Versione: 23 settembre 1999

Università degli Studi di Pisa
Corso di laurea in Informatica

Testi degli scritti d'esame di

Analisi Matematica II corso A
a.a. 1998/99

docente: Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica II del corso di laurea in Informatica, da me tenuto nell'anno accademico 1998/99. Questi scritti si compongono di due parti: una prima parte con sette o otto domande o problemi molto semplici a cui dare solo la risposta, ed una seconda parte con tre o più problemi a cui dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di circa un'ora per la prima parte, e di circa due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

Programma (per sommi capi)

Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie di grado qualunque: concetti base, teorema di esistenza ed unicità locale (interpretazione ed applicazioni immediate), unicità in grande, problemi di (non-)esistenza in grande, equazioni del primo ordine a variabili separabili, equazioni lineari del primo ordine, equazioni lineari omogenee di ordine n a coefficienti costanti, equazioni non omogenee (metodo della variazione delle costanti e metodo delle soluzioni simili), equazioni a coefficienti non costanti e metodo della riduzione dell'ordine.

Esponenziale di matrici (definizione per serie, proprietà di base), sistemi lineari del primo ordine a coefficienti costanti (e non), calcolo dell'esponenziale di matrici (esempi base, diagonalizzazione e scomposizione).

Funzioni di n variabili, nozione di continuità e differenziabilità (in termini di sviluppo di taylor del primo ordine e di esistenza del piano tangente al grafico), derivate parziali e differenziabilità, calcolo delle derivate parziali, punti di massimo, minimo, e punti critici, matrice Hessiana e sviluppo di Taylor al secondo ordine, natura dei punti critici di una forma quadratica, natura locale dei punti ciritici, problemi di massimo e minimo assoluti, funzioni vettoriali e derivata della funzione composta.

Integrali multipli (definizione euristica) e metodo di calcolo (teorema di Fubini), integrali impropri, cambio di variabile negli integrali multipli, coordinate polari. Applicazione al calcolo di volumi noti (cono, sfera, ellissoide).

Curve nel piano e nello spazio, superfici nello spazio (definizione astratta e per parametrizzazione), lunghezza ed area (definizione e calcolo), integrali di funzioni reali e campi di vettori su curve e superfici (definizione, calcolo, significato fisico), teorema della divergenza, teorema di Stokes, teoria del potenziale. Curve e superfici regolari definite da equazioni, massimi e minimi vincolati e metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Compitino di prova, 18 marzo 1999

I Parte.

1. Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale $y''' - y = 0$.
2. Scrivere nella forma piú semplice la soluzione di $y' = x^2(y+4)$ tale che $y(0) = 1$.
3. Sia data su $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$.
   a) Trovare i punti critici di f.
   b) Determinarne la natura.
4. Calcolare l'esponenziale e^{tA} quando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Si scriva il gradiente della funzione $f(x,y) = (xy)^{xy}$.
6. Daterminare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 (compreso) in $(0,0)$ della funzione
$$f(x,y) = \cos(x+y)\,\cos(x-y)\ .$$
7. Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una generica soluzione di un'equazione differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti omogenea. Dire quali dei seguenti comportamenti asintotici non sono sicuramente ammissibili per y:
   a) $y(x) \sim x^3$ per $x \to +\infty$;
   b) $y(x) \sim x^4 e^{-x}$ per $x \to -\infty$;
   c) $y(x) \sim e^x \log x$ per $x \to +\infty$;
   d) $y(x) \sim e^{-|x|}$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

II Parte.

1. Integrare l'equazione $y'' - y = x^2$ e determinare la soluzione soddisfacente le condizioni $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.
2. Trovare l'espressione generale dell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y^{(4)} - 2y = 0$ che sono limitate su tutto l'asse reale.
3. Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea
$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0\ , \quad x \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$
con $a_1(x)$ e $a_2(x)$ continue su tutto $\mathbb{R}$, e $a_2(x) < 0$ per ogni x.
Dimostrare che se $y(x)$ é una soluzione di $(*)$ in $\mathbb{R}$ che verifica le condizioni $y(a) = y(b) = 0$ dove $a < b$ sono fissati, allora necessariamente $y(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.
Si puó affermare che $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?
4. Siano dati due serbatoi, e si supponga che al tempo $t = 0$ il primo serbatoio contiene a litri di acqua in cui sono sciolti s grammi di sale, mentre il secondo serbatoio contiene b litri di acqua pura. Un rubinetto con portata di p litri al minuto immette acqua pura nel primo serbatoio. Contemporaneamente il contenuto del primo serbatoio viene fatto defluire nel secondo serbatoio al ritmo $2p$ litri al minuto, ed infine dal secondo serbatoio escono $2p$ litri al minuto di cui metà vione dispersa, e metà viene reimmessa nel primo serbatoio.
Si indichi rispettivamente con x e y la densità di sale nel primo e nel secondo serbatoio (in grammi per litro), e si scriva il problema di Cauchy che determina univocamente x e y al variare del tempo t. Si scriva esplicitamente la soluzione almeno nel caso $a = b$.

Primo compitino, 25 marzo 1999

I Parte, gruppo A.

1. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Scrivere nella forma piú semplice la soluzione di $y' = y^2x^2$ tale che $y(0) = 3$.
3. Scrivere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti (di ordine più basso possibile) che ammette come soluzione la funzione $y = x \sin x + \cos x$.
4. Dare la soluzione generale del sistema $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$.
5. Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x^4y^2$ sull'insieme D dei punti (x,y) tali che $1 \leq x \leq 2$, $|y| \leq 1/x$.
6. Scrivere il gradiente della funzione $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 6y$, trovare i punti critici, e determinarne la natura.
7. Esprimere la derivata della funzione composta $f(\log t, t^3)$ tramite le derivate parziali di f.
8. Sapendo che $x(t)$ indica la posizione all'istante t del punto materiale P (vincolato a muoversi sulla retta delle x), e che P è soggetto ad una forza che dipende solo dalla sua posizione, dire che tipo di equazione differenziale soddisfa x.

I Parte, gruppo B.

1. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2. Scrivere nella forma piú semplice la soluzione di $y' = y^2x^4$ tale che $y(0) = 5$.
3. Scrivere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti (di ordine più basso possibile) che ammette come soluzione la funzione $y = e^x - x\,e^{-x}$.
4. Dare la soluzione generale del sistema $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$.
5. Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x^2y^4$ sull'insieme D dei punti (x,y) tali che $1/2 \leq x \leq 1$, $|y| \leq 1/x$.
6. Scrivere il gradiente della funzione $f(x,y) = 12x - 12x^2y + y^3$, trovare i punti critici, e determinarne la natura.
7. Esprimere la derivata della funzione composta $f(t^2, e^t)$ tramite le derivate parziali di f.
8. Sapendo che $x(t)$ indica la posizione all'istante t del punto materiale P (vincolato a muoversi sulla retta delle x), e che P è soggetto ad una forza che dipende solo dalla sua posizione, dire che tipo di equazione differenziale soddisfa x.

II Parte, gruppo A.

1. a) Si trovino gli autovalori e gli autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) Si scriva A nella forma PDP^{-1} con D diagonale, e quindi si calcoli e^{tA} per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   c) Si scriva la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 & y_1(0) = 1 \\ y_2' = 2y_1 + -y_2 & y_2(0) = 0 \end{cases}.$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - y = \dfrac{1}{1-e^x}$.

3. Sia f una funzione tale che $f(x,y) = f(-x,-y)$ per ogni punto (x,y), e sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = f(x,y)\ .$$

Dimostrare che se $y(0) = 0$, allora la funzione y è dispari.

4. Sia A una matrice 3×3 con tutti gli autovalori uguali ad 1. Dimostrare che

$$e^{tA} = \frac{e^t}{2}(A^2 + I)$$

[*Suggerimento: si scomponga* A *come somma di* I e $A - I$, *e si utilizzi il fatto (da dimostrare) che* $(A-I)^3 = 0$.]

II PARTE, GRUPPO B.

1. a) Si trovino gli autovalori e gli autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Si scriva A nella forma PDP^{-1} con D diagonale, e quindi si calcoli e^{tA} per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   c) Si scriva la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 & \qquad y_1(0) = 0 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 & \qquad y_2(0) = 1 \end{cases}\ .$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

3. Sia f una funzione tale che $f(x,y) = f(-x,-y)$ per ogni punto (x,y), e sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = f(x,y)\ .$$

Dimostrare che se $y(0) = 0$, allora la funzione y è dispari.

4. Sia A una matrice 3×3 con tutti gli autovalori uguali ad -1. Dimostrare che

$$e^{tA} = \frac{e^{-t}}{2}(A^2 + 4A + 5)$$

[*Suggerimento: si scomponga* A *come somma di* $-I$ e $A + I$, *e si utilizzi il fatto (da dimostrare) che* $(A+I)^3 = 0$]

COMPITINO DI PROVA, 2 MAGGIO 1999

II PARTE.

1. Determinare i massimi ed i minimi assoluti e relativi della funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2 + 3y^2)$$

nel rettangolo (chiuso) $D = \{(x,y) : \ x^2 \leq \pi/2, \ y^2 \leq \pi/6\}$.

2. Sia $f(x,y)$ una funzione continua e non negativa definita su tutto $\mathbb{R}^2$, e sia γ una curva semplice e regolare parametrizzata da $x = x(t)$ e $y = y(t)$ per $t \in [a,b]$. Si consideri la superficie cilindrica nello spazio generata dalle rette parallele all'asse z che passano per la curva (direttrice) γ. Determinare l'espressione dell'area della porzione S di superficie che risulta compresa tra il piano xy e la superficie di equazione $z = f(x,y)$.
Si applichi la formula ottenuta al caso particolare in cui $f(x,y) = h$ (costante positiva), e la lunghezza di γ è uguale ad l.

3. Calcolare il lavoro fatto dal campo

$$F(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$$

lungo le circonferenze (orientate in senso antiorario) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ determinate rispettivamente dalle equazioni

$$x^2 + y^2 = 1 \ , \quad (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{16} \ , \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \ .$$

4. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica di centro l'origine e di raggio R che è interna al cilindro con asse parallelo all'asse z e di equazione $x^2 + y^2 - Rx = 0$.

5. Sia S la parte superiore della superficie conica di equazione $x^2 + y^2 = z^2$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2x$. Calcolare il valore dell'integrale superficiale

$$I = \iint_S \left(x^4 - y^4 + y^2z^2 - x^2z^2 + (1-x)\right) dS \ .$$

Secondo compitino, 6 maggio 1999

I Parte, gruppo A.

1. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione $y'' - y = 0$ che sono infinitesime in $+\infty$.
2. Scrivere l'esponenziale e^{tA} quando $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e determinare la soluzione di
$$\dot{y} = Ay \quad \text{con condizione iniziale} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $y' = 2xy$.
4. Sia data su $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$.
   a) Scriverne il gradiente e la matrice Hessiana.
   b) Trovare i punti critici e determinarne la natura.
5. Fare un disegno approssimativo dell'insieme D dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $x^2y^2 \leq 1$, e calcolare, al variare del parametro reale $a > 1$, l'integrale
$$\int_D x\, |y|^a dx\, dy \ .$$
6. Calcolare il volume del solido (di rotazione) dato dai punti (x, y, z) tali che $0 \leq z \leq 3$ e $x^2 + y^2 \leq z^2$.
7. Sia $f(x, y)$ una funzione sul rettangolo $[-1, 1] \times [-2, 2]$. Dire quali delle condizioni sottoelencate sono sufficienti a garantire che l'integrale di f è nullo:
   a) $f(x, y) = f(x, -y)$ per ogni x, y;
   b) $f(x, y) = -f(x, -y)$ per ogni x, y;
   c) $f(x, y) = -f(-x, -y)$ per ogni x, y.

I Parte, gruppo B.

1. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione $y'' - 4y = 0$ che sono infinitesime a $-\infty$.
2. Scrivere l'esponenziale e^{tA} quando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e determinare la soluzione di
$$\dot{y} = Ay \quad \text{con condizione iniziale} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $y' = 3x^2y$.
4. Sia data su $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4$.
   a) Scriverne il gradiente e la matrice Hessiana.
   b) Trovare i punti critici e determinarne la natura.
5. Fare un disegno approssimativo dell'insieme D dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $x^2y^2 \leq 1$, e calcolare, al variare del parametro reale $a < 2$, l'integrale
$$\frac{1}{2} \int_D x^a\, y^2 dx\, dy \ .$$

6. Calcolare il volume del solido (di rotazione) dato dai punti (x, y, z) tali che $0 \leq x \leq 1$ e $y^2 + z^2 \leq x^2$.

7. Sia $f(x, y)$ una funzione sul quadrato $[-1, 1]^2$. Dire quali delle condizioni sottoelencate sono sufficienti a garantire che l'integrale di f è nullo:
   a) $f(-x, y) = f(x, -y)$ per ogni x, y;
   b) $f(-x, y) = -f(x, y)$ per ogni x, y;
   c) $f(x, y) = f(-x, -y)$ per ogni x, y.

II PARTE, GRUPPO A.

1. Sia $f(x, y) = e^{x^4 - 4xy^2 + 2y^4}$. Si trovino i punti critici di f all'interno della striscia D dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq 2$, e se ne determini la natura. Si studi quindi il comportamento di f sul bordo di D, il comportamento di f "all'infinito", ed infine si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f su D.

2. Trovare tutte le funzioni u sul piano xy che sono radiali (cioè che, se scritte in coordinate polari, dipendono solo da ρ) e soddisfano l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ .$$

3. Calcolare l'area della superficie parametrizzata come segue:

$$\begin{cases} x = \cos u + (u - v) \sin u \\ y = \sin u - (u - v) \cos u \\ z = v \end{cases}$$

   dove $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq u$.

4. Sia D il solido di rotazione definito da tutti i punti (x, y, z) tali che $a \leq z \leq b$ e $x^2 + y^2 \leq f(z)$, dove f è una generica funzione positiva e derivabile sull'intervallo $[a, b]$ che vale 0 in a e b. Tracciare un disegno approssimativo di D, e trovare una formula per il volume di D e per l'area della sua superficie esterna.

ESERCIZIO DI RECUPERO:

5. Determinare la soluzione generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad y^{(4)} + 4y = 0 \ , \\ &\text{(b)} \quad y^{(4)} - y = x^2 e^x \ . \end{aligned}$$

II PARTE, GRUPPO B.

1. Sia $f(x, y) = e^{2x^4 + 4x^2 y + y^4}$. Si trovino i punti critici di f all'interno della striscia D dei punti (x, y) tali che $-2 \leq x \leq 0$, e se ne determini la natura. Si studi quindi il comportamento di f sul bordo di D, il comportamento di f "all'infinito", ed infine si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f su D.

2. Trovare tutte le funzioni u sul piano xy che sono radiali (cioè che, se scritte in coordinate polari, dipendono solo da ρ) e soddisfano l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ .$$

3. Calcolare l'area della superficie parametrizzata come segue:

$$\begin{cases} x = \cos u + (u - v)\sin u \\ y = v \\ z = \sin u - (u - v)\cos u \end{cases}$$

dove $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq u$.

4. Sia D il solido di rotazione definito da tutti i punti (x, y, z) tali che $a \leq z \leq b$ e $x^2+y^2 \leq f(z)$, dove f è una generica funzione positiva e derivabile sull'intervallo $[a, b]$ che vale 0 in a e b. Tracciare un disegno approssimativo di D, e trovare una formula per il volume di D e per l'area della sua superficie esterna.

ESERCIZIO DI RECUPERO:

5. Determinare la soluzione generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y^{(4)} + 4y = 0 \ , \\ \text{(b)} & y^{(4)} - y = xe^x \ . \end{array}$$

SCRITTO DEL PRIMO APPELLO, 4 GIUGNO 1999

I PARTE, GRUPPO A.

1. Scrivere la soluzione del problema di Chauchy $y' = 2(1+y^2)x$, $y(0) = 0$.
2. Dire per quali valori del parametro reale a l'equazione differenziale $y'' + ay' + (1+a^2)y = 0$ ammette soluzioni periodiche (diverse dalla soluzione banale).
3. Trovare il potenziale V del campo di vettori $F(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ e calcolare il lavoro fatto da F lungo il cammino parametrizzato da $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = \sin t$, dove $\pi/2 \le t \le \pi$.
4. Si calcoli il flusso del campo di vettori $F(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$ uscente dalla superficie della sfera di centro l'origine e raggio 1.
5. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = (t - \log t, 4\sqrt{t})$ con $1 \le t \le e$.
6. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 (compreso) nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = e^{x+y}\sin(x-y)$.
7. Scrivere l'enunciato del teorema di Stokes.

I PARTE, GRUPPO B.

1. Scrivere la soluzione del problema di Chauchy $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
2. Determinare le soluzioni dell'equazione a variabili separabili $y' = 2e^{-y}x$.
3. Trovare il potenziale V del campo di vettori $F(x,y) = (x^2 + y, x + y^2)$.
4. Si calcoli il flusso del campo di vettori $F(x,y,z) = (x^2 + y, y + \sin z, \cos x - z)$ uscente dalla superficie del cubo $[0,1]^3$.
5. Calcolare l'area dell'insieme dei punti (x,y) tali che $x \ge 1$, $y \ge 0$, $yx^2 \le 2$
6. Determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(1,1)$ alla curva di equazione $y^3 - xy^2 + x^3 = 1$.
7. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$ nel punto $(0,0)$.

I PARTE, GRUPPO C.

1. Scrivere la soluzione del problema di Chauchy $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
2. Determinare le soluzioni dell'equazione a variabili separabili $y' = 2yx$.
3. Trovare il potenziale V del campo di vettori $F(x,y) = (x^3 + y, x + y^3)$.
4. Si calcoli il flusso del campo di vettori $F(x,y,z) = (x + y^3, y^2 + z^2, x^3 - z)$ uscente dalla superficie del cubo $[0,1]^3$.
5. Calcolare l'area dell'insieme dei punti (x,y) tali che $x \ge 0$, $y \ge 1$, $y^2x \le 2$
6. Determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(-1,1)$ alla curva di equazione $y^3 - xy^2 + x^3 = 1$.
7. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = xy\cos(x^2 + y^2)$ nel punto $(0,0)$.

SCRITTO DEL PRIMO APPELLO, 4 GIUGNO 1999

II PARTE, GRUPPO A.

1. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, i punti di minima distanza della superficie di equazione $x^2 + 4y^2 - z = 0$ dal punto $(0, 0, a)$.

2. Dire se il campo di vettori

$$F(x,y) := \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

ammette potenziale nel semipiano $S := \{(x, y) : y > 0\}$, ed in caso affermativo calcolarlo. Cosa succede se invece di S si considera tutto il piano meno l'origine?

3. Sia $F(x, y)$ un campo radiale della forma $F = f(\rho)\mathbf{r}$, dove

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \frac{(x, y)}{\rho} \ .$$

Scrivere la divergenza di F. Generalizzare la formula precedente ad un campo radiale nello spazio (cioé $F = f(\rho)\mathbf{r}$ con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\mathbf{r} = (x, y, z)/\rho$.

ESERCIZIO DI RECUPERO

4. Calcolare

$$\int_V z \, dx \, dy \, dz$$

dove V è l'insiem dei punti (x, y, z) appartenenti alla sfera di centro l'origine e raggio 1 che soddisfano la disequazione $z \geq 1/2$. Fare un disegno approssimativo di V.

II PARTE, GRUPPO B.

1. Calcolare l'area di quella parte della superficie di equazione $z^2 - 2xy = 0$ contenuta nel primo ottante e limitata dai piani $y = 2$ e $x = 1$.

2. Dire se il campo di vettori

$$F(x,y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + 2x, 2x^2y + 2y^3 + 2y)$$

ammette potenziale nel piano (esclusa l'origine), ed in caso affermativo calcolarlo.
Utilizzare questo risultato per calcolare il lavoro fatto da F lungo il cammino parametrizzato da $x(t) = 1 + 2\cos t$, $y(t) = \sin t$ con $0 \leq t \leq \pi$.

3. Trovare l'espressione generale delle funzioni $f(x, y, z)$ definite su tutto $\mathbb{R}^3$ che soddisfano

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = z \ .$$

4. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y^{(4)} - y = \sin(2x)$ che sono limitate su tutto $\mathbb{R}$.

II Parte, gruppo C.

1. Calcolare l'area di quella parte della superficie di equazione $x^2 - 2yz = 0$ contenuta nel primo ottante e limitata dai piani $y = 1$ e $z = 4$.
2. Dire se il campo di vettori
$$F(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + 2x, x^2y^2 + y^4 + 2y)$$
ammette potenziale nel piano (esclusa l'origine), ed in caso affermativo calcolarlo. Utilizzare questo risultato per calcolare il lavoro fatto da F lungo il cammino parametrizzato da $x(t) = 1 + 2\cos t$, $y(t) = \sin t$ con $0 \leq t \leq \pi$.
3. Trovare l'espressione generale delle funzioni $f(x, y, z)$ definite su tutto $\mathbb{R}^3$ che soddisfano
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = z^2 \ .$$
4. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y^{(4)} - 16y = \sin(x)$ che sono limitate su tutto $\mathbb{R}$.

Scritto del secondo appello, 6 luglio 1999

I Parte.

1. Scrivere la formula della soluzione del problema di Chauchy

$$y' = Ay \quad , \quad y(0) = y_0$$

2. Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammette come soluzione la funzione $y = x(e^x + e^{-x})$.
3. Scrivere la matrice hessiana nel punto $(0,0,0)$ della funzione

$$f(x,y,z) = x^3 + (z+1)y^2 + x(x+y) - z^2$$

   e determinare la natura del punto critico $(0,0,0)$.
4. Determinare per quale valore del parametro $a > 0$ il campo di vettori $F(x,y) = (y^a, x^a)$ ammette potenziale su tutto il piano xy, ed in tal caso calcolarlo.
5. Sia C l'insieme dei punti della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ per cui $z \geq 1/2$. Fare un disegno approssimativo di C e darne una parametrizzazione.
6. Si consideri il cambio di variabile $x = u^2 v$, $y = uv^2$.
   a) Si scriva la funzione f da mettere nella formula $dx\,dy = f(u,v)\,du\,dv$.
   b) Si scriva la funzione g da mettere nella formula $du\,dv = g(x,y)\,dx\,dy$.
7. Scrivere l'enunciato del teorema della divergenza (nello spazio).

II Parte.

1. Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 4y = 4x$ il cui grafico passa per l'origine, ed ivi interseca perpendicolarmente una soluzione dell'equazione $y' = y^2 + 1$.
2. Calcolare il volume (quadrimensionale) della sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^4$.
3. Trovare i punti di massima e minima distanza dall'origine della curva di equazione $x^4 + x^2 + y^2 = 1$. Perché devono esistere detti punti? Questa equazione definisce una curva regolare?
4. a) Quali funzioni posso ottenere come divergenza di un campo di vettori nel piano?
   b) E se impongo che il campo di vettori sia nullo al di fuori del quadrato $[0,1]^2$?

Scritto del terzo appello, 2 settembre 1999

I Parte.

1. Scrivere la soluzione del problema di Chauchy
$$y''' - y' = 0 \ , \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \ .$$

2. Determinare la soluzione generale (per $x > 0$) dell'equazione
$$xy' + y = 3x^2 \ .$$

3. Sia data su $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4$. Scriverne il gradiente e la matrice Hessiana, trovare quindi i punti ciritici e determinarne (se possibile) la natura.

4. Fare un disegno approssimativo dell'insieme dei punti (x, y, z) dello che soddisfano $0 \leq z \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2$, e calcolarne il volume.

5. Si consideri il cambio di variabili $x = r^2 \sin\alpha$, $y = r^2 \cos\alpha$. Scrivere l'elemento d'area $dx\, dy$ in funzione di r ed α.

6. Sia P un polinomio di grado n che ammette m soluzioni reali positive distinte, ed $n - m$ soluzioni reali negative distinte, e si consideri lo spazio (vettoriale) V delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione omogenea associata $P(D)y = 0$ che tendono a 0 quanto $x \to +\infty$.
   a) In base alle informazioni date, é possibile determinare la dimensione di V?
   b) Cosa cambia se si rimuove l'assunto che le soluzioni di P siano distinte?

7. Sia F un campo vettoriale definito su tutto lo spazio. Dire quale condizione garantisce che F ammette un potenziale.

II Parte.

1. Calcolare e^{At} per $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare il volume dell'ellissoide determinato dalla disequazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$.
   [*Suggerimento: ricondursi, tramite un'opportuno cambio di variabile, ad una sfera.*]

3. Nel primo quadarante, si consideri la curva γ di equazione $(x^2 + y^2)^2 = y$, orientata, come al solito, in senso antiorario.
   a) Parametrizzare la curva γ e calcolare il lavoro L compiuto da $F(x, y) = (-y, x)$;
   b) dimostrare che L coincide con l'area della parte di piano racchiusa dalla curva γ;
   c) dimostrare che la conclusione del punto b) vale infatti per qualunque curva chiusa γ.

Scritto del quarto appello, 22 settembre 1999

I Parte.

1. A quale funzione converge la seguente serie di potenze?

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

2. Data un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, dire quale condizione (sulle soluzioni del polinomio caratteristico corrispondente) implica che tutte le soluzioni sono infinitesime in $+\infty$.

3. Scrivere la matrice Hessiana nel punto $(0,0,0)$ della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - z^2 + xy + y^2$$

e determinare la natura del punto critico $(0,0,0)$.

4. Scrivere la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

5. Si consideri il cambio di variabili $x = tu$, $y = t/u$ (con $t, u > 0$):
a) scrivere l'elemento d'area $dx\,dy$ in funzione di t ed u;
b) dire come si trasforma l'insieme C dei punti (x,y) tali che $xy \le 2$.

6. Scrivere il potenziale del campo di vettori

$$F(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

7. Enunciare il teorema della divergenza.

I Parte.

1. Sia consideri un recipiente (virtualmente illimitato) la cui parete è descritta, in coordinate cartesiane, da $x^2 + y^2 = f(z)$ con $z \ge 0$, dove f è una funzione positiva e crescente di z tale che $f(0) = 0$.
a) Fare un disegno approssimativo del recipiente per $f(z) = z^4$.
b) Supponendo che il recipiente sia riempito fino all'altezza h, calcolare il volume del liquido contenuto (per f generica e per $f(z) = z^4$).

2. Si consideri un recipiente definito nel precedente esercizio, e al variare del tempo t (misurato in secondi), sia $h(t)$ l'altezza (misurata in centimetri) dell'acqua in esso contenuta.
a) Tenendo conto che, in prima approssimazione, ad ogni istante evapora una quantità d'acqua proporzionale alla superficie esposta all'aria, scrivere l'equazione differenziale che governa il comportamento di $h(t)$.
b) Trovare le f per cui il volume decresce esponenzialmente nel tempo.

3. Sia f una funzione infinitamente derivabile della forma $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + g(x,y)$ dove $g(x,y) = o(x^2 + y^2)$ per $(x,y) \to (0,0)$. Dimostrare che qualunque sia g, $(0,0)$ è un punto critico di f, e che la sua natura non dipende da g.

Scritto del quinto appello, 10 gennaio 2000

I Parte.

1. Scrivere un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta come soluzione $y = \sin x + 2xe^{-x}$.
2. Determinare la soluzione dell'equazione $y' = 2y^2 x$ tale che $y(0) = 1$.
3. Trovare il potenziale del campo di vettori $F(x, y) = (3x^2y^3 + 2, 3x^3y^2 - 2)$.
4. Calcolare il flusso del campo di vettori $F(x, y, z) = (2xy + z^3 + yz, x^3 - y^2, z - 1)$ uscente dalla superficie del cubo $[0, 1]^3$.
5. a) Scrivere il gradiente e l'Hessiano di $f(x, y) = y^3 + x^2 - xy$,
   b) Trovare i punti critici di f e determinarne la natura.
6. Scrivere la formula risolutiva del problema di Chauchy $\dot{y} = Ay + b$, $y(0) = y_0$, dove y e b sono funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ ed A è una matrice $n \times n$.
8. Enunciare il teorema di cambio di variabile negli integrali doppi.

II Parte.

1. a) Calcolare (direttamente, cioè sanza fare uso del teorema della divergenza) il flusso uscente dalla sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 del campo di vettori
   $$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \ .$$
   b) Calcolare il flusso suddetto facendo uso del teorema della divergenza.
   c) Provate a spiegare l'incongruenza dei due risultati.
2. a) Tracciare un disegno del volume V delimitato dal paraboloide di rotazione di equazione $z = x^2 + y^2$ e dal piano di equazione $z = 2$.
   b) Calcolare l'integrale ddella funione z su V.
3. Si trovi il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y, z) = 2x + y - z$ sulla sfera di centro l'origine e raggio 1 (intesa come superficie).

Scritto del sesto appello, 4 febbraio 2000

I Parte.

1. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Calcolare e^{At} per $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Sia A è l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$, ed $x \leq y \leq x + x^{-3}$. Fare un disegno approssimativo di A e calcolare $\int_A 2y\, dy\, dx$.
4. Calcolare il lavoro fatto dalla forza $F(x, y) = (-y, x)$ lungo il cammino orientato γ parametrizzato da $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ con $t \in [0, \pi]$. Fare un disegno di γ.
5. Sia S la superficie di equazione $x + y^2 + z^3 = 1$. Determinare un vettore normale a detta superficie nel punto $(1, 1, -1)$. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in questo punto.
6. Calcolare il rotore del campo di vettori $F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
7. Scrivere la formula che dà l'area del grafico della funzione reale f definita sul dominio piano D.

II Parte.

1. Risolvere l'equazione lineare non omogenea $y'' - y = \sin(\omega t)$.
2. Dimostrare usando il teorema di Stokes che il lavoro compiuto dalla forza $F(x, y, z) = \big(3x^2 + y(z+1), 3y^2 + x(z+1), 3z^2 + xy\big)$ su un qualunque cammino chiuso è nullo. Dire se F Ammette potenziale, ed in caso calcolarlo.
3. Si trovino il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y, z) = 2x^2 + 4xy - y^2 - z^2$ sulla superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.