(x)$ è decrescente per $x \leq 1/2$ e crescente per $x \geq 1/2$. Pertanto $x = 1/2$ è un punto di minimo assoluto. Ne segue che il valore minimo di f è $f(1/2)$ e dunque per ogni $x > 0$ si ha

$$f(x) \geq f(1/2) = \frac{1}{2} + \log 2 \simeq 1{,}193 \pm 10^{-3}\,,$$

il che significa in particolare che $f(x) \geq 1$, che equivale alla disuguaglianza da dimostrare.
b) La disuguaglianza che ci interessa si riscrive come $f(x) \geq a$, e per quanto detto al punto precedente vale per ogni $x > 0$ se e solo se

$$1/2 + \log 2 \geq a\,.$$

3. a) Usando gli sviluppi

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{e} \quad e^y = 1 + y + o(y)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\log(1+2x) - 2x\,e^x &= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) - 2x\big[1 + x + o(x)\big] \\ &= 2x - 2x^2 + o(x^2) - 2x - 2x^2 - x\,o(x) = -4x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

e dunque la parte principale cercata è $-4x^2$.
b) Utilizzando gli sviluppi di prima si ottiene $\log(1+2x) - 2x\,e^{-x} = o(x^2)$, il che non ci permette di determinare la parte principale della funzione. Utilizziamo quindi sviluppi più accurati, vale a dire

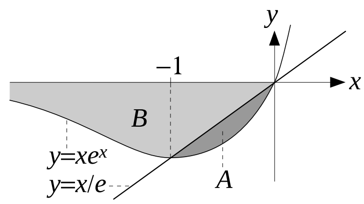
$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \quad \text{e} \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\,;$$

così facendo otteniamo

$$\begin{aligned}
&\log(1+2x) - 2x\,e^{-x} \\
&\qquad = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o((2x)^3) - 2x\Big[1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2)\Big] \\
&\qquad = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - 2x + 2x^2 - x^3 + x\,o(x^2) = \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

e dunque la parte principale cercata è $\frac{5}{3}x^3$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1



1. Analogo al gruppo 1. Gli insiemi A e B ed il grafico di $f(x) := xe^x$ sono dati nella figura sottostante. Inoltre

$$\mathrm{Area}(A) = 1 - \frac{5}{2e}\,, \quad \mathrm{Area}(B) = \frac{5}{2e}\,.$$

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso si vede che la funzione $f(x) := 2\log x - x^2$ è definita per ogni $x > 0$, ed ha un punto di massimo assoluto per $x = 1$. Pertanto $f(x) \le f(1) = -1$ per ogni $x > 0$, ed in particolare $f(x) \le -1/2$, che equivale alla disuguaglianza da dimostrare ne l punto a).

   Più in generale, si ha che la disuguaglianza di cui al punto b) si riscrive come $f(x) \le -a$, ed è quindi verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $-1 \le -a$, ovvero $a \le 1$.

3. a) Analogo al gruppo 1: la parte principale cercata è $-6x^2$.
   b) Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. La funzione al punto c) del gruppo 1 e quella al punto a) del gruppo 2 vanno semplificate usando le proprietà dei logaritmi e delle potenze prima di calcolarne la derivata, altrimenti il calcolo risulta eccessivamente complesso.

- Seconda parte, esercizio 1. Volendo è possibile anche determinare gli intervalli di concavità e convessità della funzione $f(x)$, infatti e molti lo hanno fatto, ma questo non è strettamente necessario per disegnare correttamente gli insiemi A e B.

- Seconda parte, esercizio 1. Per disegnare l'insieme A (e poi anche B) sarebbe necessario capire per quali x il grafico di $f(x)$ giace al di sopra di quello di x/e (mi riferisco qui al gruppo 1), o perlomeno trovare le intersezioni dei due grafici. Una di queste intersezioni è l'origine, ma l'altra non è poi così evidente, e richiederebbe un qualche calcolo. Molti hanno "trovato" la seconda intersezione senza però spiegare come (mentre sarebbe stato opportuno farlo).

- Seconda parte, esercizio 1, punti b) e c). Pur tracciando correttamente il disegno molti hanno avuto problemi ad impostare correttamente l'integrale per il calcolo dell'area di A e B.

- Seconda parte, esercizio 2. Alcuni hanno risolto la prima parte dell'esercizio (il punto a)) semplicemente disegnando i grafici dei termini di destra e di sinistra della disuguaglianza da dimostrare ($2x^2 - 1$ e $\log x$ per il gruppo 1) e avendo cura di non farli intersecare. Questa non è una dimostrazione accettabile perché disegnando i grafici in modo appena diverso potrebbe facilmente ottenere delle intersezioni (è chiaro che se la disuguaglianza è vera non ci sono intersezioni, ma questa è proprio la tesi che si vuole dimostrare). E non a caso questo modo di argomentare non permette di risolvere la seconda parte dell'esercizio, che è il punto essenziale.

- Seconda parte, esercizio 2. Una soluzione molto originale è stata proposta da uno dei presenti per il gruppo 2 (ma un discorso analogo vale anche per il gruppo 1): le rette tangenti ai grafici delle funzioni $2 \log x$ e $x^2 - a$ nel punto di ascissa $x = 1$ hanno lo stesso coefficiente angolare (cioè 2) e sono quindi parallele. Inoltre il grafico della prima funzione giace sotto la retta tangente in questione, mentre quello della seconda sopra. Pertanto il grafico della prima funzione giace sotto quello della seconda (ovvero $2 \log x \leq x^2 - a$ per ogni $x > 0$) se e solo se questo si verifica nel punto di ascissa 1 (lo si capisce bene facendo un disegno) cioè se e solo se $2 \log 1 \leq 1 - a$, vale a dire $a \leq 1$.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno risolto l'esercizio sostituendo alle funzioni coinvolte i loro polinomi di Taylor, senza però aggiungere rispettivi resti. Così facendo non c'è modo di verificare se le parti tralasciate (i resti) sono trascurabili rispetto a quello che resta alla fine. Ed infatti molti hanno dato un risultato completamente sbagliato.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Deve essere $e^x - 1 \geq 1$, ovvero $x \geq \log 2$.

2. $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\pi i/4}$ e quindi $(1-i)^6 = (\sqrt{2}\, e^{-\pi i/4})^6 = 2^3 e^{-3\pi i/2} = 8i$.

3. a) $2x \cos(x^2+1)$; b) $1 + e^x + xe^x$; c) $\big[3\log x - \log(x+1)\big]' = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x+3}{x(x+1)}$.

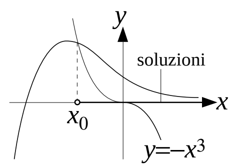
4. $1 - \cos(2x^2) = 1 - \Big[1 - \dfrac{(2x^2)^2}{2} + o\big((2x^2)^3\big)\Big] = 2x^4 + o(x^6) \sim 2x^4$.

5. Usando il cambio di variabile $y = -2x$ si ha $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\, dx = \int_0^{-\infty} e^y \frac{dy}{-2} = \frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}$.

6. Equazione a variabili separabili: $\dot{x}/x = 2t$, quindi $\log x = t^2 + c$, e imponendo la condizione $x(2) = e$ si ottiene $c = -3$. Dunque $x(t) = \exp(t^2 - 3)$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Le soluzioni sono $x \geq x_0$, dove x_0 è preso come nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Deve essere $e^x - 2 \geq 1$, ovvero $x \geq \log 3$.

2. $1 + i = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$ e quindi $(1+i)^4 = (\sqrt{2}\, e^{\pi i/4})^4 = 2^2 e^{\pi i} = -4$.

3. a) $2 + \log x$; b) $-2x \exp(1-x^2)$; c) $\big[2\log x - \log(x-1)\big]' = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x(x-1)}$.

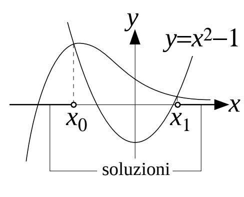
4. $1 - \cos(4x^3) = 1 - \Big[1 - \dfrac{(4x^3)^2}{2} + o\big((4x^3)^3\big)\Big] = 8x^6 + o(x^9) \sim 8x^6$.

5. Usando il cambio di variabile $y = -3x$ si ha $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\, dx = \int_0^{-\infty} e^y \frac{dy}{-3} = \frac{1}{3}\Big| e^y \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{3}$.

6. Equazione a variabili separabili: $\dot{x}/x = 3t^2$, quindi $\log x = t^3 + c$, e imponendo la condizione $x(1) = 1$ si ottiene $c = -1$. Dunque $x(t) = \exp(t^3 - 1)$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Le soluzioni sono $x \leq x_0$ e $x \geq x_1$, dove x_0 ed x_1 sono presi come nella figura accanto.

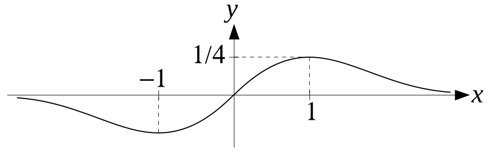


SECONDA PARTE.

1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti (in particolare $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$); inoltre $f(x)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando infine il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{3(1-x^2)}{(3+x^4)^2}$$

si ottiene che la funzione cresce nell'intervallo $[-1,1]$ e decresce in $(-\infty,-1]$ e $[1,\infty)$. Usando queste informazioni possiamo tracciare il grafico di f ottenendo la figura sottostante.



Si noti in particolare che $x = 1$ è il punto di massimo assoluto (e $f(1) = 1/4$), mentre $x = -1$ è il punto di minimo assoluto (e $f(-1) = -1/4$).

b) e c) Dal disegno risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a > 1/4$, ne ha una per $a = 1/4$ (vale a dire $x = 1$) e due per $a < 1/4$.

2. a) Utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine di e^x e quello al secondo ordine di $\log(1+x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} xe^x + \log(1-x) &= x\big[1 + x + o(x)\big] + \Big[(-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2)\Big] \\ &= \big[x + x^2 + o(x^2)\big] + \Big[-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big] \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}\,. \end{aligned}$$

a) Procedendo come per il punto precedente si ottiene solamente che la funzione data è $o(x^2)$, e questo non basta a determinarne la parte principale. Utilizziamo quindi lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di e^x e quello al terzo ordine di $\log(1+x)$:

$$\begin{aligned} &2xe^x + \log(1-2x) \\ &\quad= 2x\Big[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big] + \Big[(-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} - \frac{(-2x)^3}{3} + o((-2x)^3)\Big] \\ &\quad= \big[2x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)\big] + \Big[-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\Big] \\ &\quad= -\frac{5}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{5}{3}x^3\,. \end{aligned}$$

3. a) L'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$; l'equazione caratteristica corrispondente è quindi $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché il termine noto dell'equazione (*) è e^{-t}, cerchiamo ora una soluzione della (*) della forma $\bar{x} = ae^{-t}$: con questa sostituzione l'equazione si riduce a $-4ae^{-t} = 4e^{-t}$, ed è quindi soddisfatta per $a = -1$. Pertanto la soluzione cercata è $\bar{x}(t) = -e^{-t}$, e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Usando la formula risolutiva (1) si vede che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c_1 > 0 \\ 0 & \text{se } c_1 = 0 \\ -\infty & \text{se } c_1 < 0 \end{cases},$$

e quindi $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $c_1 = 0$. Inoltre la condizione $x(0) = 0$ equivale a $c_1 + c_2 - 1 = 0$. Pertanto le due condizioni sono verificate contemporaneamente per $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, e dunque la soluzione cercata è

$$x(t) = e^{-2t} - e^{-t}\,.$$

c) In questo caso la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è quella trovata al punto a). Nel cercare una soluzione particolare della (*) osserviamo che il termine noto $5e^{-2t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea (la si ottiene ponendo $c_1 = 0$ e $c_2 = 5$), e quindi cerchiamo una soluzione della (*) della forma $\bar{x} = ate^{-2t}$: con questa sostituzione l'equazione si riduce a $-5ae^{-2t} = 5e^{-2t}$, ed è quindi soddisfatta per $a = -1$. Pertanto $\bar{x}(t) = -te^{-2t}$, e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - te^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Ponendo $x = 1/y$ si ha che $\dot{x} = -\dot{y}/y^2$, e quindi l'equazione $t\dot{x} - x = x^2 \cos t$ si riscrive come

$$-\frac{t\dot{y}}{y^2} - \frac{1}{y} = \frac{\cos t}{y^2}\,,$$

e moltiplicando per $-y^2$ otteniamo l'equazione lineare del primo ordine

$$t\dot{y} + y = -\cos t \tag{2}$$

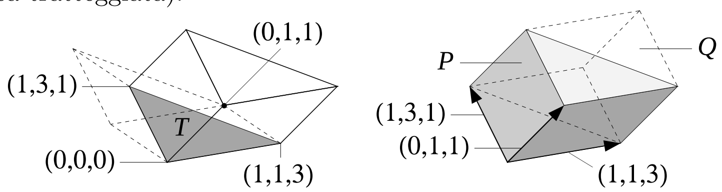
Il termine di sinistra della (2) è la derivata di ty, e dunque ty è una primitiva di $-\cos t$, vale a dire che $ty = c - \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$. Da questo segue che

$$y(t) = \frac{c - \sin t}{t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

e quindi, ricordando che $x = 1/y$,

$$x(t) = \frac{t}{c - \sin t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

5. a) I possibili prismi con base T e con $(0,1,1)$ come vertice della faccia opposta alla base sono tre; due di questi sono disegnati nella figura sottostante, a sinistra (uno con linea continua e l'altro con linea tratteggiata).



Si noti che questi prismi, pur essendo diversi, hanno la stessa base e la stessa altezza, e dunque lo stesso volume. Inoltre, come risulta chiaramente dal disegno a destra nella figura sopra, questo volume è la meta di quello del parallelepipedo Q generato dai vettori $(0,1,1)$, $(1,1,3)$ e $(1,3,1)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(P) &= \frac{1}{2}\text{Volume}(Q) \\
&= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}|0 - (-2) + 2| = 2\,.
\end{aligned}$$

b) L'area di T è meta di quella del parallelogramma generato dai vettori $(1,1,3)$ e $(1,3,1)$, e quindi, per quello che abbiamo visto a lezione,

$$\begin{aligned}
\text{Area}(T) &= \frac{1}{2}\,|(1,1,3) \times (1,3,1)| \\
&= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} e_1 - \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e_2 + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} e_3\right| \\
&= \frac{1}{2}\big|(-8,2,2)\big| = 3\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

c) L'altezza di P relativa alla base T è ovviamente data da $\text{Volume}(P)/\text{Area}(T) = \sqrt{2}/3$.

COMMENTI

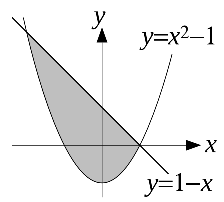
- Prima parte, esercizio 8. Molti hanno risolto l'esercizio indicando una parte del grafico di f o anche porzioni di piano. L'esercizio chiedeva però di indicare l'insieme degli x che risolvono la disequazione, e quindi la risposta avrebbe dovuto essere un sottoinsieme dell'asse delle x (come nelle figure sopra).

- Seconda parte, esercizio 4. Ad essere precisi la forma normale per l'equazione differenziale lineare soddisfatta da y è quella che si ottiene dividendo la (2) per t, vale a dire
$$\dot{y} + \frac{y}{t} = -\frac{\cos t}{t}\,. \tag{3}$$
In questo caso una primitiva del coefficiente $a(t) = 1/t$ è $A(t) = \log t$, e quindi l'equazione va moltiplicata per il fattore integrante $\exp(A(t)) = \exp(\log t) = t$, ottenendo così di nuovo la (2). Nella soluzione data sopra siamo partiti direttamente dalla (2), senza passare per la (3).

- Seconda parte, esercizio 5. Quasi tutti quelli che hanno svolto questo esercizio hanno calcolato il volume del parallelepipedo Q invece che quello del prisma P. Inoltre quasi nessuno ha dato una valida giustificazione del fatto che i tre possibili prismi P hanno lo stesso volume (qualcuno ha anzi sostenuto il contrario).

PRIMA PARTE.

1. a) $r = 2$, $\alpha = -\pi/3$; b) $r = 2$, $\alpha = -\pi/2$; c) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$ (oppure $\alpha = 5\pi/4$).
2. a) $-2\,e^{1-2x}$; b) $\log x + 1$; c) $\dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Il determinante vale $a^2 - 4$, e quindi la matrice è invertibile se $a \neq \pm 2$.
4. $3^{1-x} \ll x^{10} \ll 2^x$.
5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\,\sin x - \int \sin x\,dx = x\,\sin x + \cos x + c$.
6. $-1/x$.
7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta dell'area di piano colorata in grigio nella figura accanto.



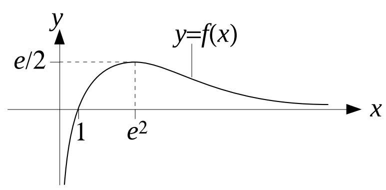
SECONDA PARTE.

1. a) La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$, positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti. Inoltre converge a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to +\infty$ (si usa il fatto che $\log x$ è trascurabile rispetto ad ogni potenza con esponente positivo). Studiando il segno della derivata

$$f'(x) := x^{-3/2}\Big(1 - \frac{1}{2}\log x\Big)$$

si ottiene che la funzione f è crescente per $x \leq e^2$ e decrescente per $x \geq e^2$. In particolare $x = e^2$ risulta essere il punto di massimo assoluto di f, e di conseguenza $f(\log 2) = 2/e$ è il valore massimo assunto da f.

Sulla base di quanto appena detto otteniamo il disegno approssimativo del grafico di f dato nella figura sottostante.



Siccome il valore massimo $2/e$ è inferiore a 1, abbiamo che $f(x) \leq 1$ per ogni x positivo, disuguaglianza che equivale a $\log x \leq \sqrt{x}$.

b) La disuguaglianza $\log x \leq a\sqrt{x}$ equivale a $f(x) \leq a$, ed è verificata per ogni x se e solo se il valore massimo di $f(x)$ è minore o uguale ad a, cioè se $a \geq 2/e$.

2. a) Ricordando che lo sviluppo di Taylor di ordine 1 di $(1+x)^a$ è $1 + ax + o(x)$, otteniamo che

$$\sqrt[3]{1+x} - 1 = \frac{x}{3} + o(x) \sim \frac{x}{3}\,.$$

b) Raccogliendo x come suggerito otteniamo che

$$\sqrt[3]{1+x^3} - x = x\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1\right]. \tag{1}$$

Osserviamo ora che $1/x^3$ tende a zero per $x \to +\infty$ e quindi, applicando il cambio di variabile $t = 1/x^3$ e quanto visto al punto a),

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1 = \sqrt[3]{1+t} - 1 \sim \frac{t}{3} = \frac{1}{3x^3}\,.$$

Pertanto, tornando alla (1),

$$\sqrt[3]{1+x^3} - x \sim x\frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3x^2}\,.$$

3. a) Usando il cambio di variabile $x = \sin t$ (e quindi $dx = \cos t\, dt$) e poi integrando per parti otteniamo

$$\int e^{\sin t} \sin t \cos t\, dt = \int e^x\, x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = (x-1)e^x + c = (\sin t - 1)e^{\sin t} + c\,.$$

b) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti non costanti. La risolviamo quindi moltiplicandola per il fattore integrante $e^{\sin t}$: così facendo otteniamo infatti

$$(e^{\sin t} x)' = e^{\sin t} \sin t \cos t\,,$$

e per quanto visto al punto a)

$$e^{\sin t} x = \int e^{\sin t} \sin t \cos t\, dt = (\sin t - 1)e^{\sin t} + c\,,$$

da cui si ottiene infine

$$x(t) = \sin t - 1 + ce^{-\sin t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 4. Quasi tutti hanno scritto che $2^x \ll x^{10}$, mentre dovrebbe essere ben noto che una potenza è sempre trascurabile rispetto ad un esponenziale con base maggiore di 1 quando $x \to +\infty$.

- Seconda parte, esercizio 1. Pochi hanno disegnato correttamente il grafico della funzione f e nessuno ha visto il collegamento tra il disegnare il grafico (ed in particolare il determinare il valore massimo di f) e il dimostrare la disuguaglianza $\log x \le \sqrt{x}$ (e tantomeno è stato notato il collegamento con la seconda parte dell'esercizio).

  Qualcuno ha provato a studiare la disequazione $\log x \le \sqrt{x}$ disegnando separatamente i grafici di $\log x$ e $\sqrt{x}$. Il problema di questo approccio è che le conclusione che uno trae dipendono fortemente dalla precisione con cui è stato fatto il disegno, tant'è che infatti, sulla base di disegni molto simili, qualcuno ha concluso che la disuguaglianza è sempre (conclusione corretta) vera mentre qualcun'altro ha deciso che è vera per alcuni x e falsa per altri (conclusione sbagliata).

Prima parte.

1. $\dfrac{\sqrt[4]{a^4b^2}}{\sqrt[6]{a^5b^2}} = (ab)^{1/6} = \sqrt[6]{ab}$.

2. $\sqrt{3} - i = 2e^{-\pi i/6}$ e quindi $\big(\sqrt{3} - i\big)^4 = 2^4 e^{-2\pi i/3} = -8 - 8\sqrt{3}i$.

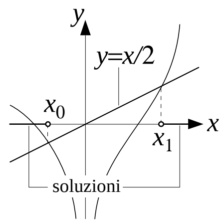
3. a) 0; b) 0; c) $-\infty$.

4. $\log(1 - 2x^3) = -2x^3 - 2x^6 + o(x^6)$.

5. Si ha $(a, 5, 3) \cdot (a, a, 2) = a^2 + 5a + 6$ e quindi i vettori sono ortogonali per $a = -2, -3$.

6. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine: moltiplicandola per il fattore integrante $\exp(t^2)$ si ottiene $x(t) = c\exp(-t^2)$ con $c \in \mathbb{R}$.

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \int_0^{-\infty} e^y \frac{dy}{-2} = \frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$.



8. Le soluzioni sono $x \le x_0$ e $x \ge x_1$, dove x_0 e x_1 sono dati nella figura accanto.

Seconda parte.

1. a) L'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$; le equazione caratteristica corrispondente è $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda = -2, -1$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(y) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché e^{-4t} non risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\bar{x} = ae^{-4t}$: sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo che a deve essere uguale a $1/2$. Quindi la soluzione particolare cercata è $\bar{x} = e^{-4t}/2$, e pertanto la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

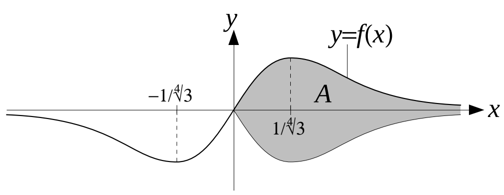
b) Osserviamo che e^{-4t} e e^{-2t} sono trascurabili rispetto a e^{-t} (in generale si ha che $e^{at} = o(e^{bt})$ se $a < b$) e quindi la soluzione data in (1) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ se e solo se $c_1 = 0$. In tal caso la condizione $x(0) = 0$ si riduce a $c_2 + 1/2 = 0$, ovvero $c_2 = -1/2$. Pertanto la soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t})\,.$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \ge 0$ e negativa altrimenti, inoltre tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Il segno della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2(1 - 3x^4)}{(1 + x^4)^2}$$

è uguale al segno del numeratore: risolvendo la disequazione $1 - 3x^4 \ge 0$ otteniamo $x^4 \le 1/3$, quindi $x^2 \le 1/\sqrt{3}$ (ricordo che x^2 è positivo) e da questa $-1/\sqrt[4]{3} \le x \le 1/\sqrt[4]{3}$; pertanto la funzione f è crescente in questo intervallo e decrescente altrimenti. Usando questi fatti otteniamo il disegno del grafico di f nella figura sottostante



b) Usando il cambio di variabile $y = x^2$ (e quindi $dy = 2x\,dx$) otteniamo

$$\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y + c = \arctan(x^2) + c\,.$$

c) La disequazione $|y| \le f(x)$ equivale a $-f(x) \le y \le f(x)$. Ricordando che il grafico di $-f(x)$ è ottenuto riflettendo quello di $f(x)$ rispetto all'asse delle x, otteniamo che l'insieme A è quello dato nella figura sopra. Tenuto conto che la lunghezza della sezione verticale di A in corrispondenza di un generico $x > 0$ è $2f(x)$, abbiamo che l'area di A è data da

$$\text{Area}(A) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2\Big|\arctan(x^2)\Big|_0^{+\infty} = \pi\,.$$

Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|y| \le f(x)$ e calcolare l'area.

3. a) L'equazione della retta r_a è

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

e quindi l'intersezione di questa retta con l'asse delle y ha ordinata pari a $-a\,f'(a)+f(a) = a^2e^{-a}$ (l'ascissa è ovviamente uguale a 0). Se consideriamo ora come base del triangolo T_a il lato verticale, abbiamo che la lunghezza della base è uguale all'ordinata dell'intersezione calcolata sopra, cioè a^2e^{-a}, mentre l'altezza è a. Pertanto

$$\text{Area}(T_a) = \frac{1}{2}a^3e^{-a}\,.$$

b) La derivata della funzione $\frac{1}{2}a^3e^{-a}$ è $\frac{1}{2}(3-a)a^2e^{-a}$, da cui segue che questa funzione è crescente per $0 < a \le 3$ e decrescente per $a \ge 3$. Ne segue che $a = 3$ è il punto di massimo assoluto di questa funzione, ovvero il valore di a per cui è massima l'area di T_a,

Prima parte.

1. deve essere $x^2 - x - 1 \geq 1$, vale a dire $x \geq 2$ oppure $x \leq -1$.

2. $\dfrac{1}{1-i} - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{2i}{1^2 - i^2} = i.$

3. a) $2/x$; b) $2e^{2x+1}$; c) $(2x^2+1)\exp(x^2)$.

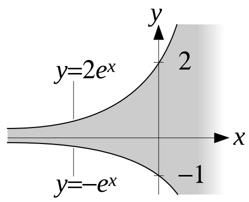
4. Valore massimo: $f(3) = 3$, valore minimo: $f(1) = -1$.

5. a) $1/2$; b) 0; c) 2.

6. $\displaystyle\int_1^e x \log x \, dx = \left| \frac{x^2}{2} \log x \right|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\, dx = \frac{e^2}{2} - \left| \frac{x^2}{4} \right|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$

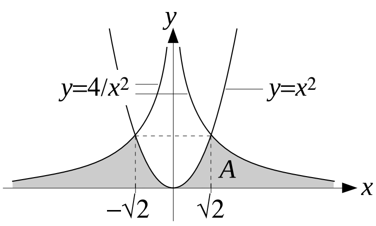
7. Area $= \dfrac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 3.$

8. Si tratta dell'area in grigio disegnata nella figura accanto.



Seconda parte.

1. Il grafico della funzione $y = x^2$ è noto, mentre quello della funzione $y = 4/x^2$ lo si ottiene a partire da quello della funzione $y = 1/x^2$ (che è pure noto) dilatandolo verticalmente di un fattore 4. Le ascisse dei punti di intersezione dei due grafici si ottengono risolvendo l'equazione $x^2 = 4/x^2$, e sono dunque $x = \pm\sqrt{2}$. L'insieme A è pertanto quello disegnato in grigio nella figura sottostante.

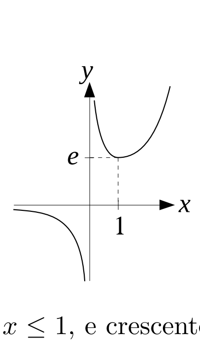


Per calcolare l'area di A osserviamo innanzitutto che per ragioni di simmetria questa è il doppio dell'area della parte di A che si trova alla destra dell'asse delle y, e dunque

$$\text{Area}(A) = 2 \int_0^{+\infty} \ell(x)\, dx$$

dove $\ell(x)$ è la lunghezza della sezione verticale di A di ascissa x. Poiché inoltre $\ell(x) = x^2$ se $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, e $\ell(x) = 4/x^2$ se $\sqrt{2} \leq x$, per calcolare questo integrale conviene scomporlo come somma di due integrali, uno tra 0 e $\sqrt{2}$, ed uno tra $\sqrt{2}$ e $+\infty$:

$$\text{Area}(A) = 2 \left[\int_0^{\sqrt{2}} x^2\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4}{x^2}\, dx \right] = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$



2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni numero reale $x \neq 0$, positiva per $x > 0$ e negativa altrimenti. Valgono inoltre i seguenti limiti: $f(-\infty) = 0$, $f(0^-) = -\infty$, $f(0^+) = +\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ (quest'ultimo caso è il meno ovvio, e segue dal fatto che x è trascurabile rispetto a e^x quando $x \to +\infty$).

   Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^x$$

si ottiene poi che f è decrescente nella semiretta $x < 0$ e nell'intervallo $0 < x \leq 1$, e crescente nella semiretta $x \geq 1$. In particolare $x = 1$ è un punto di minimo locale. Usando tutto questo si ottiene il disegno riportato nella figura sopra.

b) Si vede chiaramente dal disegno del grafico di f che l'equazione $f(x) = e$ ha sola soluzione, vale a dire $x = 1$.

c) Sempre usando il disegno del grafico, si vede che l'equazione $f(x) = a$ ha due soluzioni per $a > 1$, una per $a = 1$, e nessuna per $0 < a < 1$.

3. a) Se $x = t^\alpha$ allora $\dot{x} = \alpha t^{\alpha-1}$ e $\ddot{x} = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}$, e quindi per le funzioni x di questo tipo l'equazione (*) si riduce a
$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)t^{\alpha-2} = 0\,,$$
ed è quindi verificata se $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, cioè per $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Pertanto $x_1(t) := t$ e $x_2(t) := t^2$ sono due soluzioni della (*).

b) La (*) è un'equazione lineare omogenea, e dunque la soluzione generale è data dalle somme di multipli delle soluzioni x_1 e x_2 trovate al punto a), vale a dire
$$x(t) = c_1 t + c_2 t^2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente l'integrale che serve a calcolare l'area A; per la precisione tutti quelli che hanno svolto questo esercizio hanno integrato la differenza delle funzioni x^2 e $4/x^2$, che non ha nulla a che fare con la lunghezza $\ell(x)$ della sezione verticale dell'insieme A.

- Seconda parte, esercizio 3. Tutti i presenti hanno risolto l'equazione omogenea come se fosse un'equazione a coefficienti costanti, mentre non lo è (e non si può applicare la formula risolutiva per le equazioni a coefficienti costanti).

PRIMA PARTE.

1. Deve essere $e^x - 2 > 0$, e quindi $x > \log 2$.

2. a) $\sqrt{2}\, e^{-\pi i/4}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\pi i/4}$; c) $3e^{\pi i}$.

3. a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; b) $\dfrac{2}{1+4x^2}$; c) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$.

4. $-x^2$.

5. Ponendo $y = 1-2x$ si ottiene $\displaystyle\int 4\sin(1-2x)\, dx = -2\int \sin y\, dy = 2\cos y + c = 2\cos(1-2x) + c$.

6. Si tratta di un'equazione a variabili separabili (e volendo anche di un'equazione lineare del primo ordine): dividendo per x si ottiene $\dot{x}/x = \sin t$, e integrando $\log x = -\cos t + c$. La condizione iniziale equivale a $c = 1$, e quindi $x(t) = \exp(1 - \cos t)$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. Si tratta del grafico di $1/x^2$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso l'alto di 1.

SECONDA PARTE.

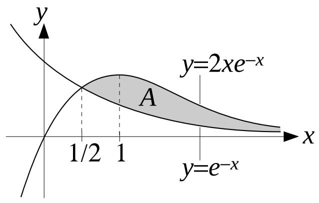
1. a) L'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$; l'equazione caratteristica corrispondente è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda = -2 \pm i$; pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (*) della forma $\bar{x} = ae^{-t}$: sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo che che a deve essere uguale a 1, e quindi la soluzione cercata è $\bar{z} = e^{-t}$. Pertanto la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
b) Dalla formula (1) si ottiene che $x(0) = c_1 + 1$ e $\dot{x}(0) = -2c_1 + c_2 - 1$. Imponendo le condizioni $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ otteniamo quindi un sistema di due equazioni nella incognite c_1 e c_2 e risolvendolo otteniamo $c_1 = c_2 = -1$. La soluzione cercata è quindi
$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}(\cos t + \sin t)\,.$$

2. a) Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ si ottiene
$$\sin(x^2) - x^2 = \left[x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right] - x^2 = -\frac{x^6}{6} + o(x^6) \sim -\frac{x^6}{6}\,.$$
b) Usando lo stesso sviluppo di Taylor per $\sin x$ e lo sviluppo del quadrato del binomio otteniamo
$$\begin{aligned}(\sin x)^2 &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6}\right]^2 + \left[o(x^3)\right]^2 + 2\left[x - \frac{x^3}{6}\right] o(x^3) \\ &= \left[x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3}\right] + o(x^6) + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\,.\end{aligned}$$
Pertanto
$$\sin(x^2) - (\sin x)^2 = \left[x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right] - \left[x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right] = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}\,.$$

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti; inoltre $f(x)$ tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e a 0 per $x \to +\infty$ (questo limite segue dal fatto che $x \ll e^x$ per $x \to +\infty$). Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$$

si ottiene che la funzione f è crescente per $x \leq 1$ e decrescente altrimenti; in particolare $x = 1$ è il punti di massimo assoluto di f. Utilizzando quanto detto si ottiene il grafico riportato nella figura sottostante.



b) Osserviamo innanzitutto che $e^{-x} \leq 2xe^{-x}$ se e solo se $x \geq 1/2$, e quindi il grafico di $f(x) = 2xe^{-x}$ giace al di sopra di quello di e^{-x} per $x \geq 1/2$ (in particolare i due grafici si intersecano per $x = 1/2$). Poiché, com'è noto, il grafico di e^{-x} è ottenuto riflettendo quello di e^x rispetto all'asse delle y, otteniamo che l'insieme A è quello riportato nella figura sopra.

Per calcolare l'area di A osserviamo che preso $x \geq 1/2$ la lunghezza $\ell(x)$ della sezione verticale di A di ascissa x è uguale a $2xe^{-x} - e^{-x}$ e quindi

$$\text{Area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} (2x-1)e^{-x}\,dx = \Big| -(2x+1)e^{-x} \Big|_{1/2}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{e}}\,.$$

dove la primitiva di $(2x-1)e^{-x}$ è stata calcolata tramite un'integrazione per parti, usando il fatto che la primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$:

$$\int (2x-1)e^{-x}\,dx = (2x-1)(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x})\,dx = -(2x+1)e^{-x}\,.$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 3. Per un disguido il testo distribuito durante la prova scritta conteneva una versione leggermente diversa di questo esercizio, dove nel punto b) al posto della funzione $2xe^{-x}$ c'era xe^{-x}; questo richiede un passaggio in più al momento di disegnare l'insieme A, e calcoli leggermente diversi per ottenere l'area.