Alcune precisazioni sulle azioni di gruppi

<u>Definizione</u>

Sia X un insieme e G un gruppo: una <u>azione</u> di G su X è una applicazione

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \to gx$$

verificante

i) $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$ e el neutro di G

ii) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad \forall x \in X$

Per i nostri scopi ~~[illegible]~~ X sarà uno spazio topologico e G un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di X

<u>Un po' di terminologia</u>

Una azione di un gruppo G su X induce su X una relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff \exists g \in G \quad gx = y.$$

(la relazione è riflessiva perché $\exists\, e$, simmetrica perché $\forall g\ \exists g^{-1}$, transitiva perché G è associativo)

L'insieme quoziente si indica con X/G e le classi di equivalenza si chiamano <u>orbite</u>, l'insieme degli elementi di G ~~che~~ fissano un elemento x

$$H_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

viene detto lo stabilizzatore di x ed è un sottogruppo di G.

Un'azione si dice

<u>fedele</u> se $\forall g \neq e \ \exists x \ gx \neq x$ (se ogni g sposta almeno un punto)

<u>libera</u> se $\forall g \neq e \ \forall x \in X \ gx \neq x$ (lo stabilizzatore di ogni punto è banale)

<u>transitiva</u> $\forall x, y \in X \ \exists g \in G \ gx = y$ (c'è una sola orbita)

Vogliamo dare condizioni sull'azione di G affinché lo spazio X/G con la topologia quoziente non sia troppo selvaggia: in particolare se partiamo da uno spazio T_2 (Hausdorff) ~~che~~ il quoziente resti T_2.

~~Esempio~~ Ciò in generale non è vero come mostra il seguente

<u>Esempio</u> Se $G = \mathbb{R} - \{0\}$ G è un gruppo moltiplicativo.

G agisce su $\mathbb{R}$ in questo modo

$$G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a, z) \to az$$

$\mathbb{R}/G$ ~~...~~ è costituito da due punti: la classe di 0 e la classe di $\mathbb{R} - \{0\}$ e chiaramente non è T_2. (in particolare il punto corrispondente alla classe di $\mathbb{R} - \{0\}$ non è chiuso).

<u>Proprietà di separazione di X/G</u> <u>viste durante il corso</u>

Richiamiamo alcune proprietà dimostrate a lezione

<u>Prop 1</u> ◦) la proiezione $X \xrightarrow{p} X/G$ è sempre una applicazione aperta

◦) se G è finito $\Rightarrow$ p è anche una applicazione chiusa

<u>Prova</u> Manetti ~~pag~~ 5.13

una condizione sufficiente affinché il quoziente sia T_2 è espressa dalla proposizione seguente

__Prop 2__ Sia X uno spazio T_2.
Se $\exists$ un aperto $A \subset X$ tale che
1) $p|_A : A \to X/G$ sia surgettiva
2) $\{ g \in G \mid gA \cap A \neq \emptyset \}$ è finito

Allora X/G è T_2

__Prova__ Manetti prop 5.15

Quest'ultima proposizione ha come corollario immediato che se G è un gruppo finito $\Rightarrow$ X/G è T_2: basta prendere come A lo spazio X.

~~da~~ Si può dare una caratterizzazione dell'essere T_2 del quoziente analoga alla chiusura della diagonale nel prodotto

__Prop 3__ X/G è $T_2 \Leftrightarrow$ l'insieme k

$$k = \{ (x, gx) \in X \times X \mid x \in X \ g \in G \}$$

è chiuso nel prodotto

__Prova__ Manetti prop. 5.18.

una condizione sufficiente per avere un quoziente T_2 è nell'esercizio 5.11 del Manetti

<u>Prop 4</u> Se $\forall x, y \in X$ $\exists$ intorno U di x e un intorno V di y tali che

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} \text{ è finito.} \Rightarrow X/_G \text{ è } T_2$$

<u>Prova</u> E' una parafrasi della prova della prop 5.15 del Manetti

Siano p, q due punti in $X/_G$ e x, y due rappresentanti in X $(\pi(x) = p$ e $\pi(y) = q)$

Siano U e V gli intorni di x e y in ipotesi e $g_1, \dots g_k$ gli elementi di G tali che $gU \cap V \neq \emptyset$

Siano U_i e V_i intorni disgiunti (X è T_2) di x e $g_i y$ e siano

$$\Omega_1 = U \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) \qquad \Omega_2 = V \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right)$$

Si prova esattamente come nella prova di 5.18 che

$$\bigcup_{g \in G} g(\Omega_1) \quad e \quad \bigcup_{g \in G} g(\Omega_2)$$

sono due aperti saturi disgiunti intorni risp. di x e y.
e che al quoziente danno intorni disgiunti di p e q $\boxtimes$

Al fine di avere buone proprietà del quoziente si da la nozione di <u>azione propriamente discontinua</u>

La terminologia in letteratura non è costante: partiamo dalla definizione data nel Manetti.

PD1) G agisce in modo propriamente discontinuo se $\forall x \in X$ $\exists$ un intorno U di x tale che $g(U) \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq e$

Questa definizione non è ancora sufficiente a garantire che il quoziente sia Hausdorff. come mostra un esempio preso da Hatcher : Algebraic Topology: An Introduction (vedi in fondo)

In ogni caso abbiamo visto che la condizione assicura sotto ipotesi di connessione, che $X \to X/_G$ sia un rivestimento

<u>Prop 5</u> Sia X loc. connesso per archi e G agisce in modo propriamente discontinuo (PD1)
Allora $X/_G$ connesso $\Rightarrow$ $X \xrightarrow{\pi} X/_G$ è un rivestimento

<u>Prova</u> Manetti Teor 12.16 (la condizione PD1 assicura l'esistenza di aperti trivializzanti)

La condizione (PD1) implica in modo ovvio che

1) l'azione di G è libera
2) $\forall x \in X$ $\exists$ U intorno aperto di x tale che

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} \text{ è finito}$$

In particolare se vale (PD1) tale insieme si riduce al solo elemento neutro

La prop 12.17 del testo mostra che la condizione si può invertire a patto di supporre lo spazio X, T_2

<u>Prop 6</u> Sia X uno spazio T_2 e G un gruppo che agisce su X in modo che siano verificate le condizioni 1) e 2)
$\Rightarrow$ G agisce in modo propriamente discontinuo (PD1)

<u>Prova</u> Manetti. 12.17 (la prova è simile a quella della Prop 2)

ovviamente tutto questo diventa più semplice nel caso in cui il gruppo G sia finito: ad esempio la condizione 2) è automaticamente soddisfatta.

In letteratura si trovano anche altre definizioni di azione propriamente discontinua.

PD2) G agisce in modo propriamente discontinuo se $\forall\, H$ e K compatti in X $\{g\in G \mid gH\cap K\neq\emptyset\}$ è finito.

Questa definizione è più forte di PD1 e implica che il quoziente è T_2. Più precisamente

<u>Prop 7</u> Sia X uno spazio T_2 e localmente compatto le seguenti affermazioni sono equivalenti

a) l'azione di G verifica PD2

b) X/G è T_2 e G verifica PD1

c) X/G è T_2 e $p: X \to X/G$ è un rivestimento

<u>Prova</u>

$a \Rightarrow b$ la locale compattezza e PD2 implicano che $\forall\, x,y\in X$ $\exists$ intorni U e V risp. di x e y che verificano le ipotesi della prop 4 quindi il quoziente è T_2

PD2 $\Rightarrow$ che l'azione è libera, quindi detto U un intorno rel. compatto di un punto x, e detti $g_1,\dots,g_k$ il numero finito di g per cui $g_i U\cap U\neq\emptyset$

e detti infine $U_1, \dots U_k$ aperti disgiunti separanti i punti distinti $g_i x$, si verifica, come nella prova della proposizione 6 che

$$V = U \cap g_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap g_k^{-1}(U_k)$$

è un intorno con le proprietà volute

$b \Rightarrow c$ è la proposizione 5

$c \Rightarrow a$ Siano H e K due compatti in X.
$p(H)$ è un compatto.

$\forall p \in X/G$ $\exists$ un intorno compatto V banalmente
X/G è $T_2 \Rightarrow$ compatti sono chiusi. Quindi
$p^{-1}(V)$ è un chiuso unione di componenti come U_i

(T_2 + loc compatto $\Rightarrow$ ogni punto ha un sist. fondamentale di intorni compatti)

$p^{-1}(V) \cap K$ è quindi compatto e quindi con $\#$ finito di comp. connesse.

Quindi ogni $p^{-1}(V)$ interseca K $\#$ finito di U_i
cioè $\{g \mid g(H) \cap K\} \neq \phi$ è finito
la compattezza di $p(H)$ fa concludere.

∎

Notiamo infine che in modo del tutto analogo si mostra che se

<u>Esercizio</u> X è T_2 loc compatto

$\forall K \subset X$ compatto $\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \phi\}$ è finito

$\Rightarrow G$ verifica (PD1) e $X/_G$ è T_2 e loc compatto

qui la condizione (PD2) è ~~ri~~ data solo per un compatto.

Vale la pena di notare che ~~……~~ la condizione PD1 basta ad assicurare che se X è T_2 le singole orbite sono chiuse e discrete. ~~……~~ -

<u>Per i più curiosi: un esempio di quoziente per un gruppo G (PD1) ~~……~~ che non è T_2</u>

Un modo di generare azioni di gruppo su uno spazio X viene dalle equazioni differenziali (o meglio dai sistemi dinamici) Per fissare le idee supponiamo X un aperto di $\mathbb{R}^2$ su cui è dato il seguente sistema diff.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1(x,y) \\ \dot{y} = v_2(x,y) \\ x(0) = x_0 \ , \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supponiamo che tutto sia definito in modo che vi sia una soluzione definita (per t) su tutto $\mathbb{R}$.

~~……~~.

Il problema può anche essere visto come

trovare una curva ~~[illegible]~~ $x(t), y(t)$ che all'istante $t=0$ passa per il punto (x_0, y_0) e che ha all'istante $\bar{t}$ nel punto $x(\bar{t}), y(\bar{t})$ il vettore tangente v_1, v_2 -

Se $\varphi(t, x, y)$ è una soluzione (la soluzione) di questo problema, φ può essere visto come una applicazione

$$\mathbb{R} \times X \to X .$$

la natura del problema differenziale implica che

φ è una azione del gruppo additivo $\mathbb{R}$ su X.

Premesso ciò, l'esempio è preso dal libro di Massey Algebraic Topology: an introduction. ed è nelle fotocopie allegate : mostra ~~[illegible]~~ una azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $X = \mathbb{R}^2$, In fact, we give such an example where Y is the Euclidean plane $\mathbf{R}^2$, and G is an infinite cyclic, properly discontinuous group of homeomorphisms of $\mathbf{R}^2$.

Examples

8.3 We start by considering the following simple system of ordinary differential equations in the (x, y) plane:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos^2 x, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \sin x. \end{cases}$$

It is easily seen that the integral curves are the curves

$$y = \sec x + C$$

for various values of the constant of integration C, and the vertical lines

$$x = (n + \tfrac{1}{2})\pi$$

for all integers n. We can consider this system of differential equations the equations of motion of a particle in the plane; t represents the time, and (x, y) are the coordinates of the particle at time t. The particle must move along one of the integral curves. Which curve it will move along depends on its initial position.

Using this differential equation, we shall define an operation of the additive group of real numbers, $\mathbf{R}$, on the Euclidean plane. For any real number t and any point (x, y) of the plane, we define $t \cdot (x, y)$ to be the position at time t of a particle which was at the point (x, y) at time 0. It is clear that

$$s \cdot [t \cdot (x, y)] = (s + t) \cdot (x, y),$$
$$0 \cdot (x, y) = (x, y).$$

Also, the map $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ defined by $(t, (x, y)) \to t \cdot (x, y)$ is continuous (it is even differentiable). This is a consequence of standard theorems on differential equations. It is also clear that this action of $\mathbf{R}$ on the plane is fixed point free.

We now consider the action of the subgroup $\mathbf{Z}$ of $\mathbf{R}$ on the plane; this will give our desired example.

We shall first prove that the action of $\mathbf{Z}$ on $\mathbf{R}^2$ is properly discontinuous. Given any point $P = (x, y)$, let C be the unique integral curve passing through P. Let C_1 and C_2 be two integral curves near by, one on each side of C. Let T_0 be a smooth curve through P which is orthogonal to all the integral curves between C_1 and C_2. For any real number t, let $T_t = t \cdot T_0$. Let U be the neighborhood of P bounded by $T_{-1/3}$, $T_{+1/3}$, and the curves C_1 and C_2. Then, it is readily seen that the successive "translates" of U,

$$\{n \cdot U : n \in \mathbf{Z}\}$$

are pairwise disjoint.

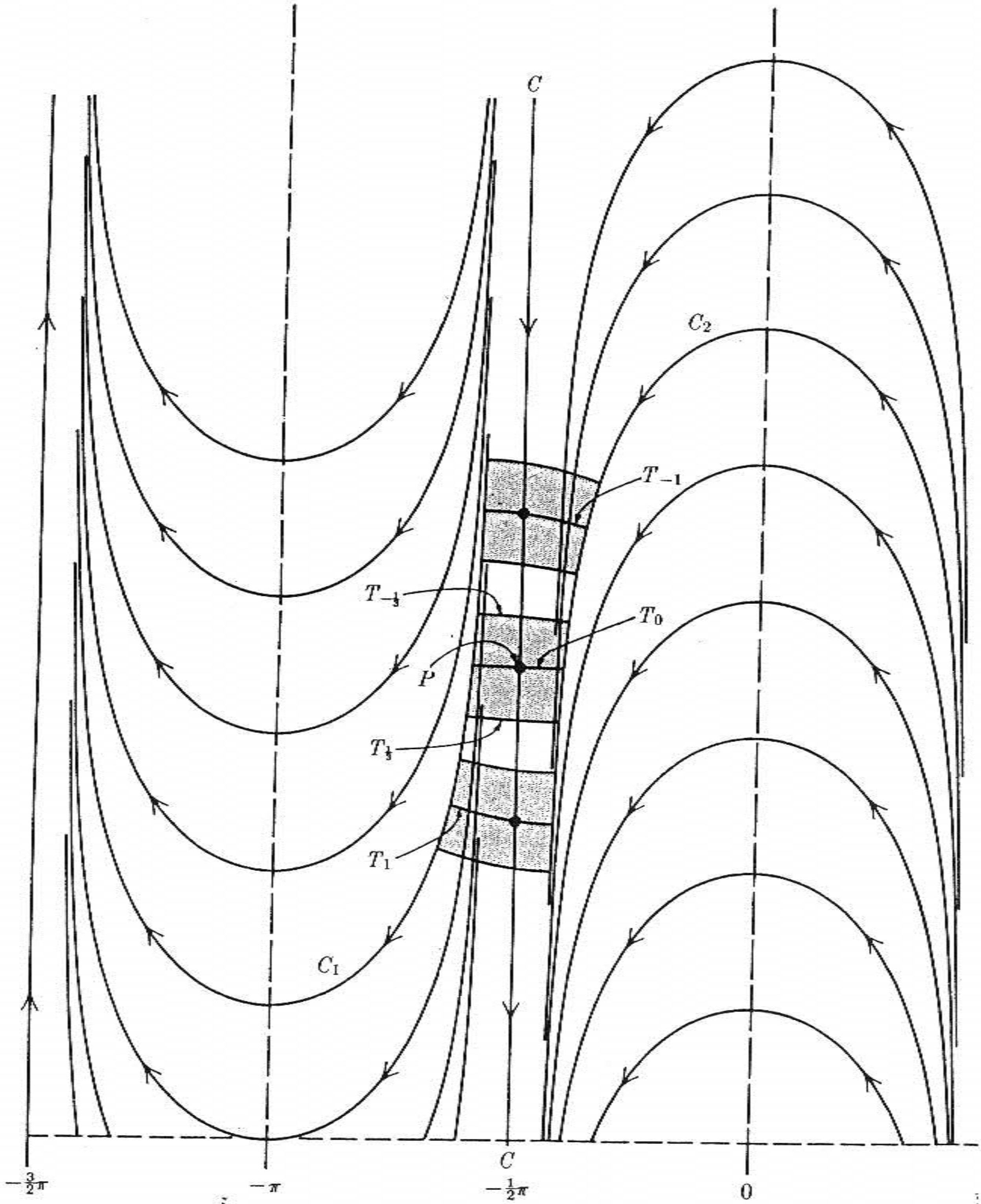

FIGURE 5.2 Diagram for Examples 8.3 and 8.4.

Next, we shall prove that the quotient space is non-Hausdorff. Consider the points

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

in the plane. We shall prove that their images in the quotient space $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ do not have disjoint neighborhoods. For this purpose, it suffices to prove that given *any* neighborhoods N_1 of P_1 and N_2 of P_2, there exists a point in N_1 equivalent to a point of N_2 under the action of the group $\mathbf{Z}$. To do this, consider for any small number $a > 0$ the two points $((\pi/2) - a, 0)$ and $(-(\pi/2) + a, 0)$. These two points are obviously on the same integral curve. How long would it take a particle located at the point $(-(\pi/2) + a, 0)$ to move along its integral curve to the point $((\pi/2) - a, 0)$? To compute this, it obviously suffices to compute how long it would take its projection on the x axis to move from the first position to the second. Because $dx/dt = \cos^2 x$, the time in question is given by the integral

$$\begin{aligned} I_a = \int_{-(\pi/2)+a}^{(\pi/2)-a} \frac{dx}{\cos^2 x} &= \Big[\tan x\Big]_{-(\pi/2)+a}^{(\pi/2)-a} \\ &= 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right). \end{aligned}$$

From this formula for the elapsed time, we can draw several conclusions:

(1) The elapsed time is a continuous function of a.
(2) As $a \to 0$, the elapsed time I_a approaches $+\infty$.
(3) For any number $\varepsilon > 0$, there are infinitely many values of a such that $0 < a < \varepsilon$ and I_a is an integer.

Recall that the points $((\pi/2) - a, 0)$ and $(-(\pi/2) + a, 0)$ are equivalent if and only if the elapsed time I_a is an integer.

From this, the desired conclusion readily follows.

8.4 We next give an example[1] of an infinite cyclic group of homeomorphisms acting without fixed points on a nice space in such a way that the "orbit" of each point is a closed, discrete subspace, but the action is not properly discontinuous! This example shows the strength of the requirement that G be properly discontinuous in Proposition 8.2.

Consider the action of the group of integers $\mathbf{Z}$ on the Euclidean plane $\mathbf{R}^2$ just described. The infinite strip

$$S = \left\{(x, y) : -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}\right\}$$

is mapped into itself by every element of the group $\mathbf{Z}$. We now form a quotient space of S by identifying the points $(\pi/2, y)$ and $(-\pi/2, -y)$ for any real number y. The quotient space is a Möbius strip without boundary (a noncompact sur-

[1] This example was suggested to the author by Joseph Auslander.

face). Moreover, the action of the group $\mathbf{Z}$ on S is readily seen to be compatible with the identifications, so it also acts on the quotient space. It is clear that the action of $\mathbf{Z}$ on this open Möbius strip is without fixed points, and that the orbit of any point x (i.e., the set of all points $n \cdot x$ for $n \in \mathbf{Z}$) is a discrete, closed subset. The argument given in the last example to show that the quotient space is non-Hausdorff may be applied to this example to show that the point $(\pi/2, 0)$ [which is identified with $(-\pi/2, 0)$] does not have any neighborhood U such that the sets $n \cdot U$ for $n \in \mathbf{Z}$ are pairwise disjoint. Hence, the action of the group on the Möbius strip is not properly discontinuous.