[versione: 1 giugno 2006]

CORSO: **Calcolo Differenziale e Integrazione**
CORSO DI LAUREA: **Matematica, primo livello**
ANNO ACCADEMICO: **2005/06**
LEZIONI: **Giovanni Alberti**
ESERCITAZIONI: **Maria Stella Gelli**

Alla fine di questi due corsi lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa del calcolo di derivate ed integrali per funzioni di più variabili reali, delle teoria delle equazioni differenziali ordinarie, con relative applicazioni, come pure delle tecniche di base per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari e dei sistemi di equazioni differenziali lineari. L'ultima parte del corso è dedicata a curve e superfici, definite sia in modo parametrico che intrinseco, e all'estensione del calcolo differenziale a questi oggetti. Nella lista che segue, gli argomenti in corsivo sono complementari.

Programma di Calcolo Differenziale

1. Successioni di punti nello spazio n-dimensionale. Convergenza delle successioni di Cauchy, Teorema di Bolzano-Weierstrass.
2. Insiemi aperti, chiusi, compatti, densi. Frontiera di un insieme. Funzioni di n variabili reali: definizione di limite e continuità, proprietà delle funzioni continue, esistenza di massimo e minimo su insiemi compatti. Funzioni a valori vettoriali (mappe).
3. Derivate parziali di una funzione di n variabili, gradiente. Differenziabilità e sviluppo di Taylor all'ordine 1. Teorema del differenziale totale. Derivate parziali seconde e matrice Hessiana, teorema di Schwartz, sviluppo di Taylor all'ordine 2. Mappe derivabili. Regole di calcolo delle derivate. *Sviluppo di Taylor all'ordine n.*
4. Massimi, minimi e punti critici. Forme quadratiche e segnatura. Condizioni necessarie e sufficienti di massimalità e minimalità locale.
5. *Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.*
6. Integrale secondo Riemann-Peano-Jordan di una funzione limitata (integrali multipli). Calcolo degli integrali: teorema di Fubini, formula di cambio di variabile. Integrabilità delle funzioni continue. Approssimazione dell'integrale con somme finite. Misura (secondo Riemann-Peano-Jordan) di un insieme limitato. L'integrale come volume del sottografico.
7. *Topologia in spazi metrici, completezza, equivalenze delle diverse definizioni di continuità. Connessione e connessione per archi.*
8. Norma del sup e completezza dello spazio delle funzioni continue. Completezza dello spazio delle funzioni di classe C^1. Serie di funzioni (convergenza uniforme e totale) e serie di potenze. Teorema delle contrazioni.
9. Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in ipotesi generali. Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine k. Lemma di Gronwall ed applicazioni: teorema di dipendenza continua dai dati iniziali, condizioni sufficienti per l'esistenza globale.
10. Classi di equazioni differenziali risolubili esplicitamente (equazioni a variabili separabili, di Eulero, di Bernoulli, ecc.).
11. Equazioni lineari di ordine k. Struttura dello spazio delle soluzioni. Soluzione esplicita delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Metodo di riduzione dell'ordine. Metodo della variazione delle costanti. Teorema degli annichilatori.

Programma di Integrazione

12. Sistemi di equazioni lineari del primo ordine. Esponenziale di matrici e metodi di calcolo.
13. Lemma di Gronwall e teoremi di confronto. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali non lineari.
14. *Completezza: Teorema di Baire ed applicazioni.*

15. *Compattezza e compattezza sequenziale. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
16. Curve in forma parametrica. Curve regolari: retta tangente ed orientazione. Definizione di lunghezza e formula per il calcolo. Lavoro di un campo di vettori lungo una curva. Teorema di Gauss-Green.
17. Superfici in forma parametrica in $\mathbb{R}^3$. Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Piano tangente ed orientazione. Calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori. Rotore di un campo di vettori. Teorema di Stokes.
18. Teorema di invertibilità locale per mappe da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$.
19. Curve e superfici come equazioni: struttura geometrica dell'insieme delle soluzioni di un sistema di k equazioni in n incognite: il teorema della funzione implicita (teorema del Dini).
20. Spazio tangente ad un insieme in un punto. Spazio tangente ad una superficie definita tramite equazioni. Massimi e minimi di una funzione differenziabile su una superficie definita tramite equazioni: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
21. I grafici di funzioni reali come esempi di ipersuperfici. Versore normale, piano tangente ed orientazione. Formula per il calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori.
22. Teorema della divergenza.
23. Potenziale di un campo di vettori. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del potenziale. Calcolo del potenziale.
24. *Derivazione dell'equazione del calore e dell'equazione delle onde in dimensione (spaziale) uguale a uno. Derivazione dell'equazione di Laplace in dimensione tre.*
25. Serie di Fourier reale e complessa per funzioni di una variabile 2π-periodiche. Teorema di convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe C^1.
26. *Soluzione dell'equazione del calore e delle onde in dimensione uno con condizioni di periodicità al bordo tramite serie di Fourier.*

Appelli ed esami. L'esame scritto (per entrambi i moduli) si compone di una prima parte con otto domande e/o problemi semplici a cui rispondere in un'ora senza giustificare le risposte, ed una seconda parte con tre o più problemi a cui dare una risposta articolata e motivata in dettaglio (due ore di tempo). È necessaria la sufficienza in entrambe le parti. Per ciascun modulo sono previsti due compitini (prove in itinere) che sostituiscono lo scritto. A partire dal terzo appello, gli scritti del primo e secondo modulo si svolgeranno in contemporanea, e gli studenti che intendono dare l'esame unificato per i due moduli dovranno fare la seconda parte di entrambe gli scritti (quattro ore a disposizione). In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli per ciascun modulo.

Bibliografia. Il corso non seguirà un testo preciso, e per ciascun argomento verrà indicato di volta in volta un testo di riferimento. Tra quelli esistenti, segnaliamo i seguenti:

E. Giusti: *Analisi Matematica II.* Boringhieri.
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: *Analisi Matematica 2.* Liguori.
G. Prodi: *Lezioni di Analisi Matematica, seconda parte.* ETS Pisa.
E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo: *Problemi scelti di Analisi Matematica II.* Liguori.
W. Rudin: *Principi di Analisi Matematica.* McGraw-Hill Italia.