

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

# Il moto ondoso in prossimità della riva

20 luglio 2012

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Candidato

**Paolo Vigelli**

Relatore                    **Prof. Paolo Acquistapace**

Controrelatore        **Prof. Vladimir Georgiev**

ANNO ACCADEMICO 2011/2012



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ii</b>
<b>1 Nozioni generali</b>	<b>1</b>
1.1 Leggi di conservazione . . . . .	1
1.2 Flusso irrotazionale . . . . .	3
1.3 Flusso potenziale . . . . .	4
1.4 Condizioni al contorno . . . . .	5
1.5 Il problema delle onde superficiali . . . . .	6
1.6 Onde di piccola ampiezza . . . . .	6
1.7 La teoria “shallow water” . . . . .	8
<b>2 Il mare aperto</b>	<b>11</b>
2.1 Onde stazionarie . . . . .	11
2.2 Onde progressive . . . . .	15
<b>3 La spiaggia</b>	<b>17</b>
3.1 Il caso bidimensionale . . . . .	17
3.2 Rappresentazioni asintotiche . . . . .	30
3.3 Il caso tridimensionale generale . . . . .	34
<b>4 Il molo</b>	<b>43</b>
4.1 Profondità infinita . . . . .	43
4.2 Profondità finita . . . . .	50
<b>Appendice A Funzioni di Bessel</b>	<b>62</b>
<b>Appendice B La seconda stima asintotica</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>

# Introduzione

I primi studi sulle onde marine sono stati effettuati durante il diciannovesimo secolo da alcuni matematici francesi, come Lagrange, Cauchy e Poisson, e da altri fisici matematici inglesi, quali Airy, Stokes, Kelvin, Rayleigh e Lamb. In seguito, le soluzioni di molti problemi per onde superficiali sono state ottenute intorno alla metà del ventesimo secolo (vedi [9] e [15]). In questa tesi vengono proposti due problemi riguardanti il comportamento delle onde marine nell'avvicinarsi alla terraferma, che nel primo caso è rappresentata da una spiaggia, mentre nel secondo da un molo. Ciascuno di questi è ricondotto ad un problema differenziale con condizioni al contorno, che ha come equazione differenziale l'equazione di Laplace. Imponendo determinate condizioni in mare aperto, si ottengono le soluzioni esplicite, sfruttando tecniche che chiamano in causa la teoria elementare di analisi complessa e l'uso della trasformata di Fourier.

Il primo capitolo presenta la teoria di base relativa al moto ondoso. Si presuppone che il fluido sia ideale con flusso irrotazionale, e si ottiene che il potenziale delle velocità  $\Phi$  soddisfa l'equazione  $\Delta\Phi = 0$  e inoltre vale la legge di Bernoulli. Vengono introdotte le condizioni al contorno dovute alla presenza per la massa d'acqua di vincoli fissi (come il fondale o la spiaggia) o di vincoli mobili (la superficie). In seguito, viene enunciato il problema delle onde superficiali, e si osserva che basta considerare onde di piccola ampiezza. Infine, viene esposta la teoria "shallow water", dove si ottiene la soluzione approssimata nel caso di basse profondità: per il problema della spiaggia questa soluzione sarà una combinazione lineare di funzioni di Bessel di ordine zero.

Il secondo capitolo tratta il caso del mare aperto, per profondità costante finita o infinita. In dimensione due, le soluzioni per onde stazionarie possono essere ottenute esplicitamente in entrambi i casi, e sono della forma

$$e^{i\sigma t + my}(A \cos mx + B \sin mx)$$

per profondità infinita e

$$e^{i\sigma t} \cosh m(y + h)(C \cos mx + D \sin mx)$$

per profondità finita  $h$ . Nel caso tridimensionale, invece, si trovano le soluzioni per onde stazionarie a simmetria cilindrica e per profondità infinita.

Si osserva che, in certi casi, servirà ammettere che le soluzioni presentino singolarità con andamento logaritmico. Infine, le onde progressive per ciascun problema saranno determinate attraverso un'opportuna combinazione lineare delle soluzioni per onde stazionarie.

Il terzo capitolo tratta in dettaglio il problema della spiaggia. In primo luogo si considera il caso bidimensionale di una spiaggia con pendenza costante di angolo  $\omega = \frac{\pi}{2n}$  [14]; sfruttando l'analisi complessa si trovano due soluzioni, una regolare e una con singolarità logaritmica, e la soluzione generale sarà combinazione lineare di esse. Il comportamento di queste soluzioni a grande distanza dalla costa è in buona approssimazione lo stesso che nel caso del mare aperto. Inoltre, si trovano diverse rappresentazioni asintotiche del problema per angoli  $\omega$  piccoli [4]: ciascuna di esse approssima in modo opportuno il comportamento delle soluzioni vicino alla terraferma o in mare aperto. Passando al caso tridimensionale si trovano sempre due soluzioni, una regolare e una singolare, ma solo nella forma di un integrale di linea nel piano complesso [15]. Comunque, il comportamento delle soluzioni in prossimità e a grande distanza dalla costa è lo stesso che nel caso bidimensionale. Nel quarto e ultimo capitolo, si passa allo studio del problema del molo, che per semplicità è considerato di lunghezza infinita. Il primo caso in esame è il problema bidimensionale con profondità infinita [5], dove le soluzioni sono le parti reali di integrali di linea nel piano complesso. Tramite l'utilizzo delle proprietà della funzione di Green e della trasformata di Fourier, si arriva anche ad ottenere le soluzioni del problema tridimensionale con profondità finita [6]. In entrambi i casi, il comportamento delle soluzioni a grande distanza dal molo si avvicina a quello nel mare aperto.

Ulteriori studi sono stati effettuati per il problema del molo: si veda l'articolo di Holford [7] per il caso del molo di lunghezza finita, ma anche [3]. Una generalizzazione del problema del molo è stata infine proposta da Martin [11]. I risultati di questi lavori non sono riportati in questa tesi.

# Capitolo 1

## Nozioni generali

### 1.1 Leggi di conservazione

Introduciamo alcune nozioni di base della fluidodinamica. Consideriamo per semplicità un fluido ideale, ovvero un fluido incomprimibile (e quindi a densità costante) a viscosità nulla, che non presenti attriti interni fra le particelle.

Le equazioni del moto di una particella di un fluido possono essere ottenute a partire dalla legge di Newton di conservazione della quantità di moto. Consideriamo un elemento del fluido di forma rettangolare di dimensioni infinitesime  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , e supponiamo che sulle facce normali all'asse  $x$  agisca una pressione di intensità  $p$ . Allora la legge di Newton nella direzione  $x$  è data da

$$[-(p + p_x dx) + p]dydz + \rho X dx dy dz = \rho a_{(x)} dx dy dz$$

dove  $\rho$  è la densità,  $X$  e  $a_{(x)}$  sono le componenti nella direzione  $x$  rispettivamente di forza esterna per unità di massa e accelerazione. Le quantità  $p$ ,  $X$  e  $a_{(x)}$  possono dipendere da  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e dal tempo  $t$ . Facendo tendere a zero i termini  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  si ottiene l'equazione del moto nella forma

$$-p_x + \rho X = \rho a_{(x)}. \quad (1.1.1)$$

Ripetendo lo stesso discorso nelle direzioni  $y$ ,  $z$ , si ottiene che

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{F} = \mathbf{a}, \quad (1.1.2)$$

dove  $p$  è la pressione,  $\mathbf{F}$  è la forza esterna per unità di massa e  $\mathbf{a}$  l'accelerazione per una qualsiasi particella del fluido considerato. Supponendo da ora che l'asse  $y$  sia l'asse verticale, e che l'unica forza esterna che agisce sul

fluido è la forza di gravità, cioè  $\mathbf{F} = (0, -g, 0)$ , la (1.1.2) diventa

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}p_x = a_{(x)} \\ -\frac{1}{\rho}p_y - g = a_{(y)} \\ -\frac{1}{\rho}p_z = a_{(z)} \end{cases} . \quad (1.1.3)$$

Fino a qui si è seguito l'approccio Lagrangiano, ovvero lo studio del comportamento di una singola particella del fluido. Ora vogliamo passare alla forma Euleriana, cioè le equazioni del moto determinano la distribuzione delle velocità come funzione del tempo in un punto dello spazio fissato. Vogliamo quindi determinare il campo delle velocità  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ , che è in funzione delle variabili spaziali e del tempo. Una volta risolto questo problema, si può determinare il moto delle singole particelle integrando le equazioni differenziali ordinarie  $\dot{x} = u$ ,  $\dot{y} = v$  e  $\dot{z} = w$ .

Vogliamo riscrivere (1.1.3) in funzione delle variabili  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Seguendo la traiettoria di una particella nella forma  $\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t))$ , si ha che il vettore velocità della particella è  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (u, v, w)$ . Dunque, data una funzione  $F(x, y, z, t)$ , se la valutiamo nella posizione della particella (e quindi gli argomenti  $x$ ,  $y$  e  $z$  dipendono da  $t$ ), la derivata rispetto a  $t$  sarà

$$\frac{dF}{dt} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} + F_t = uF_x + vF_y + wF_z + F_t.$$

Poiché l'accelerazione  $\mathbf{a}$  è data da  $\mathbf{a} = (du/dt, dv/dt, dw/dt)$ , ne segue per esempio che

$$\frac{du}{dt} = uu_x + vu_y + wu_z + u_t,$$

e si ottengono espressioni analoghe per le altre componenti; la (1.1.3) diventa

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\rho}p_x \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{1}{\rho}p_y - g \\ w_t + ww_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho}p_z \end{cases} . \quad (1.1.4)$$

Se ammettiamo l'incompressibilità del fluido, allora la densità  $\rho$  può essere considerata costante. Quest'ipotesi ci porta anche ad una quarta equazione, che viene dedotta dalla legge di conservazione della massa, che dice che per ogni superficie chiusa fissata  $S$  che contiene sempre le stesse particelle il flusso è nullo, cioè

$$\iint_S \rho \mathbf{v}_n dS = 0,$$

dove  $\mathbf{v}_n$  è la derivata normale della velocità. Ma per il teorema della divergenza si ha che

$$\iint_S \rho \mathbf{v}_n dS = \iiint_R \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\tau,$$

con  $R$  la regione delimitata da  $S$ , e dunque

$$\iiint_R \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\tau = 0.$$

Dal fatto che la regione  $R$  è scelta in modo arbitrario e che  $\rho$  è costante, si ha che

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = u_x + v_y + w_z = 0, \quad (1.1.5)$$

cioè il flusso è *solenoidale*. Quest'equazione è detta *equazione di continuità*.

## 1.2 Flusso irrotazionale

Vogliamo ora aggiungere una nuova caratteristica al nostro fluido.

**Definizione** (Circolazione). *Data una curva chiusa  $C$  che segue il fluido (cioè è composta sempre dalle stesse particelle al variare del tempo), si dice circolazione  $\Gamma$  lungo  $C$  l'integrale*

$$\Gamma(t) = \oint_C [u dx + v dy + w dz] = \oint_C \mathbf{v}_s ds,$$

dove  $v_s$  è la componente della velocità del fluido tangente a  $C$ , e  $s$  è il parametro lunghezza d'arco su  $C$ .

Se parametrizziamo la curva  $C$  tramite il vettore  $\mathbf{x}(\sigma, t)$ , con  $0 \leq \sigma \leq 1$  e  $\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{x}(1, t)$ , si ottiene che

$$\Gamma(t) = \int_0^1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_\sigma d\sigma,$$

con  $\mathbf{x}_\sigma$  la derivata rispetto a  $\sigma$ . Derivando rispetto al tempo si ha che

$$\dot{\Gamma}(t) = \int_0^1 (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x}_\sigma + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{x}}_\sigma) d\sigma.$$

Dalla (1.1.2) con  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{F} = (0, -g, 0) = -\operatorname{grad}(gy)$  e da  $\dot{\mathbf{x}}_\sigma = \mathbf{v}_\sigma$ , si ottiene che

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(t) &= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{\rho} \mathbf{x}_\sigma \cdot \operatorname{grad} p - g \mathbf{x}_\sigma \cdot \operatorname{grad} y + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\sigma \right] d\sigma = \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{\rho} p_\sigma - g y_\sigma + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})_\sigma \right] d\sigma = 0, \end{aligned}$$

poiché i valori di  $p$ ,  $y$  e  $\mathbf{x}$  coincidono per  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 1$ , e  $\rho$  e  $g$  sono costanti. Dunque vale il seguente risultato

**Teorema 1.1.** *In un fluido ideale la circolazione lungo una qualsiasi curva chiusa composta sempre dalle stesse particelle è costante nel tempo.*

In seguito, considereremo solo il caso di fluidi per cui la circolazione lungo una qualsiasi curva chiusa è nulla, cioè supporremo che per certi tempi il fluido è fermo oppure tutte le particelle si muovono con la stessa velocità. Se  $\Gamma \equiv 0$ , si ottiene dal teorema del rotore che

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{v})_n dA = \oint_C \mathbf{v}_s ds = 0,$$

con  $S$  una qualsiasi superficie con frontiera  $C$ ; poiché  $\Gamma = 0$  per qualsiasi curva  $C$ , allora si ha che

$$\text{rot } \mathbf{v} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = 0, \quad (1.2.1)$$

cioè il flusso è *irrotazionale*. Si ha quindi che un fluido non viscoso con flusso irrotazionale ad un certo istante di tempo mantiene questa proprietà per tutti i tempi. Da ora assumeremo sempre quest'ipotesi.

### 1.3 Flusso potenziale

Consideriamo quindi un fluido con campo vettoriale delle velocità  $\mathbf{v}$  solenoitale e irrotazionale. Si ha quindi che, dalla relazione (1.2.1), la forma differenziale  $u dx + v dy + w dz$  è esatta, quindi esiste un potenziale  $\Phi(x, y, z, t)$  in ogni regione semplicemente connessa tale che

$$\mathbf{v} = (u, v, w) = \text{grad } \Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z). \quad (1.3.1)$$

Poiché vale anche la (1.1.5), si ha che

$$\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi = \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1.3.2)$$

dunque  $\Phi$  è una funzione armonica. Vogliamo ottenere un'altra relazione. Possiamo riscrivere la (1.1.4) in forma vettoriale

$$\text{grad } \Phi_t + \frac{1}{2} \text{grad } (u^2 + v^2 + w^2) = -\text{grad } \frac{p}{\rho} - \text{grad } (gy),$$

sfruttando il fatto che  $\rho$  è costante. Integrando questa relazione si ottiene la *legge di Bernoulli*

$$\Phi_t + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{p}{\rho} + gy = C(t), \quad (1.3.3)$$

con  $C(t)$  che dipende solo dal tempo.

Osserviamo che le relazioni (1.3.2) e (1.3.3) possono prendere il posto delle equazioni del moto (1.1.4) e dell'equazione di continuità (1.1.5), in quanto

una volta risolta la (1.3.2), posso ricavare le  $u$ ,  $v$  e  $w$  derivando la  $\Phi$ , e, a quel punto, ottenere la pressione  $p$  tramite la (1.3.3). Inoltre supporremo, senza ledere le generalità, che  $C(t) \equiv 0$ , poiché se prendiamo  $\Phi^*$  definita da

$$\Phi = \Phi^* + \int_{t_0}^t C(\xi) d\xi$$

per qualsiasi  $t_0$ , allora  $\Phi^*$  è armonica,  $\text{grad } \Phi = \text{grad } \Phi^*$  e la legge di Bernoulli per  $\Phi^*$  presenta secondo membro nullo.

## 1.4 Condizioni al contorno

Vogliamo ora studiare le proprietà della superficie  $S$  che contiene la massa d'acqua. Essa si muove nel tempo, e separa il fluido da altri mezzi. Un'ulteriore ipotesi è che tutte le particelle che compongono  $S$  rimangono in essa per tutti i tempi successivi. Se  $S$  è caratterizzata dall'equazione  $\zeta(x, y, z, t) = 0$ , allora si avrà che su  $S$  vale

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta_x \dot{x} + \zeta_y \dot{y} + \zeta_z \dot{z} + \zeta_t = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w + \zeta_t = 0. \quad (1.4.1)$$

Poiché  $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$  è un vettore normale ad  $S$  e vale la (1.3.1) si ha che su  $S$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}}.$$

Se la superficie  $S$  è fissata, e dunque indipendente dal tempo, si ha quindi che su  $S$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Questo è il caso, per esempio, del fondale marino. Se invece  $S$  è la superficie libera del fluido, come la superficie superiore del mare,  $S$  è data dall'equazione  $y = \eta(x, z, t)$ . Quindi tale superficie sarà della forma  $\zeta = y - \eta(x, z, t)$ , e dunque la (1.4.1) diventa

$$\Phi_x \eta_x - \Phi_y + \Phi_z \eta_z + \eta_t = 0 \quad (1.4.2)$$

su  $S$ . Inoltre, se assumiamo che la pressione  $p$  sia data su  $S$ , avremo che su  $S$  vale la legge di Bernoulli

$$gy + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{p}{\rho} = 0. \quad (1.4.3)$$

Dunque su una superficie libera varranno le condizioni al contorno (1.4.2) e (1.4.3).

## 1.5 Il problema delle onde superficiali

Vogliamo ora introdurre la tipologia di problemi che verranno affrontati in seguito. Consideriamo il caso tridimensionale del mare: siano  $x$ ,  $y$  e  $z$  le variabili, con l'asse  $y$  verticale. Supponiamo inizialmente che l'acqua sia ferma e che sia compresa nella regione di spazio  $R$  data da

$$-\infty < x < +\infty, \quad -h(x, z) \leq y \leq 0, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Si suppone inoltre che, a partire dal tempo  $t = 0$ , in una regione  $D$  contenuta nel piano  $xz$  (e quindi sulla superficie dell'acqua), si verifichi una perturbazione dello stato di quiete (per esempio causata dal vento) e si vuole studiare il comportamento delle onde per tempi successivi. Si vuol quindi ottenere la scrittura esplicita del moto della superficie libera  $y = \eta(x, z, t)$ . Per quanto visto prima, si ha che deve valere la

$$\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad (1.5.1)$$

$$\text{per } x^S(z, t) \leq x < +\infty, \quad -h(x, z) \leq y \leq \eta(x, z, t), \quad -\infty < z < +\infty,$$

dove  $x^S(z, t)$  è l'ascissa della linea dell'acqua sulla riva (se è presente una spiaggia, altrimenti vale  $-\infty$ ). Inoltre sono soddisfatte le condizioni al contorno sul fondo del mare

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{per } y = -h(x, z), \quad (1.5.2)$$

e sulla superficie libera

$$\Phi_x\eta_x - \Phi_y + \Phi_z\eta_z + \eta_t = 0 \quad \text{per } y = \eta(x, z, t) \quad (1.5.3)$$

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = F(x, z, t) \quad \text{per } y = \eta(x, z, t), \quad (1.5.4)$$

con  $F(x, z, t) \equiv 0$  dappertutto tranne che su  $D$ . Vogliamo inoltre che per  $x \rightarrow +\infty$  e  $z \rightarrow +\infty$ ,  $\Phi$  e  $\eta$  rimangano limitate. Infine, valgono le condizioni iniziali

$$\eta(x, z, t) = 0 \quad \text{per } t = 0, \quad (1.5.5)$$

$$\Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0 \quad \text{per } t = 0, \quad (1.5.6)$$

poiché la condizione a riposo è un equilibrio.

## 1.6 Onde di piccola ampiezza

In questa sezione vogliamo ottenere delle approssimazioni di  $\Phi$  e  $\eta$  in modo tale da scrivere le equazioni (1.5.3) e (1.5.4) in una forma più semplice.

Supponiamo che il potenziale delle velocità  $\Phi$  e la superficie dell'acqua  $\eta$  ammettano sviluppi in serie di potenze rispetto ad un parametro  $\varepsilon$

$$\Phi = \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \varepsilon^3\Phi^{(3)} + \dots \quad (1.6.1)$$

e

$$\eta(x, z, t) = \eta^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon\eta^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2\eta^{(2)}(x, z, t) + \dots \quad (1.6.2)$$

Allora ogni  $\Phi^{(k)}(x, y, z, t)$  deve soddisfare l'equazione di Laplace  $\Delta\Phi^{(k)} = 0$ .

La condizione al contorno su una superficie fissata sarà  $\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial n} = 0$ ; sulla superficie libera  $y = \eta(x, z, t)$  non soggetta a pressione vale la legge di Bernoulli

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = 0.$$

Inserendo in essa le espressioni di  $\Phi$  e di  $\eta$  date da (1.6.1) e (1.6.2) si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= 0 \\ g\eta^{(1)} + \Phi_t^{(1)} &= 0 \\ g\eta^{(2)} + \Phi_t^{(2)} &= F^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ g\eta^{(k)} + \Phi_t^{(k)} &= F^{(k-1)} \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

dove le  $F^{(k-1)}$  sono combinazioni delle funzioni  $\eta^{(j)}$  e  $\Phi^{(j)}$  e delle loro derivate, con  $j \leq k - 1$ , e tutte queste condizioni valgono per  $y = 0$ .

Dall'altra condizione al contorno sulla superficie libera

$$\Phi_x\eta_x + \Phi_z\eta_z + \eta_t = \Phi_y$$

si ottengono analogamente le condizioni su  $y = 0$

$$\begin{aligned} \eta_t^{(0)} &= 0 \\ \eta_t^{(1)} &= \Phi_y^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} &= \Phi_y^{(2)} + G^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_t^{(k)} &= \Phi_y^{(k)} + G^{(k-1)} \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

dove  $G^{(k-1)}$  sono combinazioni delle funzioni  $\eta^{(j)}$  e  $\Phi^{(j)}$  e delle loro derivate, con  $j \leq k - 1$ . In questo modo, si possono ottenere i coefficienti delle serie

(1.6.1) e (1.6.2), nel caso in cui esse esistano. Infatti tramite la  $\Delta\Phi^{(1)} = 0$ , le condizioni al contorno ottenute prima e le condizioni iniziali per  $t = 0$ , si possono ottenere le uniche soluzioni  $\eta^{(1)}$  e  $\Phi^{(1)}$ . A questo punto, dalle formule precedenti, si ottengono delle condizioni per  $\eta^{(2)}$  e  $\Phi^{(2)}$  che permettono di determinare queste funzioni. Iterando lo stesso ragionamento, possiamo ottenere tutti i coefficienti delle serie.

In futuro, ci interesseremo solo allo studio del problema per onde di piccola ampiezza, ovvero del problema approssimato con  $\Phi \approx \varepsilon\Phi^{(1)}$  e  $\eta \approx \varepsilon\eta^{(1)}$ . Dalle condizioni sopra si ha quindi che per  $y = 0$

$$g\eta + \Phi_t = 0 \quad (1.6.3)$$

$$\eta_t - \Phi_y = 0. \quad (1.6.4)$$

Derivando la prima e combinando le due si ha che per  $y = 0$  vale la

$$\Phi_{tt} + g\Phi_y = 0. \quad (1.6.5)$$

Ciò che è stato fatto non è altro che cancellare i termini non lineari nelle (1.4.2) e (1.4.3), nel caso di pressione nulla. Dunque, se la pressione  $p$  non è nulla, basta sostituire la (1.6.3) con la

$$g\eta + \Phi_t = -\frac{p}{\rho},$$

mentre la (1.6.4) rimane inalterata.

Si ottiene dunque che, se si applica questa semplificazione, il problema diventa lineare e il dominio in cui calcolare la soluzione è fissato. Dunque ci siamo ricondotti ad un classico problema con condizioni al contorno.

## 1.7 La teoria “shallow water”

Consideriamo il problema del mare aperto con onde di piccola ampiezza e profondità sufficientemente piccola. Con quest’ipotesi, vogliamo ottenere un’approssimazione accurata della soluzione esatta. Per semplicità, consideriamo il caso bidimensionale con asse  $y$  verticale, e siano  $y = 0$  la superficie a riposo dell’acqua e  $y = -h(x)$  il fondale. Chiamata  $\eta(x, t)$  l’altezza della superficie libera dell’acqua, si ha che il potenziale delle velocità  $\Phi(x, y, t)$  è dato dalle equazioni

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad \text{per } -h(x) \leq y \leq 0 \quad (1.7.1)$$

$$\Phi_{tt} = -g\Phi_y, \quad \text{per } y = 0 \quad (1.7.2)$$

$$\Phi_y = -h'(x)\Phi_x, \quad \text{per } y = -h(x). \quad (1.7.3)$$

La  $\eta$  è data da

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g}\Phi_t \Big|_{y=0}.$$

Introduciamo la seguente notazione: le funzioni barrate in alto saranno valutate in  $y = 0$ , mentre quelle barrate in basso saranno valutate in  $y = -h(x)$ . Dunque le (1.7.2) e (1.7.3) diventano  $\overline{\Phi_{tt}} = -g\overline{\Phi_y}$  e  $\underline{\Phi_y} = -h'(x)\underline{\Phi_x}$ . Dalla (1.7.3) si ha che

$$\int_{-h(x)}^0 \Phi_{yy} dy = \overline{\Phi_y} - \underline{\Phi_y} = \overline{\Phi_y} + h'(x)\underline{\Phi_x}.$$

D'altra parte, dalla (1.7.1) si ha che

$$\int_{-h(x)}^0 \Phi_{yy} dy = - \int_{-h(x)}^0 \Phi_{xx} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^0 \Phi_x dy + h'(x)\underline{\Phi_x}.$$

Uguagliando le ultime due espressioni si ha che

$$\overline{\Phi_y} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^0 \Phi_x dy.$$

Valgono inoltre le seguenti due relazioni:

$$\begin{aligned} \int_{-h(x)}^0 \Phi_x dy &= h(x)\underline{\Phi_x} - \int_{-h(x)}^0 y\Phi_{xy} dy, \\ \int_{-h(x)}^0 h(x)\Phi_{xy} dy &= h(x)\overline{\Phi_x} - h(x)\underline{\Phi_x}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_y} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[ h(x)\underline{\Phi_x} - \int_{-h(x)}^0 y\Phi_{xy} dy \right] = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[ h(x)\overline{\Phi_x} - \int_{-h(x)}^0 (y + h(x))\Phi_{xy} dy \right] = \\ &= -(h(x)\overline{\Phi_x})_x + \int_{-h(x)}^0 [(y + h(x))\Phi_{xxy} + h'(x)\Phi_{xy}] dy. \end{aligned}$$

Dalla (1.7.2) si ottiene quindi che

$$\overline{\Phi_{tt}} = (gh\overline{\Phi_x})_x - g \int_{-h(x)}^0 [(y + h(x))\Phi_{xxy} + h'(x)\Phi_{xy}] dy. \quad (1.7.4)$$

Supponiamo ora che  $\Phi_{xxy}$  e  $\Phi_{xy}$  siano limitate, e che  $h$  e  $h'$  siano piccole per ogni  $x$  e dello stesso ordine di grandezza. Ne segue che la (1.7.4) può essere riscritta tramite la

$$\overline{\Phi_{tt}} = (gh\overline{\Phi_x})_x + O(h^2).$$

Allora se  $h$  e  $h'$  sono sufficientemente piccole, il potenziale  $\Phi$  può essere ottenuto in buona approssimazione tramite la

$$\overline{\Phi_{tt}} = (gh\overline{\Phi_x})_x. \quad (1.7.5)$$

Osserviamo che, nel caso  $h = \text{cost.}$ , la (1.7.5) è l'equazione delle onde in una variabile con velocità di propagazione  $c = \sqrt{gh}$ . Da  $\eta(x, t) = \bar{\Phi}_t/g$ , otteniamo che

$$\eta_{tt} = (gh\eta_x)_x.$$

Se per esempio  $h(x) = qx$ , con  $q$  costante, se supponiamo che  $\bar{\Phi}$  sia della forma  $\bar{\Phi}(x, t) = e^{i(\sigma t + \varepsilon)}Z(x)$ , dalla (1.7.5) si ha che  $Z(x)$  deve soddisfare la

$$(xZ_x)_x + \frac{m}{q}Z = 0, \quad m = \frac{\sigma^2}{g}, \quad (1.7.6)$$

La (1.7.6) è un'equazione di Bessel con soluzione generale

$$Z(x) = AJ_0\left(2\sqrt{\frac{mx}{q}}\right) + BY_0\left(2\sqrt{\frac{mx}{q}}\right), \quad (1.7.7)$$

dove  $J_0$  e  $Y_0$  sono le funzioni di Bessel di ordine zero, con  $J_0$  regolare e  $Y_0$  singolare in  $x = 0$  con singolarità logaritmica (vedi appendice A). Il comportamento di queste funzioni per  $x$  grande è dato da

$$J_0\left(2\sqrt{\frac{mx}{q}}\right) \sim \frac{\cos\left(2\sqrt{\frac{mx}{q}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi\sqrt{\frac{mx}{q}}}},$$

$$Y_0\left(2\sqrt{\frac{mx}{q}}\right) \sim \frac{\sin\left(2\sqrt{\frac{mx}{q}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi\sqrt{\frac{mx}{q}}}}.$$

Questa teoria ci sarà utile in seguito per studiare in modo approssimato il comportamento delle onde vicino ad una spiaggia. Osserviamo che da ora in poi permetteremo l'esistenza di soluzioni che presentino singolarità di tipo logaritmico in qualche punto, come è avvenuto nell'ultimo esempio per  $x = 0$ . In questi punti le velocità diventano infinite ed è utile dal punto di vista matematico tenere conto di questo tipo di soluzioni, anche se non hanno senso dal punto di vista fisico; dunque queste funzioni saranno le soluzioni tranne che per un intorno del punto singolare.

## Capitolo 2

# Il mare aperto

In questo capitolo studieremo il moto delle onde nel mare, con profondità costante (finita o infinita). Per semplicità considereremo, nello spazio tridimensionale, solo onde armoniche semplici nel tempo.

### 2.1 Onde stazionarie

Consideriamo il caso tridimensionale per una massa d'acqua di profondità costante  $h$ . Sia il piano  $xz$  la superficie libera dell'acqua nella condizione di riposo e sia l'asse  $y$  ascendente. Supponiamo inoltre che il flusso sia irrotazionale con onde di piccola ampiezza. Da quanto visto prima, si ha che per il potenziale delle velocità  $\Phi$  valgono le relazioni

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad -h \leq y \leq 0, \quad -\infty < x, z < +\infty \quad (2.1.1)$$

$$\Phi_{tt} + g\Phi_y = 0, \quad y = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\Phi_y = 0, \quad y = -h. \quad (2.1.3)$$

L'altezza della superficie libera sarà data da

$$\eta(x, z, t) = -\frac{1}{g}\Phi_t(x, 0, z, t).$$

Inoltre sono assegnate delle condizioni di limitatezza all'infinito e le condizioni iniziali per  $t = 0$ .

Ci interessiamo allo studio delle onde stazionarie che in particolare siano armoniche semplici nel tempo. Dunque richiediamo che il potenziale delle velocità sia della forma

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i\sigma t}\varphi(x, y, z), \quad (2.1.4)$$

con  $\varphi$  funzione reale. Osserviamo che il secondo membro della (2.1.4) è un numero complesso, e da ora in poi terremo conto sia della parte reale che

della parte immaginaria. Le condizioni (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) diventano quindi

$$\Delta\varphi = 0, \quad -h \leq y \leq 0, \quad -\infty < x, z < +\infty \quad (2.1.5)$$

$$\varphi_y - \frac{\sigma^2}{g}\varphi = 0, \quad y = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\varphi_y = 0, \quad y = -h, \quad (2.1.7)$$

mentre la  $\eta$  è data da

$$\eta(x, z, t) = -\frac{i\sigma}{g}e^{i\sigma t}\varphi(x, 0, z).$$

Come condizioni all'infinito scegliamo che  $\varphi$  e  $\varphi_y$  debbano essere limitate. Le condizioni iniziali non possono essere scelte in modo arbitrario, ma devono soddisfare l'ipotesi di armonicità semplice nel tempo.

Per semplicità, consideriamo prima il caso 2-dimensionale, cioè  $\varphi = \varphi(x, y)$ , con  $h = \infty$ . Osserviamo che le funzioni  $\varphi = e^{my} \cos mx$  e  $\varphi = e^{my} \sin mx$  soddisfano le equazioni (2.1.5) e (2.1.6), se  $m = \frac{\sigma^2}{g}$ . Inoltre, le condizioni all'infinito sono soddisfatte e le oscillazioni tendono a zero per  $y \rightarrow -\infty$ . Dunque abbiamo ottenuto un insieme di soluzioni della forma

$$\varphi(x, y) = e^{my}(A \cos mx + B \sin mx), \quad (2.1.8)$$

con  $A$  e  $B$  parametri, che sono armoniche semplici anche in  $x$  oltre che in  $t$ . La lunghezza d'onda è data da

$$\lambda = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi g}{\sigma^2},$$

cioè dipende inversamente dal quadrato della frequenza di oscillazione  $\sigma$ . A priori, però, non sappiamo se le soluzioni della forma (2.1.8) sono le uniche possibili che soddisfano le ipotesi. Il seguente teorema ci garantisce questo.

**Teorema 2.1.** *Tutte le soluzioni per  $h = \infty$  del problema dato dalle equazioni (2.1.5) e (2.1.6) che soddisfano la condizione di limitatezza di  $\varphi$  e  $\varphi_y$  sono della forma (2.1.8), con  $m = \sigma^2/g$ .*

*Dimostrazione.* Data una soluzione  $\varphi$ , sia  $\psi(x, y)$  definita da

$$\psi = \varphi_y - m\varphi.$$

La  $\psi$  è una funzione armonica definita nel semipiano  $y \leq 0$  che si annulla per  $y = 0$ , quindi può essere prolungata con continuità per riflessione su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Dunque l'estensione  $\overline{\psi}$  è una funzione armonica e  $\overline{\psi}$ ,  $\overline{\psi}_y$  sono limitate.

Dunque per il teorema di Liouville sulle funzioni armoniche,  $\bar{\psi}$  è costante. Ma per  $y = 0$  vale zero, dunque  $\bar{\psi}$  è identicamente nulla e perciò vale che

$$\varphi_y - m\varphi = 0, \quad -\infty < y < 0.$$

La soluzione più generale di questa equazione differenziale è della forma

$$\varphi(x, y) = c(x) e^{my},$$

con  $c(x)$  che dipende solo da  $x$  e che soddisfa la

$$\frac{d^2c}{dx^2} + m^2c = 0;$$

la soluzione generale di questa equazione è una combinazione di  $\sin mx$  e di  $\cos mx$ , e dunque vale la tesi.  $\square$

Passiamo ora al caso 2-dimensionale in cui la profondità dell'acqua  $h$  è finita. Si ottiene un teorema analogo al precedente.

**Teorema 2.2.** *Tutte le soluzioni per profondità  $h$  finita del problema dato dalle equazioni (2.1.5), (2.1.6) e (2.1.7) che soddisfano la condizione di limitatezza di  $\varphi$  e  $\varphi_y$  all'infinito sono della forma*

$$\varphi(x, y) = \cosh m(y + h) [C \cos mx + D \sin mx],$$

con  $\sigma^2 = gm \tanh(mh)$ ,  $C$  e  $D$  parametri.

Osserviamo inoltre che, se  $h \rightarrow +\infty$ ,  $\tanh(mh) \rightarrow 1$ , e quindi le soluzioni tendono a quelle del caso di profondità infinita.

Passiamo ora allo studio delle onde stazionarie tridimensionali armoniche semplici nel tempo e che dipendono solamente dalla distanza  $r$  dall'asse  $y$ , cioè che presentano una simmetria cilindrica. Ci interessiamo solo al caso di profondità infinita. Dunque dovranno valere le equazioni (2.1.5), (2.1.6) e la condizione di limitatezza per  $\varphi$  e per  $\varphi_y$ . Passiamo in coordinate cilindriche  $(r, \theta, y)$ : la (2.1.5) si riscrive come

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad y \leq 0, \quad r \geq 0, \quad (2.1.9)$$

con  $r$  la distanza dall'asse  $y$ , poiché per ipotesi  $\varphi$  non dipende dall'angolo  $\theta$ . Introduciamo per comodità la nuova variabile  $\rho = \log r$ . Dunque la (2.1.9) diventa la

$$e^{-2\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad y \leq 0, \quad -\infty < \rho < +\infty, \quad (2.1.10)$$

mentre la condizione al contorno è la

$$\varphi_y - m\varphi = 0, \quad m = \frac{\sigma^2}{g}. \quad (2.1.11)$$

Vale il seguente teorema

**Teorema 2.3.** *Tutte le soluzioni regolari  $\varphi$  di (2.1.10) e (2.1.11) con  $\varphi$  e  $\varphi_y$  limitate all'infinito sono della forma*

$$\varphi(r, y) = Ae^{my} J_0(mr),$$

con  $A$  costante arbitraria, e  $J_0$  è la funzione di Bessel regolare di ordine zero (vedi appendice A)

*Dimostrazione.* Come per il caso 2-dimensionale, introduciamo, data una soluzione  $\varphi$ , la funzione  $\psi(\rho, y)$  definita da

$$\psi = \varphi_y - m\varphi.$$

Allora anche per  $\psi$  vale la (2.1.10). Inoltre, la  $\psi$  si annulla per  $y = 0$  in virtù della (2.1.11), quindi può essere prolungata in modo continuo su tutto  $\mathbb{R}^2$  ponendo  $\varphi(\rho, y) = \varphi(-\rho, -y)$  e ottenendo ancora una soluzione della (2.1.10) su tutto il piano. Allora  $\psi$  risulta limitata, per la limitatezza di  $\varphi$  e  $\varphi_y$  sul semipiano inferiore, quindi si applica il teorema di Liouville, e dunque  $\psi$  è costante su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Ma  $\psi$  si annulla per  $y = 0$ , perciò

$$\varphi_y - m\varphi = 0, \quad \text{per } y < 0.$$

La soluzione più generale di quest'equazione è

$$\varphi(\rho, y) = e^{my} f(\rho) = e^{my} f(\log r) = e^{my} g(r),$$

con  $g(r)$  funzione arbitraria. Ma poiché deve valere la (2.1.9), si ha che

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dg}{dr} \right) + m^2 g(r) = 0,$$

cioè  $g(r)$  è una funzione di Bessel di ordine zero, della forma

$$g(r) = AJ_0(mr) + BY_0(mr).$$

Poiché come condizione abbiamo imposto che la soluzione dev'essere limitata, allora si deve avere  $B = 0$  e dunque

$$\varphi(r, y) = Ae^{my} J_0(mr).$$

□

Dal teorema precedente, si ha inoltre che il potenziale delle velocità (in coordinate cilindriche) è della forma

$$\Phi(r, y, t) = Ae^{i\sigma t + my} J_0(mr),$$

e il comportamento di questa funzione per  $r$  grande è

$$\Phi(r, y, t) \sim Ae^{i\sigma t + my} \sqrt{\frac{2}{\pi mr}} \cos\left(mr - \frac{\pi}{4}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Si osserva dunque che in dimensione tre le onde stazionarie limitate con simmetria cilindrica si smorzano all'infinito, e lo smorzamento dipende dall'inverso della radice quadrata della distanza dall'asse  $y$ , mentre in dimensione due imporre che l'onda ha ampiezza nulla all'infinito significa dire che l'onda è tutta nulla.

Vogliamo ora ammettere, per il caso tridimensionale, la presenza di una singolarità logaritmica per l'asse  $y$ , dunque alcune soluzioni possibili sono quelle della forma

$$\Phi(r, y, t) = B e^{i\sigma t + my} Y_0(mr),$$

che per  $r$  grande hanno comportamento

$$\Phi(r, y, t) \sim B e^{i\sigma t + my} \sqrt{\frac{2}{\pi mr}} \sin\left(mr - \frac{\pi}{4}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Dunque, ammettendo questo tipo di singolarità, le onde stazionarie ottenute si comportano all'infinito come quelle regolari, solo che all'infinito sono sfasate di  $90^\circ$ . Perciò mentre le onde limitate possono ammettere all'infinito solo un'unica fase, quelle con singolarità logaritmica ammettono fase arbitraria, in quanto possiamo sempre trovare un'onda stazionaria che si scrive come somma di onde sfasate con una data fase. Non è stato dimostrato, però, che tutte le onde che presentano singolarità logaritmica siano di questa forma.

## 2.2 Onde progressive

Consideriamo il caso 2-dimensionale per acque di profondità finita  $h$ . Le soluzioni per onde progressive armoniche semplici si ottengono attraverso opportune combinazioni lineari delle soluzioni delle onde stazionarie, ovvero

$$\Phi(x, y, t) = A \cosh m(y + h) \cos(mx \pm \sigma t + \alpha),$$

con  $\sigma^2 = gm \tanh(mh)$ . La *velocità di fase*, che è il rapporto fra la velocità angolare e il numero d'onda, è data da

$$c = \frac{\sigma}{m},$$

o, in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{2\pi}{m}$ , da

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}.$$

Vogliamo riscrivere il valore di  $\sigma$  in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$  e, sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor di  $\tanh(mh)$ , otteniamo che

$$\sigma^2 = \frac{2\pi g}{\lambda} \left[ \frac{2\pi h}{\lambda} - \frac{1}{3} \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^3 + \dots \right].$$

Si ha quindi che per  $\frac{h}{\lambda}$  piccolo,

$$\sigma^2 \approx \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 gh = m^2 gh;$$

dunque

$$c \approx \sqrt{gh},$$

cioè se la profondità  $h$  del mare è molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$  di un'onda progressiva, allora la velocità di fase è indipendente dalla lunghezza d'onda e dipende dalla radice quadrata di  $h$ . Quindi, approssimando  $c$  come sopra, si ottiene un risultato in linea con la teoria shallow water nel caso di profondità costante (vedi equazione (1.7.5)). Perciò si ottiene l'equazione delle onde con velocità di propagazione  $\sqrt{gh}$ . Nel caso, invece, di profondità infinita, si ha che

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

In conclusione, se la profondità è molto maggiore della lunghezza d'onda, la velocità di fase è all'incirca la stessa che nel caso di profondità infinita.

## Capitolo 3

# La spiaggia

In questo capitolo si vuole studiare il comportamento delle onde del mare in prossimità di una spiaggia. Per semplicità si suppone che, a partire dalla costa, il fondale abbia pendenza costante  $\omega$ . Si analizzerà per prima cosa il caso in dimensione due, per pendenze della forma  $\omega = \frac{\pi}{2n}$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$  e si otterrà una soluzione analitica del problema. Successivamente, si studierà il comportamento della soluzione per angoli  $\omega$  piccoli. Infine, si cercherà di generalizzare il problema nel caso tridimensionale per pendenze qualsiasi.

### 3.1 Il caso bidimensionale

Nel caso bidimensionale la situazione è quella mostrata in figura 3.1, con  $\omega = \frac{\pi}{2n}$ , per  $n \in \mathbb{N}^+$ . L'asse  $x$  rappresenta la superficie dell'acqua a riposo e il fondale è rappresentato da una retta passante per l'origine (la spiaggia) di coefficiente angolare negativo.

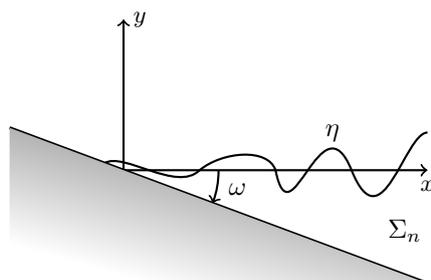


Figura 3.1: Il problema della spiaggia

Ci interessiamo allo studio delle onde progressive che si dirigono verso la costa. Il potenziale delle velocità sarà della forma  $\Phi(x, y, t) = e^{i\sigma t} \varphi(x, y)$

definito nel settore  $\Sigma_n$  di angolo  $\omega$ , tale che valgano le equazioni

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\varphi_y - \frac{\sigma^2}{g}\varphi = 0 \quad \text{per } y = 0, \quad x \geq 0, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sul fondale.} \quad (3.1.3)$$

Sia  $m = \sigma^2/g$ , e introduciamo le nuove variabili adimensionali  $x_1 = mx$  e  $y_1 = mx$ , che permettono di riscrivere il problema senza le costanti nella forma

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{per } y = 0, \quad x > 0, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sul fondale,} \quad (3.1.6)$$

dove per semplicità le nuove variabili  $x_1, y_1$  sono scritte senza indici. Inoltre ci aspettiamo che il comportamento delle onde stazionarie all'infinito sia lo stesso che nel caso di profondità infinita ovunque, ovvero dev'essere che per  $x$  grande

$$\Phi(x, y, t) \sim e^{i\sigma t + y} \cos(x + \alpha),$$

cioè ipotizziamo che  $\varphi$  e tutte le sue derivate siano uniformemente limitate all'infinito. Come ulteriore ipotesi, supporremo che  $\varphi$  presenti nell'origine al massimo una singolarità logaritmica e che sia regolare altrove, nella forma

$$\varphi = \varphi_1 \log r + \varphi_2, \quad (3.1.7)$$

con  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $\varphi_1, \varphi_2$  funzioni limitate con tutte le derivate fino all'ordine  $2n$  limitate. Vogliamo scrivere la soluzione del problema in funzione del potenziale complesso

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Imponiamo che la funzione  $f$  sia, come per  $\varphi$ , regolare e analitica nell'intero settore  $\Sigma_n$  (compreso tutto il bordo di  $\Sigma_n$  ma esclusa l'origine). Dunque le condizioni al contorno (3.1.5) e (3.1.6) possono essere riscritte in funzione di  $f$  come

$$\operatorname{Re}(if' - f) = 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{R}^+, \quad (3.1.8)$$

$$\operatorname{Re}(-ie^{-i\frac{\pi}{2n}} f') = 0 \quad \text{per } z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}, \quad r > 0. \quad (3.1.9)$$

Infatti,

$$\varphi_y - \varphi = \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) (\varphi + i\chi) \right] = \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) f \right] = \operatorname{Re}(if' - f),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial n} = \operatorname{Re}(-ie^{-i\frac{\pi}{2n}} f'), \quad \text{per } z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}, \quad r > 0,$$

dove la seconda espressione è valida poiché, per  $z = re^{-i\theta}$ ,

$$\operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial n}(z) = \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}(f(z)) \right] = \operatorname{Re}[-ie^{i\theta} f'(z)].$$

Introduciamo gli operatori

$$L_1(D) = -ie^{-i\frac{\pi}{2n}} D, \quad L_{2n}(D) = iD - 1,$$

dove  $D = \frac{d}{dz}$ . Dunque si ha che

$$\operatorname{Re} L_1(D)f(z) = 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{R}^+, \quad (3.1.10)$$

$$\operatorname{Re} L_{2n}(D)f(z) = 0 \quad \text{per } z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}, r > 0. \quad (3.1.11)$$

Cercheremo, ora, degli operatori  $L_2, \dots, L_{2n-1}$  in modo tale che

$$\operatorname{Re}(L_1 L_2 \dots L_{2n} f) = 0 \quad (3.1.12)$$

su entrambi i bordi. Siano

$$L_k(D) = \begin{cases} \alpha_k D & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ \alpha_k D - 1 & \text{se } k \text{ è pari,} \end{cases}$$

con

$$\alpha_k = e^{-i\pi(\frac{k}{2n} + \frac{1}{2})}, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Osserviamo che questa definizione per  $L_1$  e  $L_{2n}$  coincide con quella data in precedenza. Mostriamo ora che per questi operatori vale la proprietà (3.1.12). Sia

$$L(D) = L_1(D) \dots L_{2n}(D) = (\alpha_1 D)(\alpha_2 D - 1) \dots (\alpha_{2n-1} D)(\alpha_{2n} D - 1).$$

e sia

$$P_1(D) = L_1(D) \dots L_{2n-1}(D).$$

Poiché si ha che per  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha D(\beta D - 1) = (\beta D - 1)\alpha D, \quad (\alpha D - 1)(\beta D - 1) = (\beta D - 1)(\alpha D - 1),$$

si ottiene che  $P_1(D) = P'_1(D)P''_1(D)$ , dove

$$\begin{aligned} P'_1(D) &= [\alpha_1 \alpha_{2n-1} D^2][\alpha_3 \alpha_{2n-3} D^2] \dots, \\ P''_1(D) &= [(\alpha_2 D - 1)(\alpha_{2n-2} D - 1)][(\alpha_4 D - 1)(\alpha_{2n-4} D - 1)] \dots \end{aligned}$$

Per definizione di  $\alpha_k$ , si ha che  $\overline{\alpha_k} = \alpha_{2n-k}$  e che  $|\alpha_k| = 1$ . Quindi i numeri  $\alpha_k \alpha_{2n-k}$  e  $\alpha_k + \alpha_{2n-k}$  sono entrambi reali. Dunque tutti i fattori quadratici di  $P'_1$  e  $P''_1$  hanno coefficienti reali. Poiché  $P_1$  contiene un numero dispari di fattori lineari, allora o  $P'_1$  o  $P''_1$  contengono un termine lineare disaccoppiato, cioè il fattore contenente  $\alpha_n D$ . Ma  $\alpha_n = -1$ , dunque tutti i coefficienti di

$P_1'$  e  $P_1''$  sono reali, e quindi lo sono anche quelli di  $P_1$ . Dunque, se  $z$  è reale positivo, si ha che  $D$  può essere sostituito con  $\frac{\partial}{\partial x}$ , e quindi

$$\operatorname{Re} L(D)f(z) = P_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{Re}(\alpha_{2n}D - 1)f(z) = 0.$$

Vogliamo ora mostrare che la stessa relazione si può ottenere anche sul fondale, cioè per  $z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}$ . Sia

$$P_2(D) = L_2(D) \dots L_{2n}(D).$$

Allora lungo il fondale  $D$  può essere sostituito con  $e^{i\frac{\pi}{2n}} \frac{\partial}{\partial r}$ . Si osserva che

$$\alpha_{k+1}D = \alpha_k \frac{\partial}{\partial r}, \quad k = 1, \dots, 2n - 1,$$

poiché  $\alpha_{k+1}e^{i\frac{\pi}{2n}} = \alpha_k$ . Dunque lungo  $z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}$  si ha che  $P_2(D) = P_3\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ , dove  $P_3$  è un polinomio a coefficienti reali, esattamente per lo stesso ragionamento fatto per  $P_1$ . Dunque si ha che per  $z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}$ ,

$$\operatorname{Re} L(D)f(z) = P_3 \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \operatorname{Re}(\alpha_1 D)f(z) = 0.$$

Dunque, le due condizioni sui bordi sono equivalenti all'unica condizione

$$\operatorname{Re} L(D)f = 0 \tag{3.1.13}$$

per entrambi i limiti.

Dall'ipotesi (3.1.7) per  $\varphi$  nell'origine, si ottiene che tutte le funzioni della forma

$$r^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}, \quad \text{per } k = k_1 + k_2, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

sono limitate, dunque per le equazioni di Cauchy-Riemann le  $|z^k f^{(k)}|$  sono limitate, perciò vale che

$$\left| \frac{d^k f}{dz^k} \right| < \frac{M_k}{|z^k|}, \quad \text{per } k = 1, \dots, 2n, \tag{3.1.14}$$

con  $M_k$  costanti. Per quanto riguarda il comportamento di  $f$  all'infinito, enunciamo per prima cosa questo lemma:

**Lemma 3.1.** *Se  $f(z) = \varphi + i\chi$  è regolare ed analitica nella parte interna del settore  $\Sigma_n$  del piano complesso e  $\varphi$  è limitata all'infinito, allora  $|f^{(k)}(z)|$  tende a zero per  $|z| \rightarrow +\infty$  per ogni  $k$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , su ogni semiretta contenuta in  $\Sigma_n$  che non sia parallela alle semirette del bordo.*

*Dimostrazione.* Poiché  $\varphi$  è armonica, anche  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  lo sono. Quindi, per il principio della media e per il teorema della divergenza, si ha, per  $(\bar{x}, \bar{y})$  e  $R > 0$  tali che il cerchio  $B((\bar{x}, \bar{y}), R)$  è tutto contenuto in  $\Sigma_n$ ,

$$\begin{aligned} |\varphi_x(\bar{x}, \bar{y})| &= \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_{B((\bar{x}, \bar{y}), R)} \varphi_x(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial B((\bar{x}, \bar{y}), R)} \varphi(\mathbf{z}) \nu_1(\mathbf{z}) d\sigma(\mathbf{z}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{\partial B((\bar{x}, \bar{y}), R)} |\varphi(\mathbf{z}) \nu_1(\mathbf{z})| d\sigma(\mathbf{z}) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi R^2} 2M\pi R = \frac{2M}{R} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nu_1(\mathbf{z})$  la prima componente del vettore normale alla circonferenza nel punto  $\mathbf{z}$  e  $M = \max_{\partial B((\bar{x}, \bar{y}), R)} |\varphi|$ . Ripetendo in modo analogo per  $\varphi_y$ , si ha che per le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\left| \frac{df}{dz}(\bar{z}) \right| < \frac{4M}{R} \quad \text{per ogni } \bar{z} \in \Sigma_n.$$

Sia  $\tilde{M}$  una limitazione superiore per  $\varphi$  all'infinito (che esiste per ipotesi). Dunque, per  $z$  sufficientemente grande, possiamo sostituire  $M$  con  $\tilde{M}$  nella stima precedente. Dunque, su una semiretta non parallela alle semirette del bordo, per  $|z| \rightarrow +\infty$  esistono cerchi sempre più grandi di centro  $z$  tutti contenuti in  $\Sigma_n$  e quindi per la stima precedente  $\left| \frac{df}{dz} \right|$  tende a zero. Poiché  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  sono limitate in ogni sottoinsieme chiuso contenuto in  $\Sigma_n$  (sempre grazie alle stime precedenti), si ha che anche le derivate seconde tendono a zero e quindi anche  $\left| \frac{d^2 f}{dz^2} \right|$  tende a zero. Si ripete allo stesso modo per tutte le derivate di ordine superiore.  $\square$

Inoltre,  $|\operatorname{Re} f|$  e  $|f^{(k)}(z)|$ , per  $k = 1, \dots, 2n$ , sono limitate all'infinito, poiché lo sono  $\varphi$  e tutte le sue derivate. Sia ora

$$F(z) = L(D)f(z).$$

Allora  $F$  gode delle seguenti proprietà:

1.  $\operatorname{Re} F(z) = 0$  sulla frontiera di  $\Sigma_n$ ;
2. Nell'origine  $F$  è regolare o ammette un polo di ordine  $2n$ ;
3.  $|F(z)|$  è limitata all'infinito.

Per la prima proprietà e poiché  $\omega = \frac{\pi}{2n}$ ,  $F(z)$  può essere estesa con continuità su tutto il piano complesso attraverso delle riflessioni, e le altre due proprietà si conservano anche per l'estensione. Inoltre  $\operatorname{Re} F(z) = 0$  se  $z = re^{i\frac{k\pi}{2n}}$ , per  $k = 1, \dots, 4n$ . Dunque,  $F(z)$  può essere unicamente della forma

$$F(z) = \frac{A_{2n}i}{z^{2n}}, \quad \text{con } A_{2n} \in \mathbb{R},$$

con  $A_{2n}$  che può essere anche zero, e non possono essere presenti costanti additive poiché  $F$  tende a zero quando  $|z| \rightarrow \infty$  lungo ogni semiretta interna a  $\Sigma_n$ . L'espressione sopra può essere riscritta come

$$\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1} D^n (\alpha_2 D - 1) (\alpha_4 D - 1) \dots (\alpha_{2n} D - 1) f(z) = \frac{A_{2n}i}{z^{2n}}.$$

Poiché  $\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1} \in \mathbb{R}$ , integrando  $n$  volte si ottiene che

$$(\alpha_2 D - 1) (\alpha_4 D - 1) \dots (\alpha_{2n} D - 1) f(z) = \frac{A}{z^n} i, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}, \quad (3.1.15)$$

in quanto le  $\left| \frac{d^k f}{dz^k} \right|$ , per  $k = 1, \dots, 2n$ , vanno a zero all'infinito grazie al lemma 3.1 sulle semirette non parallele ai bordi, perciò le costanti di integrazione si annullano per le prime  $n - 1$  integrazioni, mentre imponiamo che l' $n$ -esima sia nulla: se non fosse nulla, sarebbe un numero immaginario puro, poiché  $\operatorname{Re}(\alpha_{2n} D - 1)f = 0$  e poiché l'operatore  $P_1''(D) = (\alpha_2 D - 1)(\alpha_4 D - 1) \dots (\alpha_{2n} D - 1)$  ha solo coefficienti reali; quindi la soluzione  $f$  presenterebbe un termine puramente immaginario, che quindi non darebbe nessun contributo alla  $\varphi$ .

Vogliamo quindi trovare una soluzione  $f(z)$  dell'equazione (3.1.15). Come nel caso di acque di profondità infinita, cercheremo due soluzioni  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  che si comportano diversamente vicino all'origine e all'infinito, con  $f^R(z)$  regolare nell'origine e  $f^S(z)$  che ammetta una singolarità logaritmica, e all'infinito si comportano entrambe come  $e^y \cos x$ , ma sono sfasate di  $90^\circ$ . Se imponremo  $A = 0$ , troveremo la prima, ovvero  $f^R(z)$  è soluzione dell'equazione omogenea, mentre se  $A \neq 0$  troveremo la seconda, ovvero la soluzione dell'equazione non omogenea. Dunque tutte le soluzioni saranno della forma  $f(z) = a_1 f^R(z) + a_2 f^S(z)$ .

Iniziamo con lo studio della soluzione  $f^R$ .

**Teorema 3.2.** *La soluzione dell'equazione (3.1.15) nel caso omogeneo è data da*

$$f^R(z) = C \sum_{k=1}^n c_k e^{z\beta_k}, \quad (3.1.16)$$

dove

$$\begin{aligned}\beta_k &= e^{i\pi\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2}\right)}, & k &= 1, \dots, n, \\ c_k &= e^{i\pi\left(\frac{n+1}{4} - \frac{k}{2}\right)} \prod_{j=1}^{k-1} \cot \frac{j\pi}{2n}, & k &= 2, \dots, n, \\ c_1 &= \overline{c_n},\end{aligned}$$

con la costante  $C \in \mathbb{R}$  che può essere scelta in modo arbitrario.

*Dimostrazione.* La soluzione generale dell'equazione

$$\left[ \prod_{k=1}^n \left( e^{-i\pi\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2}\right)} D - 1 \right) \right] f = 0$$

è data da

$$f^R(z) = C \sum_{k=1}^n c_k e^{z\beta_k}.$$

Dunque è sufficiente determinare i coefficienti  $c_k$ , che dipenderanno dalle condizioni al contorno

$$\operatorname{Re}(iD - 1)f^R(z) = 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{R}^+, \quad (3.1.17)$$

$$\operatorname{Re}(ie^{-\frac{i\pi}{2n}} D)f^R(z) = 0 \quad \text{per } z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}, r > 0. \quad (3.1.18)$$

Sia

$$H(z) = (iD - 1)f^R(z) = C \sum_{k=1}^n (i\beta_k - 1)c_k e^{z\beta_k} = -C \sum_{k=1}^n \left( e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1 \right) c_k e^{z\beta_k},$$

e osserviamo che il termine per  $k = n$  si annulla e, poiché  $\beta_k = \overline{\beta_{n-k}}$ , si ha, per  $z$  reale,  $e^{z\beta_k} = \overline{e^{z\beta_{n-k}}}$ . La condizione (3.1.17) è quindi equivalente alla  $\operatorname{Re} H(z) = 0$  per ogni  $z$  reale, cioè i coefficienti  $c_k$  devono essere tali che

$$H(z) = -\overline{H(z)} \quad \text{per } z \text{ reale.}$$

Poiché

$$\overline{H(z)} = -C \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\left[ e^{\frac{i(n-k)\pi}{n}} + 1 \right] c_{n-k} e^{z\beta_k}} = C \sum_{k=1}^{n-1} \left( e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1 \right) \overline{c_{n-k}} e^{z\beta_k},$$

se è vera la relazione

$$\left( e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1 \right) c_k = \left( e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1 \right) \overline{c_{n-k}},$$

cioè

$$c_k = i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \overline{c_{n-k}} \quad \text{per } k = 1, \dots, n-1,$$

allora è verificata la condizione (3.1.17).

Per la (3.1.18), sia

$$K(z) = e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} Df^R(z) = \sum_{k=1}^n e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} \beta_k c_k e^{z\beta_k} \quad \text{per } z = re^{-\frac{i\pi}{2n}},$$

e sia

$$L(r) = K\left(re^{-\frac{i\pi}{2n}}\right) = - \sum_{k=1}^n e^{i\pi \frac{2k-1}{2n}} c_k e^{re^{\left[\frac{i\pi}{2n}(2k-1+n)\right]}}.$$

Allora, affinché valga la (3.1.18), deve essere  $\operatorname{Re} L(r) = 0$  per ogni  $r > 0$ .

Poiché

$$\overline{e^{re^{\left[\frac{i\pi}{2n}(2k-1+n)\right]}}} = e^{re^{\left\{\frac{j\pi}{2n}[2(n-k+1)-1+n]\right\}}},$$

deve essere

$$e^{i\pi \frac{2k-1}{2n}} c_k = -\overline{e^{\frac{i\pi}{2n}[2(n-k+1)-1]} c_{n-k+1}} = e^{i\pi \frac{2k-1}{2n}} \overline{c_{n-k+1}},$$

cioè  $c_k = \overline{c_{n-k+1}}$ . Per soddisfare le due condizioni (3.1.17) e (3.1.18), i  $c_k$  devono essere tali che

$$c_k = i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \overline{c_{n-k}} \quad \text{per } k = 1, \dots, n-1,$$

$$c_k = \overline{c_{n-k+1}} \quad \text{per } k = 1, \dots, n.$$

Da queste relazioni, si ottiene la relazione ricorsiva

$$c_{n-k} = i \overline{c_k} \cot\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = i c_{n-k+1} \cot\left(\frac{k\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

che porta a

$$c_{n-k} = i^k c_n \prod_{j=1}^k \cot\left(\frac{j\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Ma, poiché  $c_1 = \overline{c_n}$  e poiché  $\cot\left(\frac{j\pi}{2n}\right) \cot\left(\frac{(n-j)\pi}{2n}\right)$ , allora  $c_1 = i^{n-1} c_n$  e dunque

$$\overline{c_n} = i^{n-1} c_n \Rightarrow \frac{c_n}{|c_n|} = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \Rightarrow c_n = re^{-\frac{i\pi}{4}(n-1)}$$

per qualsiasi  $r > 0$  e perciò

$$c_1 = i^{n-1} c_n,$$

$$c_k = i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \overline{c_{n-k}} = re^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{ik\pi}{2}} e^{i\pi \frac{n-1}{4}} \prod_{j=1}^{k-1} \cot\left(\frac{j\pi}{2n}\right) =$$

$$= re^{i\pi\left(\frac{n+1}{4} - \frac{k}{2}\right)} \prod_{j=1}^{k-1} \cot\frac{j\pi}{2n}, \quad k = 2, \dots, n.$$

□

Per motivi che verranno esposti in seguito, sceglieremo  $C = \frac{\pi}{(n-1)!\sqrt{n}}$ . Poiché tutti i  $\beta_k$  tranne  $\beta_n$  hanno parte reale negativa, per  $|z| \rightarrow +\infty$  l'unico termine di  $f^R(z)$  che non va a zero è quello per  $k = n$ , ovvero  $c_n e^{-iz}$ . Inoltre questo termine tende a zero su ogni semiretta di  $\Sigma_n$  tranne su quelle parallele all'asse  $x$ . Il comportamento asintotico di  $f^R(z)$  è dunque

$$f^R(z) \sim \frac{\pi}{(n-1)!\sqrt{n}} c_n e^{-iz}.$$

Per quanto riguarda la soluzione  $f^S(z)$  si ha il seguente teorema

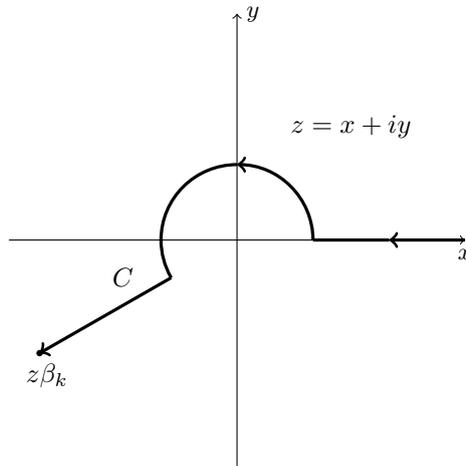


Figura 3.2: Il cammino di integrazione  $C$

**Teorema 3.3.** *La soluzione dell'equazione (3.1.15) nel caso non omogeneo con  $A = 1$  è data da*

$$f^S(z) = \sum_{k=1}^n a_k \left[ e^{z\beta_k} \int_{+\infty}^{z\beta_k} \frac{e^{-t}}{t} dt - \pi i e^{z\beta_k} \right], \quad (3.1.19)$$

con  $\beta_k, c_k$  definiti come prima e

$$a_k = \frac{c_k}{(n-1)!\sqrt{n}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Gli  $a_k$  sono unici a meno di moltiplicazione per un numero reale. Il cammino di integrazione è quello definito nella figura 3.2, con  $z\beta_k$  che rimane all'interno del semipiano sinistro complesso.

**Osservazione 3.4.** *Osserviamo che, per ottenere la soluzione per  $A$  qualsiasi, basta moltiplicare la (3.1.19) per  $A$ .*

*Dimostrazione.* Intanto la (3.1.19) è soluzione, grazie anche alla scelta degli  $a_k$ . Mostriamo che soddisfa le condizioni al contorno. Dobbiamo dimostrare quindi che

$$\operatorname{Re}(iD - 1)f^S(z) = 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{R}^+, \quad (3.1.20)$$

$$\operatorname{Re}(ie^{-\frac{i\pi}{2n}}D)f^S(z) = 0 \quad \text{per } z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}, r > 0. \quad (3.1.21)$$

Poniamo

$$A_k = e^{z\beta_k} \int_{+\infty}^{z\beta_k} \frac{e^{-t}}{t} dt - \pi i e^{z\beta_k},$$

ed otteniamo

$$(iD - 1)f^S(z) = \sum_{k=1}^n (i\beta_k - 1)a_k A_k + \frac{i}{z} \sum_{k=1}^n a_k = M(z) + \frac{i}{z} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Poiché  $c_k = \overline{c_{n-k+1}}$ , la quantità  $\sum_{k=1}^n a_k$  è reale. Dunque, se  $z$  è reale,

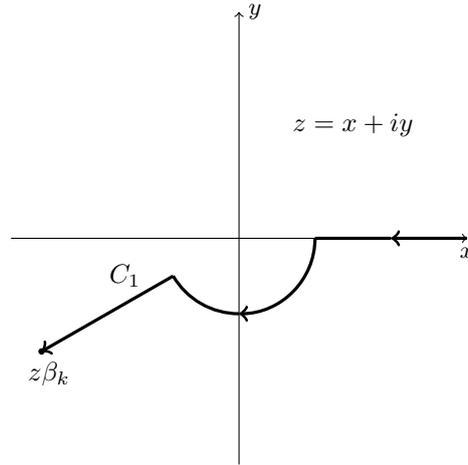


Figura 3.3: Il cammino di integrazione  $C_1$

$\frac{i}{z} \sum_{k=1}^n a_k$  è immaginario puro. Dunque, per ottenere la (3.1.20), gli  $a_k$  devono essere scelti in modo tale che  $\operatorname{Re} M(z) = 0$  per  $z$  reale, ovvero  $M(z) = -\overline{M(z)}$ . Sia  $C$  il cammino indicato dalla figura 3.2 e sia  $C_1$  quello indicato dalla figura 3.3. Poiché il residuo in zero di  $\frac{e^{-t}}{t}$  è 1, ricaviamo

$$A_k = e^{z\beta_k} \left[ \int_C \frac{e^{-t}}{t} dt - \pi i \right] = e^{z\beta_k} \left[ \int_{C_1} \frac{e^{-t}}{t} dt + \pi i \right].$$

Allora  $A_k$  e  $A_{n-k}$  sono complessi coniugati per  $z$  reale: infatti, lo sono  $e^{z\beta_k}$  e  $e^{z\beta_{n-k}}$ , e dunque anche  $-ie^{z\beta_k}$  e  $ie^{z\beta_{n-k}}$ , e per  $n - k$  l'integrale lungo  $C_1$

è il coniugato dell'integrale lungo  $C$  per  $k$ , in quanto la funzione integranda rimane la stessa mentre i cammini di integrazione sono uno il coniugato dell'altro. Dunque ci basta dimostrare che

$$(i\beta_k - 1)a_k = -\overline{(i\beta_{n-k} - 1)a_{n-k}},$$

ma questa relazione è già stata dimostrata per i  $c_k$  nella dimostrazione del teorema precedente, e dunque vale la (3.1.20).

Per dimostrare la (3.1.21), osserviamo che

$$\begin{aligned} e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} Df^S(z) &= \sum_{k=1}^n e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} \beta_k a_k A_k + z^{-1} e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} \sum_{k=1}^n a_k = \\ &= N(z) + z^{-1} e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} \sum_{k=1}^n a_k, \text{ per } z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Il secondo addendo è un numero reale per  $z = re^{-i\frac{\pi}{2n}}$ , poiché  $\sum_{k=1}^n a_k$  è reale. Si può inoltre osservare che  $\operatorname{Re} N(z) = 0$ , per un procedimento analogo a quello visto in precedenza per  $M(z)$ , anche se confrontando i termini in modo diverso. Si ottiene infatti che

$$e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} \beta_k a_k A_k = -\overline{e^{i\pi \frac{n-1}{2n}} \beta_{n-k+1} a_{n-k+1} A_{n-k+1}},$$

quindi vale anche la (3.1.21), dunque la  $f^S(z)$  è soluzione dell'equazione (3.1.15) nel caso non omogeneo per  $A = 1$ .  $\square$

Vogliamo studiare il comportamento all'infinito di  $f^S(z)$ . Si ha questo lemma

**Lemma 3.5.** *Per  $z$  appartenente al settore  $-\frac{\pi}{2n} \leq \arg z \leq 0$  si ha*

$$\int_{+\infty}^{z\beta_k} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \begin{cases} \sum_{k=1}^N (-1)^n (n-1)! \frac{e^{-z\beta_k}}{(z\beta_k)^N} + O\left(\left|\frac{e^{-z\beta_k}}{z^{N-1}}\right|\right), & \text{se } \arg z\beta_k \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 2\pi i + \sum_{k=1}^N (-1)^n (n-1)! \frac{e^{-z\beta_k}}{(z\beta_k)^N} + O\left(\left|\frac{e^{-z\beta_k}}{z^{N-1}}\right|\right), & \text{se } \arg z\beta_k \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]. \end{cases} \quad (3.1.22)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso  $\frac{\pi}{2} < \arg z\beta_k \leq \pi$ , con  $z \in \Sigma_n$ . Integrando per parti  $N$  volte si ha

$$\int_{+\infty}^{z\beta_k} \frac{e^{-t}}{t} dt = \sum_{k=1}^N (-1)^n (n-1)! \frac{e^{-z\beta_k}}{(z\beta_k)^N} + (-1)^{N+1} N! \int_{+\infty}^{z\beta_k} \frac{e^{-t}}{t^N} dt.$$

Vogliamo ora mostrare che

$$\left| \int_{+\infty}^{z\beta_k} \frac{e^{-t}}{t^N} dt \right| \leq c \left| \frac{e^{-z\beta_k}}{z^{N-1}} \right|,$$

con  $c$  costante positiva indipendente da  $z$ , e questo ci basta per dimostrare il primo caso.

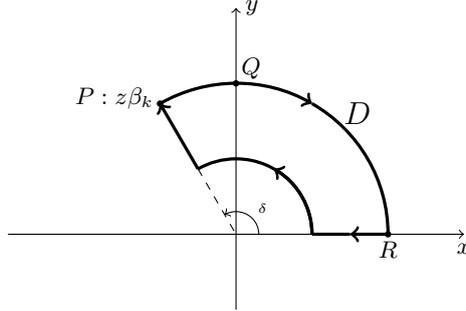


Figura 3.4: Il cammino di integrazione  $D$

Consideriamo l'integrale

$$\int_D \frac{e^{-t}}{t^N} dt,$$

dove  $D$  è il cammino mostrato in figura 3.4. Poiché  $D$  è una curva chiusa che non circonda l'origine, l'integrale è nullo. Quindi il comportamento dell'integrale lungo  $C$  (vedi figura 3.2) per  $z \rightarrow +\infty$  è lo stesso dell'integrale  $I$  lungo l'arco  $PQR$  per  $r \rightarrow +\infty$ , con  $r$  raggio dell'arco, e  $I$  è dato da

$$I = i \int_0^\delta e^{-r \cos \theta} e^{-ri \sin \theta} \frac{d\theta}{(re^{i\theta})^{N-1}},$$

dove  $\delta = \arg z\beta_k$ . Ma, poiché  $e^{-r \cos \theta} \leq e^{-r \cos \delta}$  per  $0 \leq \theta \leq \delta \leq \pi$ ,

$$|I| \leq \left| \int_0^\delta \frac{1}{r^{N-1}} e^{-r \cos \theta} d\theta \right| \leq \frac{e^{-r \cos \delta}}{r^{N-1}} \int_0^\delta d\theta = \delta \frac{e^{-r \cos \delta}}{r^{N-1}} \leq \pi \left| \frac{e^{-z\beta_k}}{z^{N-1}} \right|,$$

in quanto  $r = |z\beta_k|$  e

$$|e^{-z\beta_k}| = |e^{-r \cos \delta - ir \sin \delta}| = e^{-r \cos \delta}.$$

Dunque vale la prima di (3.1.22).

Per dimostrare la seconda, se  $\pi < \arg z\beta_k \leq \frac{3}{2}\pi$ , si ha

$$\int_C \frac{e^{-t}}{t} dt = 2\pi i + \int_{C_1} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

dove  $C_1$  è il cammino in figura 3.3. In questo modo, evitiamo di passare per il punto  $(-r, 0)$ , con  $r = |z\beta_k|$ , che ci impedisce di avere delle stime con

un esponenziale negativo, in quanto  $e^{-r \cos \theta}$  vale  $e^r$ . Integrando per parti  $N$  volte,

$$\int_C \frac{e^{-t}}{t} dt = 2\pi i + \sum_{k=1}^N (-1)^k (k-1)! \frac{e^{-z\beta_k}}{(z\beta_k)^N} + (-1)^{N+1} N! \int_{C_1} \frac{e^{-t}}{t^N} dt,$$

Considerando un cammino simile a  $D$  ma nel semipiano inferiore, si ottiene che

$$\int_{C_1} \frac{e^{-t}}{t^N} dt$$

si comporta per  $z \rightarrow +\infty$  come l'integrale  $I'$  che ha come cammino l'arco circolare di raggio  $r$  e  $\pi \leq \delta \leq \theta \leq 2\pi$ , con  $\delta = \arg z\beta_k$ , per  $r \rightarrow +\infty$ . Dato che

$$I' = i \int_{2\pi}^{\delta} e^{-r \cos \theta} e^{-ri \sin \theta} \frac{d\theta}{(re^{i\theta})^{N-1}},$$

otteniamo che

$$|I'| \leq \left| \frac{1}{r^{N-1}} \int_{2\pi}^{\delta} e^{-r \cos \theta} d\theta \right| \leq (2\pi - \delta) \frac{e^{-r \cos \delta}}{r^{N-1}} \leq 2\pi \left| \frac{e^{-z\beta_k}}{z^{N-1}} \right|,$$

dunque si ha la tesi. □

Grazie al Lemma 3.5, si ottiene che il comportamento asintotico di  $f^S(z)$  per  $|z| \rightarrow +\infty$  è dato da

$$f^S(z) \sim \frac{\pi}{(n-1)! \sqrt{n}} c_n i e^{-iz},$$

poiché domina il termine per  $k = n$  in quanto  $\beta_n = -i$ . Quindi è presente all'infinito uno sfasamento fra  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  di  $90^\circ$ . Si ottiene inoltre che le derivate di  $f^S(z)$  si comportano all'infinito come la funzione stessa poiché, derivando, gli unici termini che si ottengono in più sono della forma  $b_k/z^k$ . Infine, è presente nell'origine una singolarità logaritmica. In conclusione,  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  soddisfano tutte le condizioni richieste. Dunque, tutte le soluzioni del problema (3.1.15) sono della forma

$$f(z) = b_1 f^R(z) + b_2 f^S(z),$$

con  $B_1, B_2$  numeri reali. Ogni soluzione deve avere tale forma: infatti, siano  $g(z)$  soluzione del problema,  $f(z)$  come sopra e sia  $G(z) = f(z) - g(z)$ . Dunque  $G$  soddisfa le condizioni al contorno. Poiché  $f$  e  $g$  soddisfano la (3.1.15) con la stessa costante  $A$ , allora  $G$  soddisfa la (3.1.15) con  $A = 0$ ; dunque  $G$  è della forma

$$G(z) = \sum_{k=1}^n B_k e^{z\beta_k},$$

per certi  $B_k$ , cioè non è altro che della stessa forma di  $f^R(z)$ . In conclusione, per differenza, anche  $g$  è della stessa forma di  $f$ .

Possiamo ora concludere che la funzione potenziale reale  $\varphi = \operatorname{Re} f(z)$  è univocamente determinata se sono assegnate ampiezza e fase all'infinito, in quanto si possono scegliere in modo opportuno le costanti  $b_1$  e  $b_2$  e scrivere che  $\varphi(z) = b_1\varphi^R(z) + b_2\varphi^S(z)$ , grazie al fatto che il problema è lineare ed omogeneo. Il comportamento asintotico delle funzioni potenziale reale è dato da

$$\begin{aligned}\varphi^R(x, y) &= \operatorname{Re} f^R(x, y) \sim \frac{\pi}{(n-1)!\sqrt{n}} e^y \cos\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right), \\ \varphi^S(x, y) &= \operatorname{Re} f^S(x, y) \sim \frac{\pi}{(n-1)!\sqrt{n}} e^y \sin\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right).\end{aligned}$$

Ora possiamo costruire le soluzioni per onde stazionarie e per onde progressive che si comportano all'infinito come le onde progressive nel caso di profondità infinita. In particolare, la relazione fra la lunghezza d'onda e la frequenza tenderà asintoticamente alla relazione fra queste grandezze nel caso di profondità infinita: infatti, basta ritornare nello spazio di partenza sostituendo  $x$  e  $y$  con  $mx$  e  $my$ , con  $m = \sigma^2/g$  e osservare il comportamento asintotico delle funzioni potenziale reale.

Una soluzione  $\Phi(x, y, t)$  che si comporta all'infinito come  $e^y \cos(x + t + \alpha)$ , cioè come un'onda progressiva che si muove verso la costa, è della forma

$$\Phi(x, y, t) = A[\varphi^R(x, y) \cos(t + \alpha) - \varphi^S(x, y) \sin(t + \alpha)].$$

### 3.2 Rappresentazioni asintotiche

In questa sezione si vuole studiare il comportamento asintotico delle funzioni  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  per angoli di discesa del fondale  $\omega$  piccoli. Chiamiamo per comodità

$$f_+(z) = \frac{f^S(z) - if^R(z)}{2}, \quad f_-(z) = \frac{f^S(z) + if^R(z)}{2};$$

si ha quindi  $f^R = i(f_+ - f_-)$  e  $f^S = f_+ + f_-$ . Sia inoltre

$$F^P(z, t) = f^S(z) \cos t + f^R(z) \sin t = f_+(z)e^{it} + f_-(z)e^{-it},$$

la funzione potenziale complesso di un'onda progressiva che si muove verso la costa, che quindi estende la  $\Phi$  per le onde progressive.

La rappresentazione ottenuta dipenderà da quale quantità viene fissata mentre  $\omega$  tende a zero. Per prima cosa, possiamo fissare un punto dello spazio  $z$ ; gli unici punti che rimangono all'interno del settore per  $\omega$  arbitrariamente piccolo sono i punti sull'asse  $x$ , ovvero  $z = x$ . Si ottiene che, per  $\omega$  piccolo, possiamo applicare la teoria shallow water vista nella sezione 1.7. Infatti, in

questo caso  $h(x) = qx$ , con  $q = -\tan \omega$ ; dunque, poiché  $\tan \omega \approx \omega$ , si ottiene che  $f^R$  e  $f^S$  si comportano per  $\omega$  piccolo su  $z = x$  rispettivamente come

$$f_1^R(x) = BJ_0 \left( 2\sqrt{\frac{x}{\omega}} \right), \quad f_1^S(x) = BY_0 \left( 2\sqrt{\frac{x}{\omega}} \right), \quad (3.2.1)$$

con  $B$  costante e  $J_0$  e  $Y_0$  funzioni di Bessel. Queste funzioni tendono a zero per  $x \rightarrow +\infty$ , perciò non possono essere una buona approssimazione per  $x$  grande, mentre per punti vicini alla costa la teoria shallow water si adatta molto bene al problema fornendo un'approssimazione adeguata (per risultati numerici, vedi [14]).

Vogliamo ora ottenere una seconda rappresentazione asintotica che possa approssimare in modo accurato il comportamento della soluzione per punti lontani dalla costa. Supponiamo che, mentre  $\omega$  va a zero, il prodotto  $\omega z$  sia fissato. Anche in questo caso, dovremo considerare solamente punti della forma  $z = x$ . Si ottiene che la rappresentazione asintotica di  $f_+$  e  $f_-$  è data da

$$f_{\pm,2}(x) = -(1 \mp \lambda)A(\lambda)e^{\pm i \left[ \frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4} \right]}, \quad (3.2.2)$$

dove  $\lambda$  è in funzione di  $\omega x$  ed è data da

$$\omega x = \lambda \tanh^{-1} \lambda = \frac{1}{2} \lambda \log \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

e  $A(\lambda)$ ,  $k(\lambda)$  e  $j(\lambda)$  sono dati da

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \sqrt{\frac{2\pi\omega}{j(\lambda)}}, \\ k(\lambda) &= \tanh^{-1} \lambda + \int_0^\lambda \frac{\tanh^{-1} \nu}{\nu} d\nu, \\ j(\lambda) &= (1 - \lambda^2)\lambda k'(\lambda) = \lambda + (1 - \lambda^2) \tanh^{-1} \lambda. \end{aligned}$$

La rappresentazione della funzione potenziale complesso  $F^P(z, t)$  per un'onda progressiva che si muove verso la costa è data da

$$F_2^P(x, t) = -(1 - \lambda)A(\lambda)e^{i \left[ \frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4} + t \right]} - (1 + \lambda)A(\lambda)e^{-i \left[ \frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4} + t \right]}.$$

Una volta ottenuta la (3.2.2) si ha che, all'infinito, cioè se  $\omega x \approx +\infty$ , risulta

$$\begin{aligned} \lambda &\approx 1 - 2e^{-2\omega x}, \\ k(\lambda) &\sim \frac{\pi^2}{8} + \omega x, \quad j(\lambda) \sim 1, \quad A(\lambda) \sim \sqrt{2\pi\omega}, \end{aligned}$$

quindi il comportamento della rappresentazione asintotica all'infinito è

$$f_{+,2}(x) \sim 0, \quad f_{-,2}(x) \sim Ce^{-ix},$$

con

$$C = -2\sqrt{2\pi\omega} e^{-i\left[\frac{\pi^2}{8\omega} + \frac{\pi}{4}\right]},$$

e dunque

$$\begin{aligned} f_2^R(x) &\sim -iCe^{-ix}, & f_2^S(x) &\sim Ce^{-ix}, \\ F_2^P(x, t) &\sim 2Ce^{-i(x+t)}. \end{aligned}$$

Invece, il comportamento della rappresentazione asintotica per piccoli valori di  $\omega x$ , poiché

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \sqrt{\omega x}, \\ k(\lambda) &\sim 2\sqrt{\omega x}, & j(\lambda) &\sim 2\sqrt{\omega x}, & A(\lambda) &\sim \sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{1/4}, \end{aligned}$$

è dato da

$$\begin{aligned} f_{\pm,2}(x) &\sim -\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{1/4} e^{\pm i\left[2\sqrt{\frac{x}{\omega}} + \frac{\pi}{4}\right]}, \\ f_2^R(x) &\sim 2\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{1/4} \sin\left(2\sqrt{\frac{x}{\omega}} + \frac{\pi}{4}\right), \\ f_2^S(x) &\sim -2\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{1/4} \cos\left(2\sqrt{\frac{x}{\omega}} + \frac{\pi}{4}\right), \\ F_2^P(x, t) &\sim -2\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{1/4} \cos\left(2\sqrt{\frac{x}{\omega}} + \frac{\pi}{4} + t\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che sia  $f_2^R$  che  $f_2^S$  hanno la stessa singolarità per  $\omega x = 0$ , data da  $(\omega/x)^{1/4}$ , ma mentre  $f^R$  è regolare per  $x = 0$ ,  $f^S$  presenta una singolarità logaritmica. Quindi l'accuratezza delle soluzioni asintotiche decresce per  $x$  che va a zero per un valore fissato di  $\omega$ , mentre aumenta per  $\omega$  che va a zero per un valore fissato di  $\omega x$ . Si osservi che le funzioni  $f_2^R$  e  $f_2^S$  rappresentano le soluzioni asintotiche (3.2.2) per piccoli valori di  $\omega x$ , ma rappresentano anche le soluzioni asintotiche (3.2.1) per  $x$  grande, grazie all'espansione asintotica delle funzioni di Bessel. La dimostrazione della (3.2.2) e lo studio del suo comportamento si trovano nell'appendice B.

Le superfici di elevazione delle onde stazionarie della forma  $f^R(z) \cos t$  e  $f^S(z) \cos t$  sono rappresentate asintoticamente da

$$\begin{aligned} \eta_2^R(x, t) &= -2A(\lambda) \sin\left(\frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4}\right) \sin t, \\ \eta_2^S(x, t) &= 2A(\lambda) \cos\left(\frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4}\right) \sin t. \end{aligned}$$

Chiamiamo *lunghezza d'onda locale* di queste onde superficiali la quantità

$$\Lambda = 2\pi \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-1};$$

questa definizione è giustificata dal fatto che  $\Lambda$  sarebbe la lunghezza d'onda se  $\omega^{-1}k(\lambda)$  fosse proporzionale ad  $x$  e l'onda fosse puramente sinusoidale. Dunque, poiché  $\frac{d\omega x}{d\lambda} = \lambda k'(\lambda)$ , si ha

$$\Lambda = 2\pi \frac{\frac{d\omega x}{d\lambda}}{\frac{dk}{d\lambda}} = 2\pi \lambda.$$

Il coefficiente  $2A(\lambda)$  può essere considerato l'ampiezza delle onde superficiali in funzione della lunghezza d'onda. Si osserva numericamente che questa grandezza ha minimo per  $\omega x = 1$ , tende a infinito per  $\omega x \rightarrow 0$  e per  $\omega x$  che va all'infinito tende al valore  $\sqrt{2\pi\omega}$  (vedi [4]). Per le onde progressive la superficie di elevazione è data da

$$\eta_2^P(x, t) = 2A(\lambda) \sin\left(\frac{k(\lambda)}{\omega} + \frac{\pi}{4} + t\right).$$

Le quantità lunghezza d'onda locale e ampiezza sono le stesse che nel caso stazionario.

Vogliamo ora dare una terza rappresentazione asintotica del problema. Si considerino come fissate le distanze nella direzione  $x$  dalla sezione trasversale  $x = x_0$  in cui la profondità dell'acqua ha un valore  $h_0$  prefissato. In questo modo si ha che la costa tende a  $-\infty$  per  $\omega$  che tende a zero. Se l'angolo  $\omega$  è sufficientemente piccolo, avremo che  $x_0 = \omega^{-1}h_0$ , perciò l'espressione asintotica per  $z = x_0$  sarà esattamente la stessa del caso precedente. Le espressioni asintotiche del terzo tipo in un punto  $z = x$  con  $x = x_0$  possono anch'esse essere ricondotte a quelle del secondo tipo: infatti ad  $x - x_0$  fissato corrisponde  $\omega x - \omega x_0 = \omega x - h_0$ , che va a zero per  $\omega \rightarrow 0$ , quindi il primo termine delle espansioni rispetto alle potenze di  $\omega x - h_0$  delle espressioni del secondo tipo ci conduce alle espressioni cercate. Poiché  $\frac{d\omega x}{d\lambda} = \lambda k'(\lambda)$ , si ha  $\frac{d}{d\omega x}k(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ; dunque

$$k(\lambda) = k(\lambda_0) + \frac{1}{\lambda_0}(\omega x - h_0) + o(\omega x - h_0),$$

dove  $\lambda_0$  è dato da  $h_0 = \lambda_0 \tanh^{-1} \lambda_0$  e  $\omega x = \lambda \tanh^{-1} \lambda$ . In conclusione, la terza rappresentazione asintotica è derivata dalla (3.2.2) ed è

$$f_{\pm,3}(x) = -(1 \mp \lambda_0)A(\lambda_0)e^{\pm i\left[\frac{k(\lambda_0)}{\omega} + \frac{\pi}{4}\right]}e^{\pm i\frac{x-x_0}{\lambda_0}}, \quad (3.2.3)$$

per punti della forma  $z = x$ . È possibile estendere la rappresentazione a tutti i punti vicini a  $z = x_0$  con

$$f_{\pm,3}(z) = -(1 \mp \lambda_0)A(\lambda_0)e^{\pm i\left[\frac{k(\lambda_0)}{\omega} + \frac{\pi}{4}\right]}e^{\pm i\frac{z-x_0}{\lambda_0}}, \quad -h_0 \leq y \leq 0.$$

Dunque le onde stazionarie sono rappresentate da

$$\begin{aligned} f_3^R(z) &= i(1 - \lambda_0)C_0 e^{i\frac{z-x_0}{\lambda_0}} - i(1 + \lambda_0)\overline{C_0} e^{-i\frac{z-x_0}{\lambda_0}}, \\ f_3^S(z) &= (1 - \lambda_0)C_0 e^{i\frac{z-x_0}{\lambda_0}} + (1 + \lambda_0)\overline{C_0} e^{-i\frac{z-x_0}{\lambda_0}}, \end{aligned}$$

con

$$C_0 = A(\lambda_0) e^{i\left[\frac{k(\lambda_0)}{\omega} + \frac{\pi}{4}\right]}.$$

Queste onde sono la sovrapposizione di due onde stazionarie con lunghezza d'onda  $2\pi\lambda_0$ . Osserviamo che la relazione  $h_0 = \lambda_0 \tanh^{-1} \lambda_0$  non è altro che la relazione che accomuna lunghezza d'onda e profondità nel caso, visto nel precedente capitolo, di profondità costante  $h_0$  e che  $f_3^R$  e  $f_3^S$  non sono altro che soluzioni di quel problema. Per angoli  $\omega$  piccoli, possiamo utilizzare questa relazione per ottenere la variazione di lunghezza d'onda. L'espressione asintotica delle onde progressive che si muovono verso la costa è data da

$$X_3^P(z, t) = -(1 - \lambda_0)C_0 e^{i\left(\frac{z-x_0}{\lambda_0} + t\right)} + (1 + \lambda_0)\overline{C_0} e^{i\left(-\frac{z-x_0}{\lambda_0} + t\right)}.$$

Se ci muoviamo dalla superficie dell'acqua verso il fondale, il primo termine cresce come  $e^{-y}$  mentre il secondo termine decresce come  $e^y$ . Inoltre, se  $x$  va all'infinito, cioè  $h_0$  va all'infinito e dunque  $\lambda_0$  tende a 1, si ha che il primo termine va a zero mentre il secondo tende ad un'onda con ampiezza  $2\sqrt{2}\pi\omega$ . Se invece  $x$  va a zero, entrambi i termini presentano la stessa ampiezza. Si ottiene, in conclusione, che la rappresentazione (3.2.3) è l'espressione asintotica più corretta per valori piccoli dell'angolo  $\omega$ .

### 3.3 Il caso tridimensionale generale

In questa sezione si vuole studiare il problema tridimensionale, con angolo di discesa della spiaggia  $\omega$  arbitrario. Ci interessiamo alla ricerca di onde periodiche che si comportino all'infinito come onde progressive. Supponiamo che l'asse  $y$  sia ascendente. Cerchiamo quindi una funzione potenziale della forma

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i(\sigma t + kz)} \varphi(x, y), \quad (3.3.1)$$

e la condizione all'infinito impone che

$$\Phi(x, y, z, t) \sim e^{i(\sigma t + kz + \alpha x)} e^{\frac{\sigma^2}{g} y},$$

con  $k$  e  $\alpha$  arbitrari. Affinché la  $\Phi$  sia armonica, dev'essere

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2 \varphi = 0, \quad (3.3.2)$$

e le condizioni al contorno diventano

$$\begin{aligned} \varphi_y - m\varphi &= 0, & y &= 0, & m &= \frac{\sigma^2}{g}, \\ \varphi_n &= 0, & y &= -x \tan \omega. \end{aligned}$$

Introduciamo come prima le quantità  $x_1 = mx$ ,  $y_1 = my$ ,  $\alpha_1 = \alpha/m$  e  $k_1 = k/m$  e le equazioni precedenti possono essere riscritte come

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2\varphi = 0, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad (3.3.3)$$

$$\varphi_y - \varphi = 0, \quad y = 0, \quad (3.3.4)$$

$$\varphi_n = 0, \quad y = -x \tan \omega, \quad (3.3.5)$$

dove per semplicità si sono scritte le nuove variabili senza indici. Poiché dev'essere  $\varphi \sim e^{i\alpha x + my} = e^{i\alpha_1 x_1 + y_1}$  all'infinito, per la (3.3.2) si ha  $-\alpha^2 + m^2 - k^2 = 0$ , cioè  $\alpha_1^2 + k_1^2 = 1$ , e dunque  $0 \leq k_1 \leq 1$ . Vogliamo inoltre che le derivate della soluzione si comportino asintoticamente come le derivate dello sviluppo asintotico. Da quanto visto in precedenza, infine, sappiamo che dobbiamo ammettere la presenza di singolarità logaritmiche nell'origine.

Cerchiamo dunque delle funzioni  $\varphi(x, y)$  che soddisfino le condizioni (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) e che siano parte reale o immaginaria di una funzione complessa  $f(z, \bar{z})$  analitica in  $z = x + iy$  e in  $\bar{z} = x - iy$  (e  $z$  non è più la variabile spaziale). Mentre nel caso in dimensione due ci bastava una  $f$  che fosse dipendente solo da  $z$ , ora potrà dipendere anche da  $\bar{z}$ , in quanto la funzione  $\varphi$  non è più analitica. Calcoliamo per comodità alcune derivate:

$$\begin{aligned} f_x &= f_z z_x + f_{\bar{z}} \bar{z}_x = f_z + f_{\bar{z}}, & f_y &= f_z z_y + f_{\bar{z}} \bar{z}_y = i(f_z - f_{\bar{z}}), \\ f_{xx} + f_{yy} &= 4f_{z\bar{z}}. \end{aligned}$$

Dunque la (3.3.3) può essere sostituita dalla

$$f_{z\bar{z}} - \frac{k^2}{4}f = 0,$$

poiché la parte reale o la parte immaginaria è soluzione della (3.3.3). Con il metodo di separazione delle variabili si ottiene che una soluzione particolare è data da

$$f(z, \bar{z}) = e^{\zeta z + \frac{k^2}{4} \frac{\bar{z}}{\zeta}}, \quad \text{con } \zeta = \text{cost.},$$

e, se  $\zeta = -i$ ,

$$f = e^{\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)y} e^{-i\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)x},$$

che è soluzione di (3.3.3) e si comporta all'infinito come richiesto. Si possono anche ottenere molte altre soluzioni moltiplicando la soluzione per una funzione analitica  $g(\zeta)$  e integrando lungo un cammino  $P$  nel piano complesso, cioè

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{z\zeta + \frac{k^2}{4} \frac{\bar{z}}{\zeta}} g(\zeta) d\zeta. \quad (3.3.6)$$

Cerchiamo quindi una funzione  $g(\zeta)$  e un cammino  $P$  tali che vengano soddisfatte le condizioni al contorno e la condizione all'infinito.

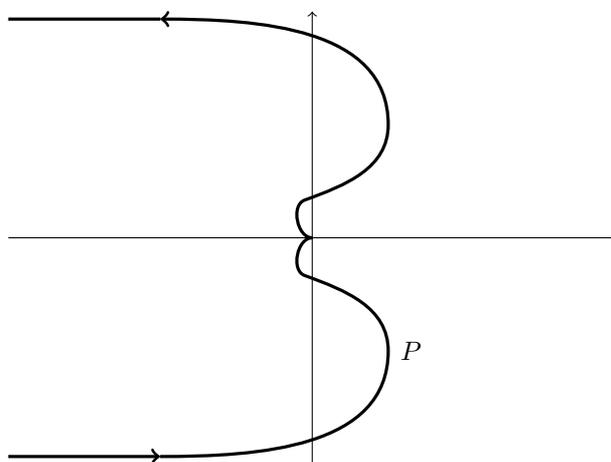


Figura 3.5: Il cammino di integrazione  $P$

Scegliamo come  $P$  un cammino come quello indicato in figura 3.5, che ha le seguenti proprietà: è simmetrico rispetto all'asse reale, va all'infinito attraverso direzioni parallele all'asse reale, passa per l'origine tangenzialmente all'asse reale e dal semipiano sinistro (in modo tale che il termine  $e^{\bar{z}/\zeta}$  non faccia divergere l'integrale) e lascia alla sua sinistra un certo numero di poli di  $g(\zeta)$ . Supporremo che  $g(\zeta)$  sia definita nel piano complesso tranne lungo la semiretta reale negativa. Attraverso la scelta di  $P$ , otterremo un'equazione funzionale per  $g$  attraverso l'uso delle condizioni al contorno, e viceversa una soluzione dell'equazione funzionale per  $g(\zeta)$  ci permette di arrivare ad una  $\varphi(x, y) = \operatorname{Re} f(z, \bar{z})$  che soddisfi le condizioni al contorno. Cerchiamo un'equazione funzionale che sia definita e regolare sul dominio tranne che per dei poli presenti solo nel semipiano sinistro e dei poli del prim'ordine sulla semiretta immaginaria negativa; inoltre all'infinito deve comportarsi come  $1/\zeta$ . Osserviamo che, se deformiamo  $P$  in modo tale da avvicinare la parte superiore e la parte inferiore alla semiretta reale negativa, bisognerà tener conto dei residui nei poli. Per i poli della semiretta immaginaria negativa i residui sono della forma

$$g(-ri)e^{-irz - \frac{k^2}{4} \frac{\bar{z}}{ir}}, \quad r > 0,$$

per i rimanenti poli il loro contributo è trascurabile per  $\operatorname{Re} z$  grande.

Iniziamo imponendo le condizioni al contorno: la (3.3.4) diventa

$$\operatorname{Im}(f_z - f_{\bar{z}} + if) = \operatorname{Re}[i(-if_y + if)] = \operatorname{Re}(f_y - f) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

mentre la (3.3.5) diventa

$$\operatorname{Im}(f_z e^{-i\omega} - f_{\bar{z}} e^{i\omega}) = 0, \quad z = r e^{-i\omega}, \quad r > 0,$$

poiché

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f_z e^{-i\omega} - f_{\bar{z}} e^{i\omega}) &= \operatorname{Re}\{i[(f_z - f_{\bar{z}}) \cos \omega - i(f_z + f_{\bar{z}}) \sin \omega]\} = \\ &= \operatorname{Re}[(f_z + f_{\bar{z}}) \sin \omega + i(f_z - f_{\bar{z}}) \cos \omega] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial f}{\partial n} \right]. \end{aligned}$$

Imponendo che la  $f(z, \bar{z})$  sia della forma (3.3.6), le due condizioni al contorno si riscrivono come

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{z\zeta + \frac{k^2}{4} \frac{\bar{z}}{\zeta}} \left( \zeta - \frac{k^2}{4\zeta} + i \right) g(\zeta) d\zeta \right] = 0, \quad z \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3.7)$$

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{z\zeta + \frac{k^2}{4} \frac{\bar{z}}{\zeta}} \left( \zeta e^{-i\omega} - \frac{k^2}{4\zeta} e^{i\omega} \right) g(\zeta) d\zeta \right] = 0, \quad z = r e^{-i\omega}, \quad r > 0. \quad (3.3.8)$$

Affinché valga la (3.3.7), è sufficiente trovare una  $g(\zeta)$  che soddisfi la

$$\operatorname{Im} \left( \zeta - \frac{k^2}{4\zeta} + i \right) g(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^+; \quad (3.3.9)$$

infatti, se vale la (3.3.9), la funzione integranda  $G(z, \bar{z}, \zeta)$  in (3.3.7) è reale per  $z$  reale e  $\zeta \in \mathbb{R}^+$ , quindi, per il principio di riflessione di Schwarz, si ha che  $G(z, \bar{z}, \zeta)$  e  $G(z, \bar{z}, \bar{\zeta})$  sono tra loro coniugati. Poiché  $P$  è simmetrico rispetto all'asse reale, l'integrale  $\frac{1}{2\pi i} \int_P G d\zeta$  è reale e dunque vale la (3.3.9). Per ottenere una forma analoga della (3.3.9) per l'altra condizione, sia  $s = \zeta e^{-i\omega}$ , e se  $z = r e^{-i\omega}$ , allora la (3.3.8) diventa

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{P'} e^{rs + \frac{k^2 r}{4s}} \left( s - \frac{k^2}{4s} \right) g(s e^{i\omega}) e^{i\omega} ds \right] = 0, \quad r > 0,$$

dove  $P'$  è il cammino  $P$  ruotato in senso orario attorno all'origine di un angolo  $\omega$  (e ruotiamo anche la semiretta negativa che avevamo escluso dall'insieme di definizione di  $g(\zeta)$ ). Se  $g$  si comporta bene all'infinito (lo vedremo in seguito) e se la rotazione non esclude qualche polo di  $g(\zeta)$ , allora possiamo riutilizzare  $P$  al posto di  $P'$  e scrivere

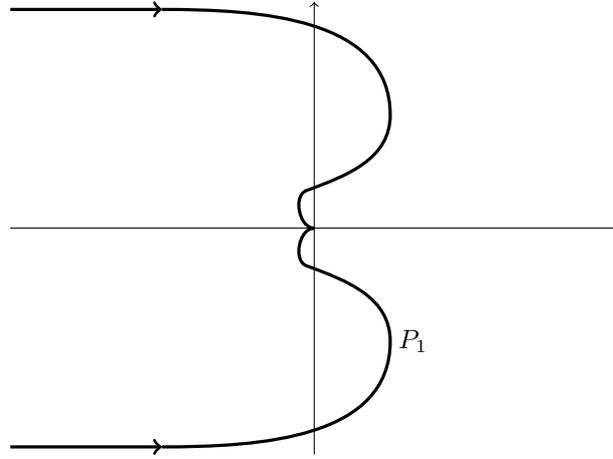
$$\operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{rs + \frac{k^2 r}{4s}} \left( s - \frac{k^2}{4s} \right) g(s e^{i\omega}) e^{i\omega} ds \right] = 0, \quad r > 0.$$

Con un argomento analogo a quello visto prima, si ottiene che, affinché valga la (3.3.8), basta trovare una  $g(\zeta)$  che soddisfi la

$$\operatorname{Im} g(\zeta e^{i\omega}) e^{i\omega} = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^+. \quad (3.3.10)$$

Dunque la  $f(z, \bar{z})$  data dalla (3.3.6) soddisfa le condizioni al contorno se per la  $g(\zeta)$  valgono la (3.3.9) e la (3.3.10).

Come nel caso della spiaggia per angoli della forma  $\pi/2n$ , bisogna trovare


 Figura 3.6: Il cammino di integrazione  $P_1$ 

due soluzioni  $\varphi$  e  $\varphi_1$  che siano sfasate all'infinito, in modo tale che una certa combinazione lineare sia la soluzione che all'infinito si comporta come un'onda progressiva. Per definire  $\varphi_1$ , chiamiamo  $P_1$  il cammino indicato in figura 3.6 (che differisce da  $P$  solo nella direzione nel semipiano superiore), sia

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P_1} e^{z\zeta + \frac{k^2}{4}\frac{\bar{z}}{\zeta}} g(\zeta) d\zeta, \quad (3.3.11)$$

e chiamiamo  $\varphi_1(x, y) = \text{Im } f_1(z, \bar{z})$ . Si osserva che, se valgono la (3.3.9) e la (3.3.10), allora  $f_1(z, \bar{z})$  soddisfa le due condizioni al contorno. Inoltre, per  $\text{Re } z$  molto grande e positiva, gli integrali su  $P$  e su  $P_1$  si comportano allo stesso modo (in quanto tutto dipende dal contributo dei poli nella semiretta immaginaria negativa, ma  $P$  e  $P_1$  differiscono solo nel semipiano superiore). Dunque  $\varphi$  e  $\varphi_1$  differiscono per  $\text{Re } z$  grande di un fattore  $i$ , cioè sono sfasate di  $90^\circ$ .

Ci basta quindi trovare una funzione  $g(\zeta)$  che soddisfa le condizioni (3.3.9) e (3.3.10), e che all'infinito abbia un comportamento che permetta di ruotare il cammino di integrazione come prima. Otterremo un'equazione funzionale per  $g(\zeta)$ , sfruttando queste ipotesi. Dalla (3.3.9) si ha che

$$\left(\zeta - \frac{k^2}{4\zeta} + i\right) g(\zeta) = \left(\zeta - \frac{k^2}{4\zeta} - i\right) \overline{g(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3.12)$$

mentre dalla (3.3.10) per il principio di riflessione di Schwarz si ottiene che

$$\overline{g(\zeta)} e^{-i\omega} = g(\zeta e^{2i\omega}) e^{i\omega}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^+; \quad (3.3.13)$$

combinando le due si elimina  $\overline{g(\zeta)}$  ottenendo

$$\left(\zeta - \frac{k^2}{4\zeta} + i\right) g(\zeta) = e^{2i\omega} \left(\zeta - \frac{k^2}{4\zeta} - i\right) g(\zeta e^{2i\omega}). \quad (3.3.14)$$

Questa equazione vale nel caso in cui  $\zeta$  è reale positivo ma, poiché  $g$  è analitica, varrà su tutto il dominio ove è regolare. La (3.3.14) è solo una condizione necessaria affinché valgano le condizioni al contorno; in seguito troveremo una soluzione della (3.3.14) che soddisfa anche le condizioni (3.3.12) e (3.3.13). Cerchiamo quindi una soluzione  $g(\zeta)$  della (3.3.14). Quest'ultima può essere riscritta come

$$\frac{g(\zeta e^{2i\omega})}{g(\zeta)} = e^{-2i\omega} \frac{\zeta^2 + i\zeta - \frac{k^2}{4}}{\zeta^2 - i\zeta - \frac{k^2}{4}} = e^{-2i\omega} \frac{(\zeta + ir_1)(\zeta + ir_2)}{(\zeta - ir_1)(\zeta - ir_2)}, \quad (3.3.15)$$

con  $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - k^2}}{2}$  numeri reali in quanto  $0 \leq k \leq 1$ . Supponiamo che  $g(\zeta)$  possa essere scritto nella forma

$$g(\zeta) = \frac{\zeta h(\zeta)}{(\zeta + ir_1)(\zeta + ir_2)},$$

dove  $h(\zeta)$  è definito per tutto il piano complesso tranne per la semiretta reale negativa. La funzione  $h(\zeta)$  può avere dei poli nel semipiano sinistro, ma si ottiene che solo per i poli di  $g(\zeta)$  in  $\zeta = -ir_1$  e  $\zeta = ir_1$  si presentano dei residui che non tendono a zero per  $\operatorname{Re} z$  che tende a infinito, e ciò ci garantisce che  $f$  va all'infinito come  $Ae^{-iz}$ . Dunque la  $h$  deve soddisfare la

$$\frac{h(\zeta e^{2i\omega})}{h(\zeta)} = e^{-2i\omega} \frac{(\zeta + ir_1 e^{-2i\omega})(\zeta + ir_2 e^{-2i\omega})}{(\zeta - ir_1)(\zeta - ir_2)} = m(\zeta).$$

Definita  $l(\zeta) = \log h(\zeta)$ , l'ultima uguaglianza può essere riscritta come

$$l(e^{2i\omega} \zeta) - l(\zeta) = \log m(\zeta) = w(\zeta). \quad (3.3.16)$$

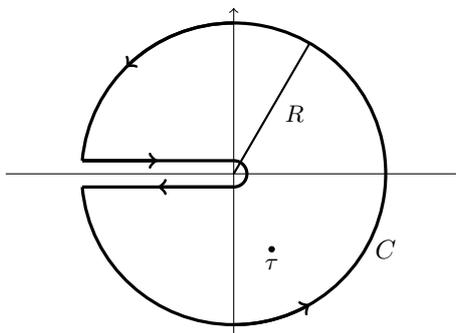
Vogliamo quindi ottenere una  $l(\zeta)$  soluzione senza singolarità nel settore  $-\omega \leq \arg \zeta \leq \omega$ ; dopodiché otterremo  $h(\zeta)$  regolare nello stesso settore che potrà essere estesa analiticamente su tutto il piano complesso tranne per la semiretta reale negativa. Per risolvere la (3.3.16), introduciamo per comodità  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $L$  e  $W$  tali che

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha\pi, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ \zeta &= \tau^\alpha, \quad l(\tau^\alpha) = L(\tau) \quad w(\tau^\alpha) = W(\tau). \end{aligned}$$

Osserviamo che al settore  $-\omega < \arg \zeta < \omega$  corrisponde  $-\pi < \arg \tau < \pi$ . Dunque l'equazione (3.3.16) diventa

$$L(e^{2\pi i} \tau) - L(\tau) = W(\tau). \quad (3.3.17)$$

Supponiamo che  $L(\tau)$  sia una funzione analitica su tutto il piano senza la semiretta reale negativa chiusa (e questo significa che  $l(\zeta)$  è regolare nel


 Figura 3.7: Il cammino di integrazione  $C$ 

settore  $-\omega \leq \arg \zeta \leq \omega$ ; dunque, tramite la formula di Cauchy,  $L(\tau)$  può essere scritta tramite la

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{L(\xi)}{\xi - \tau} d\xi, \quad (3.3.18)$$

ove  $C$  è il cammino indicato in figura 3.7. Se supponiamo inoltre che  $L(\xi)$  vada a zero rapidamente almeno come  $1/\xi$  all'infinito, possiamo far tendere il raggio  $R$  della parte circolare di  $C$  all'infinito, ottenendo che

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rightarrow} \frac{L(\xi)}{\xi - \tau} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\leftarrow} \frac{L(\xi)}{\xi - \tau} d\xi,$$

dove le frecce rappresentano le semirette reali negative nelle direzioni indicate. Dalla (3.3.17) si ottiene che

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{W(\xi)}{\xi - \tau} d\xi, \quad (3.3.19)$$

con  $W(\xi)$  valutata per  $\arg \xi = -\pi$ . Poiché  $W(\xi)$  non ha singolarità, ne segue che  $L(\tau)$  è regolare sulla semiretta tranne che per l'origine dove c'è una singolarità logaritmica. Poiché il numeratore nella funzione integranda di (3.3.19) va come  $1/\xi^\alpha$  all'infinito, si ha che  $L(\tau)$  va come  $1/\tau$  all'infinito. Dunque questa funzione soddisfa tutte le ipotesi date. Quindi si ha

$$l(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\log m(\xi^\alpha)}{\xi - \zeta^{\frac{1}{\alpha}}} d\xi. \quad (3.3.20)$$

La soluzione  $l(\zeta)$  è valida solo per  $-\omega \leq \arg \zeta \leq \omega$ , dove è regolare. Dunque  $h(\zeta) = e^{l(\zeta)}$  può essere estesa in modo analitico nel piano complesso tranne per la semiretta reale negativa. Infatti, poiché le uniche singolarità che si possono presentare nel semipiano superiore nascono dalla funzione nel secondo membro della (3.3.15), che sono nei punti  $\zeta = r_{1,2}$ , possiamo prolungare analiticamente la funzione  $h$  in un settore del semipiano superiore

utilizzando la (3.3.15), fino ad arrivare ad ottenere delle singolarità nei punti  $\zeta = r_{1,2}e^{i(2\omega+\frac{\pi}{2})}$ ; di conseguenza, estendendo dove possibile nel semipiano superiore, otterremo delle altre singolarità in  $r_{1,2}e^{i(4\omega+\frac{\pi}{2})}$ ,  $r_{1,2}e^{i(6\omega+\frac{\pi}{2})}$ , ...; possiamo fare la stessa cosa per il semipiano inferiore, grazie alla

$$\frac{h(\zeta e^{-2i\omega})}{h(\zeta)} = \frac{1}{m(\zeta e^{-2i\omega})},$$

ottenendo delle singolarità nei punti  $r_{1,2}e^{-i(2\omega+\frac{\pi}{2})}$ ,  $r_{1,2}e^{-i(4\omega+\frac{\pi}{2})}$ , ... . Pertanto l'estensione di  $h(\zeta)$  presenta poli nel semipiano sinistro nei cerchi di raggio  $r_1$  e  $r_2$  e nell'origine. Dunque la  $g(\zeta)$  ha delle singolarità negli stessi punti di  $h(\zeta)$  tranne l'origine che è regolare; inoltre sono presenti due poli semplici in  $-ir_1$  e  $-ir_2$ .

Poiché  $l(\zeta)$  si comporta come  $1/\zeta^{\frac{1}{\alpha}}$  nel settore, allora  $h(\zeta) = e^{l(\zeta)}$  è limi-

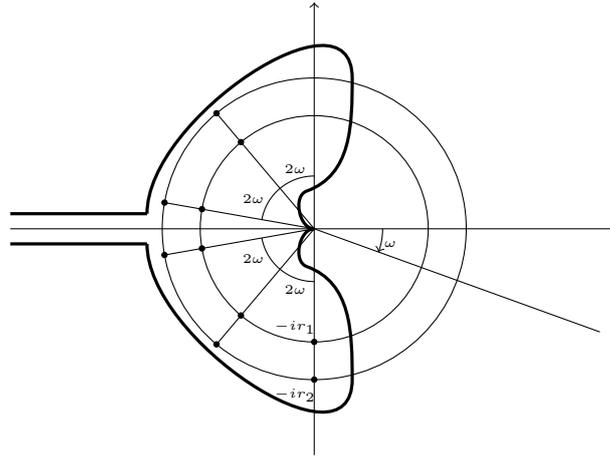


Figura 3.8

tata all'infinito, e per la (3.3.15) essa è limitata all'infinito su tutto il piano. Dunque  $g(\zeta)$  soddisfa tutte le proprietà richieste affinché si possano definire  $f$  e  $f_1$ . Si ha dunque che

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{z\zeta + \frac{k^2 \bar{z}}{4\zeta}} \frac{\zeta h(\zeta)}{(\zeta + ir_1)(\zeta + ir_2)} d\zeta, \quad (3.3.21)$$

$$f_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P_1} e^{z\zeta + \frac{k^2 \bar{z}}{4\zeta}} \frac{\zeta h(\zeta)}{(\zeta + ir_1)(\zeta + ir_2)} d\zeta, \quad (3.3.22)$$

dove i cammini  $P$ ,  $P_1$  sono come in figura 3.8 (i punti rappresentano i poli) e le loro direzioni sono come nelle figure 3.5 e 3.6, e  $\varphi(x, y) = \text{Re } f(z, \bar{z})$ ,  $\varphi_1(x, y) = \text{Im } f_1(z, \bar{z})$  sono le soluzioni per onde stazionarie cercate. Poiché  $h(\zeta)$  è limitata all'infinito, e  $\text{Re } z > 0$ , gli integrali  $f$ ,  $f_1$  convergono.

Si osserva inoltre che i cammini di integrazione possono essere ruotati di un angolo  $\omega$ , senza oltrepassare nessuna singolarità e quindi senza variare il valore degli integrali. Mostriamo ora che la  $g(\zeta)$  non solo è soluzione dell'equazione (3.3.14), ma soddisfa anche le condizioni al contorno (3.3.12) e (3.3.13). Per dimostrare la prima, basta vedere che  $l(\zeta)$  definita dalla (3.3.20) è reale se  $\zeta \in \mathbb{R}^+$ . Infatti, a questo punto anche  $h(\zeta)$  soddisfa la stessa proprietà, e quindi  $g(\zeta)$  soddisfa la (3.3.12). Per vedere che  $l(\zeta)$  è reale, basta osservare che, se  $\arg \xi = -\pi$ , allora  $m(\xi^\alpha)$  sta sulla circonferenza unitaria, dunque il suo logaritmo è immaginario puro. Allora dalla (3.3.20) si ha che  $l(\zeta)$  è reale. Inoltre, poiché  $g(\zeta)$  è stato costruito in modo tale da soddisfare la (3.3.14) e poiché vale la (3.3.12), vale anche la (3.3.13).

Infine, il comportamento di  $f$  e  $f_1$  per  $\operatorname{Re} z$  grande è quello cercato. Per provarlo, deformiamo i cammini di integrazione in modo tale che sia il ramo superiore che quello inferiore siano molto vicini alla semiretta reale negativa. Bisogna studiare che tipo di contributo possono dare i residui dei poli che sono stati oltrepassati. Il caso dei poli  $\zeta = -ir_{1,2}$  è già stato trattato, e si è ottenuto che il comportamento dei residui per  $\operatorname{Re} z$  grande è corretto. Per quanto riguarda gli altri poli, ovvero quelli della forma

$$\zeta_n = r_{1,2} e^{\pm i(2n\omega + \frac{\pi}{2})}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

i residui hanno un comportamento della forma  $Ae^{z\zeta_n}$ , ma per  $\arg z \in [-\omega, 0]$  essi tendono a zero per  $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$  nel settore e, come visto per casi simili, il decadimento va come  $1/z$ . Dunque tutte le condizioni su  $f$  e  $f_1$  sono soddisfatte. Osserviamo, comunque, che gli integrali (3.3.21) e (3.3.22) convergono solo se  $\operatorname{Re} z \geq 0$ , dunque la rappresentazione fornita è adeguata solo nel caso in cui  $\omega \leq \frac{\pi}{2}$ . Nel caso  $\omega > \frac{\pi}{2}$ , la soluzione può essere ottenuta ruotando il cammino di integrazione in senso orario di  $90^\circ$ : gli integrali saranno validi per  $\operatorname{Im} z \leq 0$  e dunque le soluzioni valgono per  $0 < \omega \leq \pi$ .

## Capitolo 4

### Il molo

In questo capitolo si vuole studiare il comportamento delle onde marine in prossimità di un molo, che per semplicità considereremo di lunghezza infinita. Ci interesseremo inizialmente allo studio del caso bidimensionale con profondità infinita, mentre successivamente analizzeremo il caso tridimensionale con profondità finita.

#### 4.1 Profondità infinita

Siano  $x, y$  le variabili spaziali con l'asse  $y$  ascendente, e supponiamo che l'asse  $x$  rappresenti la superficie dell'acqua a riposo; inoltre, è presente un molo di lunghezza infinita (e larghezza trascurabile), rappresentato dalla semiretta  $x \leq 0, y = 0$  (vedi figura 4.1).

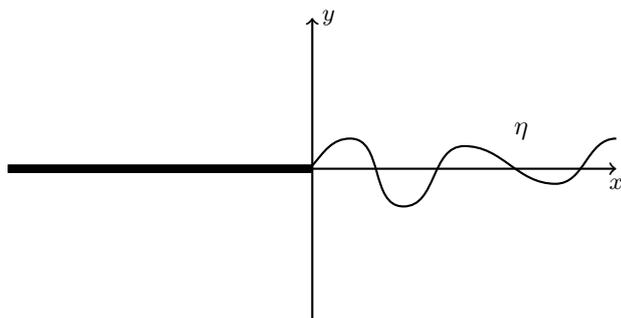


Figura 4.1: Il problema del molo

Per semplicità, supponiamo che la frequenza di oscillazione della superficie dell'acqua e l'accelerazione di gravità abbiano valore 1 (possono essere ottenute tramite un riscaldamento spaziale e temporale, come visto nel capitolo precedente). Inoltre, possiamo associare al potenziale delle velocità, di forma  $\Phi(x, y, t) = e^{it}\varphi(x, y)$ , una funzione a valori complessi  $f(z)$ , con  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , tale che  $\varphi = \text{Re } f$ . La condizione al contorno per la

superficie libera è la stessa nel caso della spiaggia, cioè

$$\operatorname{Im} \left( \frac{d}{dz} f(z) + i f(z) \right) = 0, \quad y = 0, \quad x > 0; \quad (4.1.1)$$

invece, lungo il molo vale la

$$\operatorname{Im} \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) = 0, \quad y = 0, \quad x < 0, \quad (4.1.2)$$

in quanto

$$\operatorname{Im} \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) = -\operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial n} f(z) \right) = 0.$$

Per  $|z| \rightarrow \infty$  richiediamo che l'acqua abbia un moto sinusoidale vicino alla superficie; inoltre, nelle altre direzioni il potenziale delle velocità deve tendere a zero. Dunque, devono esistere due angoli  $\theta_1, \theta_2$  con  $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < 0$  e una costante complessa  $c \neq 0$  tali che

$$\begin{aligned} f(z)e^{iz} &\rightarrow c, & \theta_1 \leq \theta \leq 0, \\ f(z) &\rightarrow 0, & -\pi \leq \theta \leq \theta_2. \end{aligned}$$

Infine, accettiamo la presenza di una singolarità logaritmica nell'origine, cioè può esistere  $k$  costante tale che

$$f(z) - k \log z \quad \text{è limitata in} \quad z = 0.$$

Otterremo dunque due soluzioni: la prima,  $f^R(z)$ , regolare in  $z = 0$  e la seconda,  $f^S(z)$ , con singolarità logaritmica e tale che

$$f^S(z) = -\frac{d}{dz} f^R(z).$$

Il comportamento delle due soluzioni per  $|z|$  che va all'infinito con  $\theta_1 \leq \theta \leq 0$  sarà dato dalle

$$\sqrt{2} f^R(z) - e^{i(\frac{\pi}{8}-z)} \rightarrow 0, \quad (4.1.3)$$

$$\sqrt{2} f^S(z) - i e^{i(\frac{\pi}{8}-z)} \rightarrow 0, \quad (4.1.4)$$

mentre se  $|z|$  va all'infinito con  $-\pi \leq \theta \leq \theta_2$

$$f^R(z) \rightarrow 0, \quad f^S(z) \rightarrow 0.$$

Per  $z \rightarrow 0$ , invece,

$$f^R(z) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (4.1.5)$$

$$f^S(z) - \frac{1}{2\pi} \log(-z) \rightarrow -\frac{1-\gamma}{2\pi}, \quad (4.1.6)$$

con  $\gamma$  costante di Eulero-Mascheroni data da

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-u} \log u \, du \simeq 0,57721 .$$

Dimostreremo che le soluzioni  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  sono date dagli integrali

$$f^R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} \psi(\zeta) d\zeta , \quad (4.1.7)$$

$$f^S(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} \zeta \psi(\zeta) d\zeta , \quad (4.1.8)$$

dove  $\mathcal{P}$  è un qualsiasi cammino nel semipiano inferiore  $\eta \leq 0$  (con  $\zeta = \xi + i\eta$ ) che va da  $\zeta = 0$  a  $\zeta = \infty$  tale che si lascia il punto  $\zeta = -i$  sulla destra e, per  $|\zeta|$  grande,  $\text{Re } \zeta z < 0$  (vedi figura 4.2). I cammini di tale forma saranno detti *ammissibili*.

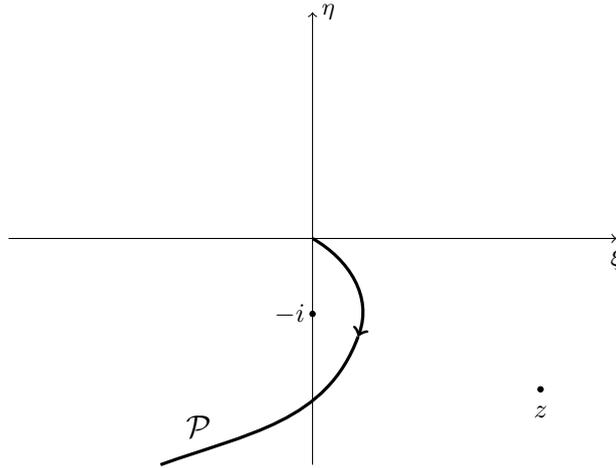


Figura 4.2: Il cammino  $\mathcal{P}$

La funzione  $\psi(\zeta)$ , definita nel semipiano inferiore  $\eta \leq 0$  (con  $\zeta \neq 0$ ) tranne che per  $\zeta = -i$ , dove è presente un polo, è data in modo equivalente dalle

$$\psi(\zeta) = \zeta^{-\frac{1}{2}} (1 - i\zeta)^{-1} (1 + i\zeta)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\zeta} \frac{\log(i\zeta_*)^{-1}}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* \right] , \quad (4.1.9)$$

$$\psi(\zeta) = \zeta^{-2} (1 + i\zeta^{-1})^{-1} (1 - i\zeta^{-1})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\zeta}^{-i\infty} \frac{\log(i\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* \right] , \quad (4.1.10)$$

e vedremo che essa soddisfa le due proprietà

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &\in \mathbb{R} , && \text{per } \zeta \text{ reale positivo} , \\ (\zeta + i)\psi(\zeta) &\in \mathbb{R} , && \text{per } \zeta \text{ reale negativo} . \end{aligned}$$

Le espressioni di (4.1.9) e (4.1.10) sono uguali in quanto

$$\int_0^{-i\infty} \frac{\log(i\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* = \int_0^\infty \frac{\log(i\xi_*)}{\xi_*^2 + 1} d\xi_* = \frac{i\pi}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\xi_*^2 + 1} d\xi_* = \frac{i\pi^2}{4},$$

e dunque

$$\int_\zeta^{-i\infty} \frac{\log(i\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* = \frac{i\pi^2}{4} + \int_0^\zeta \frac{\log(i\zeta_*)^{-1}}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_*,$$

e in quanto

$$\zeta^{-2}(1 + i\zeta^{-1})^{-1}(1 - i\zeta^{-1})^{-\frac{1}{2}} = \zeta^{-\frac{1}{2}}(1 - i\zeta)^{-1}(1 + i\zeta)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Osserviamo inoltre che  $\int_\zeta^{-i\infty} \frac{\log(i\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_*$  è regolare nel semipiano inferiore  $\eta \leq 0$ . Dalla relazione

$$\int_0^{-1} \frac{\log(i\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* = \int_{-i}^{-i\infty} \frac{\log(i\tau)}{\tau^2 + 1} d\tau,$$

ottenuta sostituendo  $\zeta_*$  con  $-1/\tau$ , ricaviamo che

$$\int_0^{-i} \frac{\log(i\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* = \frac{i\pi}{8};$$

dunque  $(\zeta + i)\psi(\zeta)$  è regolare in  $\zeta = -i$  per la (4.1.9) e vale

$$(\zeta + i)\psi(\zeta)|_{\zeta=-i} = \frac{ie^{i\frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2}}.$$

Per come abbiamo costruito il cammino  $\mathcal{P}$  (vedi figura 4.2), troviamo che, grazie alle espressioni (4.1.9) e (4.1.10), le funzioni (4.1.7) e (4.1.8) sono funzioni analitiche nella variabile  $z$  regolari nel semipiano inferiore  $y \leq 0$  (con  $z \neq 0$ ). Vogliamo ora verificare le condizioni al contorno (4.1.1) e (4.1.2). Poiché valgono le

$$\begin{aligned} i \int_0^\zeta \frac{d\zeta_*}{\zeta_*^2 + 1} &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}, & \xi \neq 0, \quad |\zeta| < 1, \\ i \int_\zeta^{+\infty} \frac{d\zeta_*}{\zeta_*^2 + 1} &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + i\zeta^{-1}}{1 - i\zeta^{-1}}, & \xi \neq 0, \quad |\zeta| > 1, \end{aligned}$$

l'espressione (4.1.9) diventa

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \zeta^{-\frac{1}{2}}(1 + \zeta^2)^{-\frac{3}{4}} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\zeta \frac{\log(\zeta_*)^{-1}}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* \right], \\ \psi(\zeta) &= \zeta^{-\frac{1}{2}}(1 - i\zeta)^{-1}(1 + \zeta^2)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\zeta \frac{\log(-\zeta_*)^{-1}}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* \right], \end{aligned}$$

per  $\zeta$  tale che  $\eta \leq 0$  tranne che per la semiretta  $\xi = 0$ ,  $\eta \leq -1$ ; invece la (4.1.10) diventa

$$\psi(\zeta) = \zeta^{-2}(1 + \zeta^{-2})^{-\frac{3}{4}} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\log(\zeta_*)}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* \right],$$

per  $\zeta$  tale che  $\eta \leq 0$  tranne che per la semiretta  $\xi = 0$ ,  $\eta \geq -1$ . Da queste otteniamo che  $\psi(\zeta)$  è reale positiva sull'asse reale positivo  $\xi > 0$ ,  $\eta = 0$  e  $(\zeta + i)\psi(\zeta)$  è reale positiva sull'asse reale negativo  $\xi < 0$ ,  $\eta = 0$ . Se scegliamo come cammino di integrazione  $\mathcal{P}$  la semiretta reale positiva  $\xi > 0$ ,  $\eta = 0$ , allora le quantità  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  sono reali per valori di  $z$  tali che  $x < 0$ ,  $y = 0$ , e dunque vale la condizione al contorno (4.1.2). Per dimostrare la (4.1.1), invece, osserviamo che

$$\left( \frac{d}{dz} + i \right) f^R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} (\zeta + i) \psi(\zeta) d\zeta$$

è regolare per  $\zeta = -i$ . Allora, per  $z$  tale che  $x > 0$ ,  $y = 0$ , possiamo deformare il cammino  $\mathcal{P}$  fino a farlo coincidere con la semiretta reale negativa  $\xi < 0$ ,  $\eta = 0$ . Poiché  $(\zeta + i)\psi(\zeta)$  è reale positiva per  $\xi < 0$ ,  $\eta = 0$ , la quantità  $(\frac{d}{dz} + i)f^R(z)$  è reale, e si può ottenere in modo analogo lo stesso risultato per  $f^S(z)$ . Dunque vale la (4.1.1).

Vogliamo ora studiare il comportamento all'infinito di  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$ . Consideriamo il punto  $z = re^{i\theta}$ , con  $-\pi \leq \theta \leq \theta_2 < 0$ . Dunque la parte reale di  $\zeta z$  è negativa per ogni semiretta  $\zeta = \rho e^{i\lambda}$  con  $\lambda$  fissato tale che  $-\frac{\pi}{2} < \lambda < -\frac{\pi}{2} - \theta_2$ . Una tale semiretta va da zero all'infinito lasciando il punto  $\zeta = -i$  sulla destra, quindi può essere presa come cammino di integrazione  $\mathcal{P}$ . Se facciamo tendere  $z$  all'infinito, abbiamo che solo un intorno di  $\zeta = 0$  contribuisce al valore asintotico degli integrali (4.1.7) e (4.1.8). Poiché  $\psi(\zeta)$  si comporta come  $\zeta^{-2}$  in un intorno dell'origine, allora  $f^R(z)$  va come  $\frac{1}{2\sqrt{-\pi z}}$  per grandi valori di  $z$  e quindi tende a zero per  $z \rightarrow +\infty$ . Derivando, si ottiene che vale lo stesso risultato per  $f^S(z)$ . Se invece  $z = re^{i\theta}$  sta nel settore  $-\pi \leq \theta_1 \leq \theta \leq 0$ , possiamo prendere come cammino la semiretta  $\zeta = \rho e^{i\lambda}$  con  $\lambda$  fissato tale che  $-\frac{3\pi}{2} - \theta_1 < \lambda < -\frac{\pi}{2}$ ; poiché questo cammino è stato ottenuto per deformazione del cammino di integrazione precedente oltrepassando il polo  $\zeta = -i$ , bisogna tenere conto dei residui dati da  $-2^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{8}} e^{-iz}$  per  $f^R(z)$  e  $-2^{-\frac{1}{2}} i e^{i\frac{\pi}{8}} e^{-iz}$  per  $f^S(z)$ . Dunque si ha che valgono le condizioni (4.1.3) e (4.1.4).

Studiamo ora il comportamento delle soluzioni  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  vicino a  $z = 0$ . Dallo sviluppo per grandi valori di  $\zeta$

$$\int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\log \zeta_*}{\zeta_*^2 + 1} d\zeta_* = \zeta^{-1}(\log \zeta + 1) - \frac{1}{3}\zeta^{-3} \left( \log \zeta + \frac{1}{3} \right) + \dots$$

otteniamo che il comportamento di  $\psi(\zeta)$  è dato da

$$\psi(\zeta) = \zeta^{-2} + \frac{1}{\pi}\zeta^{-3}(\log \zeta + 1) + O(\zeta^{-4} \log^2 \zeta).$$

Dunque  $\psi(\zeta)$  va a zero come  $\zeta^{-2}$  e l'integrale

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} \psi(\zeta) d\zeta$$

è assolutamente convergente e non dipende dalla scelta del cammino ammissibile  $\mathcal{P}$ . Quindi la funzione  $f^R(z)$  tende a  $M$  se  $z$  tende a zero in modo tale da mantenere le proprietà del cammino  $\mathcal{P}$ . Dunque, se  $f^R(z)$  è definita per  $z = 0$  con  $f^R(0) = M$ , allora è continua. Per calcolare il valore dell'integrale  $M$ , sia

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} [\zeta\psi(\zeta) - \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1}] d\zeta,$$

che è anch'esso indipendente dalla scelta di  $\mathcal{P}$ . Il termine  $\zeta(\zeta^2 + 1)^{-1}$ , che è integrabile per  $\zeta = 0$ , è stato scelto affinché la funzione integranda si comporti all'infinito come  $\frac{1}{\pi}\zeta^{-2} \log \zeta$ . Se scegliamo come cammino  $\mathcal{P}$  la semiretta reale positiva, troviamo che  $M$  e  $Q$  sono reali. Combiniamo i due integrali con

$$Q + iM = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} [(\zeta + i)\psi(\zeta) - \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1}] d\zeta,$$

e, poiché  $(\zeta + i)\psi(\zeta)$  è regolare nel semipiano inferiore (con  $\zeta \neq 0$ ), possiamo spostare il cammino di integrazione sulla semiretta reale negativa, tenendo conto del residuo del secondo termine della funzione integranda:

$$Q + iM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} [(\zeta + i)\psi(\zeta) - \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1}] d\zeta + \frac{i}{2}.$$

Poiché  $(\zeta + i)\psi(\zeta)$  è reale sulla semiretta reale negativa, si ha che

$$M = \frac{1}{2},$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} [(\zeta + i)\psi(\zeta) - \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1}] d\zeta.$$

Dunque vale la (4.1.5). Sia ora  $R$  l'integrale dato da

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} \left\{ \zeta(\zeta + i)\psi(\zeta) - \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} (\log \zeta + i\pi + 1) \right] \right\} d\zeta,$$

che converge assolutamente e che permette di cambiare il cammino di integrazione  $\mathcal{P}$  con la semiretta reale positiva, a patto di tener conto del residuo in  $\zeta = -i$  relativo al secondo termine della funzione integranda. Osserviamo che  $R$  è reale poiché  $(\zeta + i)\psi(\zeta)$  e  $\log \zeta + i\pi$  sono reali sulla semiretta reale negativa. Combiniamo  $R$  e  $Q$  ottenendo

$$R - iQ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} \left\{ (\zeta^2 + 1)\psi(\zeta) - \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} (\log \zeta + 1) \right] \right\} d\zeta,$$

e riprendendo un cammino  $\mathcal{P}$  nella forma ammissibile si ottiene, per il fatto che  $(\zeta^2 + 1)\psi(\zeta)$  è regolare nel semipiano inferiore, che

$$R - iQ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} \left\{ (\zeta^2 + 1)\psi(\zeta) - \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} (\log \zeta + 1) \right] \right\} d\zeta - \frac{1}{4} - \frac{i}{2\pi}.$$

Se inoltre scegliamo come  $\mathcal{P}$  la semiretta reale positiva,  $R - iQ$  è reale e dunque  $Q = \frac{1}{2\pi}$ . Da questo si può arrivare all'espressione (4.1.6) per  $f^S(z)$ . Infatti, poiché per  $z$  che va a zero (e avvicinandoci a zero manteniamo l'ammissibilità del cammino  $\mathcal{P}$ )

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} [\zeta\psi(\zeta) - \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1}] d\zeta \rightarrow \frac{1}{2\pi},$$

la funzione  $f^S(z)$  data da (4.1.8) si comporta per  $z$  piccoli come

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} d\zeta.$$

Scegliamo come cammino  $\mathcal{P}$  (che come sempre si lascia il punto  $\zeta = -i$  sulla destra) una curva composta da un segmento sull'asse reale che va da zero al punto  $\zeta = \alpha > 0$  e da una curva che va da  $\zeta = \alpha$  all'infinito in qualche direzione per cui  $\zeta z$  è reale negativo. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} d\zeta &= \int_0^\alpha e^{\zeta z} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} d\zeta + \int_{-\alpha z}^\infty e^{-\sigma} \sigma(\sigma^2 + z^2)^{-1} d\sigma = \\ &= \int_0^\alpha (e^{\zeta z} - 1) \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} d\zeta + \frac{1}{2} \int_{-\alpha z}^\infty e^{-\sigma} \log(\sigma^2 + z^2) d\sigma + \\ &\quad - \log(-z) + \frac{1}{2} (1 - e^{\alpha z}) \log(z^2 + \alpha^2 z^2). \end{aligned}$$

Il cammino dell'integrale nella variabile  $\sigma$  parte dal punto nel semipiano superiore  $-\alpha z$  e da un certo punto in poi sta sulla semiretta reale positiva. Facendo tendere  $z$  a zero, otteniamo che

$$\int_{\mathcal{P}} e^{\zeta z} \zeta(\zeta^2 + 1)^{-1} d\zeta + \log(-z) \rightarrow \int_0^\infty e^{-\sigma} \log \sigma d\sigma = -\gamma,$$

con  $\gamma$  costante di Eulero-Mascheroni. Dunque vale la (4.1.6). Osserviamo inoltre che, poiché  $-f^S(z)$  è la derivata della funzione  $f^R(z)$ , si può ottenere un'espressione più raffinata del comportamento di  $f^R(z)$  per  $z = 0$ , data dalla

$$f^R(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} [z \log(-z) - (2 - \gamma)z] + o(z).$$

Nell'appendice di [5] si possono trovare ulteriori rappresentazioni asintotiche delle funzioni  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  per  $z = 0$  e  $z = \infty$ , che qui non riportiamo.

In conclusione, abbiamo dimostrato che le funzioni  $f^R(z)$  e  $f^S(z)$  date dalle espressioni (4.1.7) e (4.1.8) sono due soluzioni del problema del molo nel caso bidimensionale con profondità infinita, e dunque una loro combinazione lineare è soluzione generale.

## 4.2 Profondità finita

Consideriamo ora il problema del molo in tre dimensioni, con profondità finita. Nelle variabili spaziali  $x, y, z$ , sia l'asse  $y$  ascendente, e siano il piano  $y = 0$  il fondale e il piano  $y = a$  la superficie a riposo dell'acqua; il molo è rappresentato da un semipiano parallelo al piano  $y = 0$  di altezza  $a$  e con  $x < 0$ . Dunque il nostro dominio è  $\mathbb{R} \times [0, a] \times \mathbb{R}$ , e se  $\Phi(x, y, z, t)$  è il potenziale delle velocità, devono valere le

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} &= 0, \\ \Phi_y &= 0, & y = 0, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \\ \Phi_y &= 0, & y = a, x < 0, z \in \mathbb{R}, \\ \Phi_{tt} + g\Phi_y &= 0, & y = a, x > 0, z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Se, esattamente come per il caso della spiaggia, supponiamo che

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y) e^{i(kz + \sigma t)},$$

con  $k, \sigma$  costanti reali, data  $m = \frac{\sigma^2}{g} > 0$  si ha che le equazioni differenziali precedenti possono essere riscritte come

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2\varphi = 0, \quad (4.2.1)$$

$$\varphi_y = 0, \quad y = 0, x \in \mathbb{R}, \quad (4.2.2)$$

$$\varphi_y = 0, \quad y = a, x < 0, \quad (4.2.3)$$

$$\varphi_y = m\varphi, \quad y = a, x > 0. \quad (4.2.4)$$

Dobbiamo imporre delle condizioni all'infinito. Per  $x \rightarrow -\infty$ , la  $\varphi$  dovrà tendere a zero. Si osserva che un insieme di soluzioni dell'equazione (4.2.1) per  $x < 0$  (grazie al metodo di separazione delle variabili) è dato dalle

$$e^{x\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

dunque

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{x\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad x < 0.$$

Gli  $A_n$  sono coefficienti reali, da determinare. Per  $x \ll 0$ , si ottiene dunque che  $\varphi(x, y) = O(e^{|k|x})$ , quindi la condizione all'infinito è soddisfatta. Per  $x > 0$ , l'insieme delle soluzioni è dato dalle

$$e^{-x\sqrt{k^2 + C_n^2}} \cos(C_n y), \quad n = 1, 2, \dots,$$

dove i  $C_n$  sono radici reali dell'equazione trascendente

$$m \cos(Ca) + C \sin(Ca) = 0.$$

Esistono anche due radici immaginarie pure, che denotiamo con  $\pm iC_0$ , che ci permettono di avere due ulteriori soluzioni per  $x > 0$  della forma

$$e^{\pm x\sqrt{k^2 - C_0^2}} \cosh(C_0 y) .$$

Il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$  di  $\varphi(x, y)$  dev'essere quello di un'onda progressiva, dunque dev'essere che  $k^2 < C_0^2$ . Sia  $l^2 = C_0^2 - k^2$ ; allora

$$\varphi(x, y) \sim e^{\pm ilx} \cosh(C_0 y), \quad x \gg 0 .$$

Nel punto  $x = 0$ ,  $y = a$ , inoltre, permettiamo l'esistenza di una singolarità logaritmica, cioè

$$\varphi(x, y) = O(\log[x^2 + (y - a)^2]) .$$

Per risolvere questo problema al contorno, introduciamo la funzione di Green  $G(x, y, x', y')$  [13]. Essa deve soddisfare l'equazione

$$G_{xx} + G_{yy} - k^2 G = 0 ,$$

tranne nel punto  $x = x'$ ,  $y = y'$ . In questo punto le derivate di  $G$  rispetto a  $x$  e  $y$  devono presentare delle discontinuità per cui valgono le

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y'^+} \int_{-\infty}^{+\infty} G_y dx - \lim_{y \rightarrow y'^-} \int_{-\infty}^{+\infty} G_y dx &= -1 , \\ \lim_{x \rightarrow x'^+} \int_0^a G_x dy - \lim_{x \rightarrow x'^-} \int_0^a G_x dy &= -2 . \end{aligned}$$

Come condizioni al contorno, supponiamo che

$$\begin{aligned} G_y &= 0, & y &= 0, & x &\in \mathbb{R}, \\ G_y &= 0, & y &= a, & x &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una funzione di Green che soddisfa queste condizioni è data dalla

$$G(x, y, x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 k^2 + n^2 \pi^2}} e^{-|x-x'|\sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{a}\right) . \quad (4.2.5)$$

Otteniamo dunque che per  $x \gg x'$  la  $G$  è asintotica a  $e^{|k|(x'-x)}$ , mentre per  $x \ll x'$  è asintotica a  $e^{|k|(x-x')}$ . Inoltre, la funzione di Green ha un comportamento logaritmico vicino a  $x = x'$ ,  $y = y'$ . Infatti, la serie converge uniformemente e assolutamente se  $x \neq x'$ , e per  $n$  abbastanza grande l'ennesimo termine della serie è asintotico a

$$\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{a}\right) e^{-\frac{n\pi}{a}|x-x'|} .$$

Riscrivendo i coseni utilizzando le formule di Eulero, troviamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{a}\right) e^{-\frac{n\pi}{a}|x-x'|},$$

vale, per  $x \neq x'$ ,

$$-\frac{1}{4\pi} \log \left\{ 4e^{-\frac{2\pi}{a}|x-x'|} \left[ \cosh\left(\frac{\pi(x-x')}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(y-y')}{a}\right) \right] \cdot \left[ \cosh\left(\frac{\pi(x-x')}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(y+y')}{a}\right) \right] \right\}.$$

In un intorno del punto  $x = x'$ ,  $y = y'$ , quest'ultima espressione è della forma

$$-\frac{1}{4\pi} \log [(x-x')^2 + (y-y')^2],$$

cioè c'è una singolarità logaritmica.

Vogliamo ora scrivere una rappresentazione integrale della funzione  $G$  data dalla (4.2.5) attraverso la trasformata di Fourier. Grazie al comportamento asintotico per  $x \gg x'$  e  $x \ll x'$  e poiché è presente una singolarità logaritmica in  $x = x'$ ,  $y = y'$ , possiamo calcolare la trasformata di Fourier di ciascun termine di (4.2.5) e sommare. Dunque

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} G(x, y, x', y') dx &= \\ &= e^{-iwx} \frac{\cosh(\gamma y) \cosh[\gamma(a-y')]}{\gamma \sinh(\gamma a)}, \quad y < y', \\ &= e^{-iwx} \frac{\cosh(\gamma y') \cosh[\gamma(a-y)]}{\gamma \sinh(\gamma a)}, \quad y > y', \end{aligned}$$

dove  $\gamma^2 = k^2 + w^2$  e  $-|k| < \text{Im } w < |k|$ . Per ottenere questa relazione, basta osservare che l'insieme

$$\left\{ \frac{1}{a} \right\} \cup \left\{ \frac{2}{a} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{a}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

è ortonormale in  $L^2(0, a) \times L^2(0, a)$  e che i coefficienti di Fourier della funzione

$$h(y, y') = \begin{cases} \cosh(\gamma y) \cosh[\gamma(a-y')] & y < y', \\ \cosh(\gamma y') \cosh[\gamma(a-y)] & y > y', \end{cases}$$

sono

$$h_n = \frac{\gamma a^2 \sinh(\gamma a)}{\gamma^2 a^2 + n^2 \pi^2}.$$

Applicando il teorema di inversione della trasformata di Fourier, otteniamo le funzioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_C e^{iw(x-x')} \frac{\cosh(\gamma y) \cosh[\gamma(a-y')]}{\gamma \sinh(\gamma a)} dw, & \quad y < y', \\ \frac{1}{2\pi} \int_C e^{iw(x-x')} \frac{\cosh(\gamma y') \cosh[\gamma(a-y)]}{\gamma \sinh(\gamma a)} dw, & \quad y > y', \end{aligned}$$

dove il cammino chiuso  $C$  è composto da una curva contenuta nella striscia  $-|k| < \text{Im } w < |k|$  e da una semicirconferenza di centro l'origine e raggio  $R$  grande (e che quindi passa tra i poli della funzione integranda) che sta sopra la curva se  $x > x'$  o sotto se  $x < x'$ . Al crescere di  $R$ , si ottiene che il contributo dell'integrale sulla semicirconferenza è trascurabile. Per  $R \rightarrow +\infty$ , otteniamo la  $G$  che, calcolando i residui, è nella forma (4.2.5).

Esprimiamo la soluzione  $\varphi(x, y)$  nella striscia  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < y < a$  in funzione di  $\varphi(x, a)$ , della sua derivata normale e della funzione di Green. Poiché  $\varphi(x, y)$  è regolare in questa striscia, possiamo applicare il teorema di Green su un rettangolo  $R_{l, l_1}$  di lati  $y = 0$ ,  $y = a$ ,  $x = -l$ ,  $x = l_1$ , con  $l, l_1 > 0$ , ottenendo che per  $(x, y) \in R_{l, l_1}$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{R_{l, l_1}} \delta(x-x') \delta(y-y') \varphi(x', y') dS' = - \int_{R_{l, l_1}} (\Delta G - k^2 G) \varphi dS' = \\ &= \int_{\partial R_{l, l_1}} \left[ G(x, y, x', y') \frac{\partial \varphi}{\partial n'}(x', y') - \varphi(x', y') \frac{\partial G}{\partial n'}(x, y, x', y') \right] d\sigma', \end{aligned}$$

dove  $d\sigma'$  rappresenta la parametrizzazione per lunghezza d'arco sul contorno del rettangolo, e  $\frac{\partial}{\partial n'}$  è la derivata normale esterna nello spazio  $(x', y')$ . Osserviamo che possiamo far tendere  $l, l_1$  ad infinito, per le proprietà di decadimento di  $G$  per  $x \gg x'$  e  $x \ll x'$  e per la limitatezza di  $\varphi(x, a)$  per  $|x| \gg 0$ . Analizziamo l'integrale scrivendolo come somma dei quattro integrali sui quattro lati del rettangolo. Il contributo sul lato  $y = 0$  è nullo, in quanto sono nulli  $\varphi_y$  e  $G_y$ . Invece, sul lato  $y = a$  si ha che l'integrale diventa

$$\int_0^{l_1} G(x, y, x', a) \varphi_{y'}(x', a) dx';$$

facendo tendere  $l_1$  all'infinito, quest'ultimo integrale diventa, per la condizione al contorno (4.2.4),

$$m \int_0^{+\infty} G(x, y, x', a) \varphi(x', a) dx'.$$

Se consideriamo il lato  $x = -l$ , con  $l$  grande, poiché per  $x \gg x'$   $G(x, y, x', y')$  è asintotica ad  $e^{|k|(x'-x)}$  e per  $x \ll 0$   $\varphi(x, y)$  è asintotica a  $e^{|k|x}$ , l'integrale

su di esso va a zero quando  $l$  tende a infinito. Un discorso analogo si può fare per il lato  $x = l_1$ . Dunque

$$\varphi(x, y) = m \int_0^{+\infty} G(x, y, x', a) \varphi(x', a) dx'. \quad (4.2.6)$$

Valutando questa funzione nel punto  $y = a$ , si ottiene un'equazione integrale di Wiener-Hopf, cioè

$$\varphi(x, a) = m \int_0^{+\infty} G(x, a, x', a) \varphi(x', a) dx'. \quad (4.2.7)$$

Quest'equazione include già tutte le condizioni al contorno all'infinito. Risolvendo quest'equazione, possiamo quindi ottenere la  $\varphi(x, y)$ .

Sia  $\varphi(x, a) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ , con  $\varphi_1(x)$  nulla per  $x < 0$  e  $\varphi_2(x)$  nulla per  $x > 0$ . Dunque l'equazione (4.2.7) diventa

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = m \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, a, x', a) \varphi_1(x', a) dx'. \quad (4.2.8)$$

Notiamo che da questa relazione si trova che  $\varphi_2(x)$  è asintotica a  $e^{|k|x}$  per  $x \ll 0$ , grazie alle proprietà della  $G$ . Per applicare il metodo di Fourier alla (4.2.8), dobbiamo conoscere le regioni di regolarità delle trasformate di Fourier delle funzioni  $G(x, a, x', a)$ ,  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$ . La trasformata di Fourier della  $G(x, a, x', a)$  è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, a, x', a) e^{-iwx} dx = e^{-iwx'} \frac{\coth(\gamma a)}{\gamma},$$

con  $\gamma^2 = k^2 + w^2$ , ed è regolare nella striscia  $-|k| < \text{Im } w < |k|$ . La trasformata di  $\varphi_2(x)$

$$\widehat{\varphi}_2(w) = \int_{-\infty}^0 \varphi_2(x) e^{-iwx} dx$$

è regolare nel semipiano  $\text{Im } w > -|k|$ , per il comportamento di  $\varphi_2(x)$  per  $x \ll 0$ . Supponiamo inoltre che  $\varphi_2(x)$  sia una funzione integrabile su ogni intervallo finito della semiretta  $y \leq 0$ . Per  $\varphi_1(x)$ , supponiamo invece che sia  $O(e^{\theta x})$ ,  $\theta < |k|$ . La trasformata di Fourier

$$\widehat{\varphi}_1(w) = \int_0^{+\infty} \varphi_1(x) e^{-iwx} dx$$

è dunque regolare nel semipiano  $\text{Im } w < -\theta$ . Le tre trasformate di Fourier hanno quindi una regione di regolarità comune, che è  $-|k| < \text{Im } w < -\theta$ . Applicando quindi la trasformata di Fourier all'equazione (4.2.8), ottengo che

$$\widehat{\varphi}_1(w) + \widehat{\varphi}_2(w) = m \widehat{\varphi}_1(w) \frac{\coth(\gamma a)}{\gamma}$$

oppure

$$\widehat{\varphi}_1(w) \frac{\gamma \sinh(\gamma a) - m \cosh(\gamma a)}{\gamma \sinh(\gamma a)} = -\widehat{\varphi}_2(w).$$

Vogliamo decomporre la frazione nell'ultima uguaglianza in due termini, il primo analitico per  $\text{Im } w < -\theta$ , e il secondo analitico per  $\text{Im } w > -|k|$ , così che entrambi siano analitici sulla striscia  $-|k| < \text{Im } w < -\theta$ . Scriviamo

$$\frac{\gamma \sinh(\gamma a) - m \cosh(\gamma a)}{\gamma \sinh(\gamma a)} = \frac{K_-(w)}{K_+(w)},$$

dove  $K_-(w)$  è il fattore del primo membro dell'uguaglianza che è privo di zeri e poli nel semipiano  $\text{Im } w < 0$ , mentre  $K_+(w)$  è privo di zeri e poli nel semipiano  $\text{Im } w > -|k|$ . Quindi

$$\widehat{\varphi}_1(w)K_-(w) = -\widehat{\varphi}_2(w)K_+(w);$$

il primo membro di questa uguaglianza è analitico nel semipiano  $\text{Im } w < 0$ , mentre il secondo membro è analitico nel semipiano  $\text{Im } w > -|k|$ . Quindi nella striscia comune primo e secondo membro sono uno il prolungamento analitico dell'altro e perciò esiste una funzione intera  $E(w)$  tale che

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_1(w)K_-(w) &= E(w), & \text{Im } w < 0, \\ \widehat{\varphi}_2(w)K_+(w) &= -E(w), & \text{Im } w > -|k|. \end{aligned}$$

Per determinare la funzione intera  $E(w)$  bisognerà conoscere il comportamento asintotico di  $\widehat{\varphi}_1(w)$ ,  $\widehat{\varphi}_2(w)$ ,  $K_-(w)$  e  $K_+(w)$ , per cui bisogna conoscere esplicitamente  $K_-(w)$  e  $K_+(w)$ . Gli zeri di  $\gamma \sinh(\gamma a) - m \cosh(\gamma a) = 0$  come funzione di  $\gamma a$  sono  $\pm \rho_0, \pm i\rho_n, \pm i\rho_{-n}$ , con  $\rho_n = -\rho_{-n}$ , per  $n = 1, 2, \dots$  e  $\rho_n \in \mathbb{R}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; si osserva che per  $n \gg 0$

$$\rho_n \simeq n\pi + \frac{ma}{n\pi}.$$

Siano

$$\begin{aligned} L(w) &= \gamma \sinh(\gamma a) - m \cosh(\gamma a), \\ M(w) &= \gamma \sinh(\gamma a). \end{aligned}$$

Dunque  $L(w)$  può essere scritta nella forma

$$L(w) = -m \left[ 1 - \frac{a^2(k^2 + w^2)}{\rho_0^2} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{a^2(k^2 + w^2)}{\rho_n^2} \right].$$

Inoltre, la funzione

$$L_-(w) = \left[ 1 - \frac{a^2(k^2 + w^2)}{\rho_0^2} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 k^2}{\rho_n^2}} + i \frac{aw}{\rho_n} \right] e^{-i \frac{aw}{n\pi}}$$

è priva di zeri nel semipiano  $\text{Im } w < 0$ , mentre

$$\frac{1}{L_+(w)} = -m \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 k^2}{\rho_n^2}} - i \frac{aw}{\rho_n} \right] e^{i \frac{aw}{n\pi}}$$

non ha zeri nel semipiano

$$\text{Im } w > -\frac{\rho_1}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 k^2}{\rho_1^2}}.$$

I fattori esponenziali nei prodotti infiniti sono stati inseriti per poter avere convergenza assoluta delle due funzioni. Dunque

$$L(w) = \frac{L_-(w)}{L_+(w)}.$$

Analogamente per  $M(w)$ , la funzione

$$M_-(w) = a(k + iw) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 k^2}{n^2 \pi^2}} + i \frac{aw}{n\pi} \right] e^{-i \frac{aw}{n\pi}}$$

non ha zeri in  $\text{Im } w < |k|$ , mentre

$$\frac{1}{M_+(w)} = \frac{M_-(-w)}{a}$$

non si annulla mai in  $\text{Im } w > -|k|$ . Quindi

$$K_-(w) = \frac{L_-(w)}{M_-(w)}$$

e il suo reciproco sono regolari nel semipiano  $\text{Im } w < 0$ , mentre

$$\frac{1}{K_+(w)} = \frac{M_+(w)}{L_+(w)}$$

è regolare nel semipiano  $\text{Im } w > -|k|$ . Per il comportamento asintotico dei  $\rho_n$ , si ottiene che  $K_-(w) = O(w)$  per  $|w| \rightarrow \infty$  con  $\text{Im } w < 0$ . Allo stesso modo,  $K_+(w) = O(w)$  per  $|w| \rightarrow \infty$ , con  $\text{Im } w > -|k|$ . Poiché  $\hat{\varphi}_1(w)$  è analitica nel semipiano  $\text{Im } w < 0$  e va a zero per  $|w| \rightarrow \infty$ , allora  $E(w) = O(w^{s_1})$ ,  $s_1 < 1$ . Analogamente nel semipiano  $\text{Im } w > 0$  dev'essere che  $E(w) = O(w^{s_2})$ ,  $s_2 < 1$ . Dato che  $E(w)$  è una funzione intera, dev'essere che  $s_1$  e  $s_2$  sono interi maggiori o uguali a zero, e dunque  $s_1 = s_2 = 0$ , cioè  $E(w) = B$ , con  $B$  costante. Per concludere,

$$\hat{\varphi}_1(w) = \frac{B}{K_-(w)}, \quad (4.2.9)$$

$$\hat{\varphi}_2(w) = -\frac{B}{K_+(w)}. \quad (4.2.10)$$

Per calcolare la  $\varphi(x, y)$ , riscriviamo la relazione (4.2.6) sfruttando la scrittura in forma integrale della  $G(x, y, x', a)$ , ottenendo che

$$\varphi(x, y) = \frac{m}{2\pi} \int_C \frac{e^{iw x} \cosh(\gamma y)}{\gamma \sinh(\gamma a)} \widehat{\varphi}_1(w) dw,$$

dove il cammino  $C$  è una curva contenuta nella striscia  $-|k| < \text{Im } w < 0$  di estremi  $w = \pm\infty$ . Per quanto detto in precedenza, bisognerà tenere conto dei residui nel semipiano superiore se  $x > 0$  o in quello inferiore se  $x < 0$ . Dunque dalle equazioni (4.2.9) e (4.2.10) si ottiene che

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{Bm}{2\pi} \int_C \frac{e^{iw x} \cosh(\gamma y)}{\gamma \sinh(\gamma a) K_-(w)} dw = \\ &= \frac{Bm}{2\pi} \int_C \frac{e^{iw x} \cosh(\gamma y)}{[\gamma \sinh(\gamma a) - m \cosh(\gamma a)] K_+(w)} dw. \end{aligned}$$

La prima rappresentazione ci serve se  $x < 0$ , e quindi ci basta calcolare i residui nei poli

$$w = -i\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ottenendo che per  $x < 0$

$$\varphi(x, y) = \frac{mB e^{|k|x}}{2a|k|K_-(-i|k|)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n mB e^{\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}x} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sqrt{a^2k^2 + n^2\pi^2} K_- \left(-i\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}\right)}. \quad (4.2.11)$$

Invece, sfruttando la seconda rappresentazione, si ottiene in modo analogo che per  $x > 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mB\rho_n^2 e^{-\sqrt{k^2 + \frac{\rho_n^2}{a^2}}x} \cos\left(\frac{\rho_n y}{a}\right)}{\sqrt{a^2k^2 + \rho_n^2}(\rho_n^2 + m^2a^2 - ma) \cos \rho_n K_+ \left(i\sqrt{k^2 + \frac{\rho_n^2}{a^2}}\right)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}mB\rho_0^2 \cosh\left(\frac{\rho_0 y}{a}\right) \sin(\tau x + \Theta)}{\tau \cosh \rho_0 \sqrt{ma - m^2a^2 + \rho_0^2}}, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

dove  $\Theta$  è dato dall'espressione

$$\begin{aligned} \Theta &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \arcsin \left( \frac{a\tau}{\sqrt{\rho_n^2 + \rho_0^2}} \right) - \frac{a\tau}{n\pi} \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \arcsin \left( \frac{a\tau}{\sqrt{n^2\pi^2 + \rho_0^2}} \right) - \frac{a\tau}{n\pi} \right] + \arcsin \left( \frac{a\tau}{\rho_n} \right), \end{aligned}$$

mentre  $\tau$  è la radice positiva dell'equazione

$$a^2 k^2 + a^2 \tau^2 = \rho_0^2$$

ed è reale se si suppone che  $\rho_0 > ak$ . Poiché

$$K_- \left( -i \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right) = O(n\pi), \quad K_+ \left( i \sqrt{k^2 + \frac{\rho_n^2}{a^2}} \right) = O(n\pi)$$

per  $n$  grande, allora i coefficienti nelle serie infinite di (4.2.11) e (4.2.12) si comportano come  $n^{-2}$  per  $n$  sufficientemente grande. Dunque le serie convergono uniformemente e assolutamente rispettivamente per  $x \leq 0$  e per  $x \geq 0$ . Quindi  $\varphi(x, y)$  è integrabile per ogni intervallo della semiretta  $x < 0$  o della semiretta  $x > 0$ , e soddisfa l'equazione (4.2.1) e le condizioni al contorno. In seguito mostreremo che è anche una soluzione regolare.

Vogliamo ora ottenere un'altra soluzione del problema che possieda una singolarità logaritmica nel punto  $x = 0, y = a$ . Poiché le serie (4.2.11) e (4.2.12) convergono assolutamente e uniformemente, possiamo derivare ciascuna di esse rispetto a  $x$  derivando termine a termine, cioè per  $x < 0$

$$\varphi_x(x, y) = \frac{mB e^{|k|x}}{2aK_-(-i|k|)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n mB e^{\sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} x} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{a K_- \left( -i \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right)}, \quad (4.2.13)$$

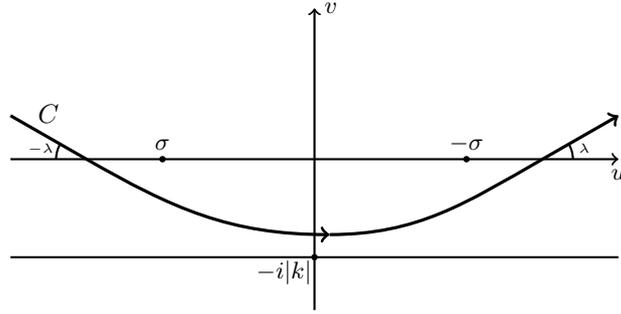
mentre per  $x > 0$

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mB \rho_n^2 e^{-\sqrt{k^2 + \frac{\rho_n^2}{a^2}} x} \cos\left(\frac{\rho_n y}{a}\right)}{a \cos \rho_n (\rho_n^2 + m^2 a^2 - ma) K_+ \left( i \sqrt{k^2 + \frac{\rho_n^2}{a^2}} \right)} + \\ & + \frac{\sqrt{2} mB \rho_0^2 \cosh\left(\frac{\rho_0 y}{a}\right) \cos(\tau x + \Theta)}{\cosh \rho_0 \sqrt{ma - m^2 a^2 + \rho_0^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Questa funzione è soluzione dell'equazione (4.2.1), si comporta per  $x \gg 0$  come  $\varphi(x, y)$  e soddisfa le condizioni al contorno (4.2.2), (4.2.3) e (4.2.4) in quanto la serie della derivata converge anch'essa uniformemente e assolutamente per  $x > 0, 0 \leq y \leq a$ . Inoltre, per  $x \rightarrow 0^+, y = a$  è presente una singolarità con andamento logaritmico. Quindi una soluzione dell'equazione (4.2.1) che possieda una componente limitata e una con singolarità logaritmica è data da una combinazione lineare di  $\varphi$  e  $\varphi_x$ . Studiamo ora le proprietà di  $\varphi$  e  $\varphi_x$ .

Abbiamo detto in precedenza che la funzione  $\varphi$  è data dalla

$$\varphi(x, y) = \frac{Bm}{2\pi} \int_C \frac{e^{iwx} \cosh(\gamma y)}{\gamma \sinh(\gamma a) K_-(w)} dw, \quad \gamma^2 = k^2 + w^2,$$


 Figura 4.3: Il cammino modificato  $C$ 

dove  $C$  è un cammino nella striscia  $-|k| < \text{Im } w < 0$ . Inoltre,  $K_-(w) = O(w)$  per  $|w| \rightarrow \infty$  con  $w$  appartenente al complementare di un settore del piano complesso che contiene la semiretta immaginaria positiva. Poiché, per  $n$  grande,  $\rho_n = n\pi + \frac{\beta a}{n\pi}$ , il rapporto dei prodotti infiniti in  $K_-(w)$  sarà costante per  $|w| \rightarrow \infty$  nello stesso insieme. Perciò si può deformare il cammino  $C$  come in figura 4.3, cioè ottenendolo come composizione di due semirette di pendenza  $\lambda$  e  $\pi - \lambda$ , con  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ , con un tratto nella striscia  $-|k| < \text{Im } w < 0$ . Per  $x \geq 0$ , tramite sostituzione di  $w = \rho e^{i\lambda}$ , si ottiene che la  $\varphi(x, y)$  è dello stesso ordine di

$$\int_{\bar{\rho}}^{\infty} \frac{e^{\rho(y-a) \cos \lambda - \rho x \sin \lambda}}{\rho^2} d\rho,$$

per qualche  $\bar{\rho} > 0$ . Quest'ultimo integrale converge uniformemente per ogni  $x \geq 0$  e  $0 \leq y \leq a$ . Quindi la  $\varphi(x, y)$  è continua per  $x \geq 0$  e  $0 \leq y \leq a$ . Analogamente,  $\varphi_x(x, y)$  è dello stesso ordine di

$$\int_{\bar{\rho}}^{\infty} \frac{e^{\rho(y-a) \cos \lambda - \rho x \sin \lambda}}{\rho} d\rho,$$

per  $x > 0$ . In questo caso l'integrale converge uniformemente, e dunque  $\varphi_x$  è continua, se  $x > 0$  e  $0 \leq y \leq a$  oppure se  $x \geq 0$  e  $0 \leq y < a$ . Allo stesso modo otteniamo inoltre che per  $x > 0$  e  $0 \leq y \leq a$  oppure per  $x \geq 0$  e  $0 \leq y < a$  tutte le derivate di  $\varphi$  sono continue.

Per  $x < 0$ , scegliamo questa volta come  $C$  le semirette di pendenza  $\pi + \lambda$  e  $2\pi - \lambda$  collegate da una curva nel semipiano  $\text{Im } w < 0$  e procediamo in maniera analoga a prima, ottenendo dunque che  $\varphi(x, y)$  è continua per  $x \leq 0$  e  $0 \leq y \leq a$ , mentre tutte le sue derivate lo sono per  $x < 0$  e  $0 \leq y \leq a$  oppure per  $x \leq 0$  e  $0 \leq y < a$ . Dunque  $\varphi(x, y)$  è continua per  $x \in \mathbb{R}$  e perciò  $\varphi(0^+, y) = \varphi(0^-, y)$ . Inoltre,  $\varphi$  e  $\varphi_x$  soddisfano l'equazione (4.2.1) e le condizioni al contorno in tutta la striscia escluso un intorno del punto  $x = 0, y = a$ . Vogliamo quindi studiare il comportamento di  $\varphi$  e  $\varphi_x$  in

quest'intorno. Osserviamo che

$$\frac{1}{K_-(w)} \approx \frac{1}{w} \left( \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\log w}{w} \right)$$

per  $|w| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } w < 0$ , dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono indipendenti da  $w$ . D'altra parte

$$\frac{1}{K_+(w)} = -m a \rho_0^2 \frac{K_-(w)}{\rho_0^2 - a^2(k^2 + w^2)},$$

quindi per  $|w| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } w > -|k|$ ,

$$\frac{1}{K_+(w)} \approx -\frac{m \rho_0^2}{a \alpha_1 w} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 \log(-w)}{\alpha_2 w}}.$$

La costante  $\alpha_1$  può essere determinata: infatti, poiché

$$\frac{K_-(w)}{K_+(w)} = \frac{\gamma \sinh(\gamma a) - m \cosh(\gamma a)}{\gamma \sinh(\gamma a)}$$

ha limite 1 per  $|w| \rightarrow \infty$  nella striscia  $-|k| < \text{Im } w < 0$ , e poiché

$$\frac{K_-(w)}{K_+(w)} = -\frac{m \rho_0^2}{a \alpha_1^2} \left[ 1 + O\left(\frac{\log w}{w}\right) \right]$$

nella striscia, risulta  $-m \rho_0^2 = a \alpha_1^2$  e dunque  $\alpha_1$  è immaginario puro. Otteniamo inoltre che per  $n \gg 0$

$$\begin{aligned} K_- \left( -i \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right) &\approx -i \frac{n \pi}{a \alpha_1}, \\ K_+ \left( i \sqrt{k^2 + \frac{\rho_n^2}{a^2}} \right) &\approx -i \frac{n \pi \alpha_1}{m \rho_0^2} = i \frac{n \pi}{a \alpha_1}. \end{aligned}$$

In un intorno di  $x = 0$ ,  $y = a$  per gli  $x$  positivi, l' $n$ -esimo termine della serie di (4.2.12) è allora asintotico a

$$-i \frac{\alpha_1 a^2 m B (-1)^n}{n^2 \pi^2} e^{-\frac{n \pi}{a} x} \cos\left(\frac{n \pi y}{a}\right)$$

e quindi la somma di tali termini per  $n$  da uno all'infinito converge uniformemente e assolutamente per  $x \geq 0$ . Introduciamo, per indicare il comportamento della serie nell'intorno, la variabile

$$\zeta = \frac{\pi}{a} [x + i(a - y)].$$

Allora, per gli  $x$  positivi vicini a  $x = 0$ ,  $y = a$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= -i \frac{\alpha_1 a^2 m B}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\zeta} + e^{-n\bar{\zeta}}}{n^2} + C' = \\ &= -i \frac{\alpha_1 a^2 m B}{2\pi^2} (\zeta \log \zeta + \bar{\zeta} \log \bar{\zeta}) + C,\end{aligned}$$

dove  $C, C'$  sono costanti. Allo stesso modo, per gli  $x$  negativi vicini a  $x = 0$ ,  $y = a$ , troviamo che

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= i \frac{\alpha_1 a m B}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{\frac{n\pi}{a} x} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + C'_1 = \\ &= i \frac{\alpha_1 a m B}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\zeta} + e^{n\bar{\zeta}}}{n^2} + C'_1 = \\ &= i \frac{\alpha_1 a m B}{2\pi^2} [-\zeta \log(-\zeta) - \bar{\zeta} \log(-\bar{\zeta})] + C_1,\end{aligned}$$

dove  $C_1, C'_1$  sono costanti. Dalla continuità in  $x = 0$ ,  $y = a$  abbiamo che  $C = C_1$ . Derivando rispetto a  $x$ , si ottiene che

$$\varphi_x(x, y) = -i \frac{\alpha_1 m B}{2\pi} [\log(\zeta \bar{\zeta}) + 2] \approx -i \frac{\alpha_1 m B}{2\pi} \{\log[x^2 + (y - a)^2]\},$$

cioè  $\varphi_x$  presenta una singolarità logaritmica in  $x = 0$ ,  $y = a$ . Infine, se  $x \gg 0$ ,  $\varphi$  e  $\varphi_x$  sono sfasate di  $90^\circ$ . Dunque, reinserendo il fattore temporale  $e^{i\sigma t}$ , si ottiene che un'appropriata combinazione lineare delle soluzioni rappresenta un'onda progressiva.

## Appendice A

# Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale con  $y = y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (\text{A.1})$$

detta equazione di Bessel. Vogliamo ottenere delle soluzioni di quest'equazione al variare di  $\nu \in \mathbb{R}$ .

Introduciamo la funzione

$$g(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})};$$

scrivendola in serie di Laurent, si ha che

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n,$$

e i coefficienti  $J_n(x)$  si dicono funzioni di Bessel del primo tipo di ordine  $n$ . Scrivendo l'esponenziale come prodotto di due esponenziali, e scrivendo questi come serie di Maclaurin, si ha che

$$\begin{aligned} e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} &= \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!} = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=-s}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(n+s)! s!} t^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{s=-n}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(n+s)! s!} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(n+s)! s!} t^n = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=n}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}}{(s-n)! s!} t^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(n+s)! s!} t^n. \end{aligned}$$

Dunque si ha che per  $n \geq 0$

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (\text{A.2})$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=n}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}}{(s-n)! s!} = (-1)^n \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(n+s)! s!}. \quad (\text{A.3})$$

Perciò si ottiene che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Osserviamo che la definizione può essere generalizzata al caso reale sostituendo  $n$  con  $\nu \in \mathbb{R}$  (e dunque sostituendo  $(n+s)!$  con  $\Gamma(\nu+s+1)$ ) ottenendo quindi  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$ .

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})},$$

si ha

$$\frac{x}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n + \frac{x}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n+2}(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+1) J_{n+1}(x) t^n,$$

e dunque vale per ogni  $n$  la relazione di ricorrenza a tre termini

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \quad (\text{A.4})$$

Derivando rispetto a  $x$ , invece, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})},$$

da cui

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-1}(x) t^n - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n+1}(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(x) t^n,$$

pertanto vale la relazione di ricorrenza a tre termini

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (\text{A.5})$$

In particolare, si ottiene

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Sommando le due relazioni (A.4) e (A.5), si arriva alla relazione

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x), \quad (\text{A.6})$$

e moltiplicando quest'ultima uguaglianza per  $x^n$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

Sottraendo le due, invece, vale la

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x), \quad (\text{A.7})$$

e dunque, moltiplicando per  $x^{-n}$ ,

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

Si osserva che le due relazioni di ricorrenza (A.4) e (A.5) valgono anche nel caso reale.

Sia ora  $\{Z_\nu(x)\}_{\nu \in \mathbb{R}}$  un insieme di funzioni che soddisfano le relazioni di ricorrenza (A.4) e (A.5) (e dunque anche la (A.6) e la (A.7)). Dalla (A.6) con  $\nu$  al posto di  $n$  si ottiene

$$xZ'_\nu(x) = xZ_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x),$$

e derivando si trova la

$$xZ''_\nu(x) + (\nu + 1)Z'_\nu(x) - xZ'_{\nu-1}(x) - Z_{\nu-1}(x) = 0.$$

Moltiplicando quest'ultima uguaglianza e sottraendola con la penultima moltiplicata per  $\nu$ ,

$$x^2 Z''_\nu(x) + xZ'_\nu(x) - \nu^2 Z_\nu(x) + (\nu - 1)xZ_{\nu-1}(x) - x^2 Z'_{\nu-1}(x) = 0.$$

Per eliminare  $Z_{\nu-1}$  e  $Z'_{\nu-1}$  da quest'espressione, riscriviamo la (A.7) sostituendo  $n$  con  $\nu - 1$ , cioè

$$xZ'_{\nu-1}(x) = (\nu - 1)Z_{\nu-1}(x) - xZ_\nu(x)$$

ottenendo che

$$x^2 Z''_\nu(x) + xZ'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2)Z_\nu(x) = 0, \quad (\text{A.8})$$

cioè  $Z_\nu(x)$  soddisfa l'equazione di Bessel (A.1) per ogni  $\nu$ . Dunque le funzioni  $\{Z_\nu(x)\}_{\nu \in \mathbb{R}}$  che soddisfano le due relazioni di ricorrenza a tre termini (A.4) e (A.5) sono soluzioni dell'equazione di Bessel. Per quanto detto in precedenza, dunque,  $J_n(x)$  è soluzione dell'equazione di Bessel.

Si possono anche scrivere le funzioni  $J_n(x)$  in forma integrale. Sia  $t = e^{i\theta}$ , allora

$$\begin{aligned} g(x, t) &= e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \\ &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta) + 2i \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n-1}(x) \sin((2n-1)\theta) \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}\cos(x \sin \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta), \\ \sin(x \sin \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n-1}(x) \sin((2n-1)\theta).\end{aligned}$$

Moltiplicando queste due relazioni per  $\frac{\cos(n\theta)}{\pi}$  e integrando si ottiene che per  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \cos(n\theta) d\theta &= \begin{cases} J_n(x), & n \text{ pari}, \\ 0, & n \text{ dispari}, \end{cases} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin(n\theta) d\theta &= \begin{cases} 0, & n \text{ pari}, \\ J_n(x), & n \text{ dispari}. \end{cases}\end{aligned}$$

Sommando le due uguaglianze, per  $n \in \mathbb{N}$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta. \tag{A.9}$$

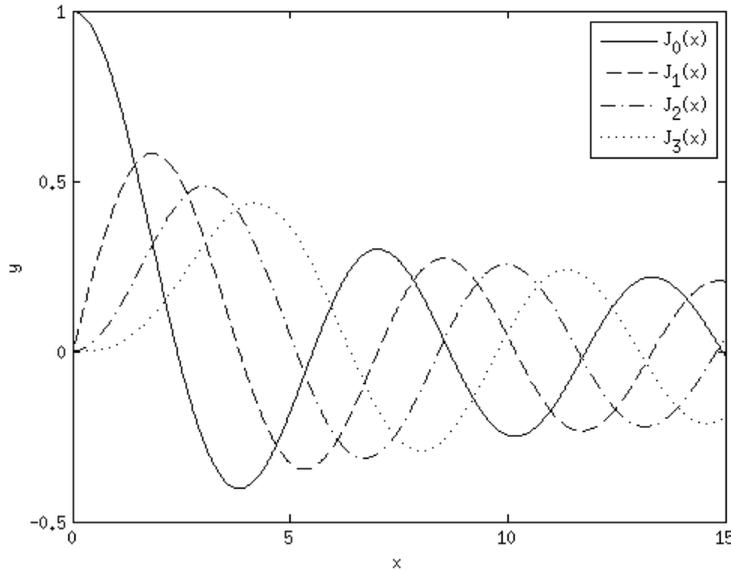


Figura A.1: Le funzioni di Bessel del primo tipo  $J_n(x)$

In particolare, si ha

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Osserviamo che le funzioni  $J_\nu(x)$  sono continue su tutto  $\mathbb{R}$ . Poiché l'equazione di Bessel deve avere due soluzioni linearmente indipendenti, vogliamo trovare delle altre funzioni che soddisfino la (A.1). Chiamiamo

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

funzione di Bessel del secondo tipo di ordine  $\nu$ ; si ottiene che  $Y_\nu(x)$  è soluzione della (A.1) e, nel caso  $\nu = n$  intero,  $Y_\nu(x)$  diventa indeterminata: per la regola di de l'Hôpital

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{\frac{d}{d\nu} [\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{\frac{d}{d\nu} \sin(\nu\pi)} \Bigg|_{\nu=n} = \\ &= \frac{-\pi \sin(n\pi)J_n(x) + \left[ \cos(n\pi) \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]}{\pi \cos(n\pi)} \Bigg|_{\nu=n} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right] \Bigg|_{\nu=n}. \end{aligned}$$

Grazie alla scrittura di  $J_\nu(x)$  si ha che

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} + \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} [\psi_0(r) + \psi_0(n+r)], \end{aligned}$$

dove  $\psi_0(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  è la funzione digamma. Poiché se  $m$  è intero,

$$\psi_0(m) = -\gamma + \sum_{p=1}^m \frac{1}{p},$$

con  $\gamma$  costante di Eulero-Mascheroni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \log n \right] \simeq 0,57721,$$

si trova che

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} \left[ \log\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right] J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \sum_{p=1}^n \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{p+n} \right]. \end{aligned}$$

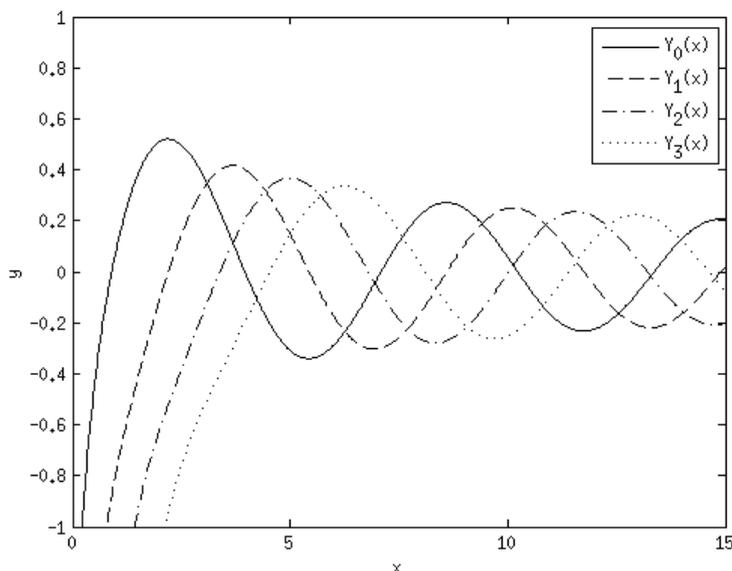


Figura A.2: Le funzioni di Bessel del secondo tipo  $Y_n(x)$

In particolare, per  $n = 0$  si ha che

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}(\log x + \gamma - \log 2) + O(x^2),$$

e dunque la funzione  $Y_0(x)$  presenta una singolarità con andamento logaritmico nell'origine. Invece, se  $n > 0$ ,

$$Y_n(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n + \dots$$

Si può anche ottenere una forma integrale di  $Y_0(x)$ , data da

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(x \cosh t) dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Per ottenere che  $Y_n(x)$  sono soluzioni, prendiamo l'equazione di Bessel per  $J_{\pm\nu}(x)$  e deriviamo rispetto a  $\nu$ , cioè

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial J_{\pm\nu}(x)}{\partial \nu} \right) + x \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J_{\pm\nu}(x)}{\partial \nu} \right) + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_{\pm\nu}(x)}{\partial \nu} = 2\nu J_{\pm\nu}(x);$$

sottraiamo l'equazione per  $J_{-\nu}$  moltiplicata per  $(-1)^\nu$  con quella per  $J_\nu$  e, facendo tendere  $\nu$  a  $n$ , troviamo che

$$x^2 \frac{d^2 Y_n(x)}{dx^2} + x \frac{dY_n(x)}{dx} + (x^2 - \nu^2) Y_n(x) = \frac{2n}{\pi} [J_n(x) - (-1)^n J_{-n}(x)] = 0,$$

dunque  $Y_n(x)$  è soluzione dell'equazione di Bessel. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione di Bessel (A.1) per ogni intero  $n$  è data dalla

$$y(x) = AJ_n(x) + BY_n(x),$$

con  $A$  e  $B$  costanti.

Il comportamento per  $x \ll 1$  di  $J_n(x)$  e  $Y_n(x)$  per  $n \in \mathbb{N}$  è dato da

$$J_n(x) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi}(\log x + \gamma - \log 2), & n = 0, \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n, & n > 0. \end{cases}$$

Invece, per  $x$  grande, si può dimostrare (vedi [2]) che

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[ x - \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right].$$

## Appendice B

### La seconda stima asintotica

In questa appendice, vogliamo provare che vale la rappresentazione asintotica della soluzione del problema della spiaggia nel caso  $\omega = \frac{\pi}{2n}$ , vista nella sezione 3.2.

Si ottiene che se

$$f_{\pm} = \int_{\mathcal{P}_{\pm}} e^{\zeta z} G_n^{-1}(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta, \quad (\text{B.1})$$

dove

$$G_n(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots (\zeta - \zeta_n),$$

$$\zeta_j = ie^{i\pi \frac{j}{n}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

e  $\mathcal{P}_+$  e  $\mathcal{P}_-$  sono i cammini nel piano complesso indicati in figura B.1, le

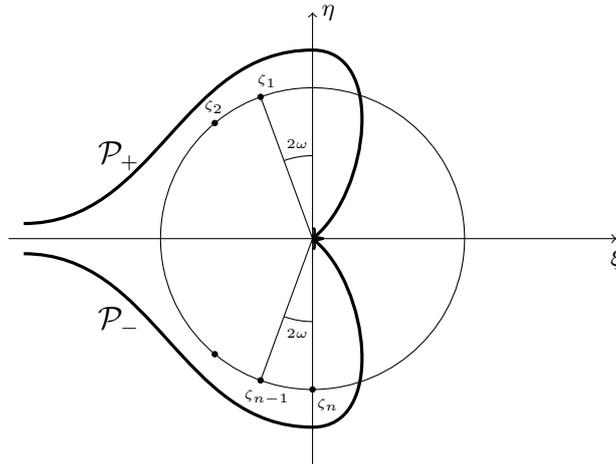


Figura B.1: I cammini di integrazione  $\mathcal{P}_{\pm}$

funzioni  $f^R = if_+ - if_-$  e  $f^S = f_+ + f_-$  sono rispettivamente le soluzioni regolare e singolare del problema. Per prima cosa, mostriamo che  $f^R$  e  $f^S$

soddisfano le condizioni al contorno

$$\operatorname{Im} \left( \frac{d}{dz} + i \right) f(z) = 0, \quad \text{per } y = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\operatorname{Im} e^{-i\omega} \frac{d}{dz} f(z) = 0, \quad \text{sul fondale.} \quad (\text{B.3})$$

Osserviamo che, poiché  $\zeta_n = -i$ ,

$$\left( \frac{d}{dz} + i \right) f_{\pm}(z) = \int_{\mathcal{P}_{\pm}} e^{\zeta z} F_n^{-1}(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta,$$

dove

$$F_n(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots (\zeta - \zeta_{n-1}).$$

Ma poiché  $\bar{\zeta}_j = \zeta_{n-j}$ , si ha che  $\overline{F_n(\zeta)} = F_n(\bar{\zeta})$ ; dunque

$$\overline{\left( \frac{d}{dz} + i \right) f_{\pm}(z)} = \left( \frac{d}{dz} + i \right) f_{\mp}(\bar{z}),$$

ed in particolare se  $z$  è reale

$$\begin{aligned} \overline{\left( \frac{d}{dz} + i \right) f^R(z)} &= \left( \frac{d}{dz} + i \right) f^R(z), \\ \overline{\left( \frac{d}{dz} + i \right) f^S(z)} &= \left( \frac{d}{dz} + i \right) f^S(z), \end{aligned}$$

cioè per  $f^R$  e  $f^S$  vale la condizione (B.2). Per ottenere la (B.3), siano

$$\zeta^* = e^{-i\omega} \zeta, \quad z^* = e^{i\omega} z;$$

pertanto  $\zeta^* z^* = \zeta z$ . Chiamata  $f^*(z^*) = f(z)$ , si ha che la seconda condizione (B.3) diventa

$$\operatorname{Im} \frac{d}{dz^*} f^*(z^*) = 0, \quad \text{per } x^* = \operatorname{Re} z^* > 0, \quad y^* = \operatorname{Im} z^* = 0.$$

Siano inoltre

$$\zeta_j^* = e^{-i\omega} \zeta_j = i e^{i\pi \frac{2j-1}{2n}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

e

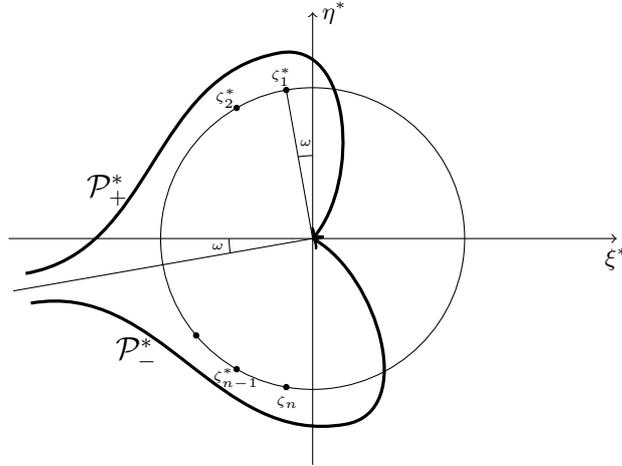
$$G_n^*(\zeta) = (\zeta^* - \zeta_1^*)(\zeta^* - \zeta_2^*) \dots (\zeta^* - \zeta_n^*);$$

si ottiene che

$$G_n(\zeta) = i G_n^*(\zeta^*).$$

Dunque, se  $f_{\pm}^*(z^*) = f_{\pm}(z)$ , risulta

$$f_{\pm}^*(z^*) = \int_{\mathcal{P}_{\pm}^*} e^{\zeta^* z^*} [G_n^*(\zeta^*)]^{-1} (\zeta^*)^{n-1} d\zeta^*,$$


 Figura B.2: I cammini di integrazione  $\mathcal{P}_\pm^*$ 

dove  $\mathcal{P}_\pm^*$  sono i cammini mostrati in figura (B.2), ottenuti ruotando i  $\mathcal{P}_\pm$ . Osserviamo che, quando  $z^* > 0$ , la funzione integranda di  $f_\pm^*$  tende a zero esponenzialmente per  $\text{Re } \zeta^* \rightarrow -\infty$ ; allora è possibile cambiare, senza far variare il valore degli integrali, i cammini di integrazione in modo tale che partano da  $\text{Re } \zeta^* = -\infty$ , arrivino in  $z^* = 0$  e che siano simmetrici rispetto all'asse reale (esattamente come  $\mathcal{P}_\pm$ ). Inoltre, poiché si ha che  $\overline{\zeta_j^*} = \zeta_{n-j+1}^*$  e  $\overline{G_n^*(\zeta^*)} = G_n^*(\overline{\zeta^*})$ , come nel caso precedente si ottiene che

$$\overline{\frac{d}{dz^*} f_\pm(z^*)} = \frac{d}{dz^*} f_\mp(\overline{z^*}),$$

e quindi vale la condizione (B.3).

Vediamo ora qual è il comportamento all'infinito delle soluzioni. Siano  $\mathcal{P}_\pm^0$  i cammini indicati in figura B.3. Poiché per  $\mathcal{P}_-^0$  si è oltrepassato il polo  $\zeta_n = -i$ , bisogna tenere conto del suo residuo e si ha che

$$f_-(z) = f_-^0(z) + ke^{-iz}$$

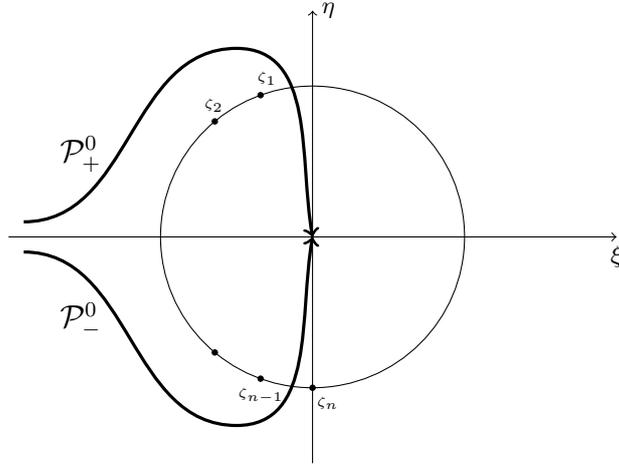
dove

$$f_-^0(z) = \int_{\mathcal{P}_-^0} e^{\zeta z} G_n^{-1}(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta,$$

$$k = \frac{(-1)^{n-1} 2\pi i^n}{G_n'(-i)}.$$

Poiché  $\mathcal{P}_-^0$  rimane nel semipiano sinistro, si ottiene che

$$|f_-(z) - ke^{-iz}| \rightarrow 0 \quad \text{per } x = \text{Re } z \rightarrow +\infty.$$


 Figura B.3: I cammini di integrazione  $\mathcal{P}_{\pm}^0$ 

Per quanto riguarda  $\mathcal{P}_+^0$ , poiché  $\zeta = i$  non è una singolarità, non si presentano residui e dunque

$$|f_+(z)| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad x = \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty.$$

Per concludere,

$$|f^S(z) - ke^{-iz}| \rightarrow 0, \quad |f^R(z) + ike^{-iz}| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad x = \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty.$$

Si osserva che le due soluzioni hanno uno sfasamento di  $90^\circ$ .

Il comportamento delle soluzioni nell'origine  $z = 0$  è quello cercato: infatti, si osserva che il cammino  $\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-$ , utile per ottenere la soluzione  $f^R$ , può essere sostituito con un cammino chiuso che circonda tutti i punti  $\zeta_j$  e che gira in senso antiorario, poiché il contributo della funzione integranda per  $\xi = \operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$  è trascurabile; dunque,  $f^R$  è regolare in  $z = 0$ . Per  $f^S$ , poiché

$$f_{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{-1} e^{\xi z} G_n^{-1}(\xi) \xi^{n-1} d\xi + R_{\pm}(z),$$

dove  $R_{\pm}(z)$  sono funzioni regolari in  $z = 0$ , dato che  $G_n^{-1}(\xi) \xi^{n-1}$  si comporta come  $\xi^{-1}$ , otteniamo che

$$f_{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{-1} e^{\xi z} \xi^{-1} d\xi + zS(z) + R_{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{-z} e^{\alpha} \alpha^{-1} d\alpha + zS(z) + R_{\pm}(z),$$

con

$$|S(z)| \leq \operatorname{cost} \cdot |z^{-1}| \int_{-\infty}^{-1} e^{\xi z} \xi^{-2} d\xi \leq 1.$$

Allora la funzione

$$f^S(z) = 2 \int_{-\infty}^{-z} e^{\alpha} \alpha^{-1} d\alpha + 2zS(z) + R_+(z) + R_-(z),$$

ha una singolarità che va come

$$2 \int_{-\infty}^{-z} e^{\alpha} \alpha^{-1} d\alpha \sim \log |z|$$

per  $z = 0$ . Dunque  $f^R$  e  $f^S$  sono soluzioni del problema.

Per ottenere una rappresentazione asintotica della soluzione per angoli  $\omega$  piccoli, vogliamo studiare il comportamento della funzione  $G_n(\zeta)$  per  $n$  grande. Si avrà che la funzione  $\log G_n(\zeta)$ , data da una somma di  $n$  termini, tende ad un integrale. Ci serve avere che, se  $\xi = \operatorname{Re} \zeta > 0$  oppure  $\rho = |\zeta| > 1$  (ovvero nel dominio in cui sono contenuti i cammini  $\mathcal{P}_{\pm}$ ), certe quantità di cui faremo il logaritmo non siano mai reali negative. Si vede a tale proposito che le

$$\zeta^{-1} - \zeta_j^{-1} = \zeta^{-1} - ie^{-i\pi \frac{j}{n}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

godono di questa proprietà. Poiché

$$\zeta_1 \dots \zeta_n = i^n e^{i\pi \frac{n+1}{2}} = (-1)^n i,$$

allora

$$G_n(\zeta) = i \zeta_n J^n(\zeta),$$

dove

$$J_n(\zeta) = (\zeta^{-1} - \zeta_1^{-1}) \dots (\zeta^{-1} - \zeta_n^{-1}).$$

Vogliamo dunque calcolare il comportamento asintotico della funzione

$$\log J_n(\zeta) = \sum_{j=1}^n \log(\zeta^{-1} + ie^{-i\pi \frac{j}{n}}),$$

dove i logaritmi sono principali. Osserviamo che per ogni funzione  $\mathcal{C}^2 j(\sigma)$ , con  $0 \leq \sigma \leq 1$ , se  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\left| 2n \int_{k\Delta\sigma}^{(k+1)\Delta\sigma} j(\sigma) d\sigma - j((k+1)\Delta\sigma) - j(k\Delta\sigma) \right| \leq J_2(\Delta\sigma)^2,$$

con  $\Delta\sigma = 1/n$  e  $J_2$  è una costante che dipende dal  $\max |j''(\sigma)|$ . Quindi,

$$\left| n \int_0^1 j(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2} j(0) - \sum_{k=1}^n j(k\Delta\sigma) + \frac{1}{2} j(1) \right| \leq \frac{1}{2} \Delta\sigma J_2.$$

Di conseguenza,

$$\log J_n(\zeta) = n \int_0^1 \log(\zeta^{-1} + ie^{-i\pi\sigma}) d\sigma - \frac{1}{2} \log(\zeta^{-1} + i) + \frac{1}{2} \log(\zeta^{-1} - i) + \omega K(\zeta),$$

con

$$|K(\zeta)| \leq M(\zeta) = \max_{\sigma \in [0,1]} \frac{2}{\pi} \frac{|\zeta|}{|\zeta - ie^{i\pi\sigma}|^2}, \quad \text{per } 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Se i  $\mathcal{P}_\pm$  sono scelti in modo tale da restare distanti dall'arco  $\zeta = ie^{i\pi\sigma}$ , con  $\sigma \in [0, 1]$ , allora  $M(\zeta)$  è limitata e dunque esiste una costante  $M_{\mathcal{P}}$  tale che  $|K(\zeta)| \leq M_{\mathcal{P}}$ . Sia ora

$$H(\zeta) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \log(\zeta^{-1} + ie^{-i\pi\sigma}) d\sigma,$$

perciò

$$\log J_n(\zeta) = \omega^{-1} H(\zeta) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{\zeta^{-1} + i}{\zeta^{-1} - i} \right) + \omega K(\zeta),$$

e dunque

$$G_n(\zeta) = i\zeta^n \frac{\sqrt{\zeta^{-1} - i}}{\sqrt{\zeta^{-1} + i}} e^{\omega^{-1} H(\zeta) + \omega K(\zeta)},$$

dove le radici quadrate hanno parte reale positiva. Poiché  $K(\zeta)$  è controllato da una costante e  $\omega = \frac{\pi}{2n}$  si ha che per  $n \rightarrow +\infty$

$$G_n(\zeta) \zeta^{-n} e^{-\omega^{-1} H(\zeta)} \rightarrow i \frac{\sqrt{\zeta^{-1} - i}}{\sqrt{\zeta^{-1} + i}}$$

uniformemente sui cammini  $\mathcal{P}_\pm$ . Per concludere, si ottiene dunque la rappresentazione asintotica

$$f_\pm(z) \sim -i \int_{\mathcal{P}_\pm} e^{\zeta z} e^{\omega^{-1} H(\zeta)} \frac{\sqrt{\zeta^{-1} + i}}{\sqrt{\zeta^{-1} - i}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (\text{B.4})$$

Proviamo a semplificare la rappresentazione (B.4) tramite lo studio del comportamento della funzione  $H(\zeta)$ . Intanto, osserviamo che

$$\log(\zeta^{-1} + ie^{-i\pi\sigma}) = \log(ie^{-i\pi\sigma}) \log(1 - ie^{i\pi\sigma} \zeta^{-1}),$$

ove i termini  $ie^{-i\pi\sigma}$  e  $1 - ie^{i\pi\sigma} \zeta^{-1}$  non possono essere reali negativi quando  $\sigma \in [0, 1]$  e quando una delle due fra  $\text{Re} \zeta > 0$  e  $|\zeta| > 1$  è verificata. Poiché

$$\int_0^1 \log(ie^{-i\pi\sigma}) = \int_0^1 i\pi \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) d\sigma = 0,$$

$H(\zeta)$  può essere riscritta in forma

$$H(\zeta) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \log(1 - ie^{i\pi\sigma} \zeta^{-1}) d\sigma.$$

Introduciamo la nuova variabile  $\mu = -e^{i\pi\sigma} \zeta^{-1}$  (e dunque  $d\mu = i\pi\mu d\sigma$ ), ottenendo

$$H(\zeta) = \frac{1}{2i} \int_{-\zeta^{-1}}^{\zeta^{-1}} \log(1 + i\mu) \frac{d\mu}{\mu},$$

dove il cammino di integrazione è la semicirconferenza di raggio  $|\mu| = |\zeta^{-1}|$  e  $\operatorname{Re}(i\zeta\mu) > 0$ . Osserviamo che  $1 + i\mu$  non è mai reale negativo in tutto il semicerchio  $|\mu| \leq |\zeta^{-1}|$ ,  $\operatorname{Re}(i\zeta\mu) > 0$  poiché stiamo considerando  $\zeta$  tali che  $\operatorname{Re} \zeta > 0$  oppure  $|\zeta| > 1$ . Di conseguenza, possiamo deformare il cammino di integrazione per  $\mu$  nel segmento che congiunge  $-\zeta^{-1}$  e  $\zeta^{-1}$ , perciò

$$H(\zeta) = \frac{1}{2i} \int_0^{\zeta^{-1}} \log \left( \frac{1+i\mu}{1-i\mu} \right) \frac{d\mu}{\mu} = \int_0^{\zeta^{-1}} \arctan \mu \frac{d\mu}{\mu}.$$

Questa ultima scrittura di  $H(\zeta)$  può valere anche nel caso  $|\zeta| \leq 1$  in quanto l'asse immaginario non è attraversato. Allora  $H(-\zeta) = -H(\zeta)$ . Inoltre

$$\begin{aligned} H'(\zeta) &= -\zeta^{-1} \arctan \zeta^{-1}, \\ H''(\zeta) &= \zeta^{-2} \left( \arctan \zeta^{-1} + \frac{\zeta^{-1}}{1+\zeta^{-2}} \right). \end{aligned}$$

Si ottiene che il comportamento di  $H(\zeta)$  e delle sue derivate per piccoli valori di  $\zeta$  è dato da

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= \zeta^{-1} - \frac{1}{9}\zeta^{-3} + \dots, \\ H'(\zeta) &= -\zeta^{-2} + \frac{1}{3}\zeta^{-4} + \dots, \\ H''(\zeta) &= 2\zeta^{-3} - \frac{4}{3}\zeta^{-5} + \dots \end{aligned}$$

Il comportamento di  $H(\zeta)$ , vicino a  $\zeta = 0$ , poiché per  $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\begin{aligned} \log(\zeta^{-1} + ie^{-i\pi\sigma}) &= -\log \zeta + \log(1 + ie^{-i\pi\sigma}\zeta) = \\ &= -\log \zeta + ie^{-i\pi\sigma}\zeta + \frac{1}{2}e^{-2i\pi\sigma}\zeta^2 - \frac{1}{3}ie^{-3i\pi\sigma}\zeta^3 + \dots, \end{aligned}$$

è dato, per  $\operatorname{Re} z > 0$ , da

$$H(\zeta) = -\frac{\pi}{2} \log(\zeta) + \zeta - \frac{1}{9}\zeta^3 + \dots$$

Poiché  $H(-\zeta) = -H(\zeta)$ , si ha che per  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= \mp \frac{\pi}{2} \log(\pm\zeta) + \zeta - \frac{1}{9}\zeta^3 + \dots, \\ H'(\zeta) &= \mp \frac{\pi}{2}\zeta^{-1} + 1 - \frac{1}{3}\zeta^2 + \dots, \\ H''(\zeta) &= \pm \frac{\pi}{2}\zeta^{-2} - \frac{2}{3}\zeta + \dots \end{aligned}$$

Ora studiamo il comportamento di  $H(\zeta)$  in un intorno di  $\zeta = \pm i$ . Poiché

$$\log(-i + ie^{-i\pi\sigma}) = -i\pi \frac{\sigma}{2} + \log \left( -ie^{i\pi \frac{\sigma}{2}} + ie^{-i\pi \frac{\sigma}{2}} \right) = -i\pi \frac{\sigma}{2} + \log \left( 2 \sin \frac{\pi\sigma}{2} \right),$$

con  $\sin \frac{\pi\sigma}{2}$  che non è mai reale negativo per  $\sigma \in [0, 1]$ . Pertanto

$$H(i) = -i\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \log \left( 2 \sin \frac{\pi\sigma}{2} \right) d\sigma.$$

Inoltre,

$$H(i) = \int_0^{-i} \arctan \mu \frac{d\mu}{\mu} = -i \int_0^1 \tanh^{-1} \nu \frac{d\nu}{\nu},$$

e dunque  $H(i)$  è puramente immaginario e  $H(i) = -i\frac{\pi^2}{8}$ . Di conseguenza,  $H(-i) = i\frac{\pi^2}{8}$ . Allora, le derivate di  $H(\zeta)$  in un intorno di  $\zeta = \pm i$  sono date dalle

$$\begin{aligned} H'(\zeta) &= -\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 \mp i\zeta^{-1}}{2} \right) - \dots, \\ H''(\zeta) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\zeta \mp i} + \dots \end{aligned}$$

Vogliamo infine scrivere il comportamento di  $H(\zeta)$  lungo l'asse immaginario. Siano  $\lambda$  e  $h(\lambda)$  tali che

$$\begin{aligned} \zeta &= \pm i\lambda^{-1}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \lambda < 1, \\ h(\lambda) &= \pm i H(\pm i\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Dunque,

$$h(\lambda) = \pm i \int_0^{\mp i\lambda} \arctan \mu \frac{d\mu}{\mu} = \int_0^\lambda \tanh^{-1} \nu \frac{d\nu}{\nu},$$

cioè  $h(\lambda)$  è reale positivo. Inoltre,  $h(1) = \frac{\pi^2}{8}$  e  $h'(\lambda) = \lambda^{-1} \tanh^{-1} \lambda$ . Valgono anche le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} H'(\pm i\lambda^{-1}) &= \lambda^2 h'(\lambda) = \lambda \tanh^{-1} \lambda, \\ H''(\pm i\lambda^{-1}) &= \pm i \lambda^2 [\lambda^2 h'(\lambda)]' = \pm i \left( \lambda^2 \tanh^{-1} \lambda + \frac{\lambda^3}{1 - \lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Per  $\lambda$  vicino allo zero si ottiene dagli sviluppi precedenti di  $H(\zeta)$  per  $|\zeta|$  grande che

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \lambda + \frac{1}{9} \lambda^3 + \dots, \\ h'(\lambda) &= 1 + \frac{1}{3} \lambda^2 + \dots \end{aligned}$$

Ora possiamo iniziare a riscrivere la rappresentazione asintotica (B.4) in un'altra forma. Per farlo, applichiamo il metodo del punto di sella, ovvero un metodo per approssimare integrali della forma

$$\int_C g(\zeta) e^{zf(\zeta)} d\zeta, \quad \text{con } z \text{ molto grande.}$$

I punti di sella sono i punti stazionari di  $f(\zeta)$ , e nel nostro caso è

$$f(\zeta) = \zeta - z^{-1}\omega^{-1}H(\zeta).$$

Dunque i punti di sella sono i punti  $\zeta = Z$  per cui  $z = \omega^{-1}H'(Z)$ . Per cercare la posizione di questi punti, introduciamo la mappa

$$\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S \quad \mapsto \quad z = x + iy = \omega H'(\zeta) \in \mathbb{C},$$

con  $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ . Le immagini del semipiano superiore e del semipiano inferiore sono la stessa, e la mappa manda la semiretta reale positiva nella semiretta reale negativa e manda  $\zeta = 0$  e  $\zeta = +\infty$  rispettivamente in  $z = -\infty$  e  $z = 0$ . Inoltre, l'immagine dell'asse immaginario positivo  $\xi = 0, \eta > 1$  è l'asse reale positivo  $y = 0, x > 0$ . Invece, l'immagine del segmento  $\xi = 0, 0 < \eta < 1$ , viene mandata in una curva che va da  $z = +\infty \pm i\omega^{-1}$  a  $z = \pm\infty$  a seconda che siamo nella parte  $\xi > 0$  o nella parte  $\xi < 0$ .

L'immagine del cammino  $\mathcal{P}_+$  è mostrata nella figura B.4: parte da  $z = 0$

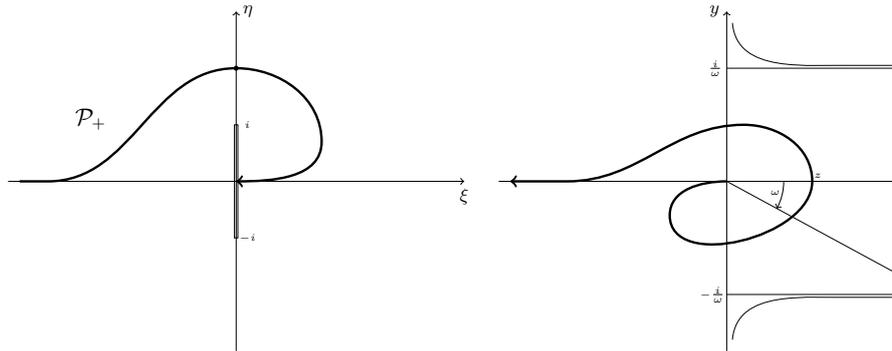


Figura B.4: Il cammino  $\mathcal{P}_+$  e la sua immagine nel piano in  $z$

lungo l'asse reale negativo, poi ruota in senso antiorario attorno all'origine fino a raggiungere di nuovo l'asse reale negativo, e va verso  $-\infty$  lungo quest'asse. Dunque tale cammino attraversa il settore angolare  $z = re^{i\theta}$ ,  $-\omega \leq \theta \leq 0$ . Osserviamo che il cammino può essere deformato in modo tale da passare per una sola volta per un qualsiasi punto del settore. Dunque, per ogni punto  $z$  del settore, esiste due punti di sella immaginari puri  $\zeta = Z(\omega z)$  con  $\operatorname{Im} Z(\omega z) > 0$  e  $\zeta = -Z(\omega z)$  con  $\operatorname{Im} Z(\omega z) < 0$ ; inoltre i cammini  $\mathcal{P}_+$  e  $\mathcal{P}_-$  possono essere deformati in modo tale da passare rispettivamente per  $\zeta = Z(\omega z)$  e  $\zeta = -Z(\omega z)$ .

Studiamo il comportamento di  $\operatorname{Re}(\zeta z - \omega^{-1}H(\zeta))$  su  $\mathcal{P}_\pm$ . Se  $\zeta = \xi < 0$  con  $|\xi|$  grande, allora  $H(\zeta) \sim \zeta^{-1}$  e quindi

$$\operatorname{Re}(\zeta z - \omega^{-1}H(\zeta)) \sim \operatorname{Re} \zeta z = \xi x < 0;$$

se invece  $\zeta = \xi > 0$ , con  $\xi \sim 0$ ,  $H(\zeta) \sim -\frac{\pi}{2} \log \zeta$  e dunque

$$\operatorname{Re}(\zeta z - \omega^{-1}H(\zeta)) \sim -\omega^{-1} \operatorname{Re} H(\zeta) \sim n \log \xi < 0.$$

Di conseguenza,  $\operatorname{Re}(\zeta z - \omega^{-1}H(\zeta))$  assume massimo su  $\mathcal{P}_{\pm}$ . Pertanto, si possono ulteriormente modificare i cammini  $\mathcal{P}_{\pm}$  in modo tale che i massimi siano assunti proprio nei punti di sella  $\zeta = \pm Z(\omega z)$ .

Poiché la posizione del punto di sella dipende solo dal valore di  $\omega z$ , otterremo una rappresentazione asintotica per valori fissati di  $\omega z$  e non di  $z$ . Ci limiteremo a studiare il comportamento per punti della forma  $z = x$ , in quanto sono gli unici punti che appartengono al settore per angoli  $\omega$  arbitrariamente piccoli.

Dato  $\zeta = Z(\omega x)$  punto di sella immaginario puro, introduciamo  $\lambda$  tale che  $Z(\omega x) = i\lambda^{-1}$ ; allora  $\lambda = \lambda(\omega x)$  è una funzione in  $x$  con inversa

$$\omega x = H'(i\lambda^{-1}) = \lambda^2 h'(\lambda) = \lambda \tanh^{-1} \lambda, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Poiché quest'ultima funzione assume valori da 0 a infinito per  $\lambda$  che varia tra 0 e 1, l'inversa  $\lambda = \lambda(\omega x)$  esiste. Prendendo  $\lambda$  come parametro, si ottiene che l'esponente  $\zeta x - \omega^{-1}H(\zeta)$  per  $\zeta = \pm Z(\omega x) = \pm i\lambda^{-1}$  diventa

$$\pm Zx - \omega^{-1}H(\pm Z) = \pm i\omega^{-1}k(\lambda),$$

dove

$$k(\lambda) = \lambda h'(\lambda) + h(\lambda) = \tanh^{-1} \lambda + \int_0^{\lambda} \tanh^{-1} \nu \frac{d\nu}{\nu}.$$

Sia inoltre

$$j(\lambda) = (1 - \lambda^2)\lambda k'(\lambda) = (1 - \lambda^2)(\lambda^2 h'(\lambda))' = \lambda + (1 - \lambda^2) \tanh^{-1} \lambda.$$

Poiché

$$(\lambda^2 h'(\lambda))' = \lambda k'(\lambda),$$

in un intorno del punto di sella si ha

$$\zeta x - \omega^{-1}H(\zeta) = \pm i\omega^{-1} \left[ k(\lambda) - \frac{1}{2} \lambda^3 k'(\lambda) (\zeta \mp i\lambda^{-1})^2 + \dots \right]. \quad (\text{B.5})$$

Inoltre, possiamo scegliere la direzione dei cammini  $\mathcal{P}_{\pm}$  nei due punti di sella in modo tale che la parte immaginaria di  $\zeta x - \omega^{-1}H(\zeta)$  sia costante e la parte reale passi attraverso un massimo in quella direzione. Poiché  $\lambda^3 k'(\lambda) > 0$ , dalla (B.5) si ha che per tale direzione deve valere che  $\pm i(\zeta \mp i\lambda^{-1})^2$  è reale positivo, e cioè nel punto di sella il vettore tangente al cammino deve avere un angolo di  $\pm 45^\circ$  rispetto all'asse  $x$ , come si vede in figura B.5. In questo modo, si ottiene che il contributo al valore dell'integrale (B.4) dipende soprattutto dal valore della funzione integranda in un intorno del punto di sella. Dunque il metodo del punto di sella prevede che nell'integrale si

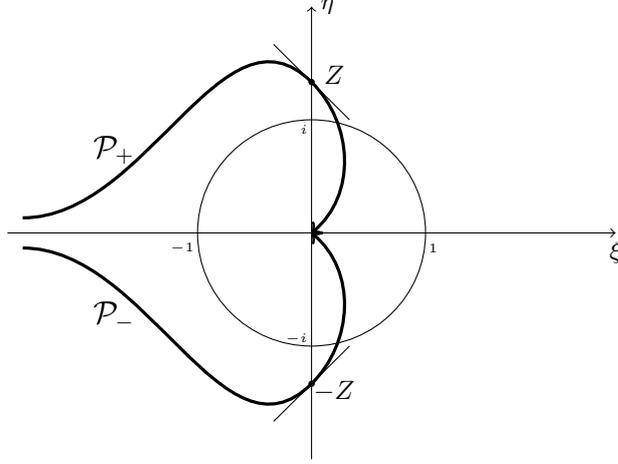


Figura B.5: I cammini  $\mathcal{P}_\pm$  passanti per i punti di sella  $\pm Z$  nella direzione ottenuta

sostituisca alla funzione  $\zeta x - \omega^{-1}H(\zeta)$  la sua espansione (B.5), alla funzione  $\frac{\sqrt{\zeta^{-1}+i}}{\zeta\sqrt{\zeta^{-1}-i}}$  il suo valore nel punto di sella e a  $\mathcal{P}_\pm$  due segmenti  $\mathcal{L}_\pm$  passanti per i punti di sella e tangenti ai due cammini. Dunque la (B.4) diventa

$$f_\pm(x) \sim \mp \lambda \frac{\sqrt{i(1 \mp \lambda)}}{\sqrt{-i(1 \pm \lambda)}} e^{\pm i\omega^{-1}k(\lambda)} \int_{\mathcal{L}_\pm} e^{[\mp \frac{1}{2}i\omega^{-1}\lambda^3 k'(\lambda)(\zeta \mp i\lambda^{-1})^2]} d\zeta.$$

Se  $w = (\zeta \mp i\lambda^{-1})e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ , l'integrale diventa

$$e^{\mp i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[\frac{1}{2}\omega^{-1}\lambda^3 k'(\lambda)]w^2} dw = e^{\mp i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\lambda^3 k'(\lambda)}}.$$

Inoltre, poiché abbiamo imposto che le radici quadrate debbano avere parte reale positiva, si deve avere che  $i^{1/2} = e^{\frac{i\pi}{4}}$  e  $(-i)^{1/2} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$ . Finalmente si ottiene che

$$f_\pm(x) \sim -\sqrt{\frac{1 \mp \lambda}{1 \pm \lambda}} \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\lambda k'(\lambda)}} e^{\pm i[\omega^{-1}k(\lambda) + \frac{\pi}{4}]}$$

e dunque

$$f_\pm(x) \sim -(1 \pm \lambda) \sqrt{\frac{2\pi\omega}{j(\lambda)}} e^{\pm i[\omega^{-1}k(\lambda) + \frac{\pi}{4}]} . \quad (\text{B.6})$$

Ci interessa ora studiare il comportamento della rappresentazione asintotica per piccoli valori di  $\omega x$ . Dallo sviluppo

$$\omega x = \lambda \tanh^{-1} \lambda = \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^4 + \dots ,$$

si ha che

$$\lambda \approx \sqrt{\omega x}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} k(\lambda) &= \lambda h'(\lambda) + h(\lambda) = 2\lambda + \frac{4}{9}\lambda^3 + \dots \approx 2\sqrt{\omega x}, \\ \lambda k'(\lambda) &= 2\lambda + \frac{4}{3}\lambda^3 + \dots \approx 2\sqrt{\omega x}, \end{aligned}$$

perciò per piccoli valori di  $\omega x$

$$f_{\pm}(x) \sim -\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i[2\sqrt{\frac{x}{\omega}} + \frac{\pi}{4}]}. \quad (\text{B.7})$$

Studiamo ora la (B.6) nel caso di  $\omega x$  molto grande. Dalla

$$\tanh^{-1} \lambda = -\frac{1}{2} \log \left( \frac{1-\lambda}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1-\lambda}{2} + \dots$$

si ha che

$$\begin{aligned} \omega x &= -\frac{1}{2} [1 - (1-\lambda)] \log \left( \frac{1-\lambda}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1-\lambda}{2} + \dots, \\ \lambda &= 1 - 2e^{-2\omega x} + \dots \end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} h'(\lambda) &= \frac{1}{2} [1 + (1-\lambda) + \dots] \log \left( \frac{1-\lambda}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1-\lambda}{2} + \dots = \\ &= \omega x (1 + 2e^{-2\omega x} + \dots) - e^{-2\omega x} + \dots, \\ h(\lambda) &= \frac{\pi^2}{8} + \left[ \frac{1-\lambda}{2} + \left( \frac{1-\lambda}{2} \right)^2 + \dots \right] \log \left( \frac{1-\lambda}{2} \right) - \frac{1-\lambda}{2} + \dots, \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 2\omega x e^{-2\omega x} + \dots, \\ k(\lambda) &= \frac{\pi^2}{8} + \omega x - e^{-2\omega x} - 2\omega x e^{-2\omega x} + \dots, \\ j(\lambda) &= 1 - 2e^{-2\omega x} + 4\omega x e^{-2\omega x}. \end{aligned}$$

Dunque, per valori di  $\omega x$  molto grandi,

$$\begin{aligned} f_+(x) &\sim -2\sqrt{2\pi\omega} e^{-2\omega x} e^{i\left(\omega^{-1}\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{ix}, \\ f_-(x) &\sim -2\sqrt{2\pi\omega} e^{-2\omega x} e^{-i\left(\omega^{-1}\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{-ix}, \end{aligned}$$

cioè  $f_+$  tende a zero esponenzialmente all'infinito, mentre  $f_-$  va come  $Ce^{-ix}$ , con

$$C = -2\sqrt{2\pi\omega} e^{-i\left(\omega^{-1}\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Abbiamo così dimostrato tutto quello che serve nella sezione 3.2.

# Bibliografia

- [1] ANDREWS, G. E., ASKEY, R., AND ROY, R. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, New York, 1999.
- [2] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists. Third Edition*. Academic Press, San Diego, 1985.
- [3] CHAKRABARTI, A., MANDAL, B. N., AND GAYEN, R. The dock problem revisited. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **21** (2005), 3459–3470.
- [4] FRIEDRICHS, K. O. Water waves on a shallow sloping beach. *Communications on Applied Mathematics* **1**, numero 2 (1948), 109–134.
- [5] FRIEDRICHS, K. O., AND LEWY, H. The dock problem. *Communications on Applied Mathematics* **1**, numero 2 (1948), 135–148.
- [6] HEINS, A. E. Water waves over a channel of finite depth with a dock. *American Journal of Mathematics* **70**, numero 4 (1948), 730–748.
- [7] HOLFORD, R. L. Short surface waves in the presence of a finite dock. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **60** (1964), 957–1011.
- [8] ISAACSON, E. Water waves over a sloping bottom. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **3** (1950), 11–31.
- [9] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Dover Publications, New York, 1945.
- [10] LEWY, H. Water waves on sloping beaches. *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946), 737–775.
- [11] MARTIN, C.-I. The generalized dock problem. *Applicable Analysis. An International Journal* **90**, numero 5 (2011), 843–859.

- [12] PETERS, A. S. Water waves over sloping beaches and the solution of a mixed boundary value problem for  $\Delta^2\varphi - k^2\varphi = 0$  in a sector. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **5** (1953), 87–108.
- [13] ROACH, G. F. *Green's functions, Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [14] STOKER, J. J. Surface waves in water of variable depth. *Quarterly of Applied Mathematics* **5** (1947), 1–54.
- [15] STOKER, J. J. *Water Waves: the Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers, New York, 1957.