Corso di laurea in Scienze e tecnologie per l'ambiente

Prove scritte di Istituzioni di matematica - II modulo

Prova scritta del 7 aprile 2006

Esercizio 1 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R},\ y \leq 0, \\ y(1 - e^{-x^2 y}) & \text{se } x \in \mathbb{R},\ y > 0, \end{cases}$$

si scriva il gradiente di f nel generico punto (x_0, y_0), se ne deduca che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ e si determini l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_A x^2 e^{-y^2}\, dxdy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Esercizio 3 In un'urna sono presenti palline di colore rosso e bianco. Si denoti con p il rapporto fra il numero di palline rosse e il numero totale di palline presenti nell'urna. Si estraggono, una alla volta, n palline dall'urna, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Si determini:

(a) la probabilità che non venga mai estratta una pallina bianca;

(b) la probabilità che la prima pallina rossa compaia alla terza estrazione;

(c) la probabilità che venga estratta una pallina rossa esattamente due volte.

Prova scritta del 5 giugno 2006

Esercizio 1 Data la funzione $f(x,y) = x^2 e^y$, se ne calcoli la derivata secondo la direzione $(1,-2)$ nel punto $(1, \ln 1/2)$.

Esercizio 2 Si scriva la retta ortogonale al piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 e^y$ nel generico punto (x_0, y_0), e dire in quali punti essa ha la direzione $(1,-2,1)$.

Esercizio 3 Si trovino i punti stazionari di $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x^2y$, stabilendo quali di essi siano punti di massimo relativo o di minimo relativo.

Esercizio 4 Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{\sin x}{1+y^2}\, dxdy,$$

ove

$$A = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi/2\,,\ 0 \le y \le \tan x\}.$$

Esercizio 5 Si estraggono in blocco tre palline da un'urna che ne contiene 4 rosse e 6 bianche. Si calcoli:

(i) la probabilità che escano esattamente 2 palline rosse;

(ii) il numero medio di palline rosse estratte.

Esercizio 6 Si lanciano 100 monete equilibrate. Si determini:

(i) la probabilità che escano esattamente 65 teste;

(ii) il numero medio di teste uscite;

(iii) la probabilità che escano almeno 60 teste (utilizzare l'approssimazione normale).

Prova scritta del 15 settembre 2006

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = -3x^2 + 8xy - 9y^2 + 22x - 11y.$$

(i) Si scriva il gradiente di f.

(ii) Si determinino i punti stazionari di f, stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(iii) Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_A |x| \sin \pi y\, dxdy,$$

ove

$$A = \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 4ax^2 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2a(1 - x) & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.

(i) Scegliere a in modo che la funzione f sia una densità sull'intervallo $[0, 1]$.

(ii) Calcolare la media e la varianza di una variabile aleatoria X avente come densità la funzione f.

Prova scritta del 7 novembre 2006

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x, y) = xy\, e^{-(x^2+2y^2)}$.

(i) Si calcoli la derivata di f nel punto $(1, 1)$ secondo la direzione $\mathbf{v} = (-1, -1)$.

(ii) Si determinino, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di f.

(iii) Si calcoli l'integrale $\int_Q f(x, y)\, dxdy$, ove $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

Esercizio 2 Si tira un dado con facce numerate da 1 a 6, e successivamente si estrae, da un'urna contenente 6 palline rosse e 3 bianche, un numero di palline pari al risultato del lancio del dado.

(i) Si calcoli la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano esattamente 5 rosse.

(ii) Sapendo che fra le palline estratte ve ne sono esattamente 5 rosse, calcolare la probabilità che il risultato del lancio del dado sia stato 6.

Prova scritta del 23 gennaio 2007

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x,y) = \arctan(y(1-x))$.

(i) Si calcoli la derivata di f nel generico punto (x,y) secondo la direzione $\mathbf{v} = (-1,-1)$.

(ii) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,1,\frac{\pi}{4})$.

(iii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendo se si tratti di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\iint_T e^{x-y}\,dxdy,$$

ove T è il triangolo delimitato dalle rette di equazioni $x+y=4$, $3x+y=4$, $y=0$.

Esercizio 3 Un'urna contiene 3 palline bianche e 2 palline rosse. Si pesca a caso una pallina: se essa è bianca, la si getta via, mentre se è rossa la si rimette nell'urna. Dall'urna così modificata si pescano due palline, con reimbussolamento.

(i) Si determini la probabilità di estrarre 2 palline rosse.

(ii) Supponendo di aver estratto 2 palline rosse, si determini la probabilità che l'urna contenesse 5 palline.

(iii) Si calcoli il numero medio di palline rosse estratte dall'urna modificata.

Prova scritta del 13 febbraio 2007

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x,y) = 5x^2 + y^2 + 3xy$.

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(-1,1,f(-1,1))$.

(ii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendo se si tratti di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\iint_T (5x^2 + y^2 + 3xy)\, dxdy,$$

ove T è il trapezio di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

Esercizio 3 Due urne U_1 e U_2 contengono rispettivamente due palline e tre palline. Si effettua il seguente esperimento: si lancia ripetutamente una moneta equilibrata; quando esce "testa" si estrae una pallina da U_1, e quando esce "croce" si estrae una pallina da U_2. L'esperimento termina quando una delle due urne è vuota.

(i) Si calcoli la probabilità che l'urna U_2 si svuoti prima dell'urna U_1.

(ii) Sapendo che l'urna U_2 si è svuotata per prima, si determini la probabilità che al primo lancio sia uscita "croce".

Prova scritta del 3 aprile 2007

Esercizio 1 Si determini un punto M nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ tale che sia minima la somma dei quadrati delle distanze di M dalle rette di equazioni $x = 0$, $y = 0$, $y + x - 2 = 0$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_A x^2 y\, dxdy,$$

ove A è l'insieme delimitato dai grafici delle due funzioni $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

Esercizio 3 In una città la popolazione, costituita in pari numero da uomini e donne, è formata esclusivamente da adulti giovani, di bell'aspetto e di costumi sessuali estremamente liberi; inoltre si sa che il 25% degli uomini ed il 20% delle donne ha tendenze omosessuali. Si assume che ogni individuo della popolazione sia sessualmente attratto da ciascun individuo del sesso che egli predilige.
Un giorno un emigrato (di genere ed inclinazione sessuale sconosciuti) rientra in città.

(i) Supponendo che l'emigrato sia maschio ed omosessuale, qual è la probabilità che egli venga attratto sessualmente dalla prima persona che incontra? E qual è la probabilità che tale attrazione sia corrisposta?

(ii) Sapendo che l'emigrato viene attratto sessualmente dalla prima persona che incontra, qual è la probabilità che egli sia maschio ed omosessuale?

Prova scritta del 22 maggio 2007

Esercizio 1 È data la funzione $f(x,y) = 2x^4 - x^2 e^y + e^{4y}$.

(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,2)$.

(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\iint_A \sqrt{xy - y^2}\, dxdy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(10,1)$.

Esercizio 3 Un'urna contiene sei palline rosse e quattro bianche.

(i) Si estraggono cinquanta palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Calcolare la probabilità che escano almeno trenta palline rosse.

(ii) Si lancia una moneta e poi si decide come segue: se esce testa si estrae una pallina; se esce croce se ne estraggono due in sequenza, rimettendo la prima nell'urna. Calcolare la probabilità che sia uscita una sola pallina rossa, sapendo che sono state estratte due palline.

Esercizio 4 Una pasticceria confeziona scatole di biscotti il cui peso medio è $\mu_0 = 100$ g. Siccome l'impastatrice è vecchia, il pasticcere decide di sostituirla con una nuova. Egli vuole dunque capire se la nuova macchina produce scatole di biscotti con lo stesso peso. A questo scopo, egli prende 32 scatole di biscotti e le pesa, trovando un peso medio $\overline{X} = 125$ g. con una varianza $S^2 = 9$ g. Si può affermare, ad un livello $\alpha = 0.05$, che il peso medio delle scatole di biscotti è cambiato?

Prova scritta dell'11 giugno 2007

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{1}{y} + 27\,xy.$$

(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,36)$.

(ii) Determinare i punti stazionari di f appartenenti al primo quadrante, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

Esercizio 2 Si considerino i due dischi

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 1\}, \;\; D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1\}.$$

Si calcolino gli integrali

$$\iint_{D_1} xy\,dxdy, \qquad \iint_{D_2} xy\,dxdy.$$

Esercizio 3 Un'urna contiene 20 palline rosse e 10 bianche. Si estrae una pallina: se è rossa, si tira un dado a 6 facce; se è bianca, si tira un dado ad 8 facce.

(i) Calcolare la probabilità che il punteggio risultante dal lancio del dado sia superiore a 4.

(ii) Calcolare la probabilità di aver estratto una pallina bianca, sapendo che il punteggio risultante dal lancio del dado è superiore a 4.

Esercizio 4 Negli anni anteriori al 2006-07, gli studenti di Scienze del Nulla dell'Università di Nothing City hanno riportato, nei compitini del corso di Vuoto Applicato, una votazione media di 18.5. Quest'anno, un gruppo di 41 studenti ha riportato, nei compitini, una media di 20, con una varianza di 25. Si può affermare, ad un livello 0.05, che quest'anno, per quanto riguarda il Vuoto Applicato, a Nothing City gli studenti di Scienze del Nulla siano più ferrati che nel passato?

Prova scritta del 2 luglio 2007

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{xy} - xe^{y}.$$

(i) Scrivere la derivata di f secondo la direzione $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nel punto $(-1,1)$.

(ii) Determinare i punti stazionari di f, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

Esercizio 2 Si calcolino gli integrali seguenti:

(i) $\displaystyle\iint_E \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,dxdy$, ove $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$,

(ii) $\displaystyle\iint_Q \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}\,dxdy$, ove $Q = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 3 Un'urna contiene tre palline rosse, due bianche ed una nera. Si estrae una pallina: se è rossa, si lanciano due monete; se è bianca, se ne lancia una; se è nera non si fa nulla. In ciascun lancio di moneta, l'uscita di "testa" dà un punto, mentre l'uscita di "croce" non dà alcun punto.

(i) Detta X la variabile aleatoria che descrive il punteggio complessivo, si calcoli la densità discreta di X.

(ii) Supponendo di aver ottenuto un punteggio nullo, si determini la probabilità di aver estratto una pallina rossa.

Esercizio 4 Una stazione di rilevamento dell'inquinamento dovuto al traffico automobilistico urbano ha effettuato una misura al giorno, ottenendo in 31 giorni un campione casuale di emissioni inquinanti con media pari a 145 parti per milione, con uno scarto quadratico di 19 parti per milione. Determinare, al livello 0.90, un intervallo di fiducia per la media giornaliera delle emissioni inquinanti.

Prova scritta del 21 settembre 2007

Esercizio 1 È data la funzione $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - x^4 - 4y^4$.

(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto

$$(1, 1, f(1, 1)).$$

(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire, quando possibile, se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{e^{y+2x}}{1+e^{x+y}}\, dxdy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.

Esercizio 3 Si lancia per tre volte un dado equilibrato. Detta X la variabile aleatoria che conta le estrazioni del numero 6, si determini la legge di X e si calcoli la speranza di X.

Prova scritta del 16 gennaio 2008

Esercizio 1 È data la funzione $f(x, y) = e^{-x^2}(2xy + y^2)$.

(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, f(0, 3)).$$

(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdy,$$

ove T è il trapezio di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

Esercizio 3 Due macchine A, B producono un certo numero di pezzi al giorno. La macchina A, a parità di tempo, produce il doppio dei pezzi prodotti dalla macchina B. Si sa inoltre che il 4% dei pezzi prodotti da A è difettoso, mentre solo l'1% dei pezzi prodotti da B è difettoso.

(i) Con quale probabilità un pezzo scelto a caso risulterà difettoso?

(ii) Se un pezzo, scelto a caso, risulta difettoso, con quale probabilità esso è stato prodotto dalla macchina A?

Prova scritta dell'11 febbraio 2008

Esercizio 1 Siano $P = (0, \sqrt{3})$ e $Q = (-1, \sqrt{3})$.

(i) Si calcoli il prodotto scalare $\langle P, Q \rangle$.

(ii) Si trovi l'ampiezza dell'angolo ϑ fra i due vettori.

(iii) Si determini l'area del triangolo POQ, ove O è l'origine.

(iv) Si scriva la distanza del punto $P + Q$ dalla retta r di equazione

$$3x - 4y + 5\sqrt{3} = 0.$$

Esercizio 2

(i) In quali punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = |x - y|$ *non* è differenziabile?

(ii) Detto R il rettangolo $[1, 2] \times [0, 2]$, si calcoli l'integrale

$$\iint_R |x - y| \, dxdy.$$

Esercizio 3 In una lotteria vi sono mille biglietti, contraddistinti da tre cifre da 0 a 9. Viene estratto un solo biglietto vincente.

(i) Qual è la probabilità che il biglietto vincente abbia le tre cifre uguali?

(ii) Qual è la probabilità che il biglietto vincente abbia le prime due cifre uguali?

(iii) Qual è la probabilità che il biglietto vincente abbia esattamente due cifre uguali?

(iv) Sapendo che il biglietto vincente ha esattamente due cifre uguali, qual è la probabilità che le cifre uguali siano le prime due?

Prova scritta del 2 aprile 2008

Esercizio 1 È data la funzione $f(x, y) = 3xy^2 - 4xy - 4x - 2x^2$.

(i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto

$$(1, -1, f(1, -1)).$$

(ii) Trovare i punti stazionari di f e stabilire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\iint_A x^2 y \, dxdy,$$

ove A è il settore circolare definito dalle relazioni

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Esercizio 3 In un gioco a premi vi sono due buste chiuse e due urne contenenti 100 banconote ciascuna. Nell'urna A vi sono banconote da 10 e da 100 euro e le prime sono il quadruplo delle seconde, mentre nell'urna B vi sono banconote da 20 e da 50 euro e le prime sono il triplo delle seconde. Ciascuna busta contiene una delle seguenti istruzioni: (1) pescare una banconota dall'urna A, (2) pescare una banconota dall'urna B. I giocatori Gastone e Paperino scelgono a caso una busta ed eseguono quanto indicato.

(i) Qual è la probabilità che Gastone vinca 100 euro?

(ii) Sapendo che Paperino ha vinto non più di 20 euro, qual è la probabilità che abbia scelto la busta con l'istruzione (2)?

Prova scritta del 4 giugno 2008

Esercizio 1 Trovare tutti i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} z^2 + \overline{z}^2 + |z|^2 = 11 \\ z + \overline{z} = 6. \end{cases}$$

Esercizio 2 **(i)** Determinare un versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che

(a) $\mathbf{v}$ sia ortogonale alla retta di equazione $4y - 3x - 5 = 0$;

(b) l'angolo fra $\mathbf{v}$ ed il vettore $\mathbf{e} = (0, 1)$ sia ottuso.

(ii) Scrivere l'equazione della retta r passante per $\mathbf{u} = (3, 4)$ e parallela a $\mathbf{v}$.
(iii) Calcolare la distanza della retta r dall'origine.

Esercizio 3 Determinare gli autovalori, nonché i corrispondenti autovettori, della matrice $\mathbf{AB}$, ove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = \frac{3 - 4x}{1 + x^2 + y^2}$$

sull'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5 Si calcoli l'integrale

$$\iint_T x\, e^{x-y}\, dxdy,$$

ove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 2\}$.

Esercizio 6 Un'urna contiene 10 palline bianche e 5 rosse, ed una seconda urna ne contiene 3 verdi e 6 gialle. Si estrae una pallina dalla prima urna: se è bianca, si estraggono due palline dalla seconda urna, mentre se è rossa si estrae una sola pallina dalla seconda urna.

(i) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina verde dalla seconda urna.

(ii) Supponendo di aver estratto una pallina gialla dalla seconda urna, calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla prima urna fosse rossa.

Prova scritta dell'8 luglio 2008

Esercizio 1 Calcolare il prodotto scalare fra i due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ così individuati:

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- $\mathbf{w}$ è determinato dalle seguenti condizioni:

  (i) ha modulo uguale a 1,

  (ii) forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x,

  (iii) è parallelo al piano di equazione $x + y + \frac{1}{2}z = 1$,

  (iv) è perpendicolare alla retta di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A x \sin(x - y)\, dxdy,$$

ove A è il parallelogrammo di vertici $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $(0,\pi)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.
Esercizio 3 Sei palline, tre bianche e tre rosse, vengono collocate a caso in due urne, tre nella prima e tre nella seconda. Detta X la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse presenti nella prima urna, calcolare la speranza $\mathbb{E}[X]$ e la varianza $\mathbf{Var}[X]$.

Prova scritta del 15 settembre 2008

Esercizio 1 Determinare i numeri complessi z che risolvono l'equazione

$$z^6 - (1 + i)z^3 + i = 0.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{y}{1 + 2x + y^2}\, dxdy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.
Esercizio 3 Un mazzo è costituito di cinque carte numerate da 1 a 5. Si estrae una carta a caso, e la si rimette nel mazzo insieme a 4 nuove carte uguali ad essa; quindi, dal mazzo così modificato si estrae a caso una seconda carta.

(i) Si calcoli la probabilità di trovare un 2 alla seconda estrazione.

(ii) Detta X la variabile aleatoria che rappresenta il valore della seconda carta estratta, si calcolino la speranza e la varianza di X.