[versione: 23 dicembre 2005]

CORSO: **Teoria della Misura**
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA: **Matematica**
ANNO ACCADEMICO: **2005/06**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**

Programma del corso

NOZIONI DI BASE DI TEORIA DELLA MISURA

1. Misure positive numerabilmente additive su una σ-algebra. Proprietà di base. Integrale di una funzione misurabile. Proprietà degli integrali. Lemma di Fatou, teorema di Beppo Levi, teorema di convergenza dominata. Spazi L^p.
2. Misure su uno spazio topologico. Boreliani. Misure regolari. Teorema di Lusin.
3. Misure reali e vettoriali. Teorema di Radon-Nikodym. Teorema rappresentazione di Riesz.
4. Misure prodotto e teorema di Fubini.
5. Misure di Haar (misure invarianti) su gruppi topologici compatti.

TEOREMI DI DERIVAZIONE

6. Teoremi di ricoprimento di Besicovitch e di Vitali.
7. Applicazioni dei teoremi di ricoprimento: punti di densità di un insieme, punti di continuità approssimata di una funzione sommabile.

MISURE ESTERNE E COSTRUZIONE DI CARATHEODORY

8. Misure su uno spazio metrico, misurabilità secondo Caratheodory, misurabilità dei Boreliani, regolarità delle misure finite.
9. Costruzione di Caratheodory. Esempio: misura di Lebesgue.
10. Misura e dimensione di Hausdorff. Proprietà essenziali. Esempi.
11. Costruzione di insiemi di dimensione assegnata (frattali autosimili di Hutchinson).
12. Insiemi rettificabili e loro principali proprietà.

SPAZI DI SOBOLEV

13. Richiamo del concetto di distribuzione e di derivata distribuzionale.
14. Spazi di Sobolev in dimensione 1. Definizione. Immersione nelle funzioni continue. Differenziabilità in quasi ogni punto.
15. Motivazioni della teoria degli spazi di Sobolev: teoremi di esistenza dei minimi di problemi variazionali e delle soluzione di equazioni alle derivate parziali ellittiche (cenni).
16. Spazi di Sobolev in dimensione n. Definizione. Teoremi di estensione, di immersione (Sobolev-Rellich), di traccia. Disuguaglianze di Poincaré.
17. Convoluzione ed approssimazione delle funzioni di Sobolev tramite funzioni regolari.
18. Differenziabilità e differenziabilità approssimata delle funzioni di Sobolev.
19. Teoremi di tipo Lusin per funzioni di Sobolev.

Bibliografia

W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1974.
J. Lukeš, J. Malý: *Measure and Integral.* Matfyzpress, Prague 1994.
L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, Boca Raton, 1992.
W.P. Ziemer: *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag, New York 1989.
K.J. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, Cambridge 1985.