[versione: 22 dicembre 2011]

CORSO: **Analisi in più Variabili 2**
DOCENTI: **Giovanni Alberti (titolare) e Maria Stella Gelli**
CORSO DI STUDIO: **Matematica (primo livello, ex lege 270)**
COLLOCAZIONE: **primo semestre del terzo anno**
CODICE ESAME: **518AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **60**
ANNO ACCADEMICO: **2011/12**

Avvertenza. Questo corso sostituisce il corso di "Analisi in più Variabili III", che a partire da quest'anno non sarà più attivato. Per gli studenti che hanno in piano di studi il corso di Analisi in più Variabili III l'esame verrà registrato con il vecchio titolo ed il vecchio codice (042AA).
Questo corso sostituisce anche il corso di "Analisi Funzionale" per gli studenti della laurea specialistica e per quelli della laurea triennale iscritti secondo il precedente ordinamento (ex lege 509); per questi studenti l'esame verrà registrato con il titolo "Analisi Funzionale" e con il corrispondente codice (AA112) e numero di crediti (7).

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: spazi L^p e spazi di Hilbert, serie e trasformata di Fourier (in L^1 e L^2), integrazione di k-forme su superfici regolari in $\mathbb{R}^n$ e teorema di Stokes, funzioni armoniche.

Programma del corso. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. SPAZI L^p
   - 1.1 Richiamo delle teoria dell'integrazione secondo Lebesgue: teorema di convergenza monotona, di convergenza dominata, lemma di Fatou, teorema di Fubini, teorema di cambio di variabile.
   - 1.2 Spazi L^p. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Completezza degli spazi L^p.
2. SPAZI DI HILBERT
   - 2.1 Spazio di Hilbert sul campo reale; basi di Hilbert (sistemi ortonormali massimali). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini della base.
   - 2.2 Esistenza della proiezione su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione come elemento di minima distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - 2.3 *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*
3. SERIE DI FOURIER ED APPLICAZIONI
   - 3.1 Le funzioni esponenziali e^{inx} come base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$. Serie di Fourier complessa per funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Convergenza uniforme per le funzioni di periodo 2π e classe $\mathscr{C}^1$. Regolarità di una funzione di periodo 2π e comportamento asintotico dei coefficienti.
   - 3.2 *Disuguaglianza isoperimetrica nel piano. Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier.
   - 3.3 *Varianti della serie di Fourier: caso reale; per funzioni sull'intervallo* $[0,\pi]$*; per funzioni sul quadrato* $[-\pi,\pi]^2$*. Altri esempi di basi ortonormali date da autovettori di operatori autoaggiunti.*
4. TRASFORMATA DI FOURIER E APPLICAZIONI
   - 4.1 Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^n$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
   - 4.2 *Rappresentazione di una funzione su* $\mathbb{R}$ *come combinazione integrale delle funzioni trigonometriche complesse: derivazione euristica della formula a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.

4.3 Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata di Fourier per funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
4.4 *Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier, e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore.*
4.5 *Trasformata di Fourier per funzioni di più variabili.*

5. Superfici e integrazione su superfici

5.1 Superfici (sottovarietà) senza bordo di dimensione d e classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{R}^n$. Spazio tangente ad una superfice in un punto e sue caratterizzazioni.
5.2 Mappe di classe $\mathscr{C}^k$ tra superfici di classe $\mathscr{C}^h$. Differenziale di una mappa tra superfici.
5.3 Superfici con bordo.
5.4 Determinante Jacobiano e formula dell'area. Definizione di integrale di una funzione scalare su una superfice tramite la formula dell'area.
5.5 Orientazione di una superficie e del suo bordo.
5.6 Applicazioni k-lineari alternanti e k-forme, rappresentazione di una k-forma in coordinate, Prodotto esterno, differenziale e pull-back di k-forme. Teorema di Stokes.
5.7 *Forme chiuse ed esatte. Una forma chiusa su un aperto stellato è esatta.*
5.8 *Casi particolari del teorema di Stokes: il teorema di Gauss-Green e della divergenza, teorema di Stokes per campi di vettori.*

6. Funzioni armoniche

6.1 Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.
6.2 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier.

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Serviranno in particolare le nozioni fondamentali di algebra lineare e topologia in spazi metrici, derivate e integrali di funzioni in più variabili, teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, formula di cambio di variabile negli integrali multipli e teorema di Fubini, convergenza uniforme e totale per serie di funzioni, teorema della divergenza nella forma classica, funzioni olomorfe e calcolo degli integrali con il metodo dei residui, potenziale di un campi di vettori (o primitiva di una 1-forma).

Mailing list e pagina web del corso. Le comunicazioni riguardanti corso ed esami vengono inviate per posta elettronica a chi si è iscritto alla mailing list del corso, e pubblicizzate sulla pagina web del docente: `http://www.dm.unipi.it/~alberti/`. Su tale pagina saranno disponibili i testi e le soluzioni delle varie prove d'esame.

Appelli ed esami. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. Per l'ammissione alla prova orale è necessario aver superato la prova scritta; la prova orale va sostenuta nello stesso appello della prova scritta. Non è consentito l'uso di libri di testo o appunti durante le prove scritte. Durante il corso è previsto lo svolgimento di due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta del primo o del secondo appello. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre). Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono pregati di utilizzare la procedura di iscrizione online.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso e si raccomanda quindi la frequenza. La maggior parte degli argomenti contenuti nelle sezioni 1-4 si trova in [1], mentre gli argomenti nella sezione 5 si trovano invece sia in [2] che in [3]. Si noti tuttavia che la presentazione proposta in questi testi differisce a volte significativamente da quella data a lezione.

[1] W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill 1974 (traduzione italiana: *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, 1974).
[2] W.H. Fleming: *Functions of several variables.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.
[3] R. Courant e F. John: *Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2.* Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1974.