Prove scritte di Analisi I - Informatica

Prova scritta del 31 gennaio 2002

Esercizio 1 Stabilire il comportamento delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3\sin n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3\sin n}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n + n^2}{9^n + n^{100}}\,.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{\log x}{1+\log x}}\,.$$

(i) Determinare l'insieme di definizione di f.

(ii) Determinare l'insieme dei punti di continuità di f.

(iii) Trovare gli intervalli ove la f è monotona.

(iv) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f, specificando se si tratti di massimo o di minimo.

(v) Determinare tutti gli asintoti di f, se esistono.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} t e^{-\sqrt{1+t^2}}\, dt.$$

Prova scritta del 7 febbraio 2002

Esercizio 1 Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1}{2}} (3 + 2\cos n\pi)^n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

(i) Si determini il raggio di convergenza R.

(ii) Si descriva il comportamento della serie nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.

(iii) Si calcoli la somma della serie nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < R$.

Esercizio 2 Sia $f(x) = x - x^2 + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Si provi che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è bigettiva.

(ii) Si verifichi che $f^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(iii) Si scriva il polinomio di Taylor di f^{-1} di centro $x_0 = 1$ e grado 2.

Esercizio 3 Fra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) - y(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si determini quella per la quale la quantità $\int_0^1 |y(x0|^2 dx$ è minima.

Prova scritta del 30 maggio 2002

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ così definita:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Si verifichi che $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente e che $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente.

(ii) Si mostri che esiste $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ e lo si calcoli.

(iii) Si provi che $|a_n - L| \leq 2^{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\frac{\sinh x}{x} \leq \cosh x \leq 1 + x \sinh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_1^{e^2} \frac{(t \log t + 1)(\log t + 1)}{t^2 \log^2 t + 1}\, dt.$$

Prova scritta del 6 giugno 2002

Esercizio 1 Si consideri la successione

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Si verifichi che $\{a_n\}$ è strettamente decrescente.

(ii) Si provi che $a_n = \frac{1}{n-1} - a_{n-2}$ per ogni $n \geq 2$.

iii) Si deduca che a_n è infinitesima e che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(2x-1) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 + \sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Si verifichi che f è continua e surgettiva.

(ii) Si provi che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(iii) Si deduca che $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.

Esercizio 3 Determinare la natura dei punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{-x^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prova scritta del 20 giugno 2002

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{n-x^2} \log x \; dx.$$

Esercizio 2 Poniamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}.$$

(i) Determinare il dominio e l'immagine della funzione f.

(ii) Provare che f è invertibile e scrivere esplicitamente l'inversa f^{-1}.

(iii) Calcolare $(f^{-1})'(0)$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{e^x + e^{2x}}\, dx.$$

Prova scritta del 27 giugno 2002

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}$ una successione reale o complessa, tale che

(i) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n$ sia convergente,

(ii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n |a_n|$ sia divergente.

Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|a_n|}z^n.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-20x^2} - 2\sqrt[3]{1+15x^2}}{\sqrt[4]{16-384x} - 2\sqrt[5]{1-30x}}.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\log t}{1+t}\, dt, \qquad x > 0.$$

(i) Calcolare

$$\inf_{x>0} f(x), \qquad \sup_{x>0} f(x).$$

(ii) Determinare i punti di massimo e di minimo relativo per f.

(iii) La funzione f ha un asintoto per $x \to \infty$?

Prova scritta dell'11 luglio 2002

Esercizio 1 Determinare i punti $x \in \mathbb{R}$ nei quali ciascuna delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} e^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^{3n+1} e^{-n}$$

è convergente.

Esercizio 2 Trovare due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arctan x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} 2^{-\sin^2 t}\, \sin^2 t\, \sin 2t\, dt.$$

Prova scritta del 19 settembre 2002

Esercizio 1 Fissato $\lambda \geq 0$, si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n(a_n + 1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Stabilire per quali $\lambda \geq 0$ la successione è crescente e per quali $\lambda \geq 0$ la successione è decrescente.

(ii) Per ogni $\lambda \geq 0$ si calcoli il $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Esercizio 2 Determinare quante sono le soluzioni positive dell'equazione

$$e^x - e^{-x} = 2\sqrt{5}\, x.$$

Esercizio 3 Stabilire se i due integrali impropri

$$\int_{-2}^{0} \log \frac{1}{x+2}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\, dx$$

esistono o no, e in caso affermativo calcolarli.

Risoluzione

Esercizio 1 **(i)** Analizziamo la monotonia della successione $\{a_n\}$. Si ha

$$a_1 \leq a_0 \quad\iff\quad \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \leq \lambda \quad\iff\quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

e similmente

$$a_{n+1} \leq a_n \quad\iff\quad \frac{a_n(a_n+1)}{2} \leq a_n \quad\iff\quad 0 \leq a_n \leq 1.$$

È dunque necessario stabilire preliminarmente per quali $\lambda \geq 0$ risulta $0 \leq a_n \leq 1$. Notiamo che questa condizione è induttiva, nel senso che

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad \Longrightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

infatti

$$0 \leq a_0 = \lambda \leq 1 \quad \Longrightarrow a_1 = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \begin{cases} \geq \frac{0(0+1)}{2} = 0 \\ \leq \frac{1(1+1)}{2} = 1, \end{cases}$$

e se $0 \leq a_n \leq 1$ allora

$$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+1)}{2} \begin{cases} \geq \frac{0(0+1)}{2} = 0 \\ \leq \frac{1(1+1)}{2} = 1. \end{cases}$$

Dunque sarà

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad\iff\quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

e per quanto visto all'inizio concludiamo che

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad\iff\quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

In definitiva, $\{a_n\}$ è crescente se $\lambda > 1$ e decrescente se $0 \leq \lambda \leq 1$. Si osservi che, in particolare, $\{a_n\}$ è costantemente uguale a 0 se $\lambda = 0$, ed è costantemente uguale a 1 se $\lambda = 1$.

(ii) Il limite L della successione $\{a_n\}$ esiste sempre, perché essa è monotona. Passando al limite nella relazione $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+1)}{2}$ si deduce $L = \frac{L(L+1)}{2}$, ossia

$L = 0$, oppure $L = 1$, oppure $L = \infty$. Tenuto conto del comportamento di $\{a_n\}$ stabilito in **(i)**, si può concludere che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le \lambda < 1 \\ 1 & \text{se } \lambda = 1 \\ +\infty & \text{se } \lambda > 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 2\sqrt{5}\, x, \qquad x \ge 0.$$

Essa è nulla per $x = 0$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Analizziamo la derivata: dato che

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2\sqrt{5},$$

si ha $f'(x) \ge 0$ se e solo se $e^{2x} - 2\sqrt{5}e^x + 1 \ge 0$, ovvero se e solo se

$$e^x \ge \sqrt{5} + 2 \quad \text{oppure} \quad e^x \le \sqrt{5} - 2,$$

ma la seconda condizione non può mai essere verificata perché $\sqrt{5} - 2 < 0$. Quindi $f'(x) \ge 0$ se e solo se $x \ge \log(\sqrt{5} + 2)$. Pertanto f decresce nell'intervallo $[0, \log(\sqrt{5} + 2)]$ e cresce nella semiretta $[\log(\sqrt{5} + 2), \infty[$. Dato che $f(0) = 0$, la f è negativa in $[0, \log(\sqrt{5} - 2)]$, mentre nella semiretta $[\log(\sqrt{5}+2), \infty[$ la f, essendo crescente, cambierà di segno una volta sola. In conclusione, l'equazione $f(x) = 0$ ha una e una sola soluzione positiva, anzi maggiore di $\log\sqrt{5} + 2$.

Esercizio 3 Analizziamo il primo integrale. Nell'intervallo $]-2, 0[$ la funzione integranda $\log \frac{1}{x+2}$ è positiva e decrescente, con

$$\lim_{x\to -2^+} \log \frac{1}{x+2} = +\infty :$$

dunque l'integrale (improprio) esiste. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{x+2}\ \log \frac{1}{x+2} = 0,$$

esisterà una costante $K > 0$ tale che

$$\log \frac{1}{x+2} \le \frac{K}{\sqrt{x+2}} \qquad \forall x \in]-2, 0[,$$

e dunque il primo integrale è convergente per confronto con l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{0} \frac{K}{\sqrt{x+2}}\,dx = 2K\sqrt{2}.$$

Calcoliamone il valore mediante una integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} \log\frac{1}{x+2}\,dx &= \left[(x+2)\log\frac{1}{x+2}\right]_{-2}^{0} - \\
&\quad - \int_{-2}^{0} (x+2)\frac{1}{\frac{1}{x+2}}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = \\
&= 2\log\frac{1}{2} + [x]_{-2}^{0} = -2\log 2 + 2.
\end{aligned}$$

Analizziamo il secondo integrale: nella semiretta $[1,+\infty[$ la funzione integranda $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ è positiva e quindi l'integrale improprio esiste; però, essendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} = +\infty,$$

tale integrale vale $+\infty$.

Prova scritta del 21 settembre 2002

Esercizio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$a_n = n^{100} e^{-n/100},$$

(i) Si provi che la successione $\{a_n\}$ ha massimo, e lo si calcoli.

(ii) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+8\sqrt{x}} + \log\left(\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\right)^2 - \cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2(1-\cos 4x)}\,\sqrt[6]{\sin x^3}}.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$f(x) = x \int_{1/x}^{1} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt, \qquad x \geq 1.$$

(i) Si provi che f è srtettamente crescente.

(ii) Si determini l'inmmagine di f.

(iii) Si verifichi che f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Risoluzione

Esercizio 1 **(i)** La successione $\{a_n\}$ è strettamente positiva per ogni $n \geq 1$ (ovviamente) ed è infinitesima, come si verifica immediatamente; quindi, scelto $\varepsilon \in]0, a_1[$ si avrà $a_n < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, con un opportuno $\nu \in \mathbb{N}^+$. Perciò, posto $M = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_\nu\}$ si ha evidentemente

$$M = \max_{n \leq \nu} a_n = \max_{n \in \mathbb{N}} a_n \ .$$

Calcoliamo M: la funzione reale $f(t) = t^{100} e^{-t/100}$ verifica ovviamente $f(n) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; inoltre f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$, è non negativa, è nulla per $t = 0$ e tende a 0 per $t \to \infty$. Dunque f ha massimo positivo in $[0, \infty[$. Annullando la derivata di f si trova

$$f'(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad \left(100t^{99} - \frac{t^{100}}{100}\right) e^{-t/100} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad t = 10000;$$

quindi il punto $t = 10000$ è necessariamente l'unico punto di massimo assoluto per f e si ha

$$\max_{t \geq 0} f = f(10000) = a_{10000} = \max_{n \in \mathbb{N}} a_n = M.$$

Pertanto

$$M = a_{10000} = 10000^{100} e^{-10000/100} = \left(\frac{10000}{e}\right)^{100} \simeq 3.72007262 \cdot 10^{256}.$$

(ii) Detto R il raggio di convergenza, si ha (se il limite esiste)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{100} e^{-1/100} = e^{-1/100},$$

cosicché

$$R = \sqrt[100]{e}.$$

Esercizio 2 Il limite da calcolare è, dopo evidenti trasformazioni,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+8\sqrt{x}} + 2\log(1-\sqrt{x}) - \cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2(1-\cos 4x)}\ \sqrt[6]{\sin x^3}}\ .$$

Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\sqrt[4]{1+t} = 1 + \frac{1}{4}t - \frac{3}{32}t^2 + \mathrm{o}(t^2),$$

$$\log(1-t) = -t - \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2),$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2),$$

$$\sin t = t + \mathrm{o}(t).$$

Sostituendo al posto di t rispettivamente le variabili $8\sqrt{x}$, $\sqrt{x}$, $4x$ e x^3 si ottiene per $x \to 0^+$:

$$\sqrt[4]{1+8\sqrt{x}} = 1 + 2\sqrt{x} - 6x + \mathrm{o}(x),$$

$$2\log(1-\sqrt{x}) = -2\sqrt{x} - x + \mathrm{o}(x),$$

$$-\cos\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x),$$

$$\sqrt[4]{2(1-\cos 4x)} = \sqrt[4]{16x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = 2\sqrt{x} + \mathrm{o}(\sqrt{x}),$$

$$\sqrt[6]{\sin x^3} = \sqrt[6]{x^3 + \mathrm{o}(x)} = \sqrt{x} + \mathrm{o}(\sqrt{x}).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+8\sqrt{x}} + 2\log(1-\sqrt{x}) - \cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2(1-\cos 4x)}\ \sqrt[6]{\sin x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{13}{2}x + \mathrm{o}(x)}{4x + \mathrm{o}(x)} = -\frac{13}{8}\ .$$

Esercizio 3 **(i)** Se $1 \le x < y$ si ha $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} \le 1$, cosicché $\int_{1/x}^{1} \frac{e^{-t}}{1+t}dt < \int_{1/y}^{1} \frac{e^{-t}}{1+t}dt$; se ne deduce che f è strettamente crescente in $[1,\infty[$.

(ii) La funzione f è non negativa. Dato che

$$f(x) \geq x \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt \qquad \forall x \geq 1,$$

si ha $f(x) \to \infty$ per $x \to \infty$; essendo anche $f(1) = 0$, per il teorema dei valori intermedi l'immagine di f è $[0, \infty[$.

(iii) Si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt\ ;$$

inoltre, per la continuità dell'integrando,

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - x \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} -x \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt = -\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^{1/x} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt}{\frac{1}{x}} = -1.$$

Pertanto l'asintoto obliquo esiste ed ha equazione

$$y = x \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt - 1.$$

Prova scritta del 9 gennaio 2003

Esercizio 1 Trovare, se esistono, i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{z}{z+1} = i\overline{z} + 1.$$

Esercizio 2 Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3 Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 - ax^2 + x$.

(i) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è surgettiva.

(ii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è iniettiva.

(iii) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è invertibile con inversa derivabile. e in tal caso si calcoli $(f^{-1})'(0)$.

Esercizio 4 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{1-\cos\sqrt{t}} - 1 - t/2}{t^2} .$$

Esercizio 5

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scriva la soluzione $u_n(x)$ dell'equazione differenziale

$$u_n'(x) = -n^3 u_n(x) + \sin x$$

che si annulla nel punto $x = 0$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si determini il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Prova scritta del 6 febbraio 2003

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 12^{k/n} .$$

Esercizio 2 Analizzare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = e^x(\sin x - \cos x).$$

Esercizio 3 **(i)** Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{1}{x}\, y(x) = -\log x.$$

(ii) Provare che non esiste alcuna soluzione $y(x)$ che sia positiva sulla semiretta $]0, \infty[$.

Prova scritta del 4 giugno 2003

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_{n+1} = \sqrt{5a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si provi che $\{a_n\}$ è monotona e se ne determini il limite per $n \to \infty$.

Esercizio 2 Calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 4^{kx}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Prova scritta del 24 giugno 2003

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \cdot 3^{-(n^5-n^3)}}{\log(7 + 5\sqrt[3]{n})}.$$

Esercizio 2 Sia

$$f(x) = (x-1)|x-1| - x|x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si determinino le seguenti caratteristiche del grafico della funzione f:

(i) eventuali limiti a $\pm\infty$;

(ii) eventuali asintoti;

(iii) eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo;

(iv) intervalli di convessità e di concavità.

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, l'integrale

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx.$$

Prova scritta del 17 luglio 2003

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione così definita:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log(n + a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si provi che:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

(b) $a_n \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\log n} = 1$.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione nella variabile $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 - 300x^2 - y = 0.$$

(i) Per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione?

(ii) Per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione ha più di una soluzione?

Esercizio 3 Determinare, se esiste, una soluzione u dell'equazione differenziale

$$u'' - 100u' = 100\pi \cos 100x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

che verifichi

$$\int_0^{\pi/50} u(x)dx = 0, \qquad \int_0^{\pi/100} u(x)dx = -\frac{\pi}{10000}\,.$$

Prova scritta del 16 settembre 2003

Esercizio 1 Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n+2} \right) x^n.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{-x} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{x \sin x}}\,.$$

Esercizio 3 Determinare, se esistono, gli asintoti della funzione

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$