Calcolo differenziale - Analisi in più variabili 1

Prove in itinere dal 2007

Prova in itinere del 15 novembre 2007

Esercizio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si definisca

$$g_n(t) = \frac{t^n\, e^{t/n}}{1+t^n}\,, \quad t \geq 0.$$

(i) Provare che la successione $\{g_n\}$ converge puntualmente, e determinarne il limite g.

(ii) Stabilire in quali sottointervalli di $[0,\infty[$ la convergenza è uniforme.

(iii) Analizzare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n(t) - g(t)), \quad t \geq 0.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$F(x,y) = e^{-x} + e^{-y} - xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e si definisca $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$. Si provi che:

(i) $Z \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy < 2\}$;

(ii) per ogni $x > 0$ esiste un unico $y > 0$ tale che $(x,y) \in Z$;

(iii) la funzione implicita $f(x)$ così definita è di classe $C^\infty(]0,\infty[)$, strettamente decrescente, convessa e tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0;$$

(iv) f coincide con la sua inversa.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per ogni $t \geq 0$ si ha, facilmente,

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,1[\\ 1/2 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi la funzione limite $g(t)$ è discontinua nel punto $t = 1$.
(ii) Dalla continuità delle funzioni g_n segue che la convergenza non può essere uniforme in alcun intervallo contenente il punto 1. Sia $\delta \in]0,1[$: si ha, per la crescenza di $s \mapsto \frac{s}{1+s}$,

$$\sup_{0\leq t\leq 1-\delta} |g_n(t) - g(t)| = \sup_{0\leq t\leq 1-\delta} |g_n(t)| \leq \frac{(1-\delta)^n\, e}{1+(1-\delta)^n} \leq (1-\delta)^n e,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq 1-\delta} |g_n(t) - g(t)| = 0.$$

Dunque in ogni intervallo $[0, 1-\delta]$, con $0 < \delta < 1$, vi è convergenza uniforme. Vediamo cosa succede sulla semiretta $t \geq 1$. Anzitutto, poiché tutte le g_n divergono per $t \to +\infty$, la convergenza non può essere uniforme in nessuna semiretta contenuta in $[1, \infty[$. Fissiamo dunque $\delta \in]0,1[$ e consideriamo l'intervallo $[1+\delta, 1/\delta]$: si ha

$$\sup_{t\in[1+\delta,\frac{1}{\delta}]} |g_n(t) - g(t)| = \sup_{t\in[1+\delta,\frac{1}{\delta}]} \left| \frac{t^n(e^{t/n}-1)-1}{1+t^n} \right| \leq \frac{(1+\delta)^n(e^{\frac{1}{\delta n}}-1)+1}{1+(1+\delta)^n},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[1+\delta,\frac{1}{\delta}]} |g_n(t) - g(t)| = 0.$$

Dunque vi è convergenza uniforme in ogni intervallo $[1+\delta, 1/\delta]$ con $0 < \delta < 1$.
(iii) La serie è a termini positivi e convergente per $t \in [0,1[$, poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n(t) - g(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n\, e^{t/n}}{1+t^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} t^n\, e = \frac{e}{1-t} \quad \forall t \in [0,1[.$$

Se $t = 1$ la serie diverge positivamente, dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n(1) - g(1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty.$$

Per $t > 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(t) - g(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n(e^{t/n} - 1) - 1}{1 + t^n};$$

Questa serie è la differenza di due serie a termini positivi, vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n(e^{t/n} - 1)}{1 + t^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + t^n},$$

la seconda delle quali è convergente, per confronto con la serie geometrica di ragione $1/t$, mentre la prima è divergente, in quanto

$$\frac{t^n(e^{t/n} - 1)}{1 + t^n} \geq \frac{t}{2n} \qquad \forall t \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue che la nostra serie è definitivamente a termini positivi e divergente positivamente per ogni $t \geq 1$.
La convergenza della serie è totale (quindi anche uniforme) in ogni intervallo $[0, 1 - \delta]$ con $0 < \delta < 1$: infatti, per quanto visto in precedenza,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq 1-\delta} |g_n(t) - g(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \delta)^n e < \infty.$$

Esercizio 2 (i) Sia $(x, y) \in Z$: allora $xy = e^{-x} + e^{-y}$ e quindi $xy > 0$. Inoltre, se x e y sono positivi deve essere $xy = e^{-x} + e^{-y} < 2$, mentre se x e y sono negativi si ha $e^{-x} + e^{-y} > \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy$, e questo contraddice il fatto che $(x, y) \in Z$. Quindi Z è contenuto nel primo quadrante.
(ii) Fissato $x > 0$, cerchiamo $y > 0$ tale che $F(x, y) = 0$. Poiché, per $x > 0$ fissato, risulta

$$\lim_{y \to 0^+} F(x, y) = e^{-x} + 1 > 0, \qquad \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = -\infty,$$

vi è almeno un punto $y > 0$ tale che $F(x, y) = 0$. D'altra parte, essendo

$$F_y(x, y) = -e^{-y} - x < 0 \qquad \forall x > 0, y > 0,$$

la funzione $y \mapsto F(x, y)$ è iniettiva e pertanto tale punto y è unico. Possiamo allora battezzarlo: $y = f(x)$.

(ii) (Risoluzione alternativa) La funzione F ha gradiente sempre diverso da $\mathbf{0}$ nei punti di Z: infatti, essendo

$$\nabla F(x,y) = (-e^{-x} - y, -e^{-y} - x)$$

si vede immediatamente che entrambe le componenti sono negative nell'intero primo quadrante. Quindi la funzione implicita $y = f(x)$ è definita nell'intorno di ogni punto $(x_0, y_0) \in Z$ e risolve l'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{e^{-x} + y}{e^{-y} + x}\,.$$

Il secondo membro, che denotiamo con $g(x,y)$, è una funzione di classe C^∞, mai nulla nel primo quadrante, e globalmente lipschitziana in ogni insieme delle forma $[\delta, \infty[\times]0, \infty[$: infatti

$$\begin{aligned}
|g(x,y) - g(x,z)| &= \left| \frac{e^{-x} + y}{e^{-y} + x} - \frac{e^{-x} + z}{e^{-z} + x} \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{y - z}{e^{-y} + x} \right| + \left| (e^{-x} + z) \left(\frac{1}{e^{-y} + x} - \frac{1}{e^{-z} + x} \right) \right| \leq \\
&\leq \frac{|y - z|}{\delta} + |e^{-z} - e^{-y}| \frac{e^{-z} + x}{(e^{-y} + x)(e^{-x} + z)} \leq C|y - z|,
\end{aligned}$$

ove la costante C può essere scelta come

$$C = \frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta^2}\,.$$

Se ne deduce che per ogni $\delta > 0$ il problema d Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{e^{-x}+y}{e^{-y}+x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione unica globale in $[\delta, \infty[$. Quindi la soluzione, che chiamiamo $f(x)$, è definita sull'intera semiretta $]0, \infty[$.

(iii) Per definizione, la nostra $f(x)$ verifica $F(x, f(x)) = 0$ per ogni $x > 0$; quindi $f(x)$ coincide con la funzione di x definita implicitamente dal teorema del Dini nell'intorno di ogni punto $(x,y) \in Z$. Essendo $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la teoria ci dice che $f \in C^\infty(]0, \infty[)$, e che

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{e^{-x} + f(x)}{e^{-f(x)} + x}\,.$$

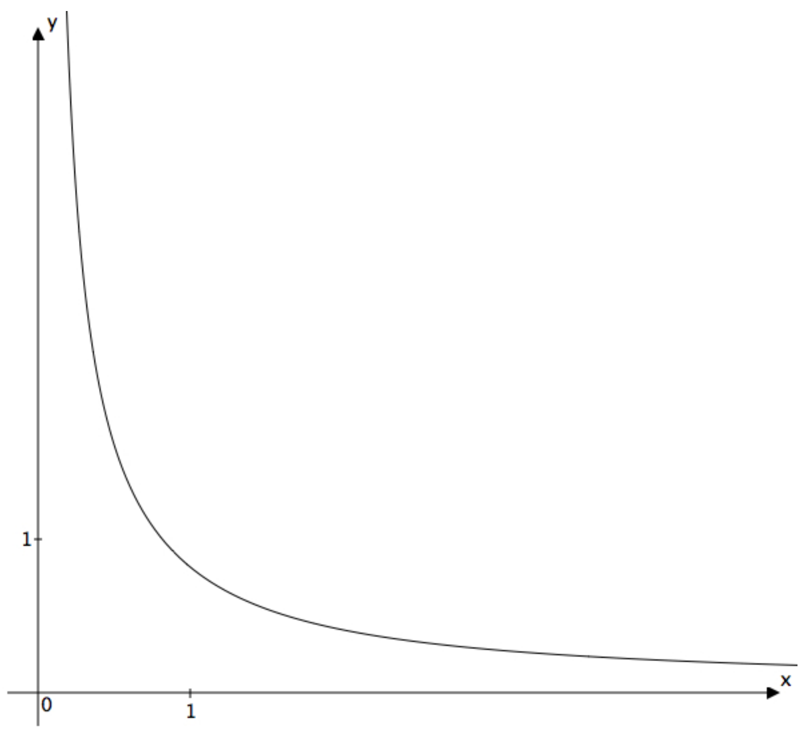
Poiché $f(x) > 0$ e $x > 0$, si conclude che $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$, cosicché f è strettamente decrescente. Inoltre

$$f''(x) = -\frac{(-e^{-x} + f'(x))(e^{-f(x)} + x) - (e^{-x} + f(x))(-e^{-f(x)}f'(x) + 1)}{(e^{-f(x)} + x)^2},$$

e una facile analisi del segno di tutti i fattori porta a concludere che $f''(x) > 0$ per ogni $x > 0$, cosicché f è convessa.
Infine, dalla relazione $F(x, f(x)) = 0$ segue $f(x) = \frac{e^{-x}+e^{-f(x)}}{x}$, e quindi

$$\frac{e^{-x}}{x} < f(x) < \frac{e^{-x}+1}{x} \qquad \forall x > 0.$$

Passando al limite per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ si ottengono per $f(x)$ i limiti cercati.



(iv) Per la simmetria di $F(x, y)$, si ha

$$(x, y) \in Z \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y, x) \in Z;$$

ne segue che $y = f(x)$ se e solo se $x = f(y)$. Ciò prova che l'inversa f^{-1} coincide con f.

Prova in itinere del 17 dicembre 2007

Esercizio 1 Sia E l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ove a e b sono numeri positivi assegnati. Determinare:

(i) il rettangolo inscritto in E di area massima;

(ii) il rettangolo inscritto in E di perimetro massimo.

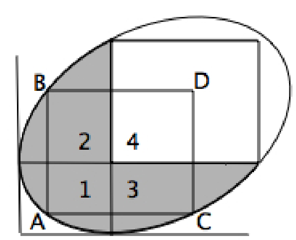
Esercizio 2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = v + w \\ v' = w + u \\ w' = v + u + 40 \sin t \cos t \\ u(0) = 0, \ v(0) = 0, \ w(0) = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Anzitutto osserviamo che l'unico modo per inscrivere un rettangolo in un'ellisse è quello di sceglierlo con i lati paralleli agli assi dell'ellisse, quindi nel nostro caso paralleli agli assi coordinati.

Per verificare questo fatto basta osservare la figura a fianco: dato un rettangolo obliquo $ABCD$ rispetto agli assi dell'ellisse (ovvero, data una ellisse obliqua rispetto ai lati del rettangolo $ABCD$), immaginiamo di traslarlo dentro l'ellisse mantenendo l'ordine dei vertici.



Dividiamo l'interno dell'ellisse in 4 regioni: la regione 4 è quella disegnata in bianco, ed è ottenuta intersecando l'ellisse con due rette parallele agli assi, tali che la loro intersezione con l'ellisse è la posizione più a destra possibile per i vertici C e B. Allora il primo vertice A del rettangolo può trovarsi soltanto nella regione 1 (altrimenti i lati AC oppure AB uscirebbero dall'ellisse); il secondo vertice B, di conseguenza, può trovarsi soltanto nella regione 2, così

come il terzo vertice C può stare solo nella regione 3; ma allora il quarto vertice D cadrà necessariamente nella regione 4, che è interna all'ellisse: anzi, il luogo descritto da D al variare del punto A in 1 (che determina la posizione di B in 2 e di C in 3) è una curva contenuta in 4 che non tocca l'ellisse.
Denotiamo dunque con $2x$ e $2y$ le misure dei lati del rettangolo da inscrivere. Allora (x, y) è un punto del primo quadrante che appartiene a E: quindi dobbiamo trovare il massimo della funzione $f(x, y) = 4xy$ sull'insieme $E \cap \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Osserviamo che, evidentemente, f è non negativa ed è nulla (quindi minima) quando $x = 0$ oppure $y = 0$: dunque in effetti il massimo di f cadrà in $E \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.
Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori: la Lagrangiana è

$$L(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

e imponendo che il gradiente di L si annulli si trova il sistema

$$\begin{cases} 4y + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 4x + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Chiaramente, λ non può essere nullo in virtù della terza equazione; inoltre, dalla prima equazione si ricava $\lambda < 0$ e

$$y = -\frac{\lambda x}{2a^2},$$

da cui, utilizzando la seconda,

$$x \left(4 - \frac{\lambda^2}{a^2 b^2} \right) = 0;$$

dato che $x = 0$ implicherebbe $y = 0$, il che è impossibile, concludiamo che $\lambda^2 = 4a^2b^2$ e infine $\lambda = -2ab$. Pertanto la prima equazione fornisce $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ e finalmente, dalla terza, otteniamo le coordinate dell'unico punto stazionario vincolato, che quindi è il punto di massimo cercato:

$$(x, y) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right).$$

Il valore massimo è allora

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = 2ab.$$

(ii) Procediamo analogamente: stavolta la funzione da massimizzare su $E \cap \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ è $g(x,y) = 4(x+y)$. Nell' estremo $(0,b)$ essa vale $4b$ e nell'estremo $(a,0)$ essa vale $4a$: ciò corrisponde a due rettangoli degeneri, ridotti a due segmenti, il perimetro dei quali è, in modo naturale, la lunghezza del segmento contata due volte. Per la ricerca dei punti stazionari vincolati "interni", il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 4 + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 4 + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Nuovamente, $\lambda < 0$ e

$$x = -\frac{2a^2}{\lambda}, \qquad y = -\frac{2b^2}{\lambda}.$$

Dalla terza equazione,

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4}{\lambda^2}(a^2 + b^2),$$

e dunque $\lambda = -2\sqrt{a^2 + b^2}$. Pertanto l'unico punto stazionario vincolato è

$$(x,y) = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Il valore in tale punto è

$$g\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 4\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dato che, ovviamente, $4\sqrt{a^2+b^2} \geq \max\{2b, 2a\}$, si conclude che il punto or ora trovato è punto di massimo asssoluto per g su E, mentre i due estremi

$(0, b)$ e $(a, 0)$ sono punti di minimo relativo; il punto di minimo assoluto del perimetro è chiaramente quello corrispondente al semiasse minore.
Esercizio 2 Cominciamo ad analizzare il sistema omogeneo

$$\begin{cases} u' = v + w \\ v' = w + u \\ w' = v + u. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ed i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda) = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0;$$

un facile calcolo mostra che gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Cerchiamo i corrispondenti autovettori. Per l'autovalore doppio -1 si ha

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix},$$

quindi $\ker(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ ha dimensione 2 e una base è data, ad esempio, da

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per l'autovalore semplice 2 si ha

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix},$$

e un elemento che genera $\ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ è, ad esempio,

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è

$$V_0 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ -c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ -c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \end{pmatrix},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare del sistema non omogeneo.
Metodo euristico: possiamo scrivere il secondo membro nella forma

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \sin t \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \sin 2t \end{pmatrix},$$

e possiamo cercare una soluzione particolare $\mathbf{v}(t)$ del tipo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} \sin 2t = \begin{pmatrix} A \cos 2t + D \sin 2t \\ B \cos 2t + E \sin 2t \\ C \cos 2t + F \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Sostituendo nel sistema si trova

$$\begin{cases} -2A \sin 2t + 2D \cos 2t = (B + C) \cos 2t + (E + F) \sin 2t \\ -2B \sin 2t + 2E \cos 2t = (C + A) \cos 2t + (F + D) \sin 2t \\ -2C \sin 2t + 2F \cos 2t = (A + B) \cos 2t + (D + E) \sin 2t + 20 \sin 2t. \end{cases}$$

Uguagliando i coefficienti del seno e del coseno otteniamo

$$\begin{cases} -2A = E + F \\ 2D = B + C \\ -2B = F + D \\ 2E = C + A \\ -2C = D + E + 20 \\ 2F = A + B. \end{cases}$$

Si ha allora
$$D = \frac{B+C}{2}\,, \quad E = \frac{C+A}{2}\,, \quad F = \frac{A+B}{2}\,,$$
da cui
$$-2A = A + \frac{C+B}{2}\,, \quad -2B = B + \frac{A+C}{2}\,, \quad -2C = C + \frac{B+A}{2} + 20.$$
Dunque il sistema da risolvere diventa
$$\begin{cases} 6A + B + C = 0 \\ 6B + A + C = 0 \\ 6C + A + B + 40 = 0. \end{cases}$$
Le prime due equazioni danno
$$7(A+B) + 2C = 0, \qquad 5(A-B) = 0,$$
ovvero $B = A$ e $C = -7A$; la terza equazione fornisce allora $A = 1$ e, di conseguenza, $B = 1$, $C = -7$, $D = -3$, $E = -3$, $F = 1$. La soluzione particolare è pertanto
$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - 3\sin 2t \\ \cos 2t - 3\sin 2t \\ -7\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Metodo di variazione delle costanti: cerchiamo una soluzione particolare della forma $\mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t)$, ove
$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$
è la matrice Wronskiana del sistema omogeneo. Come si sa dalla teoria, deve essere
$$\mathbf{W}(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f}(t),$$
ovvero
$$\begin{cases} e^{-t}c_1'(t) + e^{-t}c_2'(t) + e^{2t}c_3'(t) = 0 \\ -e^{-t}c_1'(t) + e^{2t}c_3'(t) = 0 \\ -e^{-t}c_2'(t) + e^{2t}c_3'(t) = 20\sin 2t. \end{cases}$$

Questo sistema si risolve facilmente e dà

$$c_1'(t) = \frac{20}{3}e^t \sin 2t, \quad c_2'(t) = -\frac{40}{3}e^t \sin 2t, \quad c_3'(t) = \frac{20}{3}e^{-2t} \sin 2t.$$

Il calcolo delle primitive di queste tre funzioni è standard, e fornisce

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^t(\sin 2t - 2\cos 2t) \\ -\frac{8}{3}e^t(\sin 2t - 2\cos t) \\ -\frac{5}{3}e^{-2t}(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix}.$$

Pertanto la soluzione particolare è

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin 2t + \cos 2t \\ -3\sin 2t + \cos 2t \\ \sin 2t - 7\cos 2t \end{pmatrix},$$

che è la stessa trovata col primo metodo.
L'integrale generale del sistema è quindi

$$V_f = \left\{ \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)e^{-t} + c_3 e^{2t} + \cos 2t - 3\sin 2t \\ -c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} + \cos 2t - 3\sin 2t \\ -c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} - 7\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Imponiamo le condizioni di Cauchy:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + 1 \\ -c_1 + c_3 + 1 \\ -c_2 + c_3 - 7 \end{pmatrix};$$

con facili calcoli si ottiene

$$c_1 = 3, \qquad c_2 = -6, \qquad c_3 = 2,$$

e dunque la soluzione del nostro problema di Cauchy è

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-t} + 2e^{2t} + \cos 2t - 3\sin 2t \\ -3e^{-t} + 2e^{2t} + \cos 2t - 3\sin 2t \\ 6e^{-t} + 2e^{2t} - 7\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Prova in itinere del 20 novembre 2009

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$F(x,y) = (x^2 - y^2)e^{2x+y}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Individuare i punti stazionari di F e determinarne la natura.

(ii) Analizzare l'insieme $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 3e^{-3}\}$ nell'intorno del punto $(-2,1)$.

(iii) Scrivere il polinomio di Taylor di centro -2 e grado 2 relativo alla funzione $g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $F(x,y) = 3e^{-3}$.

Esercizio 2 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca

$$f_n(x) = n^2 x^3 e^{-nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Dimostrare che $f_n \to 0$ puntualmente in $\mathbb{R}$.

(ii) Stabilire in quali intervalli di $\mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

(iii) Descrivere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione $F(x,y) = (x^2 - y^2)e^{2x+y}$ è di classe C^1. Le sue derivate parziali prime sono

$$F_x(x,y) = e^{2x+y}(2x + 2x^2 - 2y^2), \quad F_y(x,y) = e^{2x+y}(-2y + x^2 - y^2),$$

quindi i punti stazionari di F risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + x^2 - y^2 = 0 \\ -2y + x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Con facili calcoli si trovano i punti

$$(0,0), \qquad \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Il punto $(0,0)$ è chiaramente di sella, dato che

$$F(0,0) = 0; \qquad F(0,\varepsilon) < 0, \quad F(\varepsilon, 0) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Per scoprire la natura dell'altro punto stazionario, calcoliamo le derivate seconde: si ha

$$\begin{aligned}
&F_{xx}(x,y) = e^{2x+y}(2 + 8x + 4x^2 - 4y^2),\\
&F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = e^{2x+y}(2x - 4y + 2x^2 - 2y^2),\\
&F_{yy}(x,y) = e^{2x+y}(-2 - 4y + x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

Quindi la matrice Hessiana nel punto $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è

$$\mathbf{H}\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}\, e^{-2} & -\frac{8}{3}\, e^{-2} \\ -\frac{8}{3}\, e^{-2} & -\frac{10}{3}\, e^{-2} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\, e^{-2} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dato che

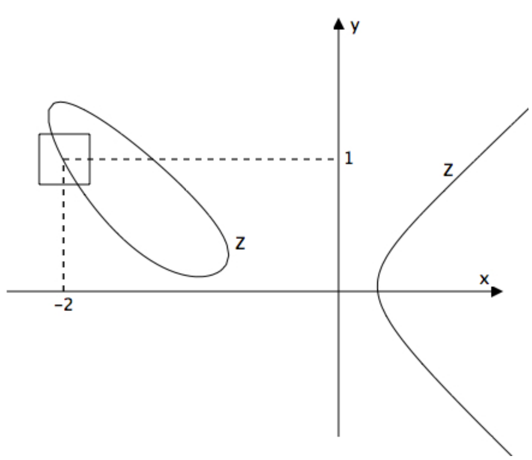
$$\det \mathbf{H}\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 4\, e^{-4} > 0, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{H}\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{3}\, e^{-2} < 0,$$

il punto $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è di massimo relativo.
(ii) Poiché

$$F_x(-2,1) = 2\, e^{-3}, \qquad F_y(-2,1) = e^{-3},$$

l'insieme Z nell'intorno di $(2,1)$ è il grafico di una funzione $g(x)$, definita in un intorno U di 2, di classe C^1 e invertibile, tale che

$$(x^2 - g(x)^2)e^{2x+g(x)} = 3\, e^{-3}, \quad g'(x) = -2\, \frac{x + x^2 - g(x)^2}{-2g(x) + x^2 - g(x)^2} \quad \forall x \in U.$$



(iii) Si ha $g(-2) = 1$ e $g'(-2) = -2$; calcoliamo $g''(x)$:

$$g''(x) = \\ = -2\,\frac{[1+2x-2gg'][-2g+x^2-g^2]-[x+x^2-g^2][-2g'+2x-2gg']}{[-2g+x^2-g^2]^2}\,,$$

ove g e g' si intendono calcolate in x. Pertanto è facile riconoscere che $g''(-2) = 6$; dunque il polinomio cercato è

$$P(x) = 1 - 2(x+2) + 3(x+2)^2 = 3x^2 + 10x + 9.$$

Esercizio 2 (i) Le funzioni $f_n(x) = n^2x^3e^{-nx^2}$ sono di classe C^1 con $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per $x \neq 0$ fissato, si ha chiaramente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

(ii) Per ciascun $n \in \mathbb{N}^+$ possiamo calcolare il massimo e il minimo di f_n: dato che si tratta di funzioni dispari, possiamo limitare lo studio alla semiretta positiva. Qui f_n è non negativa, e si ha

$$f_n'(x) = e^{-nx^2}(3n^2x^2 - 2n^3x^4) \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

dunque la derivata è nulla se e solo se $x = 0$ oppure $x = \sqrt{\frac{3}{2n}}$, e in particolare è negativa per $x \geq \sqrt{\frac{3}{2n}}$. Chiaramente, $f_n(0) = 0$ mentre

$$f_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n}}\right) = \left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}.$$

Se ne deduce che non vi è convergenza uniforme in $\mathbb{R}$, essendo

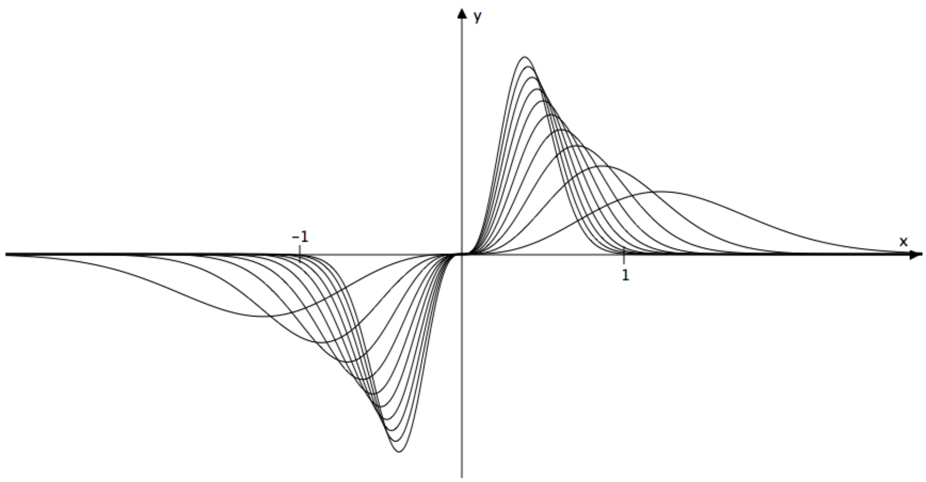
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n} \to \infty \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

e nemmeno in alcun intervallo contenente 0, dato che, per ogni n tale che $\left|\sqrt{\frac{3}{2n}}\right| \leq r$,

$$\sup_{x\in[-r,r]} |f_n(x)| = \left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}.$$

Invece, in ogni doppia semiretta $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \delta\}$, con $\delta > 0$, si ha convergenza uniforme, in quanto, se n è tale che $\left|\sqrt{\frac{3}{2n}}\right| \leq \delta$,

$$\sup_{|x|\geq\delta} |f_n(x)| = f_n(\delta) \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$



(iii) I termini della serie sono funzioni dispari, quindi per studiare la convergenza possiamo limitarci al caso $x = 0$, dove la serie è a termini positivi. Per $x = 0$ la serie ha i termini tutti nulli, quindi converge a 0. Per $x > 0$ si può applicare il criterio del rapporto: essendo

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\, e^{-x^2} \to e^{-x^2} < 1 \quad \text{per} \qquad \to \infty,$$

si conclude che vi è convergenza assoluta su $\mathbb{R}$.
D'altra parte, in ogni doppia semiretta del tipo $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \delta\}$, con $\delta > 0$, risulta

$$\sup_{|x|\geq\delta} |f_n(x)| = n^2\delta^{-3}e^{-n^2} \quad \text{definitivamente,}$$

e quindi, per confronto, si ha convergenza totale in ciascuna di tali doppie semirette.
Osservazione È possibile calcolare la somma della serie in ogni punto. Infatti, per cominciare notiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \;\; = \;\; x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-nx^2} =$$

$$= \quad x^3 e^{-2x^2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) e^{-(n-2)x^2} + x^3 e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-(n-1)x^2}.$$

D'altronde, per ogni $t \in]-1,1[$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{d}{dt} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} t^n = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-t} = \frac{2}{(1-t)^3}\,.$$

Pertanto, sostituendo t con e^{-x^2}, si ottiene

$$x^3 e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-(n-1)x^2} = \frac{x^3 e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x^3 e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) e^{-(n-2)x^2} = \frac{2x^3 e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^3} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

da cui infine

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{2x^3 e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^3} + \frac{x^3 e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = x^3 e^{-x^2} \frac{1+e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prova in itinere del 22 dicembre 2009

Esercizio 1 Data la funzione

$$F(x,y) = (x^2 - 2xy - y^2)^3,$$

se ne determinino i punti di massimo relativo, di minimo relativo, di massimo assoluto e di minimo assoluto sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 2 Trovare l'integrale generale del sistema differenziale seguente:

$$\begin{cases} u' &= -u + 3v + 2t \\ v' &= v + 3w - t \\ w' &= 2u - 3v - w - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Troviamo i punti stazionari interni a Ω calcolando gli zeri del gradiente di F, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3(x^2-2xy-y^2)^2(2x-2y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3(x^2-2xy-y^2)^2(-2x-2y) = 0 \end{cases}$$

Il sistema è verificato da $(0,0)$, che non appartiene ad Ω, oppure dai punti dell'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : x^2-2xy-y^2 = 0\}$, sui quali la funzione F assume il valore costante 0. Per determinare Γ passiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta, \end{cases}$$

Quindi $(x,y) \in \Gamma$ se e solo se

$$r^2(\cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0.$$

Non può essere $\cos\vartheta = 0$, che implicherebbe $\sin\vartheta = 0$: dividendo allora per $\cos^2\vartheta$ si ha la relazione equivalente

$$1 - 2\tan\vartheta - \tan^2\vartheta = 0,$$

ovvero $\tan\vartheta = -1 \pm \sqrt{2}$. Questo ci dice che i punti stazionari interni a Ω sono tutti e soli quelli della forma

$$y = (-1 \pm \sqrt{2})x, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4.$$

Alternativamente, utilizzando le formule di duplicazione, i punti di Γ sono tutti e soli quelli per cui

$$\cos 2\vartheta - \sin 2\vartheta = 0,$$

o, equivalentemente (dato che $\cos 2\vartheta$ non può annullarsi),

$$\tan 2\vartheta = 1,$$

equazione che è risolta da

$$2\vartheta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

pertanto, limitandoci ai valori di ϑ in $[0, 2\pi]$, (x, y) è punto stazionario interno a Ω se e solo se

$$(x, y) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \quad \text{con} \quad r \in]1, 2[, \quad \vartheta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Verifichiamo la natura di questi punti stazionari: la funzione F è omogenea di grado 6, quindi su ciascuna retta della forma $y = (\tan\vartheta)x$ essa assume i valori $x^6(1 - 2\tan\vartheta - \tan^2\vartheta)^3$; in particolare F è nulla sulle due rette $y = (-1 \pm \sqrt{2})x$. Dato che

$$1 - 2\tan\vartheta - \tan^2\vartheta \begin{cases} > 0 & \text{per } \tan\vartheta \in]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[\\ < 0 & \text{per } \tan\vartheta \notin [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \end{cases}$$

si deduce che i punti stazionari in questione sono tutti punti di sella.
Consideriamo adesso i punti di $\partial\Omega$. Posto

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

risulta $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$. Passando in coordinate polari, come in precedenza si ottiene

$$F|_{C_1} = F(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = (\cos^2\vartheta - 2\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin^2\vartheta)^3 =: g(\vartheta)$$

$$F|_{C_2} = F(2\cos\vartheta, 2\sin\vartheta) = 64\,F(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = 64g(\vartheta).$$

Quindi possiamo limitarci ad analizzare $F|_{C_1}$, ossia la funzione

$$g(\vartheta) = (\cos^2\vartheta - 2\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin^2\vartheta)^3 = (\cos 2\vartheta - \sin 2\vartheta)^3.$$

Si ha

$$g'(\vartheta) = 3(\cos 2\vartheta - \sin 2\vartheta)^2(-2\sin 2\vartheta - 2\cos 2\vartheta);$$

dunque $g'(\vartheta) = 0$ se e solo se $\cos 2\vartheta = \pm\sin 2\vartheta$. Sappiamo già che si ha $\cos 2\vartheta = \sin 2\vartheta$ se e solo se $\vartheta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, e che tali punti stazionari vincolati sono punti di sella, nei quali si ha $F = 0$. Invece risulta $\cos 2\vartheta = -\sin 2\vartheta$ se e solo se $\tan 2\vartheta = -1$, ovvero, procedendo come prima, se e solo se $1 + 2\tan\vartheta - \tan^2\vartheta = 0$, cioè se e solo se

$$y = (1 \pm \sqrt{2})x, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Troviamo allora $x^2[1 + (1 \pm \sqrt{2})^2] = 1$, da cui

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}, \quad y = (1 + \sqrt{2})x,$$

oppure

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}, \quad y = (1 - \sqrt{2})x,$$

e dunque otteniamo i quattro punti stazionari vincolati

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right),$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right),$$

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right),$$

$$(x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right).$$

Risulta

$$F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) = -\left(\frac{4\sqrt{2} + 4}{4 + 2\sqrt{2}} \right)^3 = -(\sqrt{2})^3,$$

$$F(x_3, y_3) = F(x_4, y_4) = \left(\frac{4\sqrt{2} - 4}{4 - 2\sqrt{2}} \right)^3 = (\sqrt{2})^3,$$

quindi i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono punti di minimo vincolato per F su C_1, mentre i punti (x_3, y_3) e (x_4, y_4) sono punti di massimo vincolato per F su C_1.
Dato che $F|_{C_2} = 64g$, si ottengono su C_2 i quattro punti stazionari vincolati

$$(2x_1, 2y_1), \quad (2x_2, 2y_2), \quad (2x_3, 2y_3), \quad (2x_4, 2y_4)$$

con

$$F(2x_1, 2y_1) = F(2x_2, 2y_2) = -64(\sqrt{2})^3,$$

$$F(2x_3, 2y_3) = F(2x_4, 2y_4) = 64(\sqrt{2})^3.$$

In particolare

$$\max_\Omega F = 64(\sqrt{2})^3, \qquad \min_\Omega F = -64(\sqrt{2})^3.$$

Allo stesso risultato possiamo arrivare, forse con minor fatica, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: consideriamo le funzioni Lagrangiane

$$H_1(x,y,m) = F(x,y) - m(x^2+y^2-1), \quad H_2(x,y,m) = F(x,y) - m(x^2+y^2-4),$$

e troviamone i punti stazionari liberi. Si ottengono i sistemi

$$\begin{cases} 3(x^2-2xy-y^2)^2(2x-2y) - 2mx = 0 \\ 3(x^2-2xy-y^2)^2(-2x-2y) - 2my = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2-2xy-y^2)^2(2x-2y) - 2mx = 0 \\ 3(x^2-2xy-y^2)^2(-2x-2y) - 2my = 0 \\ x^2+y^2-4 = 0. \end{cases}$$

Analizziamo il secondo sistema (il primo è assolutamente analogo). Poiché né x, né y possono annullarsi, conviene moltiplicare la prima equazione per y e la seconda per x, ottenendo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 3y(x^2-2xy-y^2)^2(2x-2y) - 2mxy = 0 \\ 3x(x^2-2xy-y^2)^2(-2x-2y) - 2mxy = 0 \\ x^2+y^2-4 = 0, \end{cases}$$

da cui, sottraendo e sommando, e tenendo conto della terza equazione,

$$\begin{cases} 6(x^2-2xy-y^2)^2(x^2+2xy-y^2) = 0 \\ -24(x^2-2xy-y^2)^2 = 4mxy \\ x^2+y^2-4 = 0, \end{cases}$$

La prima equazione si annulla quando $x^2 - 2xy - y^2 = 0$, e in tali punti $F = 0$, oppure quando $x^2 + 2xy - y^2 = 0$, ossia $y = (1 \pm \sqrt{2})x$; dato che $x^2 + y^2 = 4$, si riottengono i punti $(2x_i, 2y_i)$, $i = 1,2,3,4$, e dalla seconda equazione si può ricavare il valore del moltiplicatore m.

Esercizio 2 Consideriamo dapprima il sistema omogeneo

$$\begin{cases} u' &= -u + 3v \\ v' &= v + 3w \\ w' &= 2u - 3v - w, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamone gli autovalori: l'equazione caratteristica è

$$(-1-\lambda)(\lambda^2 - 1 + 9) + 18 = 0, \quad \text{ossia} \quad -\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 10 = 0;$$

una radice è $\lambda = 1$. Dividendo per $\lambda - 1$ si trova $-\lambda^2 - 2\lambda - 10 = 0$, che è risolta da $\lambda = -1 \pm 3i$. Si hanno dunque i tre autovalori distinti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 + 3i$, $\lambda_3 = -1 - 3i$. Cerchiamo gli autovettori corrispondenti: per $\lambda_1 = 1$ si trova

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 3y = x \\ y + 3z = y \\ 2x - 3y - z = z, \end{cases}$$

da cui $z = 0$ e $2x = 3y$ e, ad esempio, $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 0)$. Per $\lambda_2 = -1 + 3i$ si trova $y = ix$ e $3z = -(2i+3)x$, e, ad esempio, $\mathbf{v}_2 = (3, 3i, -2i - 3)$; infine per $\lambda_3 = -1 - 3i$ possiamo scegliere $\mathbf{v}_3 = \overline{\mathbf{v}_2} = (3, -3i, 2i - 3)$. Dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$V_0 = \{c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 e^{(-1+3i)t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{(-1-3i)t}\mathbf{v}_3\,,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}.$$

Cerchiamo adesso un integrale particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$\mathbf{u}(t) = (a + bt, c + dt, e + ft)$$

con a, b, c, d, e, f costanti da determinare. Imponendo che $\mathbf{u}$ risolva l'equazione non omogenea, si trova

$$\begin{cases} b = -a - bt + 3c + 3dt + 2t \\ d = c + dt + 3e + 3ft - t \\ f = 2a + 2bt - 3c - 3dt - e - ft - 1, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} b + a - 3c = 0 \\ -b + 3d + 2 = 0 \\ d - c - 3e = 0 \\ d + 3f - 1 = 0 \\ f - 2a + 3c + e + 1 = 0 \\ 2b - 3d - f = 0. \end{cases}$$

Dalla quarta e seconda equazione si trova

$$d = 1 - 3f, \quad b = 3d + 2 = 5 - 9f;$$

la sesta equazione dà allora $f = 2b - 3d = 7 - 9f$, ossia $f = 7/10$, da cui $b = -13/10$ e $d = -11/10$. La prima e terza equazione forniscono allora $c = -11/10 - 3e$, $a = 3c + 13/10 = -2 - 9e$, e dalla quinta si ricava

$$0 = f - 2a + 3c + e + 1 = 10e + \frac{12}{5}\,,$$

vale a dire $e = -6/25$, $c = -19/50$ e $a = 4/25$. Dunque

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{4}{25} - \frac{13}{10}\,t, -\frac{19}{50} - \frac{11}{10}\,t, -\frac{6}{25} + \frac{7}{10}\,t\right),$$

e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$V = \left\{c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 e^{(-1+3i)t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{(-1-3i)t}\mathbf{v}_3 + \mathbf{u}(t),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\right\}.$$