Versione: 20 marzo 2008

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari

Raccolta di esercizi per il corso di

Matematica e Statistica (corso C)

a.a. 2007/08

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Matematica e Statistica C (laurea triennale in Scienze Biologiche Molecolari) nell'a.a. 2007/08. Gli esercizi sono divisi in "fogli" corrispondenti grosso modo ad argomenti distinti.

Programma del corso.

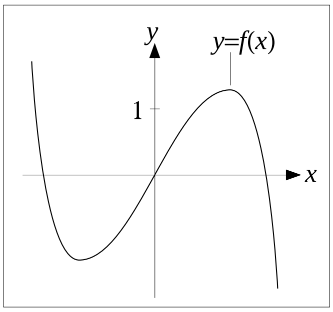
Gli argomenti appena accennati o non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. Funzioni, grafici, numeri
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio, immagine, funzione inversa. Funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni. Rappresentazione grafica di un insieme di dati.
2. Elementi di probabilità e statistica descrittiva
   - 2.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Coefficienti binomiali. Fattoriale. Applicazione alla risoluzione di alcuni problemi di probabilità elementare.
   - 2.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito. Eventi indipendenti e probabilità condizionata. Formula di Bayes. Esempi classici di modelli probabilistici (lancio di due dadi, lancio di n monete, etc.).
   - 2.3 Variabili aleatorie. Valore atteso e varianza. Indipendenza e covarianza. Valore atteso e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie (indipendenti e non). Media campionaria e versione debole del teorema dei grandi numeri.
   - 2.4 Distribuzione di Bernoulli, distribuzione binomiale e distribuzione geometrica.
   - 2.5 Media e varianza di un insieme finito di dati. Medie pesate. Relazione tra la media e la media di un campione casuale.
3. Calcolo differenziale ed integrale
   - 3.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Regole per il calcolo delle derivate. Derivate delle funzioni elementari. Studio dei grafici di funzioni.
   - 3.2 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponeziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccoli). Sviluppo di Taylor di una funzione. Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari. Parte principale di un infinito e di un infinitesimo.
   - 3.3 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive (integrale indefinito) delle funzioni elementari; regole per il calcolo delle primitive. *Calcolo di aree e volumi.*
   - 3.4 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo e del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.
   - 3.5 Esempi di probabilità su spazi di eventi elementari infiniti (intervalli). Distribuzione di probabilità. Definizione di valore atteso e varianza di una variabile aleatoria. *Distribuzione uniforme, esponenziale e normale (o Gaussiana).*

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^x - 1)$.

2. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{\log x}$.

3. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
   a) $f(x) = 0$;
   b) $f(x) = 1$;
   c) $f(x) \leq 0$;
   d) $f(x) \geq 1$.



4. Risolvere l'equazione $\sqrt{x} = x - 2$.

5. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+1}{1-x} \geq x$.

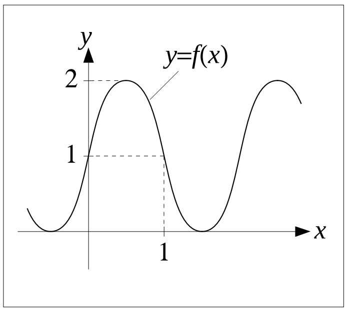
6. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

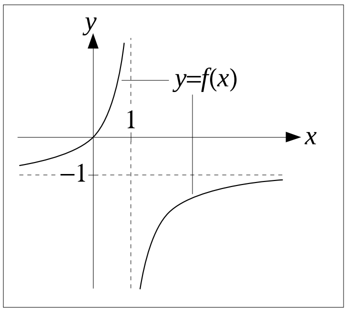
$$\text{a) } e^{-x}\ , \quad \text{b) } \frac{1}{(x+1)^2}\ , \quad \text{c) } \frac{1}{x^3} + 1\ , \quad \text{d) } 2 + 2\sin(x)\ , \quad \text{e) } \frac{1}{x-2} - 1\ ,$$

$$\text{f) } \cos(\pi - x)\ , \quad \text{g) } \frac{\pi}{2} - \arctan x\ , \quad \text{h) } \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}\ , \quad \text{i) } \tan(x/\pi)\ .$$

$$\text{l) } \log(2x)\ , \quad \text{m) } \log\frac{1}{x^2}\ , \quad \text{n) } |\sin x|\ , \quad \text{o) } 2 + \log|x|\ , \quad \text{p) } \big|\log|x|\big|\ .$$

7. Trovare delle formule per le funzioni date nelle fugure sottostanti.

a) 

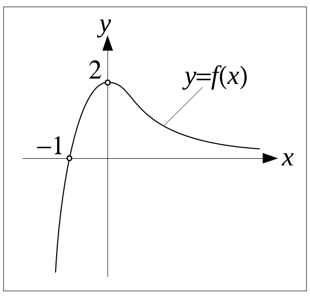
b) 

8. Risolvere la disequazione $e^{x(x-1)} \geq 1$.

9. Risolvere la disequazione $\log(3x) \geq 1$.

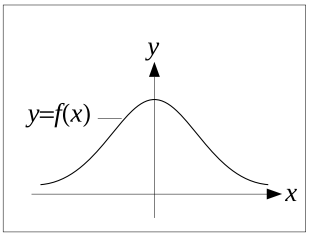
10. Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \geq \pi/4$.

11. Sia $f(x)$ la funzione data nella figura accanto. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:
    a) $f(-x)$;
    b) $-f(-x)$;



c) $f(x+1)$;
d) $2 - f(x)$;
e) $f(-x) - 2$;
f) $|f(x)|$;
g) $f(|x|)$.

12. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
a) $f(x) = x$;
b) $f(x) \geq x$;
c) $f(x) \geq -x$;
d) $f(x) \geq x^2$.



13. a) Trovare le soluzioni dell'equazione $|\tan x| = 1$ comprese tra 0 e π;
b) trovare le soluzioni della stessa equazione comprese tra $-\pi$ e π.

14. Trovare le soluzioni della disequazione $2\sin(2x) \geq 1$ comprese tra 0 e 2π.

15. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 - x^2 \leq y \leq x^2 - 1$.

16. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \leq e^x$ e $y \leq e^{-x}$.

17. a) Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.
b) Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $|x + y| \leq 1$ e $|x - y| \leq 1$.

18. a) Esprimere la somma

$$\log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \log\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

come logaritmo di un unico numero razioalne (cioè una frazione di numeri interi).
b) Provare a fare la stessa cosa per la somma

$$\log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) .$$

19. Trovare, senza usare la calcolatrice, il numero intero che meglio approssima $\log_{10}(75.486)$ per difetto (in altre parole, la parte intera di questo logaritmo).

20. Trovare le formule che permettono di ottenere $\sin x$ e $\cos x$ a partire da $\tan x$.

1. Si prende un numero intero a caso tra 10 e 99 (inclusi).
   a) Qual è la probabilità che la prima cifra sia pari?
   b) Qual è la probabilità che la seconda cifra sia pari?
   b) Qual è la probabilità che almeno una delle due cifre sia pari?

2. Vi viene proposto il seguente gioco: si lanciano due monete, e se vengono due teste voi vincete n euro, altrimenti ne perdete 1. Per quali valori di n vi conviene giocare?

3. a) Quante sigle diverse di 4 caratteri posso scrivere usando solo le lettere A, B, C, D, E, F?
   b) Delle sigle di cui al punto a), quante sono quelle che non contengono due lettere uguali?
   c) Delle sigle di cui al punto a), quante sono quelle che non contengono due lettere uguali consecutive?

4. a) Quanti sono i numeri interi di 4 cifre di cui la prima non è zero?
   b) Tra questi, quanti sono quelli che non contengono due cifre uguali consecutive?

5. a) Quanti sono i numeri interi di 3 cifre distinte scelte tra $1, 2, \ldots, 7$?
   b) Tra questi, quanti sono quelli le cui cifre sono in ordine crescente (da sinistra a destra)?
   [*Si noti che prese tre cifre distinte c'è un solo modo di disporle in ordine crescente.*]

6. Si considerino tutte le possibili sigle date da due lettere (prese dall'alfabeto italiano di 21 lettere) seguite da quattro cifre (scelte tra $1, 2, \ldots, 9$).
   a) Quante sono tali sigle?
   b) Tra tali sigle, quante sono quelle con lettere tutte diverse?
   c) Tra tali sigle, quante sono quelle con lettere e cifre tutte diverse?
   d) Quante sono le sigle che contengono due lettere e quattro cifre (ma non necessariamente disposte in quest'ordine)?

7. a) Quanti sono i numeri interi n compresi tra 1 e 999 tali che ogni cifra è strettamente maggiore della successiva (leggendo da sinistra a destra)?
   b) Come sopra, supponendo però che n sia compreso tra 1 e 671.

8. Ho 9 palline numerate da uno a nove, e voglio suddividerle in tre gruppi, il primo di 4 palline, il secondo di 3 ed il terzo di 2. In quanti modi diversi posso farlo?

9. Siano dati tre numeri interi positivi n_1, n_2, n_3, e si ponga $n := n_1 + n_2 + n_3$. In quanti modi diversi posso ripartire n oggetti distinti in tre gruppi, in modo che il primo gruppo ne contenga n_2, il secondo n_2 ed il terzo n_3? [*Si proceda scegliendo prima n_1 oggetti tra gli n dati e poi scegliendo n_2 oggetti tra gli $n - n_1$ rimasti, contando in quanti modi diversi può essere fatta ciascuna operazione.*]

10. a) Quanti sono i numeri interi di 8 cifre in cui il due appare 3 volte e il sette appare 5 volte?
    b) Quanti sono i numeri interi di 8 cifre in cui il due appare 3 volte,il sette appare 3 volte e l'otto appare 2 volte?

11. Dato n intero positivo, si considerino tutte le sequenze di n lettere prese tra A, B, C, D, E

che soddisfano le seguenti condizioni: le lettere A e B sono sempre seguite da B, C o D, mentre C, D ed E sono seguite da A, D o E. Quante sono tali sequenze?

12. Calcolare la probabilità che, tirando due dadi, la somma sia: a) 3; b) 6; c) 10 o più.

13. Si estraggono a caso 5 numeri distinti compresi tra 1 e 90 (estrazione del lotto). Calcolare la probabilità che
    a) i numeri siano $1, 2, 3, 4, 5$ (non necessariamente in questo ordine);
    b) si ottenga una data altra cinquina, ad esempio $21, 28, 47, 62, 86$;
    c) tra i cinque numeri ci siano $1, 2, 3$;
    d) tra i cinque numeri ci sia 1.

14. Si estraggono 4 carte a caso da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità di avere
    a) i quattro assi (poker d'assi);
    b) quattro carte dello stesso valore (poker);
    c) quattro carte dello dello stesso seme (colore);
    d) due carte di un valore e due di un altro (doppia coppia).

15. Si estraggono 3 carte da un mazzo di 52.
    a) Qual è la probabilità che escano il due, il tre ed il cinque di cuori in quest'ordine preciso?
    b) Qual è la probabilità che escano il due, il tre ed il cinque di cuori anche se non in quest'ordine?
    c) Qual è la probabilità che escano un due, un tre ed un cinque in quest'ordine?

16. Si prende a caso una sigla di 3 lettere dell'alfabeto italiano.
    a) Qual è la probabilità che contenga solo vocali?
    b) Qual è la probabilità che contenga solo consonanti?

17. Si estraggono due numeri a caso da un sacchetto che contiene tutti gli interi da 1 a 90.
    a) Qual è la probabilità che i due numeri siano consecutivi?
    b) Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia il doppio del primo?
    c) Qual è la probabilità che i due numeri siano uno il doppio dell'altro?

18. Calcolare la probabilità che lanciando 9 monete si verifichino i seguenti eventi:
    a) escono esattamente 6 teste;
    b) escono almeno 8 teste;
    c) escono almeno 2 teste;
    d) escono almeno 5 teste.

1. In un sacchetto sono contenute 10 biglie bianche, 6 rosse e 4 nere, e se ne estrae una a caso. Indicando con $X := \{B, R, N\}$ l'insieme dei possibili risultati (eventi elementari), qual è la probabilità di ciascuno di essi?

2. Un sacchetto contiene 5 biglie nere ed un certo numero di biglie bianche. A esperimenti fatti si sa che estraendo a caso due biglie la probabilità che almeno una sia bianca è $P = 9/11$. Quante sono le biglie bianche?

3. In un sacchetto sono contenute 8 biglie bianche e 4 nere.
   a) Se ne estraggono due a caso: qual è la probabilità che siano entrambe bianche?
   b) Se ne estraggono due a caso: qual è la probabilità che siano una nera ed una bianca?
   c) Se ne estraggono tre a caso: qual è la probabilità che siano tutte bianche?
   d) Se ne estraggono tre a caso: qual è la probabilità che siano due nere ed una bianca?

4. Dato l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ e due numeri reali p, q, si ponga $P(a) = P(b) := p$ e $P(c) = P(d) = P(e) := q$.
   a) Se $p = 1/4$, per quali q la funzione P definisce una distribuzione di probabilità su X?
   b) Per quali valori di p e q la funzione P definisce una distribuzione di probabilità su X?

5. Sia X l'insieme dei numeri interi compresi tra 1 e 24 (inclusi). Su X è data una distribuzione di probabilità P tale che $P(x) = a$ per ogni x pari e $P(x) = b$ per ogni x dispari.
   a) Se $a := 1/36$, quanto vale b?
   b) Calcolare la probabilità dei seguenti eventi: b1) x è dispari; b2) x è pari; b3) x è compreso tra 1 e 6; b4) x è un multiplo di 4; b5) x è un multiplo di 6.
   c) Per ogni possibile coppia di eventi elencati al punto b) dire se sono indipendenti o meno.

6. Inventare una situazione "reale" in cui lo spazio degli eventi elementari e la relativa distribuzione di probabilità sono quelli descritti nell'esercizio precedente.

7. Sia X uno spazio di eventi elementari finito dotato di una distribuzione di probabilità P, e siano A e B due eventi non elementari (cioè due sottoinsiemi di X).
   a) In quali casi A è indipendente da se stesso?
   b) Sapendo che B è contenuto in A, in quali casi A e B sono indipendenti?

8. Sia X uno spazio di eventi elementari finito dotato della distribuzione di probabilità P, e siano A, B due eventi non elementari; al solito, indichiamo con A^c l'evento complementare di A e cioè $A^c := \{x \in X : \ x \notin A\}$. Dimostrare che:
   a) $P(A^c) = 1 - P(A)$;
   b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
   b) se A e B sono disgiunti allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
   d) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$;
   e) se A e B sono indipendenti allora anche A^c e B^c sono indipendenti.

9. Si estrae a caso una sigla composte da 5 lettere dell'alfabeto italiano (21 lettere).
   a) Calcolare la probabilità dei seguenti eventi: a1) la sigla inizia con AA; a2) la sigla termina per Z; a3) la sigla non contiene vocali; a4) la sigla contiene lettere tutte diverse.
   b) Per ogni coppia di eventi elencati al punto a) dire se sono indipendenti o meno.

10. Su tre facce di un dado perfettamente cubico è riportata la lettera a, su due la lettera b e sull'ultima la lettera c. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i lanci di questo dado?

11. Si lanciano due dadi uguali a quello descritto nell'esercizio precedente. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i risultati di tali lanci?

12. Si lanciano un dado ed una moneta. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i risultati di tali lanci?

13. Dati due insiemi X e Y con n ed m elementi rispettivamente, indichiamo con Z l'insieme di tutte le coppie (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$ (tale insieme viene chiamato *prodotto di X e Y* ed indicato di solito con il simbolo $X \times Y$). Su Z consideriamo la probabilità uniforme. Presi $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, indichiamo con A l'insieme delle coppie $(x, y) \in Z$ per cui $x = x_0$, e con B l'insieme delle coppie per cui $y = y_0$.
a) Calcolare la probabilità di ogni evento elementare (x, y);
b) calcolare la probabilità di A e di B e dimostrare che A e B sono indipendenti.

14. Dati X e Y spazi di eventi elementari con distribuzioni di probabilità P_X e P_Y, rispettivamente, prendiamo Z, x_0, y_0, A e B come nell'esercizio precedente. Per ogni $(x, y) \in Z$ poniamo $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$. Dimostrare i seguenti enunciati:
a) P è una distribuzione di probabilità su Z;
b) gli eventi A e B sono indipendenti per ogni scelta di x_0 e y_0.

15. Dati X, Y spazi di eventi elementari, prendiamo Z, x_0, y_0, A e B come nell'esercizio precedente. Sia data inoltre una distribuzione di probabilità P su Z tale che A e B sono indipendenti per ogni scelta di x_0 e y_0. Dimostrare che allora esistono P_X e P_Y distribuzioni di probabilità su X e Y tali che $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$ per ogni $x \in X, y \in Y$.

16. Da due statistiche fatta sugli abitanti adulti del centro e della periferia della città di K risulta che tra i primi il 50% possiede un'auto, mentre tra i secondi tale percentuale sale al 90%. Si sa inoltre che gli abitanti della periferia sono 5 volte quelli del centro. Del signor R si sa solo che possiede un'auto; qual è allora la probabilità che viva in centro? [*Usare la formula di Bayes.*]

17. Si costruiscono due dadi uguali a forma di parallelepipedo con base quadrata ed altezza leggermente diversa dal lato di base (quindi non sono cubi). Sulle due basi quadrate di ciascun dado ci sono i numeri $5, 6$ e sulle altre quattro facce i numeri $1, 2, 3, 4$. Tirando i due dadi più volte, si osserva che la probabilità di ottenere una somma pari a 10 o più è esattamente $3/10$. Qual è la probabilità di ottenere 6 lanciando un solo dado?

Foglio di esercizi n. 4 – 22/12/2007

1. Dare esempi concreti di variabili aleatorie dipendenti e indipendenti.

2. Si consideri l'insieme di eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ con la distribuzione di probabilità $P(a) = P(b) := 1/4$ e $P(c) = P(d) = P(e) := 1/6$. Su X è data la variabile aleatoria Y definita da $Y(a) = Y(b) = Y(c) := -1$ e $Y(d) = Y(e) := 3$.
   a) Quali sono i valori assunti da Y?
   b) Qual è la distribuzione di probabilità associata ai valori di Y?
   c) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

3. Si consideri l'insieme di eventi elementari $X := \{1, 2, 3, 4\}$ con la distribuzione di probabilità uniforme. Su X sono definite come segue le variabili aleatorie Y e Z: $Y(1) = Y(2) := 1$ e $Y(3) = Y(4) := -1$; $Z(1) := 2$, $Z(2) := a$, $Z(3) := -2$ e $Z(4) := -a$, dove a è un numero reale dato.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza sia di Y che di Z.
   b) Calcolare la covarianza di Y e Z.
   c) Dire per quali valori di a le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti.

4. La variabile aleatoria Y assume i valori 1 e 0 con probabilità p e $1 - p$ rispettivamente, dove p è un numero reale compreso tra 0 e 1. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y. [*Si tratta di una variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro p; il conto è già stato svolto a lezione.*]

5. Dare un esempio concreto di variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro $p = 1/3$.

6. La variabile aleatoria Y assume i valori $1, 2, \dots, 6$ con probabilità uniforme $1/6$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

7. La variabile aleatoria Y assume i valori $1, 2, \dots, n$ con probabilità uniforme $1/n$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y. [*Usare le seguenti formule:* $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ e $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.]

8. Ho un programma di computer che estrae a caso una sigla di tre lettere seguendo una procedura a me non nota. Dopo aver fatto un'ampia statistica, scopro che la prima lettera della sigla è A nel 20% delle estrazioni, la seconda lettera è A nel 40% delle estrazioni, e infine la terza lettera è A nel 10% delle estrazioni.
   a) Calcolare la probabilità p che venga estratta la sigla AAA, supponendo che il programma scelga le tre lettere in modo indipendente.
   b) Se le tre lettere della sigla non vengano scelte in modo indipendente, cosa si può dire di certo su p? più precisamente, qual è il valore massimo che p può assumere, e quale il minimo?

9. Il signor A e il signor B scommettono sul lancio di due monete: se vengono due teste allora A dà un euro a B, se vengono due croci B dà un euro ad A, e nei restanti casi è patta. Sia Y la variabile aleatoria data dal guadagno di A in una partita, e Z la variabile aleatoria data da quanto viene vinto da a o da B in una partita.
   a) Determinare i valori e le distribuzioni di probabilità di Y e di Z.
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y e di Z.

c) Dimostrare che $\mathrm{Cov}(Y; Z) = 0$.
d) Dimostrare che Y e Z non sono variabili aleatorie indipendenti.

10. Si estraggono due biglie da un sacchetto che ne contiene dieci, numerate da 1 a 10. Indichiamo con Y il valore della prima biglia estratta e con Z quello della seconda.
a) Determinare l'insieme degli eventi elementari e la distribuzione di probabilità che descrive il risultato di questa estrazione.
b) Determinare i valori assunti da Y e Z e le corrispondenti distribuzioni di probabilità.
c) Dimostrare che Y e Z non sono indipendenti.

11. Sia Y la variabile aleatoria data dalla somma dei numeri che si ottengono lanciando 10 dadi. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y. [*Scrivere Y come somma di variabili aleatorie indipendenti più semplici.*]

12. Sia Y la variabile aleatoria data dalla percentuale di teste che si ottengono lanciando 100 monete.
a) Quali sono i valori assunti da Y?
b) qual è la distribuzione di probabilità associata ai valori di Y?
c) calcolare il valore atteso e la varianza di Y;
d) dare una maggiorazione della probabilità che le teste siano meno del 10%.

13. Si ricordi che una variabile aleatoria Y ha una legge binomiale di parametri n e p se i valori assunti da Y sono i numeri interi $0, 1, \ldots, n$, e ciascun k è assunto con probabilità

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

Dimostrare che questa distribuzione di probabilità è uguale a quella della somma di n variabili aleatorie indipendenti, ciascuna delle quali ha una legge di Bernoulli di parametro p. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y. [*Esercizio parzialmente svolto a lezione.*]

14. Dare un esempio concreto di variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $p = 1/6$ e $k = 10$.

15. Due giocatori A e B tirano tre monete, stabilendo che se vengono tre teste A riceve 3 euro da B, se vengono due teste A riceve 1 euro da B e negli altri casi A paga 2 euro a B. Qual è la vincita media di A?

16. In un gioco a premi, il concorrente vince il premio scritto all'interno di un bussolotto estratto a caso da una scatola. Questa scatola contiene 90 bussolotti con una vincita di 1 euro, 9 con una vincita di 10 euro, ed 1 con una vincita di 800 euro. Qual è la vincita media?

17. In una variante del gioco descritto nell'esercizio precedente, al concorrente viene data la possibilità, sapendo il risultato dell'estrazione, di accettare quanto ha vinto oppure di chiedere la ripetizione dell'estrazione. A questo punto sono possibili diverse strategie: i) non chiedere mai la ripetizione, ii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 euro, iii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 o di 10 euro.

a) Calcolare la vincita media per ciascuna strategia e stabilire quella ottimale.

b) Cambia qualcosa se nel fare la seconda estrazione non viene reinserito nella scatola il bussolotto estratto in precedenza?

18. Due giocatori A e B estraggono a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 5 nere, stabilendo che se viene nera allora A riceve 2 euro da B mentre se viene bianca B riceve 1 euro da A.
    a) Qual è la vincita media di A?
    b) Qual è la vincita media di A se si fanno due estrazioni invece di una, e prima della seconda estrazione si rimette nel sacchetto la biglia estratta in precedenza?
    c) Qual è la vincita media di A se si fanno due estrazioni e non si rimette nel sacchetto la biglia estratta?

19. Su quattro facce di un dado è scritta la lettera a, mentre sulle due rimanenti è scritta la lettera b. Fissato un intero positivo n, la variabile aleatoria Y_n indica quante a sono ottenute lanciando il dado n volte. Far vedere che Y ha una legge binomiale di parametri $p = 2/3$ e n. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y_n per ogni intero n.

20. Sia Y la variabile aleatoria data dalla somma dei numeri ottenuti lanciando due dadi.
    a) Quali sono i valori assunti da Y?
    b) Qual è la distribuzione di probabilità associata ai valori di Y?
    c) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

21. Il signor A ed il signor B fanno questa scommessa: lanciano 100 dadi, e per ogni 6 che esce il signor A riceve 5 euro dal signor B, mentre in tutti gli altri casi dà 1 euro al signor B. Indichiamo con Y il guadagno finale del signor A.
    a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
    b) Sapendo che prima di giocare il signor A ha in tasca 80 euro, far vedere che la probabilità che egli non sia in grado di dare quanto dovuto al signor B è inferiore al 10%.

22. Ho un programma di computer che estrae un numero intero a caso tra 1 e 10, ciascuno con una diversa probabilità, che non è nota. Mi interessa scoprire qual è la probabilità p che esca il numero tre. Faccio 1000 esperimenti, e verifico che il numero tre è uscito nel 30% dei casi; è quindi ragionevole aspettarsi che il valore di p sia vicino al 30%, anche se non necessariamente uguale. Quant'è alta la probabilità che p sia compreso tra il 25% e il 35%?

FOGLIO DI ESERCIZI N. 5 – 23/12/2007

1. Sia Y una variabile aleatoria. Dimostrare i seguenti enunciati:
a) $\mathrm{Var}(Y) = 0$ se e solo se Y è costante, o meglio assume un certo valore con probabilità 1.
b) Y è indipendente da se stessa se e solo se è costante (come sopra).

2. Sia X uno spazio di eventi elementari con distribuzione di probabilità P. Sono inoltre date due variabili aleatorie Y e Z definite su X ed un numero reale c. Dimostrare i seguenti enunciati (già spiegati a lezione):
a) $\mathrm{E}(Y + c) = \mathrm{E}(Y) + c$, $\mathrm{E}(cY) = c\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{E}(Y + Z) = \mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z)$;
b) $\mathrm{Var}(Y + c) = \mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(cY) = c^2\mathrm{Var}(Y)$;
c) $\mathrm{Cov}(Y; Z) = \mathrm{E}(Y \cdot Z) - \mathrm{E}(Y) \cdot \mathrm{E}(Z)$;
d) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y; Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$;
e) $\mathrm{Var}(Y + Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) - 2\mathrm{Cov}(Y; Z)$.

3. Sono date Y e Z variabili aleatorie *indipendenti* sullo spazio X dotato della probabilità P. Dimostrare i seguenti enunciati (già spiegati a lezione):
a) $\mathrm{E}(Y \cdot Z) = \mathrm{E}(Y) \cdot \mathrm{E}(Z)$;
b) $\mathrm{Cov}(Y \cdot Z) = 0$;
c) $\mathrm{Var}(Y + Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z)$.

4. Date due variabili aleatorie indipendenti Y e Z ed una funzione f qualsiasi, dimostrare che:
a) Y^2 e Z^2 sono indipendenti;
b) $f(Y)$ e $f(Z)$ sono indipendenti;
c) se $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Z) = 0$ allora $\mathrm{Var}(YZ) = \mathrm{Var}(Y) \cdot \mathrm{Var}(Z)$.

5. Sia X un insieme di eventi elementari dotato della distribuzione di probabilità P, ed A un evento con $P(A) > 0$. Consideriamo la seguente distribuzione di probabilità:

$$P_A(x) := \begin{cases} P(x)/P(A) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

a) Verificare che P_A è effettivamente una distribuzione di probabilità.
b) Dimostrare che per ogni evento B si ha $P_A(B) = P(B|A)$.
[P_A *è detta distribuzione di probabilità condizionata dall'evento* A.]

6. Sia X uno spazio degli eventi elementari con la probabilità P, Y una variabile aleatoria su X ed A un evento con $P(A) > 0$. Il valore atteso condizionato di Y sapendo A, indicato con $\mathrm{E}(Y|A)$, è quello che si ottiene sostituendo la probabilità P con la distribuzione di probabilità condizionata P_A data nell'esercizio precedente. Dimostrare che

$$\mathrm{E}(Y) = P(A) \cdot \mathrm{E}(Y|A) + P(A^c) \cdot \mathrm{E}(Y|A^c) .$$

7. Abbiamo una moneta asimmetrica per cui la probabilità che esca testa è p, mentre quella che esca croce è $1 - p$. Lanciamo questa moneta una volta dopo l'altra finché non esce testa, e indichiamo con Y la variabile aleatoria uguale al numero di lanci fatto. Dimostrare che Y ha una distribuzione geometrica di parametro p.

[*Esercizio svolto a lezione. Si ricordi che una variabile aleatoria Y ha una distribuzione geometrica di parametro p se i valori assunti da Y sono i numeri interi positivi $k = 1, 2, \ldots$, e ciascun k è assunto con probabilità $P(k) = p(1-p)^{k-1}$.*]

8. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria Y definita nell'esercizio precedente. [*Suggerimento: detto A l'evento "esce testa al primo lancio", far vedere che* $\mathrm{E}(Y|A) = 1$ *e* $\mathrm{E}(Y|A^c) = 1 + \mathrm{E}(Y)$*; usare ora l'equazione* $\mathrm{E}(Y) = P(A) \cdot \mathrm{E}(Y|A) + P(A^c) \cdot \mathrm{E}(Y|A^c)$ *per ottenere* $\mathrm{E}(Y)$.]

9. Nel gioco del lotto, ad ogni "estrazione" si estraggono a caso cinque biglie da un contenitore che ne contiene novanta, numerate da 1 a 90.
   a) Calcolare la probabilità che una delle cinque biglie estratte sia il 71.
   b) Calcolare la probabilità che in 100 estrazioni consecutive non esca mai il numero 71.
   c) Sapendo che il numero 71 non è uscito nelle ultime 99 estrazioni, qual è la probabilità che non esca neanche alla prossima?
   d) Chiamo "ritardo" il numero di estrazioni che intercorrono tra due successive uscite del 71. Qual'è il valor medio del ritardo?

10. Si consideri lo spazio di eventi elementari X dato da tutte le coppie di numeri interi compresi tra 1 e 6 (lo stesso che si usa per schematizzare il lancio di due dadi) e dotato di una distribuzione di probabilità P non specificata. Sia Y la variabile aleatoria uguale al primo dei due numeri, e Z la variabile aleatoria uguale al secondo, e supponiamo di sapere che Y e Z sono indipendenti ed assumono i valori compresi tra 1 e 6 con probabilità uniforme. Far vedere che allora P deve necessariamente essere la probabilità uniforme su X.

11. Far vedere che quanto detto nell'esercizio precedente non vale se non si assume che Y e Z sono indipendenti.

12. Sia X l'insieme dei tutti i numeri di tre cifre tali che ogni cifra è 1 o 2 e la somma è pari. Su X consideriamo la probabilità uniforme P. Sia quindi A_1 l'evento "la prima cifra è 1", A_2 l'evento "la seconda cifra è 1", ed A_3 l'evento "la terza cifra è 1".
    a) Dimostrare che gli eventi A_1, A_2, A_3 sono a due a due indipendenti.
    b) Verificare che tuttavia $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ non è uguale a $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$.
    [*Questo è un esempio di tre eventi a due a due indipendenti ma non complessivamente indipendenti.*]

13. Si prendano X e P come nell'esercizio precedente, e si indichi quindi con Y_1 la variabile aleatoria uguale alla prima cifra del numero estratto, con Y_2 quella uguale alla seconda cifra, e con Y_3 quella uguale alla terza.
    a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y_1, Y_2, Y_3.
    b) Dimostrare che Y_1, Y_2, Y_3 sono a due a due indipendenti.
    b) Verificare che la varianza di $Y_1 + Y_2 + Y_3$ non è la somma delle varianze.
    [*Questo è un esempio di tre variabili aleatorie a due a due indipendenti ma non complessivamente indipendenti.*]

1. Determinare il dominio di definizione e la derivata delle seguenti funzioni:

   a) $e^{2x} + x\sin x$, b) $\sqrt{x+1}$, c) $\sqrt[3]{2x}$, d) $\dfrac{1}{(1+x)^4}$, e) $x^3 \log x$,

   f) $\arctan(x^2)$, g) $\sin^3 x$, h) $\log(\cos x)$, i) $\sin(2\pi x^2)$, l) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,

   m) $\dfrac{1}{\sqrt{\log x}}$, n) $\log(\log x)$, o) $\dfrac{\log(\cos x)}{\sin x}$, p) $(\sin x^2)^2$, q) $e^{\sin(\log x)}$.

2. Fatte le dovute semplificazioni, calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

   a) $\sqrt{x^4}$, b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$, c) $\log(e^x)$, d) $\sin^2(1/x) + \cos^2(1/x)$, e) $\sin(\arcsin(2x))$,

   f) $e^{2\log x}$, g) $\log(x^2 + 2x^4) - \log(x + 2x^3)$, h) $2^{1-2x}4^x$, i) $\log\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$.

3. a) Dimostrare che $x^x = e^{x\log x}$.
   b) Calcolare la derivata di x^x.
   c) Calcolare la derivata di $(x^x)^x$.

4. Per le seguenti funzioni, studiare il segno della derivata, trovare i punti in cui questa si annulla e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo locale, o altro:

   a) $x^2 - 2x + 3$, b) $\log(x^2 + 1)$, c) e^{-x^2} , d) $x^4 + 2x^2 + 3$.

5. Per ciascuna delle funzioni date nell'esercizio precedente, calcolare i limiti quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$ e disegnarne sommariamente il grafico.

6. Determinare i seguenti limiti:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^2)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-3x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(1/x^3)$.

   [*Attenzione: non serve nulla di più di quello che è già noto sulle funzioni elementari.*]

7. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono crescenti, decrescenti, o altro:

   a) e^{1-2x} , b) $x^2(1+x)$, c) $\arctan(1-x^3)$, d) $\log(1/x)$, e) $e^{\sin x}$.

8. Per ciascuna delle prime tre funzioni date nell'esercizio precedente, calcolare i limiti quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$ e disegnarne sommariamente il grafico.

9. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1+x^4}$.

10. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ nel punto di ascissa 0.

11. Trovare il numero a per cui la retta tangente al grafico della funzione $y = e^x$ nel punto di ascissa a passa anche per l'origine.

12. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x) = x^3(4-3x)$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 2$.

13. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x) = x^3 - 12x$ relativamente all'intervallo $-3 \le x \le 5$.

14. a) Disegnare il grafico della funzione $y = x^3 - 3x - 1$ relativamente all'intervallo $-2 \le x \le 3$.
    b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x - 1 = 0$ comprese tra -2 e 3.
    c) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x - 1 = a$ comprese tra -2 e 3.

15. a) Per ogni numero reale $a \ge 0$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ nel punto di ascissa a, e quindi calcolare l'area del triangolo delimitato da tale retta e dagli assi cartesiani.
    b) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere massima.
    c) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere minima.

16. Tra tutti i triangoli rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima.

17. Tra tutti i triangoli rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo.

18. a) Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 2$ relativamente alla semiretta $x \ge 0$.
    a) Dimostrare che $x^3 - 3x + 2 \ge 0$ per ogni numero reale $x \ge 0$.
    b) Dimostrare che $y^3 + 2z^3 \ge 3yz^2$ per ogni coppia di numeri reali positivi y, z. [*Suggerimento: dividere la disuguaglianza da dimostrare per y^3 e usare il punto b).*]

FOGLIO DI ESERCIZI N. 7 – 22/2/2008

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} e^{2x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{3x}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to0^+} 1/x^3\ ;\quad d)\ \lim_{x\to0^-} 1/x^3\ ;\quad e)\ \lim_{x\to0} 1/x^4\ ;$$

$$f)\ \lim_{x\to0} \cos(\pi e^x)\ ;\quad g)\ \lim_{x\to\pi} \tan(x/4)\ ;\quad h)\ \lim_{x\to0^+} \log^2 x\ ;\quad i)\ \lim_{x\to0^+} \log(\sqrt{x})\ ;$$

$$l)\ \lim_{x\to+\infty} e^{1/x}\ ;\quad m)\ \lim_{x\to0^+} \arctan(1/x)\ ;\quad n)\ \lim_{x\to0^-} \arctan(1/x)\ ;\quad o)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\log x$$

.

2. Dire se esistono i seguenti limiti, ed in caso affermativo calcolarli:

$$a)\ \lim_{x\to0} 1/x\ ;\quad b)\ \lim_{x\to0} x^{-2}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty} \sin x\ ;\quad d)\ \lim_{x\to-\infty} e^{\cos x}\ ;\quad e)\ \lim_{x\to\pi/2} \tan x\ ;$$

$$f)\ \lim_{x\to0} \frac{1}{\sin x}\ ;\quad g)\ \lim_{x\to0} e^{1/x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to1} \arctan(1/x^2)\ ;\quad i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\log x}\ ;$$

$$l)\ \lim_{x\to0} \sin(\log x)\ ;\quad m)\ \lim_{x\to+\infty} \cos(1/\log x)\ ;\quad n)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}\ ;\quad o)\ \lim_{x\to0^+} e^{\sqrt{x}}\ .$$

3. Calcolare i seguenti limiti utilizzando la regola di de L'Hôpital:

$$a)\ \lim_{x\to0} \frac{x^2}{\sin x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{\log x}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin(x^3)}{x^2}\ ;$$

$$e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+2x^2+5}{x^4+3x+1}\ ;\ f)\ \lim_{x\to0} \frac{e^{x^3}-1}{\sin(x^3)}\ ;\quad g)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{\log^3 x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2/x)}{\tan(3/x)}\ .$$

$$i)\ \lim_{x\to+\infty} x(\pi-2\arctan x)\ ;\ l)\ \lim_{x\to0^+} x\log x\ ;\quad m)\ \lim_{x\to-\infty} x^2e^x\ .$$

4. Calcolare, al variare di $a\in\mathbb{R}$, i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to0^+} x^a\log x\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} x^ae^x\ ;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty} e^{ax}\log x\ ;\quad d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{\log\log x}\ .$$

5. Calcolare i seguenti limiti utilizzando il fatto che per $x\to0$ si ha $\sin x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\log(1+x)\sim x$, e $1-\cos x\sim x^2/2$:

$$a)\ \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin^5 x}{x^5}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to0} \frac{e^{(4x^4)}-1}{\cos(2x^2)-1}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to0} \frac{x}{\log(1+\sin x)}\ .$$

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x)\ ;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty} 2^{-x}\log x\ ;$$

$$d)\ \lim_{x\to0^+} \log(2x)-\log x\ ;\quad e)\ \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\ ;\quad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{x^{10}-1}\ ;$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{1+3^x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{1+3^x}\ ;\quad i)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x/\log x}\ ;\quad l)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log\log x}\ .$$

7. a) Partendo dalla definizione, trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 di $(1+x)^{1/2}$;
b) trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 di $(1+x)^a$ per ogni $a\in\mathbb{R}$.

8. Partendo dagli sviluppi di Taylor fatti a lezione (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $1/(1+x)$, $\log(1+x)$), calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 (in 0) delle seguenti funzioni:
$$\text{a) } \frac{1}{1-x}\ ; \quad \text{b) } e^{2x}\ ; \quad \text{c) } \frac{1}{1+x^2}\ ; \quad \text{d) } e^{-x^2}\ ; \quad \text{e) } x^3\sin x\ ; \quad \text{f) } \log(1-2x^2)\ .$$

9. a) Calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine n di $\dfrac{1}{1+x^2}$;
   b) utilizzando il fatto che la derivata di $\arctan x$ è $1/(1+x^2)$, calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine n di $\arctan x$;
   c) usare quanto fatto al punto b) per mostrare che $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \cdots$

10. Calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 6 delle seguenti funzioni:
$$\text{a) } \tan(x^2)\ ; \quad \text{b) } \sqrt{1+x^3}\ ; \quad \text{c) } (x-\sin x)^2\ ; \quad \text{d) } \log(\cos(x^3))\ ; \quad \text{e) } e^{x^3} - e^{-x^3}\ .$$

11. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
$$\text{a) } e^{2x}-1\ ; \quad \text{b) } e^x + e^{-x} - 2\ ; \quad \text{c) } \sin(x^4) - x^4\ ; \quad \text{d) } \sqrt{1+x^2} - 1\ ;$$
$$\text{e) } \frac{1}{\sin x}\ ; \quad \text{f) } \frac{1}{\cos x} - 1\ ; \quad \text{g) } \frac{x^2}{2-x^2}\ ; \quad \text{h) } \sqrt{1+\frac{1}{x}}\ ; \quad \text{i) } (x-\sin x)^3\ .$$

12. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:
$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2+2}\ ; \quad \text{b) } x\,\sin(1/x^2)\ ; \quad \text{c) } \sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\ .$$
[*Suggerimento: applicare il cambio di variabile $x = 1/t$ e poi determinare con i metodi già visti la parte principale per $t \to 0$ della funzione così ottenuta.*]

13. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
[*Mettere in evidenza $\sqrt{x}$ e poi ricondursi alla funzione nel punto c) dell'esercizio precedente.*]

14. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.
[*Scrivere $f(x)$ come un'unica frazione e calcolare separatamente le parti principali di numeratore e denominatore.*]

15. Calcolare i seguenti limiti determinando le parti principali delle funzioni considerate:
$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x\,\sin x}{1-\cos x}\ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to +0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to +\infty} x\left[1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]\ .$$

FOGLIO DI ESERCIZI N. 8 – VERSIONE AGGIORNATA, 11/3/2008

1. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la tabella delle primitive elementari:
$$\text{a)} \int_0^2 e^x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_1^e \log x\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi \sin x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}\ .$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando un opportuno cambio di variabile:
$$\text{a)} \int_0^2 e^{-x}\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin(ax)\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^1 (1+3x)^{-1/2}\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+4x^2}\ ;$$
$$\text{e)} \int_{-1}^1 x\,e^{1+ax^2}\,dx\ ; \quad \text{f)} \int_0^1 \frac{\log^4 x}{x}\,dx\ ; \quad \text{g)} \int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^a dx\ ; \quad \text{h)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$$
.

   In questo esercizio, come in quelli che seguono, a indica un generico numero reale positivo.

3. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la formula di integrazione per parti:
$$\text{a)} \int_0^1 xe^x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_1^e (1+x^a)\log x\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi x^2\sin x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_1^e \frac{\log x}{x^a}\,dx\ .$$

4. Calcolare le seguenti primitive utilizzando un opportuno cambio di variabile:
$$\text{a)} \int e^{3x}\,dx\ ; \quad \text{b)} \int \sqrt{1-x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int \frac{x}{1+x^4}\,dx\ ; \quad \text{d)} \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\ ;$$
$$\text{e)} \int \frac{1}{1+4x^2}\,dx\ ; \quad \text{f)} \int x\sqrt{1-x^2}\,dx\ ; \quad \text{g)} \int \cos^a x\,\sin x\,dx\ .$$

5. Calcolare le seguenti primitive utilizzando la formula di integrazione per parti:
$$\text{a)} \int \log^2 x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int xe^{-2x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int x^2\cos x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int e^x\sin x\,dx.$$

6. Calcolare le seguenti primitive:
$$\text{a)} \int \log(x^a)\,dx\ ; \quad \text{b)} \int 3x^2+e^{2x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int x\sin(2x)\,dx\ ; \quad \text{d)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx\ .$$

7. Calcolare i seguenti integrali definiti:
$$\text{a)} \int_0^2 \log x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x}\ ; \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ ; \quad \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\ ; \quad \text{e)} \int_1^\infty x^{-a}\,dx\ .$$

8. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$.
   [*Usare l'identità* $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, *oppure scrivere* $\cos^2 x$ *come* $1 - \sin x \cdot \sin x$ *ed integrare il secondo termine per parti.*]

9. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. [*Usare il cambio di variabile* $x = \sin t$.]

10. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$.

[*Scrivere* $\sin^3 x$ *come* $\sin x(1-\cos^2 x)$ *ed usare il cambio di variabile* $t=\cos x$.]

11. Disegnare la figura piana A delimitata dai grafici delle funzioni $y=x^2-1$ e $y=1-x^2$ e calcolarne l'area.

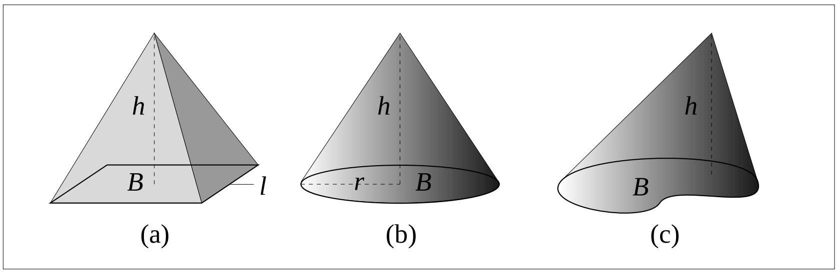
12. Disegnare la figura piana A data dai punti (x,y) tali che $|y|\le e^x$ e $x\le 0$, e calcolarne l'area.

13. Disegnare la figura piana A data dai punti (x,y) tali che $1-\cos x\le y\le \cos x$ e $0\le x\le 2\pi$, e calcolarne l'area.

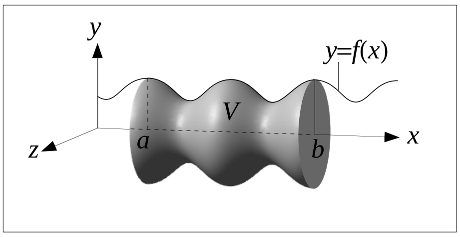
14. a) Sia V una piramide retta con base quadrata B di lato l ed altezza h (disegno (a) nella figura sottostante). *Dimostrare* che il volume di V è dato dalla nota formula

$$\mathrm{Vol}(V)=\frac{1}{3}\,\mathrm{Area}(B)\cdot h\ . \qquad (1)$$

b) Dimostrare che la formula (1) vale anche per un cono retto (disegno (b)).
c) Dimostrare che la (1) vale anche per un cono con base non circolare (disegno (c)).



14 . Sia f una funzione positiva, e siano a,b numeri reali con $a<b$. Sia V il solido delimitato dalla superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare il grafico $y=f(x)$ attorno all'asse x, e dai piani perpendicolari all'asse delle x passanti per il punto di ascissa a ed il punto di ascissa b (si veda la figura accanto).



a) Dimostrare che il volume di V è dato dalla formula

$$\mathrm{Vol}(V)=\pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx\ . \qquad (2)$$

b) Calcolare esplicitamente il volume di V nel caso in cui $f(x):=2+\cos x$, $a:=0$, $b:=2\pi$.
c) Usare la formula (2) per calcolare il volume della sfera di raggio r.
d) Usare la formula (2) per calcolare il volume del cono retto di altezza h e raggio di base r.

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$a)\ \dot{y} = \frac{t}{y}\ ;\quad b)\ \dot{y} = y^2 + 1\ ;\quad c)\ \dot{y} = e^{t+y}\ ;\quad d)\ \dot{y} = y\cos t\ ;\quad e)\ \dot{y} = t^2y^2\ .$$

2. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

3. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, scrivere l'equazione caratteristica, risolverla, e quindi determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$a)\ \dot{y} + 2y = 0\ ;\quad b)\ \dot{y} - 3y = 0\ ;\quad c)\ \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0\ ;\quad d)\ \ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0\ ;$$

$$e)\ \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0\ ;\quad f)\ \ddot{y} + 9y = 0\ ;\quad g)\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0\ ;\quad h)\ \ddot{y} - 4y = 0\ .$$

4. Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali che soddisfano le condizioni iniziali assegnate:

$$a)\ \begin{cases} \dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases};\quad c)\ \begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(0) = -2 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases};\quad d)\ \begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}.$$

5. Verificare direttamente che la funzione $y(t) := te^{2t}$ risolve l'equazione differenziale lineare omogenea

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0\ .$$

6. Verificare direttamente che la funzione $y(t) := e^t \sin t$ risolve l'equazione differenziale lineare omogenea

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0\ .$$

7. Trovare i valori del parametro a per cui la funzione $y(t) := t^a$ risolve l'equazione differenziale lineare omogenea (a coefficienti *non* costanti)

$$\ddot{y} - \frac{2\dot{y}}{t} + \frac{2y}{t^2} = 0\ .$$

8. Trovare i valori del parametro a per cui la funzione $y(t) := ae^t$ risolve l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 4e^t\ .$$

9. Trovare i valori del parametro a per cui la funzione $y(t) := ate^t$ risolve l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t\ .$$

10. Trovare i valori di a e b per cui la funzione $y(t) := a\cos(2t) + b\sin(2t)$ risolve l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\dot{y} + y = 2\sin(2t)\ .$$

11. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine

$$\dot{y} + 4y = 16t \tag{1}$$

a) Trovare una soluzione particolare di (1). [*Cercarla della forma* $y(t) = a + bt$.]
b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (1).
c) Trovare tutte le soluzioni della (1).
d) Trovare la soluzione della (1) che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

12. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine

$$\ddot{y} + y = e^{-2t} \tag{2}$$

a) Trovare una soluzione particolare di (2). [*Cercarla della forma* $y(t) = ae^{-2t}$.]
b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (2).
c) Trovare tutte le soluzioni della (2).
d) Trovare la soluzione della (2) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$.

13. Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin t \tag{3}$$

a) Trovare una soluzione particolare di (3). [*Cercarla della forma* $y(t) = a\sin t + b\cos t$.]
b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (3).
c) Trovare tutte le soluzioni della (3).

14. Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti non costanti

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{t} - \frac{4y}{t^2} = 0 \tag{4}$$

a) Trovare le soluzioni della (4) della forma $y(t) = t^a$ con $a \in \mathbb{R}$.
b) Trovare tutte le soluzioni della (4).

15. Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali che soddisfano le condizioni iniziali assegnate:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{y} = y\cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{y} - y = t \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{y} + 2y = 3 \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \quad \text{d)} \begin{cases} \dot{y} = 3t^2(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

FOGLIO DI ESERCIZI N. 10 – 15/3/2008

1. Dieci amici hanno le seguenti età (espresse in anni): 19, 20, 20, 18, 20, 22, 20, 25, 24, 22. Calcolare il valor medio e la varianza dell'età di queste persone.

2. Per un certo esame è previsto un voto compreso tra 0 e 4. Alla fine dell'anno, i risultati degli esami sono distribuiti come segue: 5 studenti hanno preso 0; 10 hanno preso 1; 15 hanno preso 2; 15 hanno preso 3; ed infine 5 hanno preso 4. Calcolare il valor medio e la varianza dei voti.

3. Viene fatta una statistica del numero di incidenti d'auto che vedono coinvolti durante l'anno gli abitanti di un paese. I risultati sono riassunti nella seguente tabella:
   nessun incidente: 94% degli abitanti;
   un incidente: 5% degli abitanti;
   due incidenti: 1% degli abitanti.
   Calcolare il valor medio e la varianza del numero di incidenti.

4. Gli unici dati a disposizione sull'età dei dipendenti di una certa ditta sono i seguenti:
   età inferiore a 20 anni: nessun dipendente;
   età compresa tra 21 e 30 anni: 2 dipendenti;
   età compresa tra 31 e 40 anni: 15 dipendenti;
   età compresa tra 41 e 50 anni: 19 dipendenti;
   età compresa tra 51 e 55 anni: 10 dipendenti;
   età compresa tra 56 e 60 anni: 9 dipendenti;
   età compresa tra 61 e 65 anni: 8 dipendenti;
   età superiore a 66 anni: nessun dipendente.
   a) Calcolare l'età media dei dipendenti supponendo che la distribuzione delle età all'interno di ciascun gruppo sia uniforme.
   b) Cosa si può dire di *certo* sull'età media dei dipendenti se non si fanno ipotesi sulla distribuzione delle età all'interno di ciascun gruppo?

5. Supponiamo di sapere che all'interno di una certa popolazione l'altezza degli uomini adulti misurata in cm ha una varianza pari a 100 (cm^2). Vogliamo determinare l'altezza media della popolazione partendo da un campione di n elementi scelto a caso. Quanto bisogna prendere grande n per far sì che l'altezza media del campione differisca da quella della popolazione per meno di 1 cm con probabilità superiore al 95%?

6. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := [0, 2]$. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono delle distribuzioni di probabilità su X:
   $$\text{a) } ax + b\ ; \quad \text{b) } ax^2 + b\ ; \quad \text{c) } ax^b\ ; \quad \text{d) } -\log(ax)\ ; \quad \text{e) } a - \log x.$$
   [*Si ricordi che una funzione $p(x)$ è una distribuzione di probabilità sull'intervallo X se è positiva su X e se il suo integrale su X è uguale a* 1.]

7. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := [0, +\infty)$. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono distribuzioni di probabilità su X:
   $$\text{a) } e^{ax}\ ; \quad \text{b) } be^{ax}\ ; \quad \text{c) } e^{ax} + b\ ; \quad \text{d) } ax^2 + b\ ; \quad \text{e) } \frac{a}{1+x^2}\ ; \quad \text{f) } \frac{a}{x^2}\ .$$

8. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := [a, b]$ con una distribuzione di probabilità

$p(x)$. Verificare che il valore atteso e la varianza soddisfano le seguenti proprietà già viste nel caso della probabilità discreta:
(a) $\mathrm{E}(Y+Z) = \mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z)$,
(b) $\mathrm{E}(cY) = c\mathrm{E}(Y)$,
(c) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$,
(d) $\mathrm{Var}(cY+d) = c^2\mathrm{Var}(Y)$,
per ogni scelta delle variabili aleatorie $Y(x)$ e $Z(x)$ e delle costanti c e d.

9. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := [0, +\infty)$. Per ciascuna delle seguenti distribuzioni di probabilità, calcolare la probabilità che un numero x estratto a casa sia compreso tra 0 e 1 (calcolare cioè la probabilità dell'evento $A := \{x : 0 \le x \le 1\}$).

$$\text{a) } 3e^{-3x}\ ; \quad \text{b) } \frac{1}{1+x}\ ; \quad \text{c) } xe^{-x}\ ; \quad \text{d) } \frac{2x}{1+x^2}\ ; \quad \text{e) } 2xe^{-2x}\ .$$

10. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := [1, 3]$ con la distribuzione di probabilità uniforme, cioè $p(x) := 1/2$. Calcolare il valor medio e la varianza delle seguenti variabili aleatorie:

$$\text{a) } x\ ; \quad \text{b) } 2x+1\ ; \quad \text{c) } x^2\ ; \quad \text{d) } 4x^2-3\ ; \quad \text{e) } e^x\ ; \quad \text{f) } \frac{2}{1+x}\ ; \quad \text{g) } \sin(\pi x)\ .$$

11. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := [0, +\infty)$ con la distribuzione di probabilità esponenziale di parametro λ, vale a dire $p_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ (λ è un numero reale positivo).
a) Verificare che $p_\lambda(x)$ è effettivamente una distribuzione di probabilità;
b) Calcolare la media e la varianza della variabile aleatoria $Y(x) := x$.
c) Calcolare la probabilità che un numero x preso a caso sia inferiore a 1.
d) Trovare a per cui un numero x preso a caso ha probabilità 1/2 di essere inferiore ad a.

12. Si consideri lo spazio degli eventi elementari $X := (-\infty, +\infty)$ con la distribuzione di probabilità Gaussiana di parametri m e σ, vale a dire

$$p_{m,\sigma}(x) := \frac{e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ .$$

Utilizzando come fatto noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, verificare che :
a) $p_{m,\sigma}(x)$ è effettivamente una distribuzione di probabilità;
b) la media e la varianza della variabile aleatoria $Y(x) := x$ sono rispettivamente a m e σ^2.