Integrazione - Analisi in più variabili 2

Prove in itinere dal 2008

Prova in itinere del 10 aprile 2008

Esercizio 1 Si consideri l'insieme E costituito dai punti $x \in [0,1]$ nel cui sviluppo decimale la cifra 7 compare solo un numero finito di volte. Si dimostri che E è misurabile secondo Lebesgue e si calcoli $m_1(E)$.
Esercizio 2 Fissato $\alpha > 1$, si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{n} \frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}\, dx.$$

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{1}{x+1}\, dxdy,$$

ove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y+2,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 Possiamo scrivere

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,,$$

ove, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$E_n = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} :\ a_k \in \{0,1,\dots 9\},\ a_k \ne 7\ \ \forall k > n \right\};$$

ne segue che E è misurabile perché tali sono gli E_n, in quanto unioni numerabili di intervalli.

Per valutare la misura di E_n, per ciascun $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \in [0,1]$ poniamo $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$. Allora

$$x \in E_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10^n(x - x_n) \in E_0\,,$$

ovvero $E_n = x_n + 10^{-n}E_0$. Ne segue, a causa dell'invarianza per traslazioni,

$$m_1(E_n) = 10^{-n}m_1(E_0).$$

D'altronde, E_0 si ottiene da $[0,1]$ eliminando successivamente un intervallo di ampiezza $\frac{1}{10}$, 9 intervalli di ampiezza $\frac{1}{10^2}$, 9^2 intervalli di ampiezza $\frac{1}{10^3}$, eccetera, e quindi

$$m_1(E_0) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{9}{10^2} - \frac{9^2}{10^3} - \ldots = 1 - \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k = 1 - \frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 0.$$

Pertanto si ha $m_1(E_n) = 10^{-n}m_1(E_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e infine, grazie alla subadditività,

$$m_1(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_1(E_n) = 0.$$

Esercizio 2 Le funzioni

$$f_n(x) = I_{[\frac{1}{n},n]}(x)\frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}, \qquad x > 0,$$

formano una successione che converge puntualmente q.o. a 0. Inoltre, essendo $|\sin x|^n \leq |\sin x|^\alpha$ per ogni $n \geq \alpha$, vale la relazione

$$f_n(x) \leq I_{]0,1]}(x)\frac{|\sin x|^\alpha}{x^\alpha} + I_{[1,\infty[}(x)\frac{1}{x^\alpha} \qquad \forall x > 0, \quad \forall n \geq \alpha.$$

La funzione

$$g(x) = I_{]0,1]}(x)\frac{|\sin x|^\alpha}{x^\alpha} + I_{[1,\infty[}(x)\frac{1}{x^\alpha}\,, \qquad x > 0,$$

è sommabile su $]0,\infty[$, essendo $\alpha > 1$. Pertanto, in virtù del teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 0.$$

Esercizio 3 L'insieme E è misurabile perché è normale rispetto all'asse y: infatti si ha

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 2, \ y^2 \le x \le y + 2\}.$$

Inoltre la funzione integrande è misurabile, perché continua, e positiva: quindi essa è integrabile e si ha

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{1}{x+1}\, dxdy &= \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{y+2} \frac{1}{x+1}\, dx \right] dy = \\
&= \int_0^2 \left[\ln(y+3) - \ln(1+y^2) \right] dy = \\
&= \left[(y+3)\ln(y+3) - y - y\ln(1+y^2) \right]_0^2 - 2\int_0^2 \frac{y^2}{1+y^2}\, dy = \\
&= 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 - 2\ln 5 + 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = \\
&= 3\ln 5 - 3\ln 2 + 2 - 2\arctan 2.
\end{aligned}$$

Prova in itinere del 22 maggio 2008

Esercizio 1 Si calcoli il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \ \sqrt{2}(x^2 + y^2) \le z \le \sqrt{6}(x^2 + y^2)\}.$$

Esercizio 2 Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si consideri la funzione N_f definita da

$$N_f(t) = \int_{-\infty}^{t} |f(s)|\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ la funzione N_f è continua su $\mathbb{R}$.

(ii) Si provi che l'insieme $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : N_f \text{ è iniettiva}\}$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 Si consideri l'insieme

$$X = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ è } 2\pi\text{-periodica}, \ f \in L^1(-\pi, \pi), \ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty \right\},$$

ove

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(i) Si verifichi che X è uno spazio vettoriale e che, posto $[\tau_h f](x) = f(x+h)$, si ha $\tau_h f \in X$ per ogni $f \in X$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Posto $|f|_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|$, si provi che

$$\lim_{h\to 0} |\tau_h f - f|_X = 0 \qquad \forall f \in X.$$

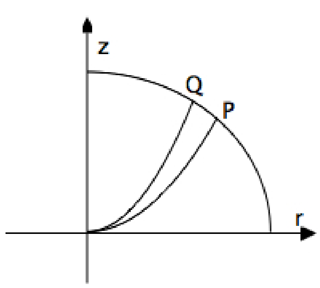
(iii) Si mostri che ogni $f \in X$ coincide q.o. con una funzione g continua su $\mathbb{R}$ e 2π-periodica.

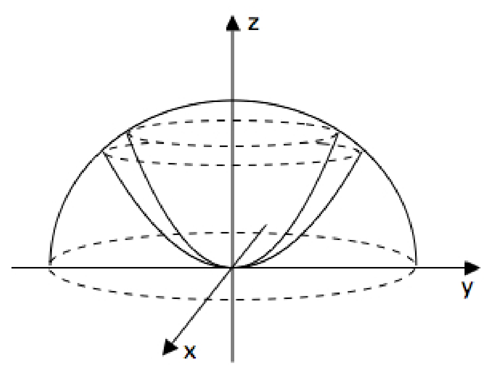
Risoluzione

Esercizio 1 Utilizziamo le coordinate cilindriche $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$. L'insieme E diventa

$$F = \{(r,\vartheta,z) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ \sqrt{2}\, r^2 \le z \le \sqrt{6}\, r^2\},$$

e possiamo valutarne il volume integrando per fette orizzontali: ciascuna fetta è una corona circolare di cui dobbiamo determinare i raggi.





Come mostra il disegno, occorre trovare le coordinate dei punti P e Q nel piano rz, perchè la quota delle fette va da 0 all'ordinata di Q, ma attraversando l'ordinata di P cambia il raggio massimo da considerare.
Calcoliamo le coordinate di P e Q (nel piano rz). Per Q si ha

$$z = \sqrt{6}r^2 = \sqrt{1-r^2}$$

da cui $6r^4 + r^2 - 1 = 0$ e quindi, con facili conti, $r = 1/\sqrt{3}$ e $z = \sqrt{2}/\sqrt{3}$.
Per P si ha invece

$$z = \sqrt{2}r^2 = \sqrt{1-r^2}$$

da cui $2r^4+r^2-1=0$ e quindi $r=1/\sqrt{2}$, $z=1/\sqrt{2}$.
Di conseguenza, detta C_z la sezione di E ad altezza z, l'area di C_z è data da

$$m_2(C_z)=\begin{cases} \pi z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) & \text{se } z\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right], \\ \pi\left(1-z^2-\frac{z}{\sqrt{6}}\right) & \text{se } z\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]. \end{cases}$$

Il volume cercato vale dunque

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} m_2(C_z)\,dz = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)dz+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\pi\left(1-z^2-\frac{z}{\sqrt{6}}\right)dz= \\ &= \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[z-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2\sqrt{6}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}= \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{6}}\right)= \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{11}{6\sqrt{3}}-\frac{7}{36}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 2 **(i)** Fissato $t_0\in\mathbb{R}$, si ha

$$|N_f(t)-N_f(t_0)|=\left|\int_{t_0}^t |f(s)|\,ds\right|;$$

ne segue, in virtù dell'assoluta continuità dell'integrale,

$$\lim_{t\to t_0}|N_f(t)-N_f(t_0)|=0.$$

Si osservi che in effetti la funzione N_f è addirittura uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
(ii) Dire che N_f è iniettiva su $\mathbb{R}$ significa dire che essa è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, e quindi che f è q.o. strettamente positiva in ogni intervallo $I\subset\mathbb{R}$. Quindi l'insieme M coincide con la classe delle funzioni $f\in L^1(\mathbb{R})$ tali che l'insieme $\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}$ ha misura nulla. Ora, se f è un arbitrario elemento di $L^1(\mathbb{R})$, la funzione

$$g(s)=f(s)+c\,e^{-s^2}\,I_{\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}}(s),\quad s\in\mathbb{R},$$

appartiene certamente a M per ogni $c \in \mathbb{R}$, dato che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$ è vuoto; inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, se $|c|$ è sufficientemente piccolo si ha

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\{x \in \mathbb{R}: f(x)=0\}} |c| e^{-s^2}\, ds \leq |c| \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\, ds \leq \varepsilon.$$

Ciò prova che M è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 **(i)** La verifica del fatto che X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è ovvia. Inoltre, se $f \in X$, allora per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(s) e^{-ik(s-h)}\, ds = \\ &= \frac{e^{ikh}}{2\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(s) e^{-iks}\, ds = \frac{e^{ikh}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks}\, ds = e^{ikh} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $h \in \mathbb{R}$,

$$|\tau_h f|_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\tau_h f}(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = |f|_X\,,$$

il che mostra che $\tau_h f \in X$ quando $f \in X$.

(ii) Si ha, per linearità,

$$(\widehat{\tau_h f - f})(k) = \widehat{\tau_h f}(k) - \widehat{f}(k) = (e^{ikh} - 1)\widehat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall h \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$|\tau_h f - f|_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e^{ikh} - 1| |\widehat{f}(k)|.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, dato che $f \in X$ possiamo scegliere $\nu \in \mathbb{N}$ in modo che

$$\sum_{|k| > \nu} |\widehat{f}(k)| < \varepsilon;$$

possiamo inoltre determinare $\delta > 0$ tale che

$$|e^{ikh} - 1| < \varepsilon \quad \forall |h| < \delta, \quad \forall k = 0, \pm 1, \ldots, \pm \nu.$$

Allora per $|h| < \delta$ otteniamo

$$\begin{aligned} |\tau_h f - f|_X &= \sum_{|k| \leq \nu} |e^{ikh} - 1| |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k| > \nu} |e^{ikh} - 1| |\widehat{f}(k)| < \\ &< \varepsilon \sum_{|k| \leq \nu} |\widehat{f}(k)| + 2 \sum_{|k| > \nu} |\widehat{f}(k)| < \varepsilon(|f|_X + 2). \end{aligned}$$

Ciò prova che $|\tau_h f - f|_X \to 0$ per $|h| \to 0$.

(iii) Se $f \in X$, dalla condizione $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$ si deduce che la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{ikt}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

converge totalmente ed uniformemente ad una funzione g, continua su $\mathbb{R}$ e 2π-periodica. I coefficienti di Fourier di tale funzione sono esattamente i numeri $\widehat{f}(k)$, vale a dire

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Se ne deduce che le somme parziali, sia di Fourier che di Fejer, relative a f e a g, coincidono:

$$S_N f = S_N g\,, \qquad \sigma_N f = \sigma_N g \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Ora, abbiamo visto che $S_N f \to g$ uniformemente, il che implica $\sigma_N f \to g$ uniformemente; d'altra parte, poiché $f \in L^1(-\pi,\pi)$, si sa che $\sigma_N \to f$ in $L^1(-\pi,\pi)$. Se ne deduce che $f = g$ q.o. e ciò prova la tesi.

Prova in itinere del 19 aprile 2010

Esercizio 1 (i) Determinare, se esiste, il limite seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{nx\, e^x - e^{2x}}{x^2\, e^x + n\, e^{3x}}\, dx.$$

(ii) Determinare una serie numerica la cui somma coincida con l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}\, dt.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_T (xy^2 + 3y)\, dxdy,$$

ove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq |x| \vee 1,\ x^2 + y^2 \leq 8\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione integranda può essere scritta come

$$f_n(x) = \frac{nx\, e^x - e^{2x}}{x^2\, e^x + n\, e^{3x}} = \frac{x\, e^x - \frac{1}{n}\, e^{2x}}{e^{3x} + \frac{1}{n}\, x^2\, e^x}$$

e dunque f_n converge puntualmente alla funzione $f(x) = x\, e^{-2x}$. D'altronde per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la maggiorazione

$$|f_n(x)| \leq \frac{x\, e^x + \frac{1}{n}\, e^{2x}}{e^{3x} + \frac{1}{n}\, x^2\, e^x} \leq \frac{x\, e^x + e^{2x}}{e^{3x}} \leq x\, e^{-2x} + e^{-x} \qquad \forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e la funzione all'ultimo membro è sommabile su $]0, \infty[$. Per il teorema di Lebesgue, possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{nx\, e^x - e^{2x}}{x^2\, e^x + n\, e^{3x}}\, dx = \int_0^\infty x\, e^{-2x}\, dx = \frac{1}{4}.$$

(ii) Possiamo scrivere, utilizzando la serie geometrica di ragione e^{-t},

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \int_0^\infty \frac{t\, e^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty t\, e^{-(n+1)t}\, dt.$$

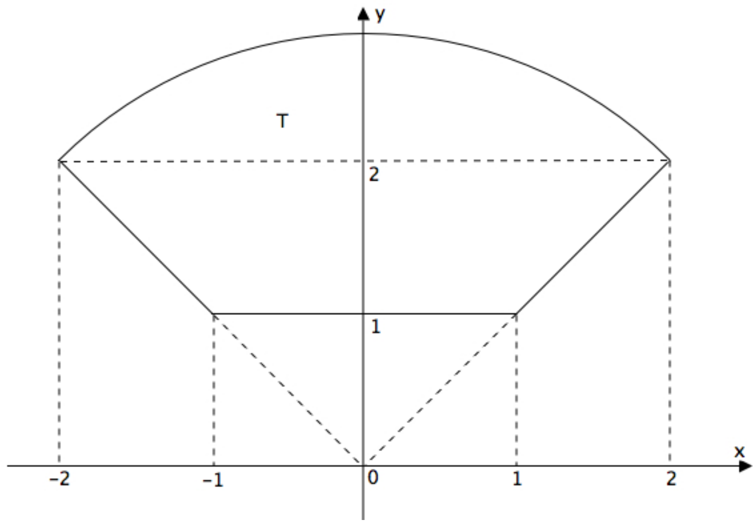
In virtù del teorema di B. Levi possiamo scambiare la somma con l'integrale, e quindi

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty t\, e^{-(n+1)t}\, dt,$$

e dopo una integrazione per parti si conclude che

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\, .$$

Esercizio 2 L'insieme T, essendo chiuso, è misurabile. Le rette $y = \pm x$ e $y = 1$ si incontrano evidentemente nei punti $(\pm 1, 1)$, mentre le rette $y = \pm x$ incontrano la circonferenza $x^2 + y^2 = 8$ nei punti $(\pm 2, 2)$.



L'insieme T è simmetrico rispetto all'asse y: ne segue che l'integrale su T della funzione xy^2, che è dispari rispetto a x, è nullo, mentre quello della funzione $3y$ è pari al doppio dell'integrale ristretto a $T \cap \{x \geq 0\}$. In definitiva, l'integrale proposto si riduce a:

$$\begin{aligned}
\int_T (xy^2 + 3y)\, dxdy &= 2\int_{T\cap\{x\geq 0\}} 3y\, dxdy = \\
&= 6\int_0^1 \left[\int_1^{\sqrt{8-x^2}} y\, dy\right] dx + 6\int_1^2 \left[\int_x^{\sqrt{8-x^2}} y\, dy\right] dx.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\int_T (xy^2 + 3y)\, dxdy &= 3\int_0^1 \left[y^2\right]_1^{\sqrt{8-x^2}} dx + 3\int_1^2 \left[y^2\right]_x^{\sqrt{8-x^2}} dx = \\
&= 3\int_0^1 (7 - x^2)\, dx + 3\int_1^2 (8 - 2x^2)\, dx = \\
&= 3\left(7 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{14}{3}\right) = 30.
\end{aligned}$$

Prova in itinere del 24 maggio 2010

Esercizio 1 Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x \leq z \leq 2x;\ \frac{1}{x} \leq z \leq \frac{2}{x}\right\},$$

e sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D intorno all'asse z. Si calcoli l'integrale triplo

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdydz.$$

Esercizio 2 Sia Γ il sostegno della curva $\boldsymbol{\varphi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definita da

$$\begin{cases} x = 11\cos t - \cos 11t \\ y = 11\sin t - \sin 11t. \end{cases}$$

(i) Si determini la lunghezza di $\boldsymbol{\varphi}$.

(ii) Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{+\Gamma} (y\,dx - x\,dy),$$

ove l'orientazione positiva è quella indotta dalla parametrizzazione assegnata.

Risoluzione

Esercizio 1 Utilizzando le coordinate cilindriche, l'insieme A si descrive così:

$$A = \{(x, y, z) : x = \rho\,\cos\vartheta,\ y = \rho\,\sin\vartheta,\ \vartheta \in [0, 2\pi],\ (\rho, z) \in D\},$$

e nelle nuove coordinate esso si trasforma in

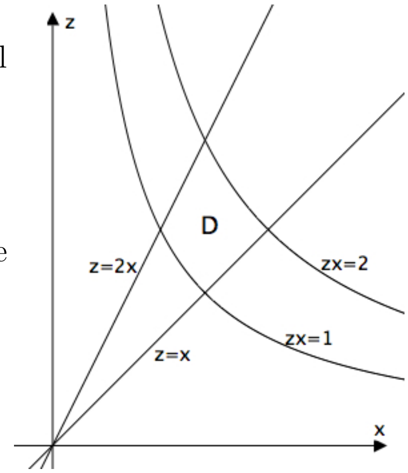
$$B = \{(\rho, \vartheta, z) : \vartheta \in [0, 2\pi];\ (\rho, z) \in D\};$$

quindi

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_B \frac{1}{\rho^2}\,\rho\,d\rho d\vartheta dz = \int_0^{2\pi}\int_D \frac{1}{\rho^2}\,\rho\,d\rho dz d\vartheta = 2\pi\int_D \frac{1}{\rho}\,d\rho dz.$$

Per calcolare l'ultimo integrale utilizziamo il cambiamento di variabili

$$u = \rho z, \qquad v = \frac{z}{\rho} :$$



si ha chiaramente $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 2$. Ne segue

$$\rho = \sqrt{\frac{u}{v}}, \qquad z = \sqrt{uv},$$

da cui

$$J(u,v) = \left| \det \frac{\partial(\rho, z)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2v} .$$

Pertanto

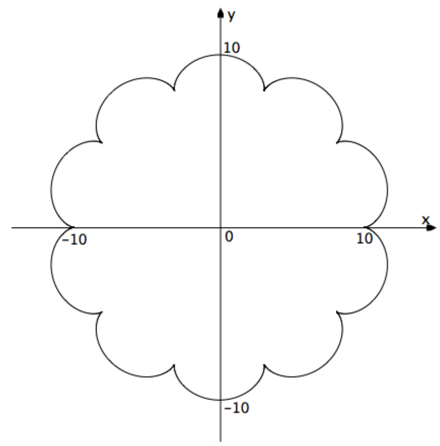
$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdydz &= 2\pi \int_D \frac{1}{\rho}\, d\rho dz = 2\pi \int_1^2 \int_1^2 \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \frac{1}{2v}\, dudv = \\ &= \pi \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} \int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{v}} = 4\pi(\sqrt{2}-1)^2. \end{aligned}$$

Esercizio 2 (i) La curva $\boldsymbol{\varphi}$ è di classe C^∞. Dalle equazioni parametriche di $\boldsymbol{\varphi}$ si ricava

$$\begin{cases} x' = -11 \sin t + 11 \sin 11t \\ y' = 11 \cos t - 11 \cos 11t, \end{cases}$$

da cui, facilmente,

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2^2 = \\
&\quad = 242(1 - \cos t \cos 11t - \sin t \sin 11t) = \\
&\quad = 242(1 - \cos 10t) = 484 \sin^2 5t
\end{aligned}
$$



e dunque

$$|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2 = 22|\sin 5t|.$$

Pertanto la lunghezza di $\boldsymbol{\varphi}$ è data da

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}) = 22 \int_0^{2\pi} |\sin 5t|\, dt = \frac{22}{5} \int_0^{10\pi} |\sin u|\, du = 44 \int_0^{\pi} \sin u\, du = 88.$$

(ii) Poiché l'orientazione positiva è quella indotta dalla parametrizzazione data, possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
\int_{+\Gamma} (y\, dx - x\, dy) &= \int_0^{2\pi} [y(t)x'(t) - x(t)y'(t)]\, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} [(11 \sin t - \sin 11t)(-11 \sin t + 11 \sin 11t) - \\
&\qquad -(11 \cos t - \cos 11t)(11 \cos t - 11 \cos 11t)]\, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} [-121 \sin^2 t - 11 \sin^2 11t + 132 \sin t \, \sin 11t - \\
&\qquad -121 \cos^2 t - 11 \cos^2 11t + 132 \cos t \cos 11t]\, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} [-132 + 132 \cos 10t]\, dt = -264\pi.
\end{aligned}
$$