Versione: 30 giugno 2008

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Raccolta di esercizi per il corso di

Topologia e Analisi Complessa

a.a. 2007/08

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Topologia e Analisi Complessa per la laurea triennale in Matematica nell'a.a. 2007/08 (docente del corso: Fabrizio Broglia; esercitatore: Giovanni Alberti). Gli esercizi sono divisi in gruppi corrispondenti a diversi momenti del corso.

L'asterisco (*) indica gli esercizi presumibilmente difficili. Viceversa il pallino (°) indica quelli la cui risposta dovrebbe essere nota o comunque non dovrebbe prendere più di due righe. Solo per alcuni esercizi è stata fornita una traccia della soluzione.

Programma del corso.

Omotopia e gruppo fondamentale.

Connessione per archi, cammini e operazioni fra cammini continui.
Omotopia tra funzioni continue, omotopia relativa, omotopia tra cammini.
Equivalenza omotopica; retratti e retratti di deformazione; spazi contraibili.
Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico; ruolo del punto base.
Omomorfismi tra gruppi fondamentali indotti da applicazioni continue; invarianza per omotopia; il gruppo fondamentale di spazi omotopicamente equivalenti.
Il gruppo fondamentale di un prodotto.
Il gruppo fondamentale della circonferenza.
Rivestimenti; sollevamento di cammini; lemma di monodromia.
Il teorema di van Kampen (senza dimostrazione).

Funzioni olomorfe di una variabile complessa

L'algebra delle serie formali.
Serie convergenti; calcolo del raggio di convergenza; operazioni sulle serie convergenti; derivata di una serie convergente.
L'esponenziale complessa come rivestimento di $\mathbb{C}^*$.
Funzioni analitiche; analiticità della somma di una serie convergente; prolungamento analitico; funzioni meromorfe.
Forme differenziali e loro integrazione; forme chiuse e forme esatte; primitive lungo un cammino o lungo un'omotopia; la forma dz/z; indice di un cammino chiuso.
Funzioni olomorfe; condizioni di Cauchy-Riemann; teorema del Dini per applicazioni di rango massimo; le funzioni olomorfe con derivata diversa da 0 come isomorfismi analitici locali.
Formula integrale di Cauchy; sviluppo in serie di una funzione olomorfa; formula e teorema di Cauchy per un compatto.
Il teorema della mappa aperta; principio del massimo; principio di simmetria.
Serie di Laurent; sviluppo di una funzione olomorfa in una corona; singolarità isolate; classificazione tramite limite e tramite serie; il teorema di Weirstrass per le singolarità essenziali;
La sfera di Riemann.
Il teorema dei residui.
Derivata logaritmica; comportamento attorno ad una radice multipla di una funzione olomorfa; teorema di Rouché.
Integrali calcolabili con il metodo dei residui.

1 ° a) Scrivere una retrazione di $\mathbb{R}^n$ su un qualunque punto x_0.
b) Scrivere una deformazione di $\mathbb{R}^n$ su x_0.

2 ° Sia X l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x = 0$ o $y = 0$. Scrivere una deformazione di X sull'origine.

3 ° Sia X un insieme convesso in $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in X$. Scrivere una deformazione di X su x_0.

4 ° a) Scrivere una retrazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sulla sfera S^{n-1}.
b) Scrivere una deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ su S^{n-1}.

5 Preso $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con $|x_0| < 1$, scrivere *esplicitamente* una deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ su S^{n-1}.

6 Si consideri il quadrato chiuso $Q := [-1, 1]^2$ e il disco chiuso D^2. Scrivere *esplicitamente* un omeomorfismo $f : D^2 \to Q$.

7* Dato un insieme A aperto e limitato in $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$, per ogni $e \in S^{n-1}$ poniamo

$$\varphi(e) := \sup \big\{ t \geq 0 : \ x_0 + te \in A \big\} \ ,$$
$$\tilde{\varphi}(e) := \inf \big\{ t \geq 0 : \ x_0 + te \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \big\} \ .$$

Dimostrare i seguenti fatti:
a) $\varphi : S^{n-1} \to [0, +\infty]$ è una funzione semicontinua inferiormente;
b) $\tilde{\varphi} : S^{n-1} \to [0, +\infty]$ è una funzione semicontinua superiormente;
c) se A è convesso allora φ coincide con $\tilde{\varphi}$ ed in particolare è una funzione continua;
d) se A è convesso allora $\partial A = \big\{ x_0 + \varphi(e)\, e : \ e \in S^{n-1} \big\}$.

8* Dimostrare che se A è convesso la funzione φ costruita nell'esercizio precedente è Lipschitziana, e stimarne dall'alto la costante di Lipschitz in termini del rapporto tra la distanza di x_0 dalla frontiera di A ed il diametro di A.
[*Si ricordi che dati X, Y spazi metrici, la costante di Lipschitz di una mappa $f : X \to Y$ è il minimo degli $L \in [0, +\infty]$ tali che $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L\, d_X(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$. La mappa f si dice Lipschitziana se la sua costante di Lipschitz è finita.*]

9 Far vedere che ogni insieme convesso, aperto e limitato in $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad una palla aperta in $\mathbb{R}^n$. [*Utilizzare la funzione φ data nell'esercizio 7.*]

10* Come l'esercizio precedente, rimuovendo però l'ipotesi che l'insieme sia limitato.

11 Presi C e x_0 come nell'esercizio 7, far vedere che ∂C è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$. [*Utilizzare la funzione φ data nell'esercizio 7.*]

12 ° Dati T, X spazi topologici, indichiamo con $C(T; X)$ l'insieme delle mappe continue da T in X, e su questo insieme indichiamo come al solito con $\approx$ la relazione di equivalenza per omotopia. Data una mappa continua $f : X \to Y$, sia $f_* : C(T; X)/\approx \ \to C(T; Y)/\approx$ la mappa definita da

$$f_* : [\varphi] \mapsto [f \circ \varphi] \ .$$

Dimostrare i seguenti enunciati:
a) la definizione di f_* è ben posta;
b) se $f, f' : X \to Y$ sono mappe omotope, allora $f_* = f'_*$;

c) date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, allora $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$;
d) date $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \approx 1_X$, allora f_* è iniettiva e g_* è surgettiva;
e) se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica allora f_* è bigettiva.

13 In riferimento all'enunciato d) dell'esercizio 12, esibire un esempio in cui f_* non è surgettiva e g_* non è iniettiva.

14 Nel contesto dell'esercizio 12, esibire un esempio in cui f è iniettiva (rispettivamente, surgettiva) ed f_* non è né iniettiva né surgettiva.

15 ° In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, si considerino i punti $N := (1, 0, \dots, 0)$ e $S := (-1, 0, \dots, 0)$. Dimostrare che $\{S\}$ è un retratto di deformazione di $S^{n-1} \setminus \{N\}$ e dunque la sfera meno un punto è uno spazio contraibile in qualunque dimensione.

16 Far vedere che quanto detto nell'esercizio 11 non vale quando C è un semispazio.
[*Ricondursi al fatto (non dimostrato!) che la sfera* S^{n-1} *non è contraibile, ovvero che la mappa identica* $1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ *non è omotopa ad una costante.*]

17 ° Sia X uno spazio topologico e T uno spazio topologico che contiene un solo elemento. Dimostrare che gli elementi di $C(T, X)/\!\sim$ sono in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di X.

18 ° Sia X uno spazio topologico, Y uno spazio topologico discreto, e $f, f' : X \to Y$ mappe continue. Dimostrare che $f \approx f'$ se e solo se $f = f'$.

19 Sia X uno spazio topologico, Y uno spazio topologico discreto che contiene almeno due punti. Per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ indichiamo con I_n l'insieme dei numeri interi m tali che $0 \leq m < n$, dotato della topologia discreta. Dimostrare i seguenti enunciati:
a) se X è connesso allora ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante;
b) se ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante allora X è connesso;
c) il numero di componenti connesse di X è pari al massimo $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tale che esiste una funzione $f : X \to I_n$ continua e surgettiva;
d) se la famiglia delle componenti connesse di X è infinita, allora ha cardinalità uguale al più piccolo cardinale ω per cui non esiste alcuna mappa continua e surgettiva $f : X \to \omega$, avendo dotato ω della topologia discreta.
[*Il punto d) richiede un minimo di familiarità con la nozione di numeri cardinali.*]

20 ° a) Sia A un retratto di X. Dimostrare che se X è connesso allora A è connesso.
b) Dimostrare che se X è connesso per archi allora A è connesso per archi.
c) Far vedere con degli esempi che il viceversa non vale né per l'enunciato a) né per b).

21 Sia A un retratto di deformazione (debole) di X. Dimostrare che X è connesso per archi se e solo se A è connesso per archi. [*Darne prima una dimostrazione diretta e poi una che utilizza gli esercizi 12e) e 17.*]

22 Sia A un retratto di deformazione (debole) di X. Dimostrare che X è connesso se e solo se A è connesso. [*Utilizzare gli esercizi 12e), 18 e 19.*]

23 Siano C_1 e C_2 sottoinsiemi chiusi del quadrato $[0, 1]^2$ tali che i vertici $(0, 0)$ e $(1, 1)$ appartengono a C_1 mentre i vertici $(0, 1)$ e $(1, 0)$ appartengono a C_2. Dimostrare che C_1 e C_2 si

devono necessariamente intersecare nei seguenti casi:
a) C_1 e C_2 sono grafici di funzioni continue $f_1, f_2 : [0,1] \to [0,1]$;
b) C_1 è il grafico di una funzione continua $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ e C_2 è connesso.
Traccia. a) Applicare il teorema degli zeri alla funzione $f_1 - f_2$ sull'intervallo $[0,1]$. b) Se per assurdo C_1 e C_2 non si intersecano allora la funzione $g : C_2 \to \{0,1\}$ data da

$$g(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{per } y > f_1(x) \\ 0 & \text{per } y < f_1(x) \end{cases}$$

è be definita e continua; applicare quindi l'esercizio 19a).
[*In effetti C_1 e C_2 si intersecano sotto la sola ipotesi che siano connessi. La dimostrazione di questo fatto è però decisamente più complicata, cfr. esercizio 58.*]

24 Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e A un sottoinsieme di X non chiuso e contraibile. Dimostrare che:
a) A non può essere un retratto di X;
b) A è un retratto debole, cioè esiste $\tau : X \to A$ tale che $\tau \circ i_A \approx 1_A$.
[*Per a) si dimostri che ogni retratto di uno spazio di Hausdorff deve essere chiuso.*]

25* Sia X l'insieme dei punti del piano dato dall'unione del segmento verticale $\{0\} \times [0,1]$ e dei segmenti orizzontali $[0,1] \times \{y\}$ con $y = 0$ o $y = 1/n$ e $n = 1, 2, \ldots$ Dimostrare che:
a) il segmento orizzontale $A := [0,1] \times \{0\}$ è un retratto di deformazione di X;
b) ogni cammino con un estremo in $X \setminus A$ ed uno in A passa per il punto $\bar{x} := (0,0)$;
c) data f deformazione di X in A, per ogni $x \in X$ esiste $t \in I$ tale che $F(t,x) = \bar{x}$;
d) A non è un retratto forte di deformazione di X.

26 Nel piano, sia X l'unione della circonferenza S^1 e del segmento orizzontale $[1,2] \times \{0\}$. Dimostrare che:
a) X è omotopicamente equivalente a S^1;
b) X non è omeomorfo a S^1.

27 Nel piano, sia A l'unione delle circonferenze di centri $(\pm 1, 0)$ e raggio 1 (vale a dire un "otto"). Dimostrare che A è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$.

28 Nel piano, sia B l'unione delle circonferenze di centri $(\pm 2, 0)$ e raggio 1 e del segmento di estremi $(\pm 1, 0)$. Dimostrare che B è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 2, 0)\}$.

29 Dimostrare che gli insiemi A e B definiti nei due esercizi precedenti sono spazi topologici omotopicamente equivalenti ma non omoemorfi. [*Si può utilizzare il fatto che A e B sono retratti di deformazione di spazi omoemorfi. Vale comunque la pena di provare a scrivere direttamente le mappe $f : A \to B$ e $g : B \to A$ che danno l'equivalenza omotopica.*]

30 Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ meno una palla chiusa è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ meno un punto.

31 Siano $f, g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $f(x) \geq g(x) > 0$ per ogni $x \in S^{n-1}$, e sia X l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $f(x/|x|) \geq |x| \geq g(x/|x|)$. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a S^{n-1}.

32 Dato un intero $n \geq 2$ si consideri l'insieme C dei punti del piano della forma

$$z = |\cos(\pi t)|\, e^{2\pi i t/n} \quad \text{con } 0 \leq t < n.$$

Sia inoltre X lo spazio topologico ottenuto prendendo n copie distinte della circonferenza, vale a dire $S^1 \times \{k\}$ con $k = 1, \dots, n$, ed identificando tutti i punti del tipo $(1, k)$, dove con 1 si intende il numero complesso 1 ovvero il punto di S^1 di coordinate $(1, 0)$ (lo spazio X viene talvolta chiamato *bouquet di circonferenze*).
Fare un disegno approssimativo di C e dimostrare che è omemorofo a X.

33 Dato un intero $n \geq 2$, sia D l'insieme dei punti del piano della forma $z = \frac{1}{2} e^{2k\pi i/n}$ con $k = 0, \dots, n-1$, e si prenda C come nell'esercizio precedente. Dimostrare che C è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

34 Dati $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$ ed $\varepsilon > 0$, costruire un omeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(\bar{x}) = \bar{y}$ e $g(x) = x$ per ogni x al di fuori di un ε-intorno del segmento chiuso di estremi $\bar{x}, \bar{y}$.

35 Siano $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_n$ due n-uple di punti in $\mathbb{R}^2$ tali che $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ per $i \neq j$. Costruire un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x_i) = y_i$ per $i = 1, 2, \dots, n$.
Traccia. Procedendo per induzione su n possiamo suppoerre che esista un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h(x_i) = y_i$ per $i < n$. Distinguiamo quindi due casi.
a) Se il segmento chiuso di estremi $\bar{x} := h(x_n)$ e $\bar{y} := y_n$ non contiene y_i per alcun $i < n$ troviamo un omeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(\bar{x}) = \bar{y}$ e $g(y_i) = y_i$ per $i < n$ (cfr. esercizio 34) e poniamo $f := g \circ h$.
b) Se invece il segmento $[\bar{x}, \bar{y}]$ contiene y_i per qualche $i < n$, indichiamo con d il minimo di $|x - y_i|$ per $i \leq n$, prendiamo $\tilde{x}$ tale che $|\tilde{x} - \bar{x}| < d$ ed il segmento $[\tilde{x}, \bar{y}]$ non contiene y_i per alcun $i < n$. Troviamo quindi un omeomorfismo $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\tilde{g}(\bar{x}) = \tilde{x}$ e $\tilde{g}(y_i) = y_i$ per $i < n$, poniamo $\tilde{h} := \tilde{g} \circ h$ e ci riconduciamo infine al caso a).

36 Dato un intero $n \geq 2$, dimostrare che il piano meno n punti è omotopicamente equivalente ad un bouquet di n circonferenze, cioè lo spazio X definito nell'esercizio 32. [*Utilizzare gli esercizi 33 e 35.*]

37 Dato un intero $n \geq 2$, dimostrare che la sfera S^2 meno $n + 1$ punti è omotopicamente equivalente ad un bouquet di n circonferenze.

38 Dato un intero $n \geq 2$, dimostrare che lo spazio $\mathbb{R}^3$ meno l'unione di n rette distinte passanti per l'origine è omotopicamente equivalente ad un bouquet di $2n - 1$ circonferenze.

39 Sia X un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ con la proprietà che esiste un aperto U in $\mathbb{R}^n$ che contiene X ed una retrazione $\tau : U \to X$ di classe C^1. Dimostrare che ogni arco $f : I \to X$ è omotopo in X relativamente a $\{0, 1\}$ ad un arco $\tilde{f}$ di classe C^1.
Traccia. Un teorema dovuto a Weierstrass asserisce ogni funzione reale e continua sull'intervallo I è limite di una successione uniformemente convergente di polinomi. Utilizzando questo risultato, far vedere che esiste una mappa $g : I \to \mathbb{R}^n$ le cui componenti sono polinomi e tale che il segmento di estremi $f(s)$ e $g(s)$ è contenuto in U per ogni $s \in I$. Verificare che $\tilde{f} := \tau \circ g$ soddisfa quanto richiesto.

40 Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e f una mappa da E in $\mathbb{R}^m$ con $m > n$. Dimostrare che se f è Lipschitziana allora $f(E)$ ha parte interna vuota.
Traccia. Preso a tale che E è contenuto in un cubo n-dimensionale di lato a, per ogni intero positivo k si può ricoprire E con k^n cubi di lato a/k. Se ne deduce che $f(E)$ è ricoperto da k^n cubi di lato $2Ln^{1/2}a/k$ e pertanto il suo volume m-dimensionale soddisfa

$$\mathrm{vol}_m(f(E)) \leq (2Lan^{1/2})^m k^{n-m} .$$

Prendendo il limite per $k \to +\infty$ si ottiene che $\mathrm{vol}_m(f(E)) = 0$, da cui segue che $f(E)$ non contiene alcuna palla. [*Per volume si può intendere tanto la misura di Peano-Jordan quanto quella di Lebesgue.*]

41 Dimostrare che la sfera S^n è semplicemente connessa per $n \geq 2$ completando la seguente traccia di dimostrazione.
Traccia. a) Ogni cammino in S^n è omotopo ad un cammino di classe C^1 (esercizio 39); b) ogni cammino di classe C^1 in S^n non è surgettivo (esercizio 40); c) ogni cammino non surgettivo in S^n è omotopo ad una costante (cfr. esercizio 15).

42 Dimostrare che ogni omeomorfismo $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ può essere esteso ad un omeomorfismo da D^n in D^n.

43* Sia $f : S^1 \to S^1$ un omeomorfismo. Dimostrare che esiste una funzione $\theta : [0,1] \to [0,1]$ continua, surgettiva e strettamente monotòna tale che

$$f\big(e^{2\pi i s}\big) = e^{2\pi i \theta(s)} \quad \text{per ogni } s \in [0,1].$$

[*Utilizzare, ed eventualmente dimostrare, che ogni funzione continua e iniettiva da un intervallo di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *è strettamente monotòna.*]

44° Sia $N := (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Scrivere un omeomorfismo di $S^n \setminus \{N\}$ in D^n.

45 Date due copie distinte della palla chiusa n-dimensionale D^n, vale a dire $D_1 := D^n \times \{1\}$ e $D_2 := D^n \times \{-1\}$, si consideri lo spazio X ottenuto identificandone i bordi, cioè prendendo l'unione $D_1 \cup D_2$ ed identificando ogni punto della forma $(e, 1)$ con $e \in S^{n-1}$ con il punto $(e, -1)$. Dimostrare che X è omeomorfo a S^n.

46 Far vedere che il risultato nell'esercizio precedente vale a prescindere da come vengono identificati i bordi dei due dischi, ovvero che X è omeomorfo a S^n anche quando si identifica ogni punto della forma $(e, 1)$ con $e \in S^{n-1}$ con il punto $(f(e), -1)$, dove f è un omeomorfismo di S^{n-1} assegnato. [*Utilizzare l'esercizio 42.*]

47° a) Verificare che S^1 – inteso come sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ – e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – inteso come quoziente del gruppo additivo $\mathbb{R}$ per il sottogruppo $\mathbb{Z}$ – sono gruppi topologici isomorfi, vale a dire che esiste un omeomorfismo che è anche un isomorfismo di gruppi.
b) Verificare che anche il toro $T^2 := S^1 \times S^1$ e $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sono gruppi topologici isomorfi.

48° Sia X lo spazio ottenuto dall'intervallo $[0,1]$ identificandone gli estremi. Allora X è omeomorfo a S^1 e ad $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: scrivere esplicitamente tali omeomorfismi.

49° Sia X lo spazio ottenuto identificando ogni punto della frontiera della palla chiusa D^n con il suo antipodale (cioè ogni x con $|x| = 1$ viene identificato con $-x$). Dimostrare che X è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

50* Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Per ogni mappa continua $g : S^1 \to X$ indichiamo con $\tilde{g}$ il cammino chiuso in X definito da

$$\tilde{g}(s) := g(e^{2\pi i s}) \quad \text{per ogni } s \in I = [0,1].$$

Consideriamo quindi due mappe continue $g_0, g_1 : S^1 \to X$ tali che $g_0(1) = g_1(1)$. Dimostrare i seguenti enunciati:

a) se $\tilde{g}_0 \sim \tilde{g}_1$ allora $g_0 \approx g_1$;
b) se $g_0 \approx g_1$ allora $\tilde{g}_0 \sim f * \tilde{g}_1 * \bar{f}$, dove $f(s) := G(s,1)$ per ogni $s \in I$ e $G : I \times S^1 \to X$ è un'omotopia da g_0 a g_1;
c) se $g_0 \approx g_1$ e il gruppo fondamentale di X è abeliano allora $\tilde{g}_0 \sim \tilde{g}_1$;
d) in generale $g_0 \approx g_1$ non implica $\tilde{g}_0 \sim \tilde{g}_1$;
e) X è semplicemente connesso se e solo se ogni mappa continua $g : S^1 \to X$ è omotopa ad una costante.

51 Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, sia $\varphi_k : S^1 \to S^1$ la mappa data da $\varphi_k(z) := z^k$. Dimostrare che $\varphi_k \approx \varphi_h$ se e solo se $k = h$. [*Utilizzare l'esercizio precedente.*]

52° Data una mappa continua $g : D^2 \to S^1$, dimostrare che il cammino chiuso $f : I \to S^1$ definito da $f(s) := g(e^{2\pi i s})$ ha grado 0.

53° Utilizzando il fatto (non dimostrato!) che la mappa identica $1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ non è omotopa ad una costante, far vedere che:
a) non esiste alcuna mappa $f : D^n \to S^{n-1}$ tale che $f_{|S^{n-1}} = 1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$;
b) non esiste alcuna mappa $f : D^n \to S^{n-1}$ tale che $f_{|S^{n-1}} \approx 1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$;
c) ogni mappa $f : D^n \to D^n$ tale che $f_{|S^{n-1}} \approx 1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ deve essere surgettiva;
d) ogni mappa $f : D^n \to D^n$ ammette un punto fisso, cioè esiste x tale che $f(x) = x$.

54 Siano f, g due cammini in S^1 tali che $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$. Dimostrare che se esiste un punto $y \in S^1$ tale che f ed g non passano per y, allora $f \sim g$. [*Si ricordi che $S^1 \setminus \{y\}$ è contraibile.*]

55 Siano $P_0, \dots, P_3$ i punti della circonferenza S^1 dati da $P_k := e^{ik\pi/2}$ per $k = 0, \dots, 3$. Siano dati inoltre due cammini f_1, f_2 in S^1 con f_1 che va da P_0 a P_2 e f_2 che va da P_2 a P_0. Calcolare il grado del cammino chiuso $f := f_1 * f_2$ nei seguenti casi:
a) sia f_1 che f_2 non passano per P_1;
b) f_1 non passa per P_1 ed f_2 non passa per P_3;
c) f_1 non passa per P_3 ed f_2 non passa per P_1.
[*Suggerimento per a): utilizzare l'esercizio 54 per far vedere che $f_1 \sim g$ e $f_2 \sim \bar{g}$ dove $g(s) := e^{\pi i s}$ per ogni $s \in I$.*]

56* Siano $P_0, \dots, P_3$ i punti di S^1 dati da $P_k := e^{ik\pi/2}$ per $k = 0, \dots, 3$. Siano dati inoltre due cammini f_1, f_2 nel disco chiuso D^2 con f_1 che va da P_0 a P_2 ed f_2 che va da P_1 a P_3. Far vedere che i due cammini si intersecano, cioè che $f_1(I) \cap f_2(I) \neq \varnothing$.
Traccia. Supponendo per assurdo $f_1(s_1) \neq f_2(s_2)$ per ogni $s_1, s_2 \in I$, si consideri la mappa $g : I \times I \to S^1$ data da

$$g(s_1, s_2) := \frac{f_1(s_1) - f_2(s_2)}{|f_1(s_1) - f_2(s_2)|} \ .$$

Si costruisca quindi un omeomorfismo $h : D^2 \to I \times I$ che porta S^1 in $\partial(I \times I)$ (cfr. esercizio 6) e si consideri la mappa $\tilde{g} := g \circ h : D^2 \to S^1$. Ragionando come per l'esercizio 55, dimostrare che il cammino f in S^1 definito da $f(s) := \tilde{g}(e^{2\pi i s})$ ha grado ± 1 – il segno dipende della scelta di h – e dedurne un'assurdo (cfr. esercizio 52).

57 Far vedere che la conclusione dell'esercizio precedente vale anche quando i punti $P_0, \dots, P_3$ sono dati da $P_k := e^{i\theta_k}$ con $0 \leq \theta_0 < \ldots < \theta_3 < 2\pi$. [*Costruire un omeomorfismo di D^2 che porta ciascun punto P_k in $e^{ik\pi/2}$.*]

58* Presi $P_0, \dots, P_3$ come nell'esercizio precedente, siano C_1, C_2 due sottoinsiemi del disco D^2 tali che $P_0, P_2 \in C_1$ e $P_1, P_3 \in C_2$. Dimostrare che:
a) se C_1, e C_2 sono connessi per archi allora $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$;
b) se C_1, e C_2 sono chiusi e connessi allora $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$;
c) se C_1, e C_2 sono connessi ma non chiusi non è detto che $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$.
[*Per b) usare, ed eventualmente dimostrare, che dato un insieme connesso C in $\mathbb{R}^n$ ed un aperto U che contiene C, allora esiste un aperto V connesso, e quindi connesso per archi, tale che $C \subset V \subset U$.*]

59 Sia A aperto in $\mathbb{R}^2$ e sia x_0 un punto di A. Preso un numero positivo r strettamente inferiore alla distanza di x_0 da $\mathbb{R}^2 \setminus A$, sia S la circonferenza di centro x_0 e raggio r.
Dimostrare che S è un retratto di $A \setminus \{x_0\}$ ed utilizzare questo fatto per far vedere che $A \setminus \{x_0\}$ non è semplicemente connesso.

60 Nel contesto dell'esercizio precedente, dimostrare che se A non è contraibile allora la cinrconferenza S non può essere un retratto di deformazione (forte) di $A \setminus \{x_0\}$. [*Far vedere che avendo una deformazione di $A \setminus \{x_0\}$ su S è possibile costruire una deformazione di $A \setminus \{x_0\}$ sul disco chiuso di centro x_0 e raggio r.*]

61 Far vedere che un punto $x \in D^2$ appartiene a S^1 se e solo ammette una base di intorni aperti U (intesi nel senso della topologia di D_2) tali che $u \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso. Dedurne che ogni omeomorfiso di D_2 mappa S^1 in sé.

62° Dato $Q := [-1, 1]^2$, si consideri lo spazio X ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(1, y)$ con $(-1, y)$, e si indichi con A il sottoinsieme di X corrispondente ai punti di ordinata 0.
a) Scrivere un omeomorfismo da X alla superfice cilindrica $S^1 \times [-1, 1]$ in $\mathbb{R}^3$;
b) scrivere una deformazione di X su A;
c) dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e darne esplicitamente un generatore.

63 Dato $Q := [-1, 1]^2$, si consideri lo spazio X ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(1, y)$ con $(-1, -y)$ e si indichi con A il sottoinsieme di X corrispondente ai punti di ordinata 0. (Lo spazio X è noto come *nastro di Moebius*.)
a) Scrivere un omeomorfismo da X in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$;
b) scrivere una deformazione di X su A;
c) dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e scriverne esplicitamente un generatore.

64 Sia X lo spazio topologico definito nell'esercizio 62 oppure nell'esercizio 63. Chiamiamo *bordo* il sottoinsieme di X corrispondente ai punti di ascissa ± 1. Dimostrare che:
a) un punto $p \in X$ appartiene al bordo di X se e solo se ammette una base di intorni U semplicemente connessi tali che $U \setminus \{p\}$ è semplicemente connesso;
b) ogni omeomorfismo di X porta il bordo nel bordo.

65 Dimostrare che il cilindro $S^1 \times [-1, 1]$ ed il nastro di Moebius sono omotopicamente equivalenti.

66 Dimostrare che il bordo del nastro di Moebius (inteso nel senso dell'esercizio 64) è omeomorfo a S^1 ed in particolare è connesso, mentre il bordo del cilindro $S^1 \times [-1, 1]$ non

è connesso. Dedurne che il nastro di Moebius e il cilindro non sono omeomorfi. [*Usare l'esercizio 64.*]

67* Sia X il nastro di Moebius e sia f un omeomorfismo del bordo di X. Dimostrare che f può essere esteso ad un omeomorfismo di X.

68* Far vedere che l'enunciato dell'esercizio precedente non vale se X è il cilindro $S^1 \times [-1, 1]$.

69 Sia X il cilindro $S^1 \times [-1, 1]$ e sia $X/\sim$ lo spazio ottenuto identificando $S^1 \times \{1\}$ ad un punto e $S^1 \times \{-1\}$ ad un altro punto. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo alla sfera S^2.

70 Sia X il nastro di Moebius e sia $X/\sim$ lo spazio ottenuto identificando i punti del bordo di X. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

71 Dato $Q := [-1, 1]^2$, si consideri lo spazio X ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(1, y)$ con $(-1, y)$ ed ogni punto del tipo $(x, 1)$ con $(x, -1)$. Fissati $R > r > 0$, indichiamo con S la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza sul piano xz di centro $(R, 0)$ e raggio r.
a) Scrivere un omeomorfismo da X nel toro $T^2 := S^1 \times S^1$;
b) scrivere un omeomorfismo da X in S;
c) scrivere S come luogo di zeri di un polinomio;
d) scrivere un rivestimento da $\mathbb{R}^2$ su X;
e) dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ e scriverne esplicitamente un insieme di generatori.

72 Presi Q ed X come nell'esercizio precedente, sia D il sottoinsieme di X corrispondente alla frontiera di Q e sia p un punto di $X \setminus D$. Sia inoltre A lo spazio a forma di "otto" definito nell'eserczio 27. Dimostrare che:
a) D è un retratto di deformazione di $X \setminus \{p\}$;
b) D è omoemorfo ad A;
c) $X \setminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente ad A;
d) il toro T^2 meno un punto è omotopicamente equivalente ad A.

73* Dato $Q := [-1, 1]^2$, si consideri lo spazio X ottenuto identificando ogni punto di Q del tipo $(1, y)$ con $(-1, -y)$ ed ogni punto del tipo $(x, 1)$ con $(x, -1)$. (Lo spazio X è noto come *bottiglia di Klein.*)
a) Scrivere un omeomorfismo da X in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$;
b) scrivere una rivestimento doppio dal toro T^2 su X;
c) scrivere una rivestimento da $\mathbb{R}^2$ su X.

74 Sia X la bottiglia di Klein (cfr. esercizio precedente), e consideriamo il sottospazio X_1 dei punti di X con ascissa y tale che $|y| \leq 1/2$, ed il sottospazio X_2 dei punti tali che $|y| \geq 1/2$. Far vedere che X_1 e X_2 sono omeomorfi al nastro di Moebius.

75 Dato $Q := [-1, 1]^2$, si consideri lo spazio X ottenuto identificando ogni punto x della frontiera di Q con $-x$. Consideriamo quindi il sottospazio X_1 dei punti di X con ascissa y tale che $|y| \leq 1/2$ ed il sottospazio X_2 dei punti tali che $|y| \geq 1/2$. Dimostrare che:
a) X è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$;
b) X_1 è omeomorfo al nastro di Moebius;
c) X_2 è omeomorfo al disco D^2.

76 Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza nel piano xz di centro $(1,0)$ e raggio 1 (notare che questa circonferenza è tangente all'asse z). Sia inoltre C la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 nel piano xy. Dimostrare che
a) S è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^3 \setminus C$;
b) S è omeomorfo allo spazio ottenuto identificando i poli $(0,0,\pm 1)$ della sfera S^2.

77 Sia E un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Dimostrare che lo spazio $X := \mathbb{R}^n \setminus E$ è semplicemente connesso.
Traccia. Procediamo per induzione sul numero m di punti di E. Supponendo che le prime coordinate dei punti di E non sia tutte uguali (altrimenti…) possiamo scrivere E come unione disgiunta di due sottoinsiemi propri E_1 ed E_2 in modo tale che

$$t_1 := \max\{x_1 : x \in E_1\} < t_2 := \min\{x_1 : x \in E_2\} ,$$

e quindi $X_1 := \mathbb{R}^n \setminus E_1$ e $X_2 := \mathbb{R}^n \setminus E_2$ sono semplicemente connessi per l'ipotesi induttiva. Scriviamo ora X come unione degli insiemi aperti

$$U_1 := \{x \in X : x_1 < t_2\} \quad \text{e} \quad U_2 := \{x \in X : t_1 < x_1\} .$$

Si ha allora che a) $U_1 \cap U_2 = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^{n-1}$ è connesso per archi; b) preso t tale che $t_1 < t < t_2$, l'insieme $V_1 := \{x \in U_1 : x_1 < t\}$ è un retratto di deformazione di sia di U_1 che di X_1, e siccome quest'ultimo è semplicemente connesso lo stesso vale per V_1 ed U_1; c) analogamente si dimostra che U_2 è semplicemente connesso. Per via di un risultato già visto i fatti a), b) e c) implicano che X è semplicemente connesso.

1* In $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta R di equazioni $x_1 = x_2 = 0$ e la circonferenza C di equazioni $x_1^2 + x^2 = 4$ e $x_3 = 0$, e si ponga $X := \mathbb{R}^2 \setminus (R \cup C)$. Sia inoltre T la superfice toroidale di equazione

$$\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\big)^2 + x_3^2 = 1 \ .$$

a) Dimostrare che X è connesso per archi;
b) dimostrare che T è un retratto di deformazione di X;
c) calcolare il gruppo fondamentale di X, dando esplicitamente un insieme di generatori.

2 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato dalla mappa $g : (x, y) \mapsto (-y, x)$. Dimostrare che
a) G è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$;
b) l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ non è libera;
c) ogni $g \in G$ è un omeomorfismo di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e l'azione di G su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è libera.

3 Sia X uno spazio topologico, $\sim$ una relazione di equivalenza su X, ed Y un sottoinsieme di X dotato della topologia indotta. Chiaramente $\sim$ è anche una relazione di equivalenza su Y, e possiamo quindi considerare l'immersione naturale j dello spazio quoziente $Y/{\sim}$ nello spazio quoziente $X/{\sim}$. Dimostrare che
a) j è una mappa continua e iniettiva da $Y/{\sim}$ in $X/{\sim}$;
b) j è surgettiva se e solo se Y interseca ogni classe di equivalenza di X;
c) se $X/{\sim}$ è separato (di Hausdorff) e Y è compatto ed interseca ogni classe di equivalenza di X allora j è un omeomorfismo.

4 Su $X := \mathbb{R}$ si pone $x \sim x'$ quando $x - x'$ è intero. Far vedere che, preso $Y := [0, 1)$, l'applicazione j definita nell'esercizio 3 è una bigezione ma non un omeomorfismo, e dunque l'ipotesi che Y sia compatto nell'enunciato c) dell'esercizio 3 non può essere rimossa.

5* Su $X := [-1, 1]$ si pone $x \sim x'$ quando $x = x'$ oppure $x = -x'$ e $|x| < 1$. Dimostrare che la topologia di $X/{\sim}$ non è separata. Far vedere che, preso $Y := [-1, 0] \cup \{1\}$, l'applicazione j definita nell'esercizio 3 è una bigezione ma non un omeomorfismo, e dunque l'ipotesi che $X/{\sim}$ sia separato nell'enunciato c) dell'esercizio 3 non può essere rimossa.

6 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di S^1 generato dalla mappa $z \mapsto e^{2\pi a i} z$ dove a è un numero *razionale* non intero. Dimostrare che:
a) $G \cong \mathbb{Z}_n$ per un opportuno intero positivo n;
b) G agisce su S^1 in modo libero;
c) G agisce su S^1 in modo propriamente discontinuo.

7* Si prenda G come nell'esercizio precedente con a numero *irrazionale*. Dimostrare che:
a) $G \cong \mathbb{Z}$;
b) G agisce su S^1 in modo libero;
c) l'orbita di ogni elemento di S^1 è densa in S^1;
d) la topologia quoziente di S^1/G è quella banale (o indiscreta);
e) G non agisce su S^1 in modo propriamente discontinuo.
[*Usare, ed eventualmente dimostrare, che un sottogruppo di* S^1 *è denso oppure è finito.*]

8° Sia X uno spazio topologico compatto. Dimostrare che ogni suo sottoinsieme infinito S ammette almeno un punto di accumulazione, vale a dire un punto $x \in X$ tale che $S \cap U$ è infinito per ogni U intorno di x. [*Limitarsi eventualmente al caso di* X *spazio metrico.*]

9 Sia X uno spazio topologico compatto, e sia G un gruppo di omeomorfismi di X che agisce in modo propriamente discontinuo. Dimostrare che G è finito.
Traccia. Se per assurdo G fosse infinito, preso $x_0 \in X$ la sua orbita $A := \{g(x_0) : g \in G\}$ deve essere infinita. Allora esiste $x \in X$ tale che $A \cap U$ è infinito per tutti gli intorni U di x (cfr. esercizio 8), ma questo contraddice l'ipotesi che esista un intorno U di x tale che $g(U) \cap U = \varnothing$ per ogni $g \in G$ con $g \neq 1_X$.

10 Utilizzare quanto dimostrato nell'esercizio 9 per dare una dimostrazione alternativa dell'enunciato e) dell'esercizio 7.

11* Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $X := \mathbb{R} \times [0, 1]$ generato dalla mappa

$$g : (x, y) \mapsto (x - 1 + 2y, y^2) \ .$$

Dimostrare che:
a) g è effettivamente un omeomorfismo di X;
b) $G \cong \mathbb{Z}$;
c) G agisce su X in modo libero;
d) G agisce su X in modo propriamente discontinuo;
e) X/G non è uno spazio separato.

12 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $X := \mathbb{R} \times [-1, 1]$ generato dalla mappa

$$g : (x, y) \mapsto (x + 2, y) \ .$$

a) Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed agisce su X in modo propriamente discontinuo;
b) utilizzando a), dimostrare che $\pi_1(X/G) \cong \mathbb{Z}$;
c) scrivere esplicitamente un generatore di $\pi_1(X/G)$;
d) dimostrare che lo spazio delle orbite X/G è omeomorfo al cilindro $S^1 \times [-1, 1]$.

13 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $X := \mathbb{R} \times [-1, 1]$ generato dalla mappa

$$g : (x, y) \mapsto (x + 2, -y) \ .$$

a) Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed agisce su X in modo propriamente discontinuo;
b) utilizzando a), dimostrare che $\pi_1(X/G) \cong \mathbb{Z}$;
c) scrivere esplicitamente un generatore di $\pi_1(X/G)$;
d) dimostrare che lo spazio delle orbite X/G è omeomorfo al nastro di Moebius.

14 Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su S^n che identifica ogni punto x con $-x$ (è noto che lo spazio quoziente $S^n/\!\sim$ è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$).
a) Dimostrare che la proiezione $p : S^n \to S^n/\!\sim$ è un rivestimento doppio;
b) utilizzando a), dimostrare che $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$ per $n \geq 2$;
c) scriverne esplicitamente un generatore di $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$.

15 Far vedere che lo spazio quoziente $S^n/\!\sim$ nell'esercizio precedente può essere ottenuto come spazio delle orbite rispetto all'azione di un opportuno gruppo di omeomorfismi di S^n.

16 Sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{C}$ generato dalle mappe

$$g_1 : z \mapsto z + 2i \quad \text{e} \quad g_2 : z \mapsto \bar{z} + 2 \ .$$

Dimostrare che presi m, n, m', n' interi si ha:
a) $g_2 g_1 = g_1^{-1} g_2$;
b) $g_2^n g_1^m = g_1^{\sigma(n)\,m} g_2^n$ dove $\sigma(n) := 1$ per n pari e $\sigma(n) := -1$ per n dispari;
c) $(g_1^m g_2^n)(g_1^{m'} g_2^{n'}) = g_1^{m+\sigma(n)\,m'} g_2^{n+n'}$;
d) $g_1^m g_2^n = 1$ se e solo se $m = n = 0$;
e) $G = \{g_1^m g_2^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
[*Gli enunciati c), d), e) dimostrano che G è isomorfo all'unico prodotto semidiretto (non diretto) di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$, vale a dire il gruppo delle coppie (m, n) con $m, n \in \mathbb{Z}$ dotato del prodotto $(m, n) \cdot (m', n') := (m + \sigma(n)\, m', n + n')$.*]

17 Preso G come nell'esercizio 16,
a) dimostrare che G agisce su $\mathbb{C}$ in modo libero;
b) dimostrare che G agisce su $\mathbb{C}$ in modo propriamente discontinuo;
c) utilizzando b), dimostrare che $\pi_1(\mathbb{C}/G) \cong G$;
d) scrivere esplicitamente un insieme di generatori di $\pi_1(\mathbb{C}/G)$.

18 Si indichi con $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{C}$ indotta dall'azione del gruppo G definito nell'esercizio 16, e con Q il quadrato $\{z = x + iy : |x| \le 1, |y| \le 1\}$. Dimostrare che:
a) Q interseca tutte le orbite di $\mathbb{C}/G$;
b) $Q/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{C}/G$ [*usare l'enunciato d) dell'esercizio 3*];
c) dati $z, z' \in Q$ con $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$, si ha che $z \sim z'$ se e solo se si verifica uno dei seguenti casi: (i) $z = z'$, (ii) $x = x'$ e $|y| = |y'| = 1$, (iii) $y = -y'$ e $|x| = |x'| = 1$; dedurne che lo spazio $\mathbb{C}/G$ è omeomorfo alla bottiglia di Klein.

19 Sia G il sottogruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{C}$ generato dalle mappe

$$g_1 : z \mapsto -\bar{z} + 2i \quad \text{e} \quad g_2 : z \mapsto \bar{z} + 2 \,.$$

Dimostrare che presi m, n, m', n' interi si ha:
a) $g_2 g_1 = g_1^{-1} g_2^{-1}$;
b) $g_2^n g_1^m = g_1^{\sigma(n)\,m} g_2^{\sigma(m)\,n}$ dove $\sigma(n)$ è definita nell'esercizio 16b);
c) $(g_1^m g_2^n)(g_1^{m'} g_2^{n'}) = g_1^{m+\sigma(n)\,m'} g_2^{\sigma(m')\,n+n'}$;
d) $g_1^m g_2^n = 1$ se e solo se $m = n = 0$;
e) $G = \{g_1^m g_2^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$.

20 Si indichi con $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{C}$ indotta dall'azione del gruppo G definito nell'esercizio 19, e con Q il quadrato $\{z = x + iy : |x| \le 1, |y| \le 1\}$. Procedendo come nell'esercizio 18, far vedere che $\mathbb{C}/G$ è omeomorfo a $Q/\sim$, e che quest'ultimo spazio è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

21 Sia G il gruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{C}$ definito nell'esercizio 19. Procedendo come nell'esercizio 17 si sarebbe tentati di dedurre che il gruppo fondamentale di $\mathbb{C}/G$ è G, in contraddizione col fatto che $\mathbb{C}/G$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, il cui gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}_2$, che non è isomorfo a G. Dov'è il problema?

22* Dato uno spazio metrico X, per ogni $r > 0$ ed ogni insieme E contenuto in X indichiamo con E_r l'r-intorno di E, vale a dire l'unione delle palle aperte di raggio r con centro $x \in E$.

Indichiamo inoltre con $\mathscr{F}(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi e non vuoti di X, e su $\mathscr{F}(X)$ consideriamo la distanza di Hausdorff

$$d_H(E,F) := \inf\{r : \; E \subset F_r, \; F \subset E_r\} \; .$$

Dimostrare che:
a) E_r è l'insieme degli $x \in X$ tali che $\inf\{d_X(x,x') : x' \in E\} < r$;
b) d_H è effettivamente una distanza su $\mathscr{F}(X)$;
c) la mappa $f : \mathscr{F}(X) \times \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ data da $f : (E,F) \mapsto E \cup F$ è continua;
d) la mappa $g : \mathscr{F}(X) \times \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ data da $g : (E,F) \mapsto E \cap F$ è continua.

23 Dato uno spazio metrico X contenente almeno due punti distinti, prendiamo $\mathscr{F}(X)$ come nell'esercizio 22. Fissato $n \geq 2$ intero, sia G il gruppo degli omeomorfismi di X^n della forma

$$g : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

con σ permutazione dell'insieme degli indici $\{1, 2, \ldots, n\}$. Indichiamo inoltre con $\mathscr{F}_n(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi di X con n elementi, e con X^n_* l'insieme delle n-uple di punti distinti, vale a dire le $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Dimostrare che:
a) la mappa $f : X^n \to \mathscr{F}(X)$ data da $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$ è continua;
b) la mappa $g : X^n/G \to \mathscr{F}(X)$ data da $g : [(x_1, \ldots, x_n)] \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$ è ben definita e continua;
c) g è iniettiva se e solo se $n = 2$;
d) G è isomorfo a al gruppo S_n delle permutazioni di n elementi;
e) l'azione di G su X^n non è mai libera;
f) ogni $g \in G$ mappa X^n_* in sé;
g) la restrizione di g a X^n_*/G è un omeomorfismo tra X^n_*/G e $\mathscr{F}_n(X)$;
h) l'azione di G su X^n_* è libera, e quindi propriamente discontinua.

24* Dato X spazio metrico connesso e localmente connesso per archi ed $n \geq 2$ intero, prendiamo $\mathscr{F}(X)$ e $\mathscr{F}_n(X)$ come negli esercizi 22 e 23. Dato uno spazio topologico Y connesso per archi ed una mappa $F : Y \to \mathscr{F}_n(X)$, diciamo che F è trivializzabile se esistono delle mappe continue $f_1, \ldots, f_n : Y \to X$ tali che

$$F(y) = \{f_1(y), \ldots, f_n(y)\} \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

Dimostrare che:
a) se $X = \mathbb{R}$ allora F è sempre trivializzabile;
b) se Y è semplicemente connesso allora F è sempre trivializzabile;
c) se $n = 2$ e $\pi_1(Y)$ è un gruppo finito di ordine dispari allora F è sempre trivializzabile;
d) la mappa $F : S^1 \to \mathscr{F}_n(S^1)$ data da $F : z \mapsto \{w \in S^1 : w^n = z\}$ non è trivializzabile;
e) se $Y := S^1$ e X^n_* è connesso per archi allora esiste sempre F non trivializzabile.

25* Nel contesto dell'esercizio 24, far vedere che per ogni $n \geq 3$ esiste una mappa continua $F : [0,1] \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ tale che $F(y)$ ha *al più* n elementi per ogni y ed F non è trivializzabile.

26° Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}$ compatto. Dimostrare che $p^{-1}(x_0)$ è finito per ogni $x_0 \in X$.
Traccia. Se per assurdo $p^{-1}(x_0)$ fosse infinito, conterrebbe almeno un punto di accumulazione y (cfr. esercizio 8). Si prenda un intorno aperto U di x_0 tale che $p^{-1}(U)$ è un unione

disgiunta di aperti U_j omeomorfi ad U tramite p, si prenda j tale che y appartiene ad U_j, e si deduca un assurdo dal fatto che l'intersezione di U_j e $p^{-1}(x_0)$ deve essere infinita.

27 Sia X uno spazio topologico con rivestimento universale compatto. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è finito.

28° Si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ data da $f : z \mapsto e^z$.

a) Dimostrare che f è un rivestimento;

b) Determinare il gruppo delle trasformazioni di rivestimento associato ad f.

29° Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n > 1$, si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f : z \mapsto z^n$. Dimostrare che f non è un rivestimento.

30° Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, si consideri la mappa $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ data da $f : z \mapsto z^n$.

a) Dimostrare che f è un rivestimento;

b) Determinare il gruppo delle trasformazioni di rivestimento associato ad f.

31 Dato X spazio topologico separato e x_0, x_1 punti distinti di X, si consideri lo spazio quoziente Y ottenuto identificando x_0 con x_1. Sia inoltre $\tilde{Y}$ lo spazio quoziente ottenuto da $X \times \mathbb{Z}$ identificando ogni punto della forma (x_0, n) con $(x_1, n+1)$, e sia $p : \tilde{Y} \to Y$ la mappa definita da $f : [(x, n)] \mapsto [x]$. Dimostrare che:

a) la definizione della mappa p è ben posta;

b) p è un rivestimento.

32 Presi X, Y e $\tilde{Y}$ come nell'esercizio 31, per ogni $m \in \mathbb{Z}$ si consideri la mappa $g_m : \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ data da $g_m : [(x, n)] \mapsto [(x, n + m)]$. Dimostrare che:

a) la definizione di g_m è ben posta;

b) $G := \{g_m : m \in \mathbb{Z}\}$ è un gruppo di omeomorfismi di $\tilde{Y}$ isomorfo a $\mathbb{Z}$;

c) l'azione di G su $\tilde{Y}$ è libera;

d) l'azione di G su $\tilde{Y}$ è propriamente discontinua;

e) $\tilde{Y}/G$ è omeomorfo a Y.

33 Sia X uno spazio topologico e sia U_n una successione crescente di aperti la cui unione coincide con X.

a) Dimostrare che se ogni U_n è semplicemente connesso allora X è semplicemente connesso;

b) Far vedere con un esempio che l'ipotesi che gli insiemi U_n siano aperti è necessaria.

34* Si prendano $X, x_0, x_1, Y, \tilde{Y}$ come nell'esercizio 31. Si supponga che X sia connesso per archi e semplicemente connesso, e che ogni punto di X sia un retratto forte di deformazione di un suo qualche intorno. Indicando inoltre con q la proiezione di $X \times \mathbb{Z}$ sullo spazio quoziente $\tilde{Y}$, poniamo $Y_{m,n} := q(X \times \{m, m+1, \dots, m+n-1\})$ per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$. Dimostrare che:

a) $Y_{m,n}$ è connesso per archi per ogni m, n;

b) $Y_{m,n}$ è semplicemente connesso per ogni m, n;

c) $\tilde{Y}$ è connesso per archi e semplicemente connesso.

Traccia. Per b): procedendo per induzione su n supponiamo che $Y_{m,n}$ sia semplicemente connesso e dimostriamo che $Y_{m,n+1}$ è semplicemente connesso. Per $i = 0, 1$, prendiamo V_i

un'intorno aperto di x_i che si deforma su x_i. Scriviamo quindi $Y_{m,n+1}$ come $U_1 \cup U_2$ dove

$$U_1 := q\big(X \times \{m, \dots, m+n-1\} \cup V_1 \times \{m+n\}\big) \ ,$$
$$U_2 := q\big(V_0 \times \{m+n-1\} \cup X \times \{m+n\}\big) \ .$$

Allora $Y_{m,n}$ è un retratto di deformazione di U_1 e quindi U_1 è semplicemente connesso, $Y_{m+n,1}$ è un retratto di deformazione di U_2 e quindi U_2 è semplicemente connesso, ed infine $U_1 \cap U_2$ è connesso per archi. Segue da un risultato noto che $Y_{m,n+1}$ è semplicemente connesso.

35 Sia X uno spazio separato, connesso per archi e semplicemente connesso tale che ogni punto di X è un retratto forte di deformazione di un suo qualche intorno. Si prenda quindi Y come nell'esercizio 31. Utilizzando quanto fatto negli esercizi 32 e 34 dimostrare che Y è connesso per archi e che il gruppo fondamentale di Y è isomorfo a $\mathbb{Z}$, scrivendone esplicitamente un generatore.

36* Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dall'intervallo $[-1,1]$ identificando tra loro i punti $-1, 0, 1$. Detto G il gruppo libero con due generatori a e b, indichiamo con $\tilde{X}$ lo spazio quoziente ottenuto da $[-1,1] \times G$ identificando ogni punto della forma $(-1, z)$ con $(0, za)$ ed ogni punto della forma $(1, z)$ con $(0, zb)$. Sia infine $p : \tilde{X} \to X$ la mappa data da $p : [(x, z)] \mapsto [x]$. Dimostrare che:
a) lo spazio X è omeomorfo al bouquet di due circonferenze, cioè ad un "otto";
b) la definizione di p è ben posta e p è un rivestimento;
c) $\tilde{X}$ è semplicemente connesso;
d) il gruppo fondamentale di X è isomorfo a G.

37° Siano dati i rivestimenti $p : \tilde{X} \to X$ e $q : \tilde{Y} \to Y$, con $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ spazi connessi e localmente connessi per archi. Dimostrare che per ogni omeomorfismo $g : X \to Y$ esiste un omeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ tale che $q\tilde{g} = gp$.

38 Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}$ spazio connesso e localmente connesso per archi. Dato un gruppo G di omeomorfismi di X, sia $\tilde{G}$ l'insieme degli omeomorfismi $\tilde{g}$ di $\tilde{X}$ per cui esiste $g \in G$ tale che
$$p\tilde{g} = gp \ . \tag{1}$$
Dimostrare che:
a) $\tilde{G}$ è un gruppo;
b) per ogni $\tilde{g} \in \tilde{G}$ esiste un unico $g \in G$ per cui vale la (1);
c) la mappa $\varphi : \tilde{g} \mapsto g$ dove g è data al punto b) è un omomorfismo di $\tilde{G}$ in G;
d) il nucleo di φ è il gruppo delle trasformazioni di rivestimento;
e) in generale non esiste un sottogruppo H di $\tilde{G}$ tale che $\varphi_{|H}$ è un isomorfismo di H in G.

39° Sia $X = U_1 \cup U_2$ dove $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti connessi per archi di X e $U_2, U_1 \cap U_2$ sono semplicemente connessi. Detta $i : U_1 \to X$ la mappa di inclusione, dimostrare usando il teorema di van Kampen che $i_* : \pi_1(U_1) \to \pi_1(X)$ è un isomorfismo.

40* Sia X il bouquet di n circonferenze. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo libero con n generatori.
Traccia. Procedendo per induzione su n, supponiamo che l'enunciato sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per n usando il teorema di van Kampen. Lo spazio X è ottenuto come quoziente di $S^1 \times \{1, \dots, n\}$ identificando tra loro i punti $(1, m)$ con $m = 1, 2, \dots, n$;

indichiamo con p la proiezione di $S^1 \times \{1, \dots, n\}$ su X. Detto V l'insieme dei punti $z \in S^1$ tali che $|z - 1| < 1$, poniamo

$$U_1 := p\big(S^1 \times \{1, \dots, n-1\} \cup V \times \{n\}\big) ,$$
$$U_2 := p\big(V \times \{1, \dots, n-1\} \cup S^1 \times \{n\}\big) .$$

Applichiamo quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ tenendo conto che: a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti di X connessi per archi; b) $p(S^1 \times \{1, \dots, n-1\})$ è un retratto di deformazione di U_1 e quindi il gruppo fondamentale di U_1 è il gruppo libero con $n-1$ generatori; c) $p(S^1 \times \{n\})$ è un retratto di deformazione di U_2 e quindi il gruppo fondamentale di U_2 è il gruppo libero con un generatore; d) $U_1 \cap U_2 = p(V \times \{1, \dots, n\})$ è contraibile e pertanto è semplicemente connesso.

41 Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dal disco D^2 identificando ogni punto z tale che $|z| = 1$ con l'antipodale $-z$. [*Dunque X è omeomorfo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.*]
Detta p la proiezione di D^2 sullo spazio quoziente X, poniamo $U_1 := p(\{z \in D^2 : |z| < 1\})$ e $U_2 := p(\{z \in D^2 : |z| > 1\})$. Dimostrare che:
a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti connessi per archi;
b) U_1 è contraibile e quindi è semplicemente connesso;
c) $p(\{z : |z| = 1\})$ è un retratto di deformazione di U_2;
d) $\pi_1(U_2)$ è il gruppo libero generato da $[g]$ dove $g(s) := p(e^{\pi i s})$ per ogni $s \in I$;
e) $p(\{z : |z| = 1/2\})$ è un retratto di deformazione di $U_1 \cap U_2$;
f) $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ è il gruppo libero generato da $[h]$ dove $h(s) := p(\frac{1}{2}e^{2\pi i s})$ per ogni $s \in I$;
g) h è omotopo a $g * g$ in U_2;
h) applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ si ottiene che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[g]$ con la relazione $[g]^2 = 1$, cioè è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$.

42 Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dal quadrato $Q := [-1, 1]^2$ identificando ogni punto della forma $(-1, y)$ con $(1, y)$ ed ogni punto della forma $(x, -1)$ con $(x, 1)$. [*Dunque X è omeomorfo al toro T^2.*]
Detta p la proiezione di Q sul quoziente X, poniamo $U_1 := p((-1, 1)^2)$ e $U_2 := p(Q \setminus \{0\})$. Siano inoltre $g_1, g_2 : I \to X$ i cammini chiusi dati da

$$g_1(s) := p(2s - 1, -1) \quad \text{e} \quad g_2(s) := p(1, 2s - 1) .$$

Dimostrare che:
a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono aperti connessi per archi;
b) U_1 è contraibile e quindi è semplicemente connesso;
c) $p(\partial Q)$ è un retratto di deformazione di U_2
d) $p(\partial Q)$ è omeomorfo al bouquet di due circonferenze;
e) $\pi_1(U_2)$ è il gruppo libero generato da $[g_1]$ e $[g_2]$;
f) $p(\{z : |z| = 1/2\})$ è un retratto di deformazione di $U_1 \cap U_2$;
g) $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ è il gruppo libero generato da $[h]$ dove $h(s) := p(\frac{1}{2}e^{2\pi i s})$ per ogni $s \in I$;
h) h è omotopo a $g_1 * g_2 * \bar{g}_1 * \bar{g}_2$ in U_2;
i) applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ si ottiene che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[g_1]$ e $[g_2]$ con la relazione $[g_1][g_2] = [g_2][g_1]$, cioè è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.

43 Sia X lo spazio quoziente ottenuto a partire dal quadrato $Q := [-1, 1]^2$ identificando ogni punto della forma $(-1, y)$ con $(1, y)$ ed ogni punto della forma $(x, -1)$ con $(-x, 1)$. [*Dunque X è la bottiglia di Klein.*]

Si prendano U_1, U_2, g_1 e g_2 come nell'esercizio 42. Applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$, si dimostri che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[g_1]$, $[g_2]$ con la relazione $[g_1][g_2] = [g_2][g_1]^{-1}$, cioè è isomorfo al prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$ (cfr. esercizio 16).

44* Presi Q, X come nell'esercizio precedente e detta p la proiezione di Q sul quoziente X, si considerino i cammini chiusi $h_1, h_2, h : I \to X$ dati da

$$h_1(s) := p(0, 2s-1) \ , \quad h_2(s) := p(1, 2s-1) \ ,$$

e

$$h(s) := \begin{cases} p(4s-1, -1/2) & \text{per } 0 \le s \le 1/2 \\ p(4s-3, 1/2) & \text{per } 1/2 < s \le 1 \end{cases} \ .$$

Posto $U_1 := X \setminus h_2(I)$ e $U_2 := X \setminus h_1(I)$, dimostrare che:
a) $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sono connessi per archi;
b) $[h_1]$ è un generatore di $\pi_1(U_1)$;
c) $[h_2]$ è un generatore di $\pi_1(U_2)$;
d) $[h]$ è un generatore di $\pi_1(U_1 \cap U_2)$;
e) Applicando il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$, si dimostri che $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo generato da $[h_1]$ e $[h_2]$ con la relazione $[h_1]^2 = [h_2]^2$.

45* Si considerino i gruppi G ed H definiti in termini di generatori e relazioni da

$$G := \langle a_1, a_2 \,|\, a_1 a_2 = a_2 a_1^{-1} \rangle \quad \text{e} \quad H := \langle b_1, b_2 \,|\, b_1^2 = b_2^2 \rangle \ .$$

Per quanto visto negli esercizi 43 e 44 questi due gruppi devono essere isomorfi. Scrivere esplicitamente un isomorfismo.

46 Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato dall'unione di una sfera S e di un suo diametro D. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ utilizzando il teorema di van Kampen.
Traccia. Scomporre X come $X = U_1 \cup U_2$ dove U_1 ed U_2 sono opportuni intorni aperti di S e di $D \cup C$ rispettivamente, e C è una semicirconferenza contenuta in S con estremi coincidenti con gli estremi di D (per cui $D \cup C$ è omeomorfo ad una circonferenza).

47 Dare una soluzione alternativa dell'esercizio precedente utilizzando l'esercizio 35.

48 In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la circonferenza $C := \{x_1^2 + x_2^2 = 1,\, x_3 = 0\}$, il semispazio chiuso $D := \{x_1 \ge 0\}$ ed il piano $P := \{x_2 = 0\}$. Si ponga quindi $X := D \setminus C$.
a) Dimostrare che $X \cap P$ è un retratto di deformazione forte di X;
b) dimostrare che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e scriverne un generatore.

49* In $\mathbb{R}^3$ si consideriamo la circonferenza $C := \{x_1^2 + x_2^2 = 1,\, x_3 = 0\}$ e l'insieme $X := \mathbb{R}^3 \setminus C$. Calcolare il gruppo fondamentale di X utilizzando il teorema di van Kampen.
Traccia. Si scriva X come $X = U_1 \cup U_2$ dove

$$U_1 := X \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > -1/2\} \quad \text{e} \quad U_2 := X \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 < 1/2\} \ .$$

Allora $\pi_1(U_1)$ e $\pi_1(U_2)$ sono isomorfi a $\mathbb{Z}$ (cfr. l'esercizio 48); si indichino quindi con a_1 ed a_2 i rispettivi generatori. Inoltre, detto P il piano $\{x_1 = 0\}$, $U_1 \cap U_2$ si deforma su $X \cap P$, vale a dire un piano meno due punti, e quindi $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ è il gruppo libero con due generatori, che indichiamo con b_1, b_2. Si verifichi che, a patto di scegliere opportunamente i generatori dei vari gruppi, l'immersione canonica di $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ in $\pi_1(U_1)$ porta b_1 e b_2 in a_1 mentre l'immersione di $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ in $\pi_1(U_2)$ porta b_1 e b_2 in a_2. Pertanto $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo dato dai generatori a_1, a_2 e dalla relazione $a_1 = a_2$, ed è quindi isomorfo al gruppo libero con un generatore, cioè $\mathbb{Z}$.

50° Calcolare il gruppo fondamentale di $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0\}$.

51 Calcolare il gruppo fondamentale di $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0, 1\}$. [*Applicare il teorema di van Kampen a* $X = U_1 \cup U_2$ *dove* $U_1 := X \cap \{\operatorname{Re} z_1 > 0\}$ *e* $U_2 := X \cap \{\operatorname{Re} z_1 < 1\}$.]

52 Sia R una semiretta chiusa in $\mathbb{R}^2$ e δ un numero reale positivo. Esibire un isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus R$ tale che $\varphi(x) = x$ per ogni x tale che $\operatorname{dist}(x, R) \geq \delta$.

53 Sia $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Completando la seguente traccia di dimostrazione, far vedere che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$ è un gruppo libero con n generatori.
Traccia. Procedendo per induzione su n, si suppone l'enunciato vero per $n-1$ e lo si dimostra per n. Si ponga $S' := S \setminus \{x_n\}$ e si prenda quindi una semiretta chiusa R con estremo x_n che non interseca S'. Preso quindi $\delta > 0$ tale che $\delta \leq \operatorname{dist}(x_i, R)$ per $i < n$, si indichi con U il δ-intorno aperto di R, vale a dire l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{dist}(x, R) < \delta$. Si applichi quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $X := \mathbb{R}^2 \setminus S$, $U_1 := X \setminus R$, $U_1 := U \setminus \{x_n\}$ osservando che: a) U_1 è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus S'$ (cfr. esercizio 52) e quindi $\pi_1(U_1)$ è un gruppo libero con $n-1$ generatori per l'ipotesi induttiva; b) $\pi_1(U_2) \cong \mathbb{Z}$; c) $U_1 \cap U_2 = U \setminus R$ è contraibile e quindi semplicemente connesso.

54 Nel contesto dell'esercizio 53, prendiamo $r > 0$ tale che $r < |x_j - x_k|$ per ogni $j \neq k$, e per ogni j consideriamo il cammino $f_j : I \to \mathbb{R}^2 \setminus S$ dato da

$$f_j(s) := x_j + r(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \ .$$

Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$ è generato da $[f_j]$ con $j = 1, \dots, n$.
[*Questo enunciato non è molto preciso. Una versione formalmente più corretta è la seguente: preso* $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ *e detto* $g_j : I \to \mathbb{R}^2 \setminus S$ *un qualunque cammino che va da* x_0 *ad* x_j*, il gruppo* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S; x_0)$ *è generato dagli elementi* $[g_j * f_j * \bar{g}_j]$ *con* $j = 1, \dots, n$.]

55* Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 3$, S un sottoinsieme finito di A, ed $i : A \setminus S \to A$ la mappa di inclusione. Dimostrare che:
a) $A \setminus S$ è connesso per archi;
b) $\pi_1(A \setminus S) \cong \pi_1(A)$, e per la precisione $i_* : \pi_1(A \setminus S) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo.
Traccia. Per b): procedendo per induzione sul numero n di elementi di S, si dimostri l'enunciato per n supponendo che valga per $n-1$. Scelto $x \in S$, si ponga $S' := S \setminus \{x\}$ e si prenda $r > 0$ tale che, detta U_1 la palla aperta di centro x e raggio r in $\mathbb{R}^m$, si ha $U_1 \subset A$ e $U_1 \cap S = \{x\}$. Si applichi quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $X := A \setminus S'$, $U := A \setminus S$ e U_1 è dato sopra, utilizzando il fatto che U_1 ed $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{x\}$ sono semplicemente connessi.

56* Come l'esercizio precedente, supponendo però che S sia discreto in A, vale a dire che ogni punto di A ammette un intorno U tale che $S \cap U$ è finito.

57 Dato A aperto in uno spazio metrico X, per ogni $x \in A$ si indichi con $r(x)$ l'estremo superiore dei numeri positivi r tali che la palla aperta di centro x e raggio r è contenuta in A. Dimostrare che:

a) $r(x)$ è un massimo;
b) $r(x) = \text{dist}(x, X \setminus A) := \min\{d(x,y) : y \in X \setminus A\}$
c) $r : A \to (0, +\infty)$ è una funzione continua, e per la precisione $|r(x_1) - r(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in A$.

58* Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 4$ ed I un segmento chiuso in $\mathbb{R}^m$. Poniamo $\partial I := \{a_1, a_2\}$ dove a_1, a_2 sono gli estremi di I, ed indichiamo con $i : A \setminus I \to A \setminus \partial I$ e $j : A \setminus I \to A$ le inclusioni di $A \setminus I$ in $A \setminus \partial I$ e in A, rispettivamente. Supponiamo che il segmento aperto $I \setminus \partial I$ sia contenuto in A dimostrare che:
a) $A \setminus \partial I$ e $A \setminus I$ sono connessi;
b) $\pi_1(A \setminus I) \cong \pi_1(A \setminus \partial I)$ e per la precisione $i_* : \pi_1(A \setminus I) \to \pi_1(A \setminus \partial I)$ è un isomorfismo;
c) $\pi_1(A \setminus I) \cong \pi_1(A)$ e per la precisione $j_* : \pi_1(A \setminus I) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo;
Traccia. Per b): a patto di scegliere opportunamente gli assi, si può supporre che il segmento I sia della forma $I = [\alpha_1, \alpha_2] \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} = \mathbb{R}^m$. Si ponga

$$U_1 := \big\{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} : \ t \in (\alpha_1, \alpha_2), \ |y| < r(t, 0)\big\}$$

dove $r : A \to (0, +\infty)$ è la funzione definita nell'esercizio 57, e si applichi quindi il teorema di van Kampen a $X = U_1 \cup U_2$ dove $X := A \setminus \partial I$ e $U_2 := A \setminus I$. Il punto chiave è che sia U_1 che $U_1 \cap U_2$ sono semplicemente connessi. Infatti un retratto di deformazione di U_1 è il segmento aperto $J := (-\alpha_1, \alpha_2) \times \{0\}$, mentre un retratto di deformazione di $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus J$ è la superfice

$$S := \big\{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} : \ t \in (\alpha_1, \alpha_2), \ |y| = \tfrac{1}{2} r(t, 0)\big\} \ ,$$

che è omeomorfa al prodotto $(\alpha_1, \alpha_2) \times S^{m-2}$, che a sua volta è semplicemente connesso. Per c): utilizzare l'esercizio 55.

59 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 4$ ed S l'unione di una famiglia finita $\mathscr{F}$ di punti o di segmenti chiusi contenuti in A. Detta $i : A \setminus S \to A$ la mappa di immersione, dimostrare che
a) $A \setminus S$ è connesso per archi;
b) $\pi_1(A \setminus S) \cong \pi_1(A)$ e per la precisione $i_* : \pi_1(A \setminus S) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo.
[*Ridursi al caso in cui ogni coppia di segmenti ha in comune al più un estremo, ed utilizzare quindi gli esercizi 55 e 58.*]

60* Come l'esercizio precedente, supponendo però che la famiglia $\mathscr{F}$ sia solo *localmente* finita in A, vale a dire che ogni punto di A ammette un intorno U che interseca solo una sottofamiglia finita di elementi di $\mathscr{F}$.

61* Dati due interi k, m con $0 \leq k \leq m$, si dice *simplesso* k-dimensionale in $\mathbb{R}^m$ l'insieme delle combinazioni convesse di una qualunque famiglia di $k+1$ punti affinemente indipendenti (detti *vertici* del simplesso). Quindi i simplessi 0-dimensionali sono i punti, quelli 1-dimensionali sono i segmenti, quelli 2-dimensionali sono i triangoli, etc.
Dimostrare la seguente generalizzazione degli esercizi 56 e 60: sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 3$, sia S l'unione di una famiglia localmente finita $\mathscr{F}$ di simplessi contenuti in A di dimensione minore o uguale ad $m - 3$, e sia $i : A \setminus S \to A$ la mappa di inclusione; allora
a) $A \setminus S$ è connesso per archi;
b) $\pi_1(A \setminus S) \cong \pi_1(A)$ e per la precisione $i_* : \pi_1(A \setminus S) \to \pi_1(A)$ è un isomorfismo.

[*Come passo preliminare, formulare e dimostrare un'opportuna variante dell'esercizio 58.*]

62* Dato un intero $n \geq 2$, si ponga $X := \mathbb{R}^3$ e si prendano X_*^n e G come nell'esercizio 23. Dimostrare che:
a) X_*^n è semplicemente connesso;
b) $\pi_1(X_*^n/G) \cong G \cong S_n$ dove S_n è il gruppo delle permutazioni di n elementi.
[*Utilizzare gli esercizi 23 e 61.*]

63* Dato un gruppo finito G, costruire uno spazio topologico X connesso per archi tale che

$$\pi_1(X) \cong G \ .$$

[*Utilizzare il fatto G è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo delle permutazioni S_n con n opportuno e quindi procedere come nell'esercizio 62.*]

1 Calcolare i primi 3 coefficienti delle serie formali ST, $S \circ T$ e $T \circ S$ dove

$$S(X) := \sum_{n=0}^{\infty} n!\, X^n \quad \text{e} \quad T(X) := \sum_{n=1}^{\infty} n^n X^n \ .$$

2 Calcolare i raggi di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\cos n) X^n; \quad \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n \log n}\, X^n; \quad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{3n}}{1+2^n}; \quad \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{n^2}}{1+3^n}.$$

3 Sia (a_n) una successione di numeri complessi che soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta \quad \text{per } n = 0, 1, 2 \dots$$

dove α, β sono numeri complessi assegnati con $\alpha \neq 0$. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_n a_n X^n$.

4° Sia (a_n) una successione di numeri complessi non nulli. Dimostrare che il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_n a_n X^n$ soddisfa

$$\liminf_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1}{R} \leq \limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{1}$$

(per $1/R$ si segue la solita convenzione per cui $1/+\infty = 0$ e $1/0 = +\infty$). Dedurne in particolare che

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

nel caso che il limite a sinistra dell'uguale esista.

5 Dare un esempio di serie di potenze per cui entrambe le disuguaglianza nella formula (1) dell'esercizio 4 sono strette.

6* Sia (a_n) una successione di numeri reali che soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \log(1+\alpha^{a_n}) \quad \text{per } n = 0, 1, 2 \dots$$

dove $\alpha > 1$ è un numero reale assegnato. Determinare al variare di α il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_n a_n X^n$.

7 Per ciascuna delle seguenti serie di potenze calcolare il raggio di convergenza e trovare una rappresentazione esplicita in termini di funzioni elementari della funzione analitica associata:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} X^n; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} X^n; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{2n}}{n}; \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} n\, X^{n-1}; \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 X^n;$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} n a^n X^{2n}; \quad \text{g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n+1}}{n!}; \quad \text{h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n}}{n!}; \quad \text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(2n)!}; \quad \text{l)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1}.$$

8 Calcolare il valore delle seguenti serie numeriche:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$; s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

9° Date le serie di potenze a coefficienti complessi

$$S(X) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad \text{e} \quad S_k(X) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} X^n \quad \text{con } k = 1, 2, \dots,$$

indichiamo con R ed R_k i corrispondenti raggi di convergenza. Supponiamo ora che

$$\lim_{k \to +\infty} a_{kn} = a_n \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

e che esista inoltre una successione di numeri positivi α_n tale che

$$|a_{kn}| \leq \alpha_n \quad \text{per ogni } k, n. \tag{2}$$

Indichiamo quindi con r il raggio di convergenza della serie $\sum_n \alpha_n X^n$. Dimostrare che
a) $R \geq r$ e $R_k \geq r$ per ogni k;
b) le funzioni $S_k(z)$ convergono uniformemente a $S(z)$ su $\{|z| \leq \rho\}$ per ogni $\rho < r$.

10 Nel contesto dell'esercizio 9, far vedere con degli esempi che rimuovendo l'ipotesi (2) possono verificarsi le seguenti situazioni:
a) $R_k = +\infty$ per ogni k e $R = 0$;
b) $R_k = 0$ per ogni k e $R = +\infty$;
c) $R_k = R = +\infty$ per ogni k ma $S_k(z) \not\to S(z)$ per $z \neq 0$.

11* Nel contesto dell'esercizio 9, far vedere con un esempio che può verificarsi la seguente situazione: $R_k = R = +\infty$ per ogni k ma $S_k(z) \not\to S(z)$ per ogni z tale che $|z| > \rho$.

12° Usare l'esercizio 9 per dimostrare che $e^z = \displaystyle\lim_{k \to +\infty} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big)^k$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

13 Data la serie di potenze

$$S(X) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^n}{n(n-1)} \ ,$$

si dimostri quanto segue:
a) il raggio di convergenza di $S(X)$ è 1;
b) la funzione $S(x)$ soddisfa $S''(x) = 1/(1-x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$;
c) $S(x) = x + (1-x)\log(1-x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$;
d) $S(z) = z + (1-z)\log(1-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$.
[*Qui come in seguito* $\log z$ *indica la determinazione standard del logaritmo complesso.*]

14 Date la serie di potenze

$$S(X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n^2}$$

e la funzione

$$f(x) := \int_0^x \frac{-\log(1-t)}{t}\, dt \ ,$$

dimostrare quanto segue:
a) il raggio di convergenza di $S(X)$ è 1;
b) la funzione f è ben definita per ogni $x \leq 1$;
c) la funzione $S(x)$ soddisfa $(x\,S'(x))' = 1/(1-x)$ per ogni $x \in (-1,1)$;
d) $S(x) = f(x)$ per ogni $x \in (-1,1)$;
e) $S(x) + S(1-x) = f(1) - \log x \, \log(1-x)$ per ogni $x \in (0,1)$;
f) $S(z) + S(1-z) = f(1) - \log z \, \log(1-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < 1$ e $|1-z| < 1$.

15 Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e $I := [a,b]$ un intervallo. Data una funzione continua $f : I \times A \to \mathbb{C}$ si ponga

$$F(z) := \int_a^b f(s,z)\,ds \quad \text{per ogni } z \in A.$$

Dimostrare che:
a) $F : A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua;
b) se la funzione $z \mapsto f(s,z)$ è olomorfa per ogni $s \in I$ allora anche F è olomorfa. [*Dimostrare che $F(z)\,dz$ è una forma chiusa ed applicare il teorema di Morera.*]

16* Fissato un numero reale $a > 0$, si considerino la serie di potenze

$$S_a(X) := \frac{1}{a} + \frac{X}{a(a+1)} + \cdots + \frac{X^n}{a(a+1)\cdots(a+n)} + \cdots$$

e la funzione

$$f_a(z) := \int_0^1 s^{a-1} e^{z(1-s)}\,ds\ .$$

Dimostrare quanto segue:
a) $1 + X\,S_{a+1}(X) = a\,S_a(X)$;
b) il raggio di convergenza di $S_a(X)$ è $+\infty$;
c) $f_a(z)$ è ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$;
d) la funzione f_a è olomorfa su $\mathbb{C}$;
e) la funzione $g(x) := x^a S_a(x)$ soddisfa l'equazione $g'(x) = g(x) + x^{a-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
f) $S_a(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
g) $S_a(z) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;

17* Fissati a, b numeri reali positivi, si consideri la serie di potenze

$$S_{ab}(X) := \frac{b}{a} + \frac{b(b+1)}{a(a+1)}X + \cdots + \frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots(a+n)}X^n + \cdots$$

a) Dimostrare che il raggio di convergenza di $S_{ab}(X)$ è 1;
b) trovare un'equazione differenziale soddisfatta da $S_{ab}(x)$, cfr. esercizio 16e);
c) trovare un'espressione integrale per $S_{ab}(x)$, cfr. esercizio 16f), g);
d) determinare esplicitamente $S_{ab}(x)$ nel caso $b = 1$.

18° Dimostrare che la funzione

$$f(z) := \frac{\log(1+z)}{z}$$

può essere estesa per continuità al punto $z = 0$, e risulta essere analitica in quel punto.

19* Sia $S(X)$ la serie di potenze data nell'esercizio 14 e si consideri la funzione

$$g(z) := \int_0^1 \frac{-\log(1 - sz)}{s} \, ds \; .$$

Dimostrare che:
a) $f(z)$ è ben definita per ogni $z \in A := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$;
b) f è una funzione olomorfa su A;
c) $S(z) = g(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$.

20 Dimostrare la seguente versione della formula di sommazione per parti di Abel: dati i numeri complessi A_n, B_n con $n = 0, 1, \ldots, m$, si ponga

$$a_n := A_n - A_{n-1} \quad \text{e} \quad b_n := B_n - B_{n-1} \tag{1}$$

per ogni $n = 1, \ldots, m$. Allora

$$\sum_{n=1}^{m} a_n B_n = [A_m B_m - A_0 B_0] - \sum_{n=1}^{m} A_{n-1} b_n \; . \tag{2}$$

[*A livello formale possiamo interpretare la* (1) *dicendo che* a_n *e* b_n *sono l'equivalente discreto delle derivate di* A_n *e* B_n*; se poi interpretiamo le sommatorie come l'equivalente discreto degli integrali, allora la* (2) *corrisponde all'usuale formula di integrazione per parti.*]

21 Sia (a_n) una successione di numeri complessi tale che la serie $\sum_n a_n$ converge. Dimostrare che la serie di funzioni

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; .$$

converge uniformemente per $x \in [0, 1]$, e pertanto $S(x)$ è continua sull'intervallo $[0, 1]$.
Traccia. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $\sum_n a_n$ converge, esiste un indice $l > 0$ tale che $|A_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq l$, dove si è posto $A_n := a_l + a_{l+1} + \cdots + a_n$.
Prendiamo $m > l$ ed $x \in [0, 1]$. Applicando la formula di sommazione per parti (2) dell'esercizio 20 con A_n dato sopra e $B_n := x^n$ otteniamo

$$\sum_{n=l+1}^{m} a_n x^n = A_m x^m - A_l x^l - \sum_{n=l+1}^{m} A_{n-1}(x^n - x^{n-1}) \; ,$$

e usando le maggiorazioni $|A_n| \leq \varepsilon$ e $0 \leq x^n \leq 1$,

$$\left| \sum_{n=l+1}^{m} a_n x^n \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{n=l+1}^{m} (x^{n-1} - x^n) \leq 2\varepsilon + \varepsilon(x^l - x^m) \leq 3\varepsilon \; .$$

Da questo si deduce che le somme parziali della serie di funzioni $\sum_n a_n x^n$ costituiscono una successione di Cauchy nello spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ dotato della norma del sup e pertanto convergono uniformemente ad una funzione continua.

22 Sia data una serie di potenze $S(X) = \sum_n a_n X^n$ con raggio di convergenza R, e un numero complesso z_0 con $|z_0| = R$ tale che la serie $S(z_0)$ converge. Dimostrare che

$$\lim_{t \uparrow 1} S(t z_0) = S(z_0) \; .$$

[*Usare l'esercizio 21.*]

23* È noto che la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

ha raggio di convergenza 1, converge assolutamente a $-\log(1-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, e non converge per $|z| > 1$. Dimostrare che la serie converge a $-\log(1-z)$ anche per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ e $z \neq 1$.

Traccia. Per dimostrare la convergenza, si applichi la formula di sommazione per parti (2) nell'esercizio 20 con $A_n = 1/(n+1)$ e $B_n := (z^n - 1)/(z-1)$, da cui segue $a_n = -1/(n(n+1))$ e $b_n := z^n$. Per dimostrare che il valore della serie è proprio $-\log(1-z)$ si utilizzi l'esercizio 22.

24 Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$. [*Usare l'esercizio 23.*]

25 Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{-\log(1-t)}{t}\, dt$. [*Usare gli esercizi 14 e 22.*]

26 Determinare lo sviluppo in serie di Taylor in 0 della funzione $\arctan x$ ed utilizzarlo per dimostrare che

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

[*Partire dallo sviluppo di* $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$.]

27 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ nei seguenti casi:

a) $\omega := x\,dx + xy\,dy$ e $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0,\pi]$;
b) $\omega := e^{-x}\,dx + e^{-y}\,dy$ e $\gamma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0,+\infty)$;
c) $\omega := iy\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$ e $\gamma(t) := (2\cos t, 2\sin t)$ con $t \in [0,\pi]$;
d) $\omega := \dfrac{y+1}{x^2+y^2}\,dx - \dfrac{x+1}{x^2+y^2}\,dy$ e $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0,2\pi]$;
e) $\omega := xy\,d\bar{z}$ e $\gamma(t) := (t^3, t^2)$ con $t \in [-1,1]$;
f) $\omega := \bar{z}\,dz$ e $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ con $t \in [-1,1]$;
g) $\omega := |z|\,dz$ e $\gamma(t) := (e^{2t}-1, 2e^t)$ con $t \in [0,1]$;

28 Di ciascuna delle seguenti forme differenziali dire se è chiusa o esatta sul dominio di definizione, ed in caso che sia esatta trovarne la primitiva:

a) $(y+ix)\,dx + (x-iy)\,dy$; b) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{1+x^2+y^2}$; c) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$; d) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+y^2)^2}$;

e) $xe^{x^2y}(2y\,dx + x\,dy)$; f) $\dfrac{(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(x^2+y^2)^2}$; g) $f(x^2+y^2)\cdot(x\,dx + y\,dy)$;

h) $\dfrac{dz}{z^2}$; i) $\dfrac{dz}{z^2-1}$; l) $\dfrac{d\bar{z}}{z}$; m) $\dfrac{e^z-1}{z}\,dz$; n) $\dfrac{\sin z}{z^2}\,dz$; p) $f(|z|)\,\bar{z}\,dz$.

Nei punti g) e p) f è una generica funzione di classe C^1 su $(0,+\infty)$.

29 Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ per i seguenti cammini:

a) $\gamma := (t, 1-t^2)$ con $t \in [-2, 2]$;
b) $\gamma := (t^n, 1-t^{2m})$ con $t \in [-1, 1]$ ed n, m interi positivi assegnati;
c) $\gamma := (2\sin t(\cos t + 2\cos^3 t), 4\cos^4 t - 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
d) $\gamma := (1+t^4)^{-1}(\cos t, 2\sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$.
e) $\gamma := e^{-t}(2\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \infty)$.

30 Dire quali delle seguenti funzioni di $z = x+iy$ sono olomorfe sul loro dominio di definizione:

$$\text{a) } x^2 - y^2 - 2xyi; \quad \text{b) } x^2 - iy^2; \quad \text{c) } 2xy + i(y^2 - x^2); \quad \text{d) } \frac{x+iy}{x^2+y^2}; \quad \text{e) } \frac{-x+iy}{x^2+y^2};$$

$$\text{f) } e^{y^2-x^2}(\sin(2xy) + i\cos(2xy)); \quad \text{g) } e^{y+2ix}; \quad \text{h) } e^{1+\bar z}; \quad \text{i) } \frac{z}{\bar z^2}; \quad \text{l) } 1 + |z|^4.$$

31 In ciascuno dei seguenti casi scrivere il prolungamento analitico della funzione di una variabile reale $f(x)$ all'aperto D in $\mathbb{C}$ utilizzando le funzioni e^z e $\log z$:

a) $f(x) := \cos x$ e $D := \mathbb{C}$;
b) $f(x) := \sin x$ e $D := \mathbb{C}$;
c) $f(x) := \tan x$ e $D := \mathbb{C} \setminus \{z = \pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
d) $f(x) := \arctan x$ e $D := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$;
e) $f(x) := \arcsin x$ e $D := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$;
f) $f(x) := \sqrt{x}$ e $D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$;
g) $f(x) := \sqrt{x}$ e $D := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\, y \le 0\}$;
h) $f(x) := x^a$ con $a \in \mathbb{R}$ e $D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$;

32 Dimostrare le seguenti identità, dove $\cos z$, $\sin z$, $\arctan z$ e z^a sono i prolungamenti analitici di $\cos x$, $\sin x$, $\arctan x$ e x^a definiti nell'esercizio 31:

a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
b) $(\sin z)' = \cos z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
c) $(\arctan z)' = 1/(1+z^2)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $-1 < \operatorname{Im} z < 1$;
d) $(\log z)' = 1/z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$;
e) $(z^a)' = az^{a-1}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$;

33 Determinare i luoghi di zeri delle seguenti funzioni olomorfe: a) e^z; b) $e^z + e^{-z}$; c) $\cos z$; d) $\sin z$; e) $\log z$.

34 Dimostrare che la funzione di una variabile reale $f(x) := \sqrt{x}$ non ammette alcun prolungamento analitico a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Traccia. Scrivere esplicitamente il prolungamento analitico di $\sqrt{x}$ a $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$; verificare che questa funzione non può essere estesa per continuità ad alcun punto $x \in \mathbb{R}$ con $x < 0$; applicare infine il principio del prolungamento analitico.

35* Consideriamo la funzione di una variabile reale $f(x) := \arctan x$. Dimostrare che:

a) f è prolungabile analiticamente a tutto l'aperto $D := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}\, |y| \ge 1\}$;
b) f non è prolungabile analiticamente ad alcun aperto di $\mathbb{C}$ che contiene strettamente D.

36° Definiamo le seguenti classi di matrici reali 2×2:

$$\mathscr{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \mathscr{M}' := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Dimostrare che:
a) se $A, B \in \mathscr{M}$ allora $AB \in \mathscr{M}$;
b) se $A, B \in \mathscr{M}'$ allora $AB \in \mathscr{M}$;
c) se $A \in \mathscr{M}$ e $B \in \mathscr{M}'$ allora $AB, BA \in \mathscr{M}'$;
d) l'applicazione $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ è un isomorfismo di campo di $\mathbb{C}$ in $\mathscr{M}$.

37° L'identificazione canonica di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ data da $x + iy \mapsto (x, y)$ permette di vedere una funzione f da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ come una mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Diciamo quindi che f è differenziabile (risp., di classe C^1) se è differenziabile (risp., di classe C^1) come mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, ed in tal caso indichiamo con Df la corrispondente matrice Jacobiana, vale a dire

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f \\ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f \end{pmatrix} .$$

Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile. Dimostrare che f è olomorfa se e solo se $Df(z)$ appartiene alla classe $\mathscr{M}$ definita nell'esercizio 36 per ogni $z \in A$, ed in tal caso la derivata complessa f' e la matrice Jacobiana Df sono legate dalla relazione

$$Df = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f' & -\operatorname{Im} f' \\ \operatorname{Im} f' & \operatorname{Re} f' \end{pmatrix} .$$

38° Siano f e g funzioni olomorfe. Utilizzando gli esercizi 36 e 37, dimostrare che $f \circ g$ è olomorfa e vale la solita formula per la derivata della funzione composta: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

39° Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Utilizzando l'esercizio 37, dimostrare che la matrice $Df(z)$ ha rango 0 o 2 per ogni $z \in A$. Dedurne che se A è connesso allora sono possibili solo due alternative: $f(A)$ è un punto (cioè f è costante) oppure $f(A)$ ha parte interna non vuota.

40 Sia A un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa con $|f|$ costante. Dimostrare che f è costante. [*L'immagine di f ha parte interna vuota, applicare quindi l'esercizio 39.*]

41 Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} f = 2i \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Im} f .$$

42 Sia A un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione differenziabile $f : A \to \mathbb{C}$ si dice *antiolomorfa* se in ogni punto di A è soddisfatta l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

Utilizzando gli esercizi 36 e 37, dimostrare i seguenti fatti:

a) f è antiolomorfa se e solo se $Df(z) \in \mathscr{M}'$ per ogni $z \in A$, con $\mathscr{M}'$ data nell'esercizio 36;
b) se f e g sono antiolomorfe allora $f \circ g$ è olomorfa;
c) se f è olomorfa e g antiolomorfa allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono antiolomorfe;
d) la mappa $z \mapsto \bar{z}$ è antiolomorfa;
e) se $f(z)$ è olomorfa allora $f(\bar{z})$ e $\overline{f(z)}$ sono antiolomorfe, mentre $\overline{f(\bar{z})}$ è olomorfa;
f) se f è olomorfa e antiolomorfa allora f è localmente costante.

43 Completare come segue i punti dell'esercizio 42: a) scrivere Df in termini di $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$; b) scrivere $\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$ in termini di $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g$; c) scrivere $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)$ in termini di $\frac{\partial}{\partial z} f$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g$; e) posto $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$, scrivere $\frac{\partial}{\partial z} g$ in termini di $\frac{\partial}{\partial z} f$.

44 Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che $g(z) := \overline{f(1/\bar{z})}$ è olomorfa e scrivere $g'(z)$ in termini di $f'(z)$.

45* Per ogni matrice M, indichiamo con $|M|$ la sua norma euclidea, vale a dire

$$|M| := \Big(\sum_{ij} M_{ij}^2 \Big)^{1/2} .$$

Dato A aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ funzione di classe C^1, dimostrare che:
a) $2 \,|\det Df(z)| \leq |Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$;
b) se f è olomorfa allora $2 \det Df(z) = |Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$;
c) se f è antiolomorfa allora $2 \det Df(z) = -|Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$;
d) se A è connesso e $2\,|\det Df(z)| = |Df(z)|^2$ per ogni $z \in A$ allora f è olomorfa oppure antiolomorfa.

1 Dato $\alpha \in (0, 2\pi)$, sia A_α il complementare in $\mathbb{C}$ della semiretta chiusa $\{re^{i\alpha} : r \in [0, \infty)\}$. È noto che la funzione $\log x$, definita per $x \in (0, +\infty)$, può essere estesa analiticamente ad A_α. Quest'estensione, indicata con $\log z$, è una delle possibili determinazioni del logaritmo complesso ed ovviamente dipende dalla scelta di α (prendendo $\alpha = \pi$ si ottiene la determinazione standard).
Calcolare $\log z$ per a) $z = -1 + i$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$; b) $z = -2 + i\sqrt{3}$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

2 Presi α, A_α e $\log z$ come nell'esercizio 1 e preso $a \in \mathbb{C}$, è possibile definire z^a per ogni $z \in A_\alpha$ ponendo

$$z^a := \exp(a \log z) \ .$$

Per a reale, questa funzione è l'estensione analitica ad A_α della funzione x^a (definita per x reale positivo); come per il logaritmo complesso, quest'estensione dipende dalla scelta di α. Calcolare z^a nei seguenti casi:
a) $z = 2i$, $a = 1/2$, $\alpha = \pi/4, \pi, 7\pi/4$;
b) $z = -2i$, $a = 1/2$, $\alpha = \pi/4, \pi, 7\pi/4$;
c) $z = -8$, $a = 1/3$, $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$.

3 Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e sia f_n una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente ad f su ogni sottoinsieme compatto di A. Dimostrare che f è olomorfa. [*Dimostrare che $f(z)\,dz$ è una forma chiusa ed applicare il teorema di Morera.*]

4* Sia $D := \{|z| < 1\}$. Dare un esempio di funzione olomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ che non può essere estesa ad alcun aperto connesso A che contiene strettamente D.
Traccia. Si prenda una successione (z_n) densa in ∂D e si ponga

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{-n}}{z - z_n} \quad \text{per ogni } z \in D. \tag{1}$$

Verificare che la serie di funzioni in (1) converge totalmente in $\{|z| \leq r\}$ per ogni $r < 1$ ed usare l'esercizio 3 per dedurne che f è olomorfa su D. Per far vedere che f non è estendibile ad A, si osservi che A deve contenere z_m per qualche m ma f non è estendibile per continuità in z_m perché $|f(tz_m)| \to +\infty$ quando $t \uparrow 1$. Per dimostrare quest'ultima asserzione osservare che

$$\begin{aligned} |f(tz_m)| &\geq \left| \frac{4^{-m}}{tz_m - z_m} \right| - \sum_{n \neq m} \left| \frac{4^{-n}}{tz_m - z_n} \right| \\ &\geq \frac{4^{-m}}{1-t} - \sum_{n<m} \left| \frac{4^{-n}}{tz_m - z_n} \right| - \sum_{n>m} \frac{4^{-n}}{1-t} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{4^{-m}}{1-t} - \sum_{n<m} \left| \frac{4^{-n}}{tz_m - z_n} \right| \end{aligned}$$

e passare al limite per $t \uparrow 1$ (nella seconda disuguaglianza si è usato che $|tz_m - z_n| \geq 1 - t$ per ogni n).

5° Sia D un compatto la cui frontiera è parametrizzata in senso antiorario dal cammino chiuso semplice $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dimostrare che l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ è uguale a 0 per ogni punto z_0 non appartenente a D, ed è uguale a 1 per ogni z_0 interno a D.
[*Qui come nel seguito si assume che un cammino sia continuo e almeno C^1 a tratti.*]

6° Siano dati una funzione olomorfa $f : A \to \mathbb{C}$ e un cammino $\gamma : I \to A$. Dimostrare che per ogni $z_0 \notin f(\gamma(I))$ si ha

$$\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\, \dot{\gamma}(t)\, dt \ .$$

7* Si consideri un cammino chiuso $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ di classe C^1, e sia $\gamma_0 : [0,1] \to S^1$ dato da $\gamma_0 := \gamma/|\gamma|$. Dimostrare che

$$\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{grado di } \gamma_0 \; . \tag{1}$$

Traccia. La prima uguaglianza in (1) segue dal fatto che γ è omotopo a γ_0 in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per quanto riguarda la seconda, per definizione il grado di γ_0 è dato da $\varphi_0(1) - \varphi_0(0)$, dove γ_0 è un qualunque sollevamento di γ, vale a dire una funzione $\varphi_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $\gamma_0 = e^{2\pi i\,\varphi_0}$. Quest'ultima identità implica

$$\dot\gamma_0 = 2\pi i\, e^{2\pi i\,\varphi_0}\, \dot\varphi_0 = 2\pi i\, \gamma_0\, \dot\varphi_0$$

(si noti che γ_0 e φ_0 sono funzioni di classe C^1), da cui segue che

$$\text{grado di } \gamma_0 = \varphi_0(1) - \varphi_0(0) = \int_0^1 \dot\varphi_0(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma_0(t)}{\gamma_0(t)} dt = \mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) \; .$$

8* È possibile calcolare l'indice di un cammino chiuso attorno a 0 contando in modo opportuno il numero di intersezioni di questo cammino con una semiretta che parte da 0. Dimostrare che vale infatti quanto segue: dato $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un cammino chiuso di classe C^1 ed R semiretta della forma $\{rv : r \in [0, +\infty)\}$ con $v \in S^1$, indichiamo con S l'insieme dei $t \in (0,1]$ tali che $\gamma(t) \in R$, e supponiamo che per ogni $t \in S$: si abbia

$$\langle iv; \dot\gamma(t)\rangle \neq 0 \tag{1}$$

(dati $a, b \in \mathbb{C}$, $\langle a; b\rangle$ è il prodotto scalare di a e b come vettori di $\mathbb{R}^2$); allora l'insieme S è finito e

$$\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \#\{t \in S : \langle iv; \dot\gamma(t)\rangle > 0\} - \#\{t \in S : \langle iv; \dot\gamma(t)\rangle < 0\} \; . \tag{2}$$

[*Il numero complesso iv rappresenta il vettore (di $\mathbb{R}^2$) ottenuto ruotando v di $90°$ in senso antiorario, e quindi la (1) significa che la componente del vettore $\dot\gamma$ nella direzione ortogonale a v non deve essere mai nulla nei punti in cui γ interseca R.*]
Traccia. Presi γ_0 e φ_0 come nell'esercizio 7 si ha $\gamma = |\gamma| e^{2\pi i\,\varphi_0}$, da cui si ottiene

$$\langle \dot\gamma; i\gamma\rangle = 2\pi |\gamma|^2 \dot\varphi_0 \; . \tag{3}$$

Pertanto la (1) implica $\dot\varphi_0 \neq 0$ per ogni $t \in S$, e siccome S coincide con l'insieme dei $t \in (0,1]$ tali che $\varphi_0(t) \in \mathbb{Z}$, si deduce che S è un sottoinsieme discreto di $[0,1]$, e quindi S è finito. Inoltre, indicando con $t_1, \dots, t_n$ i punti di S ordinati in senso crescente, si ha

$$\begin{aligned}
\dot\varphi_0(t_k),\, \dot\varphi_0(t_{k+1}) \text{ positivi} &\Rightarrow \varphi_0(t_{k+1}) = \varphi_0(t_k) + 1 \\
\dot\varphi_0(t_k),\, \dot\varphi_0(t_{k+1}) \text{ negativi} &\Rightarrow \varphi_0(t_{k+1}) = \varphi_0(t_k) - 1 \\
\dot\varphi_0(t_k),\, \dot\varphi_0(t_{k+1}) \text{ discordi} &\Rightarrow \varphi_0(t_{k+1}) = \varphi_0(t_k)
\end{aligned}$$

e utilizzando da queste implicazioni si ottiene l'identità

$$\text{grado di } \gamma_0 = \varphi_0(1) - \varphi_0(0) = \#\{k : \dot\varphi_0(t_k) > 0\} - \#\{k : \dot\varphi_0(t_k) < 0\} \; ,$$

che, tenuto conto dell'esercizio 7 e della (3), equivale alla (2).

9 Sia z_0 un punto di $\mathbb{C}$, e siano $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{C}$ dei cammini chiusi tali che $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z_0|$ per ogni t. Dimostrare che $\mathrm{Ind}(\gamma_1, z_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1 + \gamma_2, z_0)$.

Traccia. Utilizzare il fatto che i cammini chiusi γ_1 e $\gamma_1 + \gamma_2$ sono omotopi in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Un'omotopia è $\Gamma : (t, s) \mapsto \gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ con $t \in I$, $s \in [0, 1]$. Si osservi che la condizione $|\gamma_2| < |\gamma_1 - z_0|$ implica sia $z_0 \notin \gamma_1(I)$ che $z_0 \notin (\gamma_1 + \gamma_2)(I)$.

10 Calcolare l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ per i seguenti cammini:
a) $\gamma := (t^4, 1 - t^2)$ con $t \in [-2, 2]$;
b) $\gamma := (1 + 2 \cos t, 2 \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
c) $\gamma := (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$ ed a, b numeri reali positivi assegnati;
d) $\gamma := (2 \sin t(\cos t + 2 \cos^3 t), 4 \cos^4 t - 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
e) $\gamma := (e^{-|t|} \cos t, e^{|t|} \sin t)$ con $t \in [-\pi, \pi]$.

11* Si ricordi che la distanza di Hausdorff tra sottoinsiemi chiusi D_1, D_2 di $\mathbb{C}$ (o più in generale di uno spazio metrico X) è data

$$d_H(D_1, D_2) := \inf\{r : \ D_1 \subset (D_2)_r, \ D_2 \subset (D_1)_r\} ,$$

dove $(D_1)_r$ e $(D_2)_r$ sono gli r-intorni aperti di D_1 ed D_2 rispettivamente.
Siano ora D_1, D_2 due generici compatti le cui frontiere sono parametrizzate in senso antiorario dai cammini chiusi semplici $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Dimostrare che
a) $d_H(\partial D_1, \partial D_2) \le \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$;
b) $d_H(\partial D_1, \partial D_2) \le d_H(D_1, D_2)$;
c) non esiste alcuna C indipendente da D_1 e D_2 tale che $d_H(D_1, D_2) \le C\, d_H(D_1, D_2)$;
d) $d_H(D_1, D_2) \le \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$.
Traccia. Nella dimostrazione di d), il punto fondamentale è far vedere che, dato $z \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{dist}(z, \partial D_1) > \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$, allora $\mathrm{Ind}(\gamma_1, z) = \mathrm{Ind}(\gamma_2, z)$; l'uguaglianza segue dal fatto che γ_1 e γ_2 sono omotopi in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$.

12° Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia D un sottoinsieme compatto di A la cui frontiera è parametrizzata in senso antiorario dal cammino chiuso semplice $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dimostrare che $z_0 \in f(D)$ se e solo se $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, z_0) \neq 0$.

13 Sia P un polinomio di grado $d \ge 1$. Far vedere che P ha almeno una radice complessa completando la seguente traccia di dimostrazione.
Traccia. Dato $r > 0$ poniamo $\gamma_r(t) := re^{it}$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Supponendo per assurdo che $P(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, si deduce che $\mathrm{Ind}(P \circ \gamma_r, 0) = 0$ per ogni r (cfr. esercizio 12). D'altra parte $P(z) = az^d + o(|z|^d)$ per $|z| \to +\infty$, da cui si deduce che

$$\mathrm{Ind}(P \circ \gamma_r, 0) = \mathrm{Ind}(a\gamma^d, 0) = d$$

per r sufficientemente grande (cfr. esercizio 9), in contraddizione con quanto detto sopra.

14 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che f è una mappa aperta.
Traccia. Il punto fondamentale è far vedere che per ogni $z_0 \in A$ l'insieme $f(A)$ contiene un intorno di $f(z_0)$. Possiamo supporre $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$. Detti a_n i coefficienti della serie di Taylor di f in 0, sia n il più piccolo indice tale che $a_n \neq 0$; supponiamo inoltre che $a_n = 1$. Allora

$$f(z) = z^n + o(|z|^n) \quad \text{per } |z| \to 0$$

e quindi esiste $r > 0$ tale che $\gamma(t) := f(re^{it})$ si scompone come $\gamma_1 + \gamma_2$ dove $\gamma_1(t) := r^n e^{int}$ e $|\gamma_2(t)| \le r^n/2$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Ne consegue che per ogni y tale che $|y| < r^n/2$ si ha

$$|\gamma_1(t) - y| > r^n - \frac{r^n}{2} = \frac{r^n}{2} > \gamma_2(t) \quad \text{per ogni } t \in [0, 2\pi],$$

e usando l'esercizio 9 si deduce che

$$\operatorname{Ind}(f(re^{it}), y) = \operatorname{Ind}(\gamma, y) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, y) = n \ ,$$

e quindi $y \in f(A)$ (cfr. esercizio 12). Abbiamo dunque dimostrato che $f(A)$ contiene il disco aperto di centro $f(z_0) = 0$ e raggio $r^n/2$.

15 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa che soddisfa l'equazione $(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^4 = 1$. Dimostrare che f deve essere costante.
Traccia. Verificare che l'insieme dei punti $x + iy \in \mathbb{C}$ tali che $x^2 + y^4 = 1$ ha parte interna vuota in $\mathbb{C}$, mentre l'immagine di una funzione olomorfa non costante non ha mai parte interna vuota (cfr. esercizio 14).

16 Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dato z_0 in A, indichiamo con R il raggio di convergenza della la serie di Taylor di f in z_0. Dimostrare che $R \geq \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus A)$.
Traccia. Siano a_n i coefficienti della serie in questione e si prenda $r < \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus A)$. Siccome il disco chiuso di centro z_0 e raggio r è contenuto in A, per ogni $n \geq 0$ vale la disuguaglianza di Cauchy

$$|a_n| \leq M r^{-n} \quad \text{dove} \quad M := \sup \big\{ |f(z_0 + re^{it})| : 0 \leq t \leq 2\pi \big\} \ .$$

Ne segue che $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/r$ e quindi $R \geq r$.

17 Sia A un aperto di $\mathbb{C}$, e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua con la proprietà della media, vale a dire che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt \tag{1}$$

per ogni $z \in A$ e $r > 0$ tali che il disco chiuso $D_r(z)$ di centro z e raggio r è contenuto in A. Dimostrare che per gli stessi z ed r si ha

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D_r(z)} f(x + iy)\, dx\, dy \ . \tag{2}$$

[*Scrivere l'integrale in* (2) *coordinate polari ed applicare la* (1).]

18 Sia A un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con la proprietà della media in ogni punto di A. Dimostrare che il valore massimo ed il valore minimo di f vengono assunti sulla frontiera di A. Far vedere inoltre che se A è connesso ed il valore massimo (oppure minimo) di f viene assunto anche in un punto di A allora f è costante.
Traccia. Applicare il principio del massimo modulo alle funzioni $f - m$ e $M - f$ dove m e M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f su $\overline{A}$.

19 Dimostrare la seguente generalizzazione del teorema di Liouville. Sia p numero reale positivo e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa con crescita di ordine p all'infinito, vale a dire che esistono delle costanti C ed R tali che $|f(z)| \leq C|z|^p$ per ogni z con $|z| \geq R$. Allora f è un polinomio di grado $\leq p$.
Traccia. Siano a_n i coefficienti della serie di Taylor di f in 0. Per ogni $n \geq 0$, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy si ottiene $|a_n| \leq C r^{p-n}$ per ogni $r \geq R$, e passando al limite per $r \to +\infty$ si deduce che $a_n = 0$ quando $n > p$.

20 Sia A un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $\exp(f)$ costante. Dimostrare che f è costante.

21 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa la cui parte reale è limitata superiormente. Dimostrare che f è costante. [*Applicare il teorema di Liouville a* $g := \exp(f)$.]

22 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che la funzione $g := a \cdot \operatorname{Re} f + b \cdot \operatorname{Im} f$ è limitata superiormente per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Dimostrare che f è costante.

23* Data una funzione continua e crescente $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, diciamo che $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ha crescita di ordine $\phi(t)$ all'infinito se esistono delle costanti C, R tali che $|g(z)| \leq C\phi(|z|)$ per ogni z con $|z| \geq R$. Dimostrare che per ogni funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i seguenti enunciati sono equivalenti:
(i) f' ha crescita di ordine $\phi(t)$ all'infinito;
(ii) f ha crescita di ordine $t\,\phi(t)$ all'infinito.
Traccia. (i) $\Rightarrow$ (ii): per ogni $w \in \mathbb{C}$ si ha

$$f(w) = f(0) + \int_\gamma f'(z)\, dz$$

dove $\gamma(t) := tw$ con $t \in [0, 1]$, da cui segue che $|f(w)| \leq m|w|$ dove m è l'estremo superiore di $|f'(tw)|$ per $t \in [0, 1]$, e m si maggiora con $C\phi(|w|)$ per un opportuno C.
(ii) $\Rightarrow$ (i): utilizzando la formula di Cauchy, dimostrare che per ogni $w \in \mathbb{C}$ si ha

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz$$

dove $\gamma(t) := w + \frac{1}{2}|w|e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Dedurne che $|f'(w)| \leq 4m/|w|$ dove m è l'estremo superiore di $|f(z)|$ sull'immagine di γ, e osservare che m si maggiora con $C\,|w|\,\phi(|w|)$ per un opportuno C.

24* Sia ϕ come nell'esercizio 23 e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 con $n, m \geq 1$. Dimostrare che se Df ha crescita di ordine $\phi(t)$ all'infinito allora f ha crescita $t\,\phi(t)$ all'infinito. Fare vedere con un esempio che in generale non vale il viceversa. [*Dunque l'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) nell'esercizio 23 dipende specificamente dal fatto che f è olomorfa.*]

25* Dimostrare la seguente generalizzazione del teorema di Liouville: se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa la cui *parte reale* ha crescita di ordine p all'infinito con p numero reale positivo, allora f è un polinomio di grado $\leq p$.
Traccia. Tenuto conto degli esercizi 19 e 23, basta dimostrare che f' ha crescita di ordine $p - 1$ all'infinito. Posto $g := \operatorname{Re} f$, si ha $f' = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}$, e siccome f' ha la proprietà della media, usando la formula (2) nell'esercizio 17 si ottiene

$$f'(w) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D_r(w)} \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\, dx\, dy$$

per ogni $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$, e applicando il teorema di Gauss-Green

$$f'(w) = \frac{i}{\pi r^2} \int_\gamma g\, d\bar{z} \tag{1}$$

dove $\gamma(t) := w + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Utilizzando la formula (1) con $r := \frac{1}{2}|w|$ si ottiene infine $|f'(w)| \leq 4m/|w|$ dove m è l'estremo superiore di $|f(z)|$ sull'immagine di γ, ed m si maggiora con $C|w|^p$ per un opportuno C.

26 Dare un esempio di funzione continua sul semipiano $y \geq 0$ ed olomorfa sul semipiano $y > 0$ che non può essere estesa ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

27 Sia D il disco aperto $\{|z| < 1\}$, e sia $f : D \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa estendibile per continuità alla circonferenza ∂D, e che su questa assume valori reali. Dimostrare che la funzione data da

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{per } 0 < |z| \leq 1 \\ \overline{f(1/\bar{z})} & \text{per } |z| > 1 \end{cases}$$

è un'estensione olomorfa di f a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

28 Sia A il semipiano $\{y > 0\}$, e sia f una funzione olomorfa e limitata su A che può essere estesa per continuità all'asse delle x, e che su questo assume valori puramente immaginari. Dimostrare che f è costante. [*Estendere f ad una funzione olomorfa limitata su tutto* $\mathbb{C}$.]

29 Sia A un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ una funzione continua ed olomorfa su A la cui parte reale è costante sulla frontiera di A. Dimostrare che f è costante. [*Usare l'esercizio 18 per ottenere che la parte reale di f è costante su A.*]

30 Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ simmetrico rispetto all'asse delle x e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che f si può scomporre come $f = f_1 + f_2$ dove $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe tali che sull'asse delle x la funzione f_1 assume valori reali mentre f_2 assume valori puramente immaginari. Dimostrare inoltre che se A è connesso allora tale scomposizione è unica. [*Prendere* $f_1(z) := \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\bar{z})})$ *e* $f_2(z) := \frac{1}{2}(f(z) - \overline{f(\bar{z})})$.]

31 Sia $D := \{|z| < 1\}$, e sia $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una funzione continua ed olomorfa su D che assume valori reali sulla circonferenza ∂D. Dimostrare che f è costante. Dedurne che due funzioni continue su $\overline{D}$ ed olomorfe su D le cui parti reali coincidono su ∂D differiscono solo per una costante. [*Utilizzare l'esercizio 27.*]

32* L'esercizio 31 mostra che una funzione olomorfa sul disco è determinata a meno di costanti dalla restrizione della sua parte reale alla frontiera. Vale in effetti un enunciato più preciso: presa f come nell'esercizio 31, indichiamo con a_n i coefficienti della serie di Taylor di f in 0 e poniamo $g(\theta) := \operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$; si ha allora che

$$\operatorname{Re} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta \quad \text{per } n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Traccia. Si verifica direttamente che la (1) vale per $f(z) := z^n$ con $n \geq 0$, e per linearità vale anche per ogni f polinomio. Con opportuni argomenti di densità si estende la (1) ad ogni f olomorfa su un aperto che contiene $\overline{D}$, e poi ad ogni f continua su $\overline{D}$ ed olomorfa su D.

33* Sia $D := \{|z| < 1\}$, e sia $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e C^1 a tratti tale che $g(0) = g(2\pi)$. Dimostrare che esiste una funzione $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, olomorfa in D, tale che

$$f(e^{i\theta}) = g(\theta) \quad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Traccia. Scrivere g come serie di Fourier complessa

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} ,$$

osservare che $c_{-n} = \bar{c}_n$ per ogni n, e porre

$$f(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 c_n z^n . \tag{1}$$

Il punto più delicato è verificare che la serie di potenze in (1) converge totalmente su $\overline{D}$.

34 Sia $D := \{|z| < 1\}$, e sia $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e olomorfa su D tale che $|f|$ è costante su ∂D. Far vedere che f si annulla in almeno un punto di D oppure è costante. [*Supponendo $f \neq 0$, applicare il principio del massimo modulo a $f(z)$ e $1/f(z)$.*]

35 Sia $D_r := \{|z| < r\}$, e sia $f : D_r \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Dimostrare che se esistono delle costanti positive C, p, ρ tali che $|f(z)| \leq C|z|^p$ per $|z| \leq \rho$ allora 0 è una singolarità rimovibile oppure un polo di ordine $\leq p$. [*Utilizzare le stime di Cauchy per i coefficienti della serie di Laurent di f in* 0.]

36 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe, scrivere lo sviluppo di Laurent in 0:

$$\text{a) } e^{-1/z^2}; \quad \text{b) } \frac{\sin z}{z^4}; \quad \text{c) } \frac{1}{z^2 + z^4}; \quad \text{d) } e^z + e^{1/z}; \quad \text{e) } \sin(1 + 1/z); \quad \text{f) } \frac{e^z}{z^2}.$$

37 Sia f una funzione della forma $f(z) = g(z)\,(z - z_0)^{-1}$ con g funzione olomorfa tale che $g(z_0) \neq 0$. Verificare che z_0 è un polo semplice con residuo $\mathrm{Res}(f, z_0) = g(z_0)$.

38 Sia f una funzione della forma $f(z) = g(z)\,(z - z_0)^{-(k+1)}$ con g funzione olomorfa tale che $g(z_0) \neq 0$. Verificare che z_0 è un polo di ordine $k + 1$ con residuo

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(z_0)$$

dove $g^{(k)}$ indica la derivata complessa k-esima di g.

39 Sia f una funzione della forma $f(z) = 1/g(z)$ con g funzione olomorfa con uno zero semplice in z_0. Verificare che z_0 è un polo semplice con residuo $\mathrm{Res}(f, z_0) = 1/g'(z_0)$.

40 Sia f una funzione della forma $f(z) = h(z)/g(z)$ con g funzione olomorfa con uno zero semplice in z_0 ed h funzione olomorfa non nulla in z_0. Verificare che z_0 è un polo semplice con residuo $\mathrm{Res}(f, z_0) = h(z_0)/g'(z_0)$.

41 Sia $f(z) = 1/g(z)$ con g funzione olomorfa con uno zero doppio in z_0.
a) Dimostrare che z_0 è un polo di ordine 2;
b) esprimere $\mathrm{Res}(f, z_0)$ in base alle derivate di g in z_0.

42 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe, individuare i punti singolari *isolati*, calcolare il residuo e dire se si tratta di singolarità rimovibili, singolarità essenziali, oppure poli (ed in tal caso specificarne l'ordine):

a) $\dfrac{1}{z^2-4}$; b) $\dfrac{2z+1}{z^2+1}$; c) $\dfrac{\sin z}{z-i}$; d) $\dfrac{\log(1+z)}{z^n}$; e) $\dfrac{e^z}{1+z}$; f) $\dfrac{1}{\sin z}$; g) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$;

h) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$; i) $\dfrac{1}{z^n+1}$; l) $e^{1/z}$; m) $\dfrac{1}{e^z-1}$; n) $\dfrac{1}{\log z}$; o) $\dfrac{\sin z}{z}$; p) $\dfrac{\sin z}{z-z^2}$.

43 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe, scrivere lo sviluppo di Laurent nel punto all'infinito (usando quindi la variabile $z' = 1/z$):

a) e^{-z}; b) $e^z + e^{1/z}$; c) $z^2 + z^4$; d) $\dfrac{1}{z^2+z^4}$; e) $\dfrac{\cos z}{z^2}$; f) $\log(1+1/z^2)$.

44 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe calcolare il residuo all'infinito e dire se il punto all'infinito (∞) è una singolarità rimovibile, una singolarità essenziale oppure un polo (ed in tal caso specificarne l'ordine):

a) e^{-z}; b) $e^z + e^{1/z}$; c) $\dfrac{z^2}{1+z}$; d) $\dfrac{z}{1+z^2}$; e) $\dfrac{e^z+e^{-z}}{z}$; f) $e^{z(z+1)}$.

45 Utilizzare il metodo dei residui per calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^4}$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx$ con $a \in \mathbb{R}$; c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{2+3x^2+x^4}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$; e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$ con $n > 1$ intero;

g)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^a}\,dx$ con $a > 1$ razionale; h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$; i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x^2)}$;

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\sin^2\theta}\,d\theta$; m) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(x+8)}$; n) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+9x^3+8}$.

46* Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

[*Calcolare l'integrale di* $e^{iz}/\sqrt{z}\,dz$ *sul bordo dell'insieme* Q_r *dato dall'intersezione del cerchio* $\{|z| < r\}$ *con il primo quadrante e ricordare che* $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$.]

47 In ciascuno dei seguenti casi utilizzare il teorema di Rouché per calcolare il numero di zeri e di poli della funzione $f(z)$ contenuti nell'aperto A (contati con la loro molteplicità):

a) $f(z) := z^3 + 3z + 1$ e $A := \{|z| < 2\}$;

b) $f(z) := z^5 + 3z + 1$ e $A := \{|z| > 1\}$;

c) $f(z) := z^4 + 1 + 4/z$ e $A := \{|z| < 2\}$;

d) $f(z) := z^4 + 1 + 4/z$ e $A := \{1/2 < |z| < 2\}$;

e) $f(z) := \dfrac{z^8 - 5z^2 - 1}{2z^4 - z}$ e $A := \{|z| < 1\}$;

48* Data la funzione

$$f(z) := 3\cos z + \frac{1}{1+z^2}\ ,$$

dimostrare che:

a) f ha infiniti zeri nella striscia $A := \{-\frac{1}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{1}{2}\}$;

b) tutti gli zeri di f tranne 2 sono tutti contenuti in A;
c) detto $N(r)$ il numero di zeri di f con valore assoluto $\leq r$ allora $N(r) \sim \frac{2}{\pi} r$ per $r \to \infty$.
Traccia. Per ogni intero $k \geq 1$ si ponga

$$A_k := (-2\pi k, 2\pi k) \times \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) , \quad B_k := (-2\pi k, 2\pi k) \times \big((-k, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, k)\big) ,$$

e si utilizzi quindi il teorema di Rouché per far vedere che il rettangolo A_k contiene esattamente $4k$ zeri di f, mentre B_k ne contiene 2.