Appunti di teoria dei semigruppi

Paolo Acquistapace
con la gentile collaborazione di Alex Cardelli

16 luglio 2022

Indice

Capitolo 1

Semigruppi e generatori

1.1 Introduzione

La teoria dei semigruppi nasce nella prima metà del secolo XX, e a partire dal 1948, con il fondamentale teorema di Hille-Yosida, acquista un'importanza centrale per una vastissima gamma di applicazioni in svariati campi: equazioni alle derivate parziali, equazioni integro-differenziali, equazioni con ritardo, teoria dei controlli, modelli matematici in dinamica delle popolazioni, meccanica quantistica ed altro ancora.
La "proprietà di semigruppo" deriva dall'unicità della soluzione di problemi di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie in $\mathbb{R}^N$. Se denotiamo con $u(t, s; x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t > s \\ u(s) = x, \end{cases}$$

allora, se f è continua in (t, u) e lipschitziana in u uniformemente rispetto a t, vale il teorema di unicità: dunque risulta

$$u(t, s; x) = u(t, \tau; u(\tau, s; x)) \qquad \forall t > \tau > s,$$

in quanto i due membri risolvono la stessa equazione differenziale e assumono entrambi il valore $u(\tau, s; x)$ all'istante τ. Come vedremo, questa proprietà sarà alla base di tutta la teoria che svilupperemo.

1.2 Semigruppi

Quando si ha a che fare con equazioni lineari nascono in modo naturale i semigruppi di operatori. Consideriamo un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

dove x è un fissato elemento di uno spazio di Banach X, e $A : X \to X$ è un operatore lineare e limitato. La soluzione esiste unica ed è data da

$$u(t) = e^{tA}x, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

ove l'operatore e^{tA} è definito dalla serie

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

la quale converge totalmente nello spazio $\mathcal{L}(X)$: infatti

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} = e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} < \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

La famiglia $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ costituisce non solo un semigruppo, ma addirittura un gruppo, poiché verifica

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}; \qquad e^{0A} = I_X\,,$$

ove I_X è l'operatore identità su X; in particolare

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Si ha inoltre, nella norma di $\mathcal{L}(X)$,

$$\exists \frac{d}{dt} e^{tA} = A\, e^{tA} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

e quindi, per $t = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - I_X}{h} = A \quad \text{in } \mathcal{L}(X). \tag{1.6}$$

Si dice che il gruppo $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ è *generato* da A. Come vedremo, queste proprietà, opportunamente generalizzate, formano il nocciolo della teoria dei semigruppi di operatori in un fissato spazio di Banach X.

Definizione 1.2.1 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ una famiglia di operatori lineari. Se vale la proprietà di semigruppo*

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0, \qquad T(0) = I_X\,, \tag{1.7}$$

si dice che la famiglia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ è un semigruppo *di operatori.*

Non si è fatta qui alcuna ipotesi di continuità rispetto al parametro t. Ad esempio, in uno spazio di Hilbert X, detta $P : X \to X$ una proiezione ortogonale diversa dall'identità, la funzione

$$T(t) = \begin{cases} I_X & \text{se } t = 0 \\ P & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

è un semigruppo di operatori che è discontinuo nel punto $t = 0$.

Definizione 1.2.2 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo su uno spazio di Banach X. Diciamo che esso è* fortemente continuo *se risulta*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0 \quad \forall x \in X.$$

Ciò equivale, grazie alla proprietà (1.7)*, alla condizione*

$$\lim_{t\to t_0^+} \|T(t)x - T(t_0)x\|_X = 0 \quad \forall x \in X, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Si noti che se $T(\cdot)$ è un semigruppo fortemente continuo in X, allora per ogni $x \in X$ l'*orbita del sistema* uscente da x, ossia la funzione $t \mapsto T(t)x$, è continua da $[0, \infty[$ in X; dunque essa è limitata in ogni intervallo della forma $[0, a]$. Dal teorema di Banach-Steinhaus segue allora che la funzione $t \mapsto T(t)$ è limitata in ogni intervallo $[0, a]$. In altre parole, se $T(\cdot)$ è un semigruppo fortemente continuo, allora per ogni $a > 0$ esiste $M_a > 0$ tale che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_a \qquad \forall t \in [0, a]. \tag{1.8}$$

Definizione 1.2.3 *Sia $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigruppo su uno spazio di Banach X. Diciamo che esso è* uniformemente continuo *se risulta*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Ciò equivale, grazie alla proprietà (1.7), *alla condizione*

$$\lim_{t \to t_0^+} \|T(t) - T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0 \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Ovviamente, ogni semigruppo uniformemente continuo è anche fortemente continuo; il viceversa non è vero, come vedremo nel paragrafo successivo.
I gruppi uniformemente continui sono tutti e soli quelli della forma $T(t) = e^{tA}$, con $A \in \mathcal{L}(X)$. Infatti:

Proposizione 1.2.4 *Sia X uno spazio di Banach. Ogni gruppo della forma e^{tA}, con $A \in \mathcal{L}(X)$, è uniformemente continuo. Viceversa, sia $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigruppo uniformemente continuo su X: allora esiste un unico $A \in \mathcal{L}(X)$ tale che $T(t) = e^{tA}$ per ogni $t \geq 0$; in particolare, $\{T(t)\}$ si estende ad un gruppo uniformemente continuo.*

Dimostrazione Sia $A \in \mathcal{L}(X)$; mostriamo che e^{tA} è uniformemente continuo. Infatti, da (1.3) segue, per $0 < |h| \leq 1$ e per un'opportuna costante $C > 0$,

$$\|e^{hA} - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n|} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1} \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \leq C|h|,$$

e ciò prova la tesi.
Viceversa, sia $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigruppo uniformemente continuo. Definiamo l'integrale

$$V(t) = \int_0^t T(s)\, ds, \qquad t \geq 0:$$

si tratta dell'integrale di una funzione a valori in uno spazio di Banach (integrale di Bochner, definito nell'Appendice B). Risulta $V(t) \in \mathcal{L}(X)$ e inoltre, per la proposizione B.0.16,

$$\frac{d}{dt} V(t) = T(t), \qquad t \geq 0. \tag{1.9}$$

In particolare,
$$\frac{1}{t}V(t) \to I_X \qquad \text{in } \mathcal{L}(X) \quad \text{per } t \to 0^+; \tag{1.10}$$
quindi per $0 < t \le \delta$, con $\delta < 1$ fissato, risulta
$$\left\| I_X - \frac{1}{t}V(t) \right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$
Ne segue che la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[I_X - \frac{1}{t}V(t) \right]^k, \qquad 0 < t \le \delta,$$
converge in $\mathcal{L}(X)$ all'operatore
$$\left[I_X - \left[I_X - \frac{1}{t}V(t) \right] \right]^{-1} = \left[\frac{1}{t}V(t) \right]^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$
Pertanto anche $V(t)$ è invertibile per $0 < t \le \delta$.
Allora, scelto $t_0 \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$, possiamo scrivere per $t \ge 0$
$$T(t) = V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} T(s+t)\, ds = V(t_0)^{-1} \int_t^{t_0+t} T(r)\, dr.$$
Dunque, per (1.9), esiste la derivata di $T(t)$ per ogni $t \ge 0$ e si ha
$$\frac{d}{dt}T(t) = V(t_0)^{-1} \left[T(t_0+t) - T(t) \right] = V(t_0)^{-1} \left[T(t_0) - I \right] T(t).$$
Posto infine
$$A = V(t_0)^{-1} \left[T(t_0) - I_X \right],$$
si ha $A \in \mathcal{L}(X)$ e
$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t), \qquad t \ge 0. \tag{1.11}$$
Ne segue $T(t)x = e^{tA}x$ per ogni $x \in X$ e $t \ge 0$, perché entrambe queste funzioni risolvono il problema di Cauchy (1.1) indexproblema!di Cauchy.
L'operatore A è unico: se infatti $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = Bt(t)$, con $A, B \in \mathcal{L}(X)$, allora per $t = 0$ si ricava subito $A = B$.
Inoltre, in virtù di (1.5), $T(t) = e^{tA}$ è invertibile per ogni $t \ge 0$, con $T(t)^{-1} = e^{-tA}$ per ogni $t \ge 0$. Possiamo quindi estendere $T(t)$ a $\mathbb{R}$ ponendo $T(t) = e^{tA}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ottenendo così un gruppo, che è uniformemente continuo per quanto visto all'inizio della dimostrazione. □

1.3 Semigruppi fortemente continui

Analizziamo qui alcune proprietà dei semigruppi fortemente continui.

Proposizione 1.3.1 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di operatori limitati sullo spazio di Banach X. Sono fatti equivalenti:*

(i) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *è fortemente continuo;*

(ii) $\lim_{h\to 0^+} \|T(h)x - x\|_X = 0$ *per ogni* $x \in X$*;*

(iii) *esistono* $\delta > 0$, $M \geq 1$, D *sottospazio denso in* X, *tali che*

> **(a)** $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ *per ogni* $t \in [0, \delta]$*;*
>
> **(b)** $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$ *per ogni* $x \in D$.

Dimostrazione **(i)** $\iff$ **(ii)** Le due implicazioni sono ovvie per definizione di semigruppo fortemente continuo.

(ii)$\Longrightarrow$**(iii)** Possiamo scegliere $D = X$, ottenendo (b); la (a) segue da (1.8), visto che il semigruppo è fortemente continuo.

(iii)$\Longrightarrow$**(ii)** Siano δ, M e D forniti dall'ipotesi. Fissati $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, scegliamo $x_\varepsilon \in D$ tale che $\|x - x_\varepsilon\|_X < \varepsilon$. Allora, se $0 \leq h \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \|T(h)x - x\|_X &\leq \|T(h)(x - x_\varepsilon)\|_X + \|T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon\|_X + \|x_\varepsilon - x\|_X \leq \\ &\leq M\varepsilon + \|T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon\|_X + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'ipotesi (b) segue

$$\limsup_{h\to 0^+} \|T(h)x - x\|_X \leq (M+1)\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in X,$$

e dunque vale (ii). □

Ogni semigruppo fortemente continuo ha un *generatore infinitesimale*, come adesso vedremo.

Definizione 1.3.2 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo definito su uno spazio di Banach X. Un operatore lineare $A : D(A) \subseteq X \to X$ è detto* generatore infinitesimale*, o semplicemente* generatore*, del semigruppo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se risulta*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \ \exists \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T(h) - I_X}{h} x \ \text{in } X \right\} \\ Ax = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T(h) - I_X}{h} x \quad \forall x \in D(A)\,, \end{cases} \tag{1.12}$$

Se il semigruppo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ha un generatore A, l'insieme $D(A)$, detto *dominio di A*, è un sottospazio di X e quindi non è vuoto perché certamente contiene $\{0\}$.

Prima di mostrare che un generatore esiste, facciamo due osservazioni sotto forma di lemmi.

Lemma 1.3.3 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo. Se $x \in X$, l'orbita $t \mapsto T(t)x$ è derivabile in $[0, \infty[$ se e solo se esiste*

$$Lx := \left[\frac{d^+}{dt^+} T(t)x \right]_{t=0} .$$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Evidente.
($\Longleftarrow$) Se $h > 0$, allora

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x - x}{h} \to T(t)Lx;$$

inoltre

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t-h)\frac{T(h)x - x}{h};$$

quindi, scegliendo $M > 0$ (grazie a (1.8)) tale che $\|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ per ogni $s \in [0, a]$, con $a > t$, otteniamo per $h \to 0^+$

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Lx = T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Lx\right] + [T(t-h) - T(t)]\, Lx \to 0.$$

Pertanto

$$\exists \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Lx \qquad \forall t > 0. \quad \square$$

Lemma 1.3.4 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un generatore di $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Allora:*

(i) *A è lineare;*

(ii) *gli operatori $T(t)$ sono invarianti per $D(A)$, ossia $x \in D(A)$ se e solo se $T(t)x \in D(A)$, $t \geq 0$, e in tal caso*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \qquad \forall t \geq 0; \tag{1.13}$$

(iii) *vale*

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A) \qquad \forall x \in X;$$

(iv) *risulta*

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\, ds \qquad \forall x \in X,$$

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\, ds = \int_0^t T(s)Ax\, ds \qquad \forall x \in D(A).$$

Dimostrazione **(i)** Immediata conseguenza della definizione di generatore.
(ii) Sia $x \in D(A)$. Poiché A è un generatore, se $h \to 0^+$ si ha

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x - x}{h} \to T(t)Ax,$$

e quindi anche

$$\frac{T(h)-I_X}{h}T(t)x=\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}\to T(t)Ax \quad \text{per } h\to 0^+;$$

quest'ultima relazione prova che $T(t)x\in D(A)$ e che $AT(t)x=T(t)Ax=\frac{d}{dt}T(t)x$ per ogni $x\in D(A)$. L'implicazione contraria è banale.
(iii)-(iv) Sia $x\in X$. Si ha per $h\to 0^+$, grazie alla continuità dell'orbita $t\mapsto T(t)x$,

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I_X}{h}\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(s+h)x\,ds-\int_0^t T(s)x\,ds\right]=\\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h}T(s)x\,ds-\frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds=\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,ds-\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds\to T(t)x-x.\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_0^t T(s)x\,ds\in D(A),\qquad A\int_0^t T(s)x\,ds=T(t)x-x,$$

ossia valgono (iii) e la prima relazione di (iv). Se poi $x\in D(A)$, ricordando (1.8) si ha

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(h)-I_X}{h}\int_0^t T(s)x\,ds-\int_0^t T(s)Ax\,ds\right\|_X &= \left\|\int_0^t T(s)\left[\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right]ds\right\|_X\leq\\ &\leq Mt\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|_X\to 0\end{aligned}$$

per $h\to 0^+$. Ciò prova (iv). □

Possiamo finalmente provare due fatti importanti: un operatore non può essere generatore di due semigruppi diversi, ed inversamente un semigruppo fortemente continuo non può avere due generatori diversi.

Teorema 1.3.5 *Sia X uno spazio di Banach e sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo.*

(i) *Ogni generatore di $T(\cdot)$ è chiuso, ossia ha grafico chiuso in $X\times X$, ed ha dominio denso in X.*

(ii) *Il generatore di $T(\cdot)$ è unico.*

(iii) *Sia $A:D(A)\subseteq X\to X$ il generatore di $T(\cdot)$: se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è un altro semigruppo fortemente continuo che ha generatore A, allora $T(t)=S(t)$ per ogni $t\geq 0$.*

Dimostrazione **(i)** Sia A un generatore di $T(\cdot)$: allora A soddisfa (1.12). Proviamo che il grafico di A è chiuso: se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq D(A)$ verifica

$$x_n\to x \text{ in } X,\qquad Ax_n\to y \text{ in } X\qquad \text{per } n\to\infty,$$

possiamo scrivere

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds$$

e, grazie a (1.8), otteniamo per $n \to \infty$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds.$$

Pertanto

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \to y \qquad \text{per } t \to 0^+,$$

ossia $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Dunque $(x_n, Ax_n) \to (x, Ax)$ in $X \times X$ per $n \to \infty$, vale a dire A è chiuso.

Proviamo che $D(A)$ è denso in X: sappiamo che $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \in D(A)$ per il lemma 1.3.4(iii), e risulta, grazie alla continuità dell'orbita $s \mapsto T(s)x$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds \to x \quad \text{in } X \quad \text{per } t \to 0^+;$$

quindi $\overline{D(A)} = X$.

(ii) Supponiamo che $A : D(A) \subseteq X \to X$ e $B : D(B) \subseteq X \to X$ siano entrambi generatori di $T(\cdot)$; dunque in particolare essi sono entrambi chiusi. Sappiamo dal lemma 1.3.4(iv) che

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A) \cap D(B) \quad \forall t > 0, \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds = x \quad \forall x \in X,$$

ed anche

$$\frac{T(t)x - x}{t} = A\,\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds = B\,\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds \qquad \forall t > 0, \quad \forall x \in X.$$

Quindi, se $x \in D(A)$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds = x, \quad \lim_{t\to 0^+} B\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax,$$

e siccome B è chiuso, deve essere $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Dunque $D(A) \subseteq D(B)$ e A, B coincidono su $D(A)$. Un argomento simmetrico prova che $D(B) \subseteq D(A)$ e A, B coincidono.

(iv) Per $x \in D(A)$ consideriamo per $t > 0$ la funzione

$$s \mapsto T(t-s)S(s)x, \qquad s \in [0,t]:$$

essa è derivabile con

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \qquad \forall s \in [0,t]; \end{aligned}$$

quindi $s \mapsto T(t-s)S(s)$ è costante in $[0,t]$. Ne segue

$$T(t)x = T(t)S(0)x = T(0)S(t)x = S(t)x.$$

Ciò prova che $T(\cdot) - S(\cdot)$ è nullo su $D(A)$. Ma $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$ e $\overline{D(A)} = X$ in virtù di (i): quindi $T(\cdot) = S(\cdot)$ in X. $\square$

Osservazione 1.3.6 Si osservi che se $T(\cdot)$ è fortemente continuo, il grafico G_A del suo generatore, essendo un sottospazio chiuso di $X \times X$, è anche debolmente chiuso in $X \times X$.

La definizione 1.3.2 di generatore non richiede a priori che il semigruppo sia fortemente continuo, anche se in qualche modo lo sottintende. Si ha infatti:

Proposizione 1.3.7 *In uno spazio di Banach X, sia $T(\cdot)$ un semigruppo. Supponiamo che l'operatore $A : D(A) \subseteq X \to X$ sia generatore di $T(\cdot)$. Allora $T(\cdot)$ è fortemente continuo se e solo se valgono le condizioni seguenti:*

(i) $\overline{D(A)} = X$,

(ii) *il semigruppo è limitato in un intorno destro di* 0.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Supponiamo che il semigruppo sia fortemente continuo. Allora da (1.8) segue subito che esso è limitato in un intorno destro di 0. Inoltre dal teorema 1.3.5(i) segue che $D(A)$ è denso in X.
($\Longleftarrow$) Supponiamo che $\overline{D(A)} = X$ e che il semigruppo sia limitato in un intorno destro di 0. Dobbiamo far vedere che

$$\lim_{h \to 0^+} \|T(h)x - x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X.$$

La cosa è evidente se $x \in D(A)$, poiché in tal caso

$$\|T(h)x - x\|_X = h \left\| \frac{T(h)x - x}{h} \right\|_X \to 0 \cdot \|Ax\|_X = 0.$$

Se invece $x \in X \setminus D(A)$, la tesi segue dalla proposizione 1.3.1(iii)(b). $\square$

Corollario 1.3.8 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo limitato in un intorno destro di 0; supponiamo che l'operatore $A : D(A) \subseteq X \to X$ sia generatore di $T(\cdot)$. Allora:*

(i) *l'operatore $A : D(A) \subset X \to X$ è chiuso in $\overline{D(A)}$, ossia il grafico G_A di A è chiuso in $\overline{D(A)} \times \overline{D(A)}$;*

(i) *$T(\cdot)$ è fortemente continuo su $\overline{D(A)}$;*

(iii) *per ogni $x \in D(A)$ con $Ax \in \overline{D(A)}$ la funzione $T(\cdot)x$ è derivabile e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \qquad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Sostituiamo X con $\overline{D(A)}$: il semigruppo è fortemente continuo su $\overline{D(A)}$ per la proposizione 1.3.7, il che prova (ii). Quindi, per il teorema 1.3.5(ii)-(i), il suo generatore è unico ed è chiuso in $\overline{D(A)}$, ossia vale (i). Infine, dal lemma 1.3.4(ii) segue la (iii). $\square$

Corollario 1.3.9 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ il suo generatore. Sono fatti equivalenti:*

(i) *A è limitato, ossia esiste $K \geq 0$ tale che $\|Ax\|_X \leq K\|x\|_X$ per ogni $x \in D(A)$;*

(ii) *$D(A) = X$;*

(iii) *$D(A)$ è un sottospazio chiuso;*

(iv) *$T(\cdot)$ è una funzione continua rispetto alla norma di $\mathcal{L}(X)$.*

In tal caso si ha $A \in \mathcal{L}(X)$ e

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \qquad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione **(i)$\Longrightarrow$(ii)** Sia $x \in X$. Per la proposizione 1.3.7, $D(A)$ è denso in X, e dunque possiamo scegliere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$. Da (i) segue che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X. Quindi esiste $y \in X$ tale che $Ax_n \to y$. Ne segue, essendo A chiuso per il teorema 1.3.5(i), che $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Perciò $D(A) = X$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii) Ovvio.
(iii)$\Longrightarrow$(ii) Il dominio $D(A)$ è chiuso e denso in X per la proposizione 1.3.7; quindi $D(A) = X$.
(iii)$\Longrightarrow$(i) L'operatore A è definito su tutto X ed è chiuso; per il teorema del grafico chiuso, esso è limitato da X in X, ossia appartiene a $\mathcal{L}(X)$.
(i) $\Longleftrightarrow$ (iv) Da (i), utilizzando (ii) che ne è conseguenza, si ottiene per ogni $t, t+h \geq 0$ e $x \in X = D(A)$, usando (1.8),

$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X = \left\| \int_t^{t+h} T(s)Ax\, ds \right\|_X \leq |h|M\|Ax\|_X \leq |h|MK\|x\|_X\,,$$

ossia $\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq |h|MK$. Ciò mostra che il semigruppo $T(\cdot)$ è uniformemente continuo, e (iv) è provata. Il viceversa, nonché l'affermazione finale, segue dalla proposizione 1.2.4. $\square$

Consideriamo un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$ su uno spazio di Banach X, e sia A il suo generatore. Se nella definizione di quest'ultimo (si veda (1.12)) sostituiamo la convergenza forte con la convergenza debole, ossia poniamo

$$\begin{cases} D_{\overline{A}} = \left\{ x \in X : \ \exists \, \text{w-}\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T(h)x - x}{h} \text{ in } X \right\} \\ \overline{A}x = \text{w-}\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T(h)x - x}{h} \quad \forall x \in D_{\overline{A}}\,, \end{cases}$$

allora evidentemente avremo $D(A) \subseteq D_{\overline{A}}$ e $\overline{A}x = Ax$ per ogni $x \in D(A)$. Tuttavia questa estensione non è effettiva. Infatti vale il seguente risultato:

Proposizione 1.3.10 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo su uno spazio di Banach X e sia A il suo generatore. Se $\overline{A}$ è l'operatore sopra definito, risulta $\overline{A} = A$.*

Dimostrazione Abbiamo osservato che $D(A) \subseteq D_{\overline{A}}$ e $\overline{A}x = Ax$ per ogni $x \in D(A)$. Sia ora $x \in D_{\overline{A}}$: allora, dato che ogni operatore limitato è continuo rispetto alla convergenza debole, si ha per ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \operatorname*{w\text{-}lim}_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \operatorname*{w\text{-}lim}_{h\to 0^+} T(t)\frac{T(h)x - x}{h} = \\ &= T(t)\left(\operatorname*{w\text{-}lim}_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}\right) = T(t)\overline{A}x. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $\varphi \in X^*$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I_X}{h} \left[\varphi\left(T(t)x\right)\right] = \lim_{h\to 0^+} \varphi\left(\frac{T(h) - I_X}{h} T(t)x\right) = \varphi\left(T(t)\overline{A}x\right).$$

Quindi la funzione reale $t \mapsto \varphi\left(T(t)x\right)$ è dotata in ogni punto di derivata destra, e questa coincide con la funzione continua $t \mapsto \varphi\left(T(t)\overline{A}x\right)$.
Da questo segue che $t \mapsto \varphi\left(T(t)x\right)$ è di classe C^1, con

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(T(t)x\right) = \varphi\left(T(t)\overline{A}x\right). \tag{1.14}$$

Infatti vale questo lemma di analisi 1:

Lemma 1.3.11 *Sia ω una funzione continua e dotata di derivata destra $D^+\omega$ in $[a,b[$. Allora:*

(i) *se $\omega(a) = 0$ e $D^+\omega \leq 0$ in $[a,b[$, allora $\omega \leq 0$ in $[a,b[$;*

(ii) *se $D^+\omega$ è continua in $[a,b[$, allora ω è di classe C^1 in $[a,b[$.*

Dimostrazione **(i)** Supponiamo dapprima $D^+\omega < 0$ in $[a,b[$. Se esistesse $t_1 \in]a,b[$ tale che $\omega(t_1) > 0$, allora potremmo porre $t_0 = \inf\{t_\in]a,b[\,:\, \omega(t) > 0\}$; per definizione avremmo $\omega(t_0) = 0$ ed esisterebbe una successione $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]a,b[$ tale che $t_n > t_{n+1}$ e $t_n \to t_0$. Ne seguirebbe

$$D^+\omega(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega(t_n)}{t_n - t_0} \geq 0,$$

il che contraddice l'ipotesi $D^+\omega < 0$ in $[a,b[$.
Nel caso generale $D^+\omega \leq 0$ in $[a,b[$, basta considerare per $\varepsilon > 0$ la funzione $\omega_\varepsilon(t) = \omega(t) - \varepsilon(t-a)$: ad essa possiamo applicare il ragionamento precedente, ottenendo $\omega_\varepsilon \leq 0$ in $[a,b[$, ossia $\omega(t) \leq \varepsilon(t-a)$ per ogni $t \in [a,b[$. Poiché ε è arbitrario, si ha la tesi.
(ii) Poniamo per $t \in [a,b[$

$$\gamma(t) = \omega(a) + \int_a^t D^+\omega(s)\,ds, \qquad \lambda(t) - \gamma(t) - \omega(t),$$

e notiamo che γ è di classe C^1 in $[a, b[$, essendo $D^+\omega$ continua in $[a, b[$. Allora le due funzioni $\pm\lambda$ verificano le ipotesi della parte (i) del lemma, essendo $\lambda(a) = 0$ e $D^+\lambda = 0$ in $[a, b[$. Dunque si deduce $\lambda \leq 0$ e $-\lambda \leq 0$ in $[a, b[$, ossia $\lambda = 0$ in $[a, b[$. Perciò $\omega = \gamma$ e dunque ωè di classe C^1 in $[a, b[$. $\square$

Dal lemma 1.3.11 segue subito la (1.14). Notiamo ora che per ogni $\varphi \in X^*$ si ha

$$\varphi(T(t)x - x) = \varphi(T(t)x) - \varphi(x) = \int_0^t \varphi(T(s)\overline{A}x\, ds = \varphi\left(\int_0^t T(s)\overline{A}x\, ds\right).$$

Ne segue $T(t)x - x = \int_0^t T(s)\overline{A}x\, ds$, da cui

$$\frac{T(t)x - x}{t} \to \overline{A}x,$$

e ciò mostra che $x \in D(A)$ e $Ax = \overline{A}x$. $\square$

Un risultato simile, che si dimostra in modo piuttosto complicato, è il seguente:

Proposizione 1.3.12 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo su uno spazio di Banach X. Se risulta*

$$\text{w-}\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \qquad \forall x \in X,$$

allora il semigruppo è fortemente continuo.

Dimostrazione Sia $x_0 \in X$: andiamo a dimostrare che $\|T(t)x_0 - x_0\|_X \to 0$ per $t \to 0^+$. Poniamo $g(t) = T(t)x_0$ ed osserviamo che g è debolmente continua in ogni punto $t_0 \geq 0$: infatti, per ipotesi,

$$\text{w-}\lim_{t \to t_0^+} g(t) = \text{w-}\lim_{h \to 0^+} T(h)T(t_0)x_0 = g(t_0).$$

Inoltre g è limitata in un intorno di 0, altrimenti esisterebbe $t_k \to 0^+$ tale che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T(t_k)x_0\|_X = +\infty,$$

il che è assurdo, dato che $T(t_k)x_0 \rightharpoonup x_0$ per $k \to \infty$. Dalla proprietà (1.7) segue che g è limitata in ogni intervallo compatto della semiretta $[0, \infty[$.

Proviamo che g è debolmente misurabile (definizione B.0.4). Poiché g è continua a destra, $\|g(\cdot)\|_X$ è misurabile secondo Lebesgue, in quanto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{t \geq 0 : \|g(\cdot)\|_X < \alpha\}$ è unione al più numerabile di intervalli di lunghezza positiva (infatti se t sta in tale insieme, esiste $[t, t+\delta_t[$ che a sua volta vi è contenuto). Consideriamo l'insieme $\{g(t) : t \geq 0\}$ e mostriamo che esso è separabile. Sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ l'insieme dei razionali positivi, e sia M l'insieme di tutte le combinazioni lineari della forma $\sum_{j=1}^k \beta_j g(t_j)$, con coefficienti β_j appartenenti a $\mathbb{Q}$ (oppure a $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$): sarà dunque $M = \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Allora $\overline{M}$ è un sottospazio chiuso separabile, e inoltre, per la debole continuità di g, $g(t) = \text{w-}\lim_{k \to \infty} g(t_{k_j})$ appartiene per ogni $t \geq 0$ alla chiusura debole di M, che coincide con $\overline{M}$. Perciò $\{g(t) : t \geq 0\} \subseteq \overline{M}$, e ciò prova la separabilità.

Dato che g è debolmente misurabile e $\{g(t) : t \geq 0\}$ è separabile, il teorema di Pettis (teorema B.0.8) ci assicura che g è fortemente misurabile. Inoltre, per la limitatezza di g in ogni intervallo compatto, esiste l'integrale di Bochner $\int_\alpha^\beta g(t)\,dt$, che verifica

$$\left\| \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \right\|_X \leq \int_\alpha^\beta \|g(t)\|_X\,dt \qquad \text{per } 0 \leq \alpha < \beta < \infty$$

(si vedano la definizione B.0.12 e la (B.1)). Inoltre l'integrale verifica la seguente proprietà di forte continuità:

$$\lim_{s\to 0} \int_\alpha^\beta g(t+s)\,dt = \lim_{s\to 0} \int_{\alpha+s}^{\beta+s} g(r)\,dr = \int_\alpha^\beta g(r)\,dr.$$

Proviamo che g è fortemente continua in ogni punto $t > 0$. Sia $[\alpha,\beta] \subset]0,t[$ e sia $\varepsilon \in]0, t-\beta[$. Per (1.7) possiamo scrivere $g(t) = T(r)g(t-r)$ per $r \in [\alpha,\beta]$; quindi

$$(\beta-\alpha)g(t) = \int_\alpha^\beta T(r)g(t-r)\,dr,$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)\|g(t\pm\varepsilon)-g(t)\|_X &= \left\| \int_\alpha^\beta T(r)[g(t\pm\varepsilon-r) - g(t\pm\varepsilon-r)]\,dr \right\|_X \leq \\ &\leq \sup_{\tau\in[\alpha,\beta]} \|T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \int_{t-\beta}^{t-\alpha} \|g(s\pm\varepsilon) - g(s)\|_X\,ds.\end{aligned}$$

In virtù della continuità delle traslazioni (proposizione B.0.13), l'ultimo membro della relazione precedente tende a 0 per $\varepsilon \to 0$: ciò prova che g è fortemente continua nel generico punto $t > 0$.
Mostriamo infine che g è fortemente continua anche in $t = 0$, il che coincide con la tesi della proposizione: per ogni $t_n \in \mathbb{Q}$ e $t > 0$ si ha $T(t)g(t_n) = g(t+t_n)$, e per la forte continuità in t, $\|T(t)g(t_n) - g(t_n)\|_X \to 0$ per $t \to 0^+$. Poiché ogni $x_m \in M$ è combinazione lineare dei $g(t_j)$, si deduce

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x_m - x_m\|_X = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Allora, per ogni $t \in [0,1]$ e $m \in \mathbb{N}$, si ricava

$$\begin{aligned}\|T(t)x_0 - x_0\|_X &\leq \|T(t)(x_0-x_m)\|_X + \|T(t)x_m - x_m\|_X + \|x_m - x_0\|_X \leq \\ &\leq \left[\sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} + 1\right] \|x_0 - x_m\|_X + \|T(t)x_m - x_m\|_X\,.\end{aligned}$$

Per $t \to 0^+$ otteniamo per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{t\to 0^+} \|T(t)x_0 - x_0\|_X \leq \left[\sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} + 1\right] \|x_0 - x_m\|_X\,,$$

ed essendo $\inf_{m\in\mathbb{N}} \|x_0 - x_m\|_X = 0$, si arriva finalmente alla tesi. □

In certi casi può risultare difficile caratterizzare il dominio del generatore di un dato semigruppo. È utile allora la definizione che segue:

Definizione 1.3.13 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare nello spazio di Banach X. Un sottospazio $D \subseteq D(A)$, denso in $D(A)$ rispetto alla norma $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$, si chiama* nòcciolo *("core" in inglese) per A.*

Proposizione 1.3.14 *Sia A il generatore di un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$ in uno spazio di Banach X. Allora ogni sottospazio $D \subseteq D(A)$, denso in X ed invariante per $T(\cdot)$, è un nocciolo per A.*

Dimostrazione Sia $x \in D(A)$. Scegliamo una successione $\{x_n\} \subseteq D$ tale che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'applicazione $s \mapsto T(s)x_n$ è a valori in D, grazie all'invarianza di D rispetto a $T(\cdot)$, ed è continua nella norma di $D(A)$: infatti

$$\|[T(s) - T(t)]x_n\|_{D(A)} = \|[T(s) - T(t)]x_n\|_X + \|[T(s) - T(t)]Ax_n\|_X \to 0 \quad \text{per } s \to t.$$

Quindi l'elemento $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n\,ds \in X$, essendo limite in $D(A)$, per $m \to \infty$, delle proprie somme di Riemann

$$S_m[T(\cdot)x_n] = \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{m} T\left(\frac{ht}{m}\right)x_n\,,$$

appartiene alla chiusura di D rispetto a $D(A)$. Vogliamo approssimare il nostro x, nella norma di $D(A)$, con un'opportuna selezione di tali elementi, al tendere di t a 0. Per cominciare, fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds - x\right\|_{D(A)} < \varepsilon \qquad \forall t \in]0, \delta_\varepsilon].$$

Scriviamo, con un indice n_ε da determinare,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)x_{n_\varepsilon}\,ds - x\right\|_{D(A)} \le \\ &\qquad \le \left\|\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)[x_{n_\varepsilon} - x]\,ds\right\|_{D(A)} + \left\|\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)x\,ds - x\right\|_{D(A)}.\end{aligned}$$

Il secondo termine a secondo membro è minore di ε. Il primo termine lo stimiamo a parte:

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)[x_{n_\varepsilon} - x]\,ds\right\|_{D(A)} = \\ &\qquad = \left\|\frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)[x_{n_\varepsilon} - x]\,ds\right\|_X + \left\|\frac{1}{\delta_\varepsilon}A\int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)[x_{n_\varepsilon} - x]\,ds\right\|_X \le \\ &\qquad \le M_\varepsilon\|x_{n_\varepsilon} - x\|_X + \left\|\frac{T(\delta_\varepsilon) - I}{\delta_\varepsilon}[x_{n_\varepsilon} - x]\right\|_X \le C_\varepsilon\|x_{n_\varepsilon} - x\|_X\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato (1.13) e posto

$$M_\varepsilon = \sup_{t\in[0,\delta_\varepsilon]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad C_\varepsilon = \left\| \frac{T(\delta_\varepsilon) - I}{\delta_\varepsilon} \right\|_{\mathcal{L}(X)} .$$

Adesso scegliamo n_ε in modo che risulti $C_\varepsilon \|x_{n_\varepsilon} - x\|_X < \varepsilon$, il che è lecito, visto che $x_n \to x$ in X. Allora possiamo concludere che

$$\left\| \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_0^{\delta_\varepsilon} T(s)x_{n_\varepsilon}\, ds - x \right\|_{D(A)} < 2\varepsilon,$$

e questo ci permette di dedurre che x appartiene alla chiusura di D in $D(A)$; poiché $x \in D(A)$ era arbitrario, abbiamo provato che D è denso in $D(A)$ come richiesto. □

Corollario 1.3.15 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatore di un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$. Allora i sottospazi, definiti induttivamente,*

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}, \quad n \geq 2,$$

ed il sottospazio

$$D(A^\infty) = \bigcap_{n=2}^{\infty} D(A^n)$$

sono tutti noccioli per A.

Dimostrazione Basta provare la tesi per $D(A^\infty)$. Siccome esso è invariante per $T(\cdot)$, in virtù della proposizione 1.3.14 basta mostrare che $\overline{D(A^\infty)} = X$.
Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione scalare con supporto K compatto e contenuto in $]0,\infty[$. Fissato $x \in X$, definiamo

$$x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\, ds;$$

questo vettore è ben definito, essendo

$$\|x_\varphi\|_X \leq (\sup K)\|\varphi\|_\infty \sup_{t\in K} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X .$$

Per $h > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h}\, x_\varphi &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h) - T(s)]x\, ds = \\ &= \int_0^\infty \frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h}\, T(s)x\, ds, \end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che φ è nulla su $[-h, 0]$. Per $h \to 0^+$, l'integrando all'ultimo membro tende a $-\varphi'(s)T(s)x$, ed è dominato dalla funzione sommabile $\|\varphi\|_\infty \sup_{t\in K} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X I_K(s)$. Dunque, per il teorema di Lebesgue,

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h}\, x_\varphi = -\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x\, ds,$$

ossia $x_\varphi \in D(A)$ e $Ax_\varphi = -\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x\,ds$. Iterando, per ogni n si prova nello stesso modo che $x_\varphi \in D(A^n)$ e

$$A^n x_\varphi = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)x\,ds, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Dunque $x_\varphi \in D(A^\infty)$.
Sia ora V lo spazio generato da tutti i vettori della forma x_φ, al variare di $x \in X$ e delle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con supporto compatto e contenuto in $]0,\infty[$. Se mostriamo che V è denso in X, a maggior ragione sarà $\overline{D(A^\infty)} = X$. Sia $\psi \in X^*$ tale che $\psi y = 0$ per ogni $y \in V$: se proveremo che ψ è il funzionale nullo, allora seguirà che $\overline{V} = X$. Sia dunque, per ogni $x \in X$ e φ del tipo descritto,

$$0 = \psi x_\varphi = \psi\left(\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\,ds\right) = \int_0^\infty \varphi(s)\psi(T(s)x)\,ds.$$

Per l'arbitrarietà di φ, ne segue

$$\psi(T(s)x) = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall s \geq 0.$$

In particolare, quindi, $\psi x = 0$ per ogni $x \in X$; come osservato in precedenza, ciò prova la tesi. $\square$

1.4 Esempi

In questo paragrafo raggruppiamo alcuni importanti esempi di semigruppi.

Esempio 1.4.1 (Semigruppi moltiplicativi) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e scegliamo $X = C_0(\Omega)$, ove

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \forall\varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \text{ compatto} \subset \Omega :\ |f(x)| < \varepsilon \text{ in } \Omega \setminus K_\varepsilon\}. \tag{1.15}$$

Muniamo lo spazio X della norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$. Se $q : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, possiamo definire

$$[T(t)f](x) = e^{t\,q(x)} f(x), \qquad f \in X.$$

Allora è immediato verificare che $T(\cdot)$ è un semigruppo; non avendo fatto ipotesi ulteriori su q, esso non sarà in generale né fortemente continuo né limitato in un intorno di $t = 0$. Poiché per $t \to 0^+$ si ha

$$\frac{[T(t)f](x) - f(x)}{t} = \frac{e^{t\,q(x)} - 1}{t} f(x) \to q(x)f(x) \qquad \forall x \in \Omega,$$

il generatore infinitesimale di $T(t)$ è l'*operatore di moltiplicazione*

$$[M_q f](x) = q(x)f(x),$$

con dominio $D(M_q) = \{f \in X : qf \in X\}$. Si verifica subito che:

- in generale, $\sup_{f\in X} \|T(t)f\|_\infty = e^{\sup_\Omega \mathrm{Re}\, q} = +\infty$ per ogni $t > 0$;
- il dominio $D(M_q)$ è denso in X, perché contiene il sottospazio di X costituito dalle funzioni continue a supporto compatto in Ω;
- M_q è un operatore chiuso;
- $M_q \in \mathcal{L}(X)$ se e solo se $q \in L^\infty(\Omega)$, e in tal caso $T(t) = e^{tM_q}$ per ogni $t \geq 0$;
- $T(t)$ è fortemente continuo se e solo se $\mathrm{Re}\, q$ è limitata superiormente in Ω; in tal caso risulta
$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t \sup_\Omega \mathrm{Re}\, q} \qquad \forall t \geq 0.$$

Possiamo alternativamente scegliere $X = L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, ove $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito. In questo caso $q : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione misurabile: si noti che, in particolare, $|q| < \infty$ ovunque. In questo caso avremo ancora $M_q f = qf$ sul dominio $D(M_q) = \{f \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) : qf \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)\}$. Sono ancora veri tutti i fatti elencati in precedenza: in particolare, per mostrare che il dominio è denso in $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, basta considerare lo spazio $\mathcal{S}_0(\Omega)$ costituito dalle funzioni semplici e nulle al di fuori di un sottoinsieme di misura finita. Esse sono dense in $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$: infatti, per ipotesi $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, con $X_n \in \mathcal{M}$ e $\mu(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi, si può prendere una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a una fissata $f \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, tale che $|\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}| \leq |f|$, φ_n sia nulla fuori di $X_n \cap \{|f| < n\}$ e valga $\varphi_n(x) \to f(x)$ puntualmente in Ω per $n \to \infty$: allora $\varphi_n(x) \to f(x)$ anche in L^p per convergenza dominata.

1.4.1 Digressione: spazi di Sobolev

Apriamo una digressione incentrata sugli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.4.2 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e siano $f, f_i \in L^p(\Omega)$. Diciamo che f ha* derivata parziale debole *i-esima f_i in $L^p(\Omega)$ se vale la relazione*

$$\int_\Omega f(x) D_i\varphi(x)\, dx = -\int_\mathbb{R} f_i(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Definizione 1.4.3 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e siano $f, f_i \in L^p(\Omega)$. Diciamo che f ha* derivata parziale forte *i-esima f_i in $L^p(\Omega)$ se esiste una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(\Omega)$ tale che $f_n,\ D_i f_n \in L^p(\Omega)$ e*

$$f_n \to f, \quad D_i f_n \to f_i \quad \textit{in } L^p(\Omega).$$

Si dimostra abbastanza facilmente che le derivate parziali deboli, o forti, sono uniche (quando esistono) e, altrettanto facilmente, che se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartiene a $L^p(\Omega)$ ed è derivabile parzialmente in ogni punto con $D_i f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq N$, allora le derivate parziali "effettive" $D_i f$ sono anche le derivate deboli e forti di f in $L^p(\mathbb{R})$.
Mostriamo ora che le derivate deboli e le derivate forti coincidono.

Teorema 1.4.4 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $p \in [1, \infty[$. Poniamo*

$$H^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ u \text{ ha derivata parziale } i\text{-esima forte in } L^p(\Omega), \ 1 \le i \le N\}.$$

Allora

$$W^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega).$$

Osserviamo che una norma su questo spazio è

$$\|u\|_{1,p,\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{L^p(\Omega)}, ,$$

ove u_i è la derivata parziale i-esima debole o forte.

Dimostrazione L'inclusione $\supseteq$ è facile: se $u \in H^{1,p}(\Omega)$ e u_i è la derivata parziale forte i-esima di u in $L^p(\Omega)$, sia $\{u_n\}$ la successione che verifica per u la definizione 1.4.3; allora per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha, passando al limite per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x) D_i\varphi(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x) D_i\varphi(x)\, dx = \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega D_i u_n(x) \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)\, dx, \end{aligned}$$

cosicché u_i è la derivata parziale debole i-esima di u in $L^p(\Omega)$. Dunque $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Proviamo l'inclusione $\subseteq$. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$; fissato $\varepsilon > 0$, poniamo

$$\Omega_{-1} = \Omega_0 = \emptyset, \quad \Omega_n = \left\{ x \in \Omega : \ |x|_N < n, \ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Gli insiemi Ω_n, $n \ge 0$, sono aperti, $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$ per $n \ge -1$ e l'unione di tutti gli Ω_n è Ω. Sia $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ un *partizione dell'unità*, cioè una successione contenuta in $C_0^\infty(\Omega)$ tale che

$$0 \le \psi_n(x) \le 1, \qquad \operatorname{supp} \psi_n \subset \Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) = 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \Omega$. Per $n \in \mathbb{N}^+$ sia poi $k_{n,\varepsilon}$ una funzione appartenente a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, tale che

$$\operatorname{supp} k_{n,\varepsilon} \subset B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right), \qquad \|k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u) - (\psi_n u)\|_{1,p} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

ove $k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)$ è il *prodotto di convoluzione* tra le due funzioni $k_{n,\varepsilon}$ e $\psi_n u$, dato da

$$k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)(x) = \int_\Omega k_{n,\varepsilon}(x - y)(\psi_n u)(y)\, dy \tag{1.16}$$

(si noti che in effetti l'integrale è fatto su un opportuno sottoinsieme di Ω, come tra poco mostriamo). Allora si ha

$$\operatorname{supp} k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u) \subseteq \overline{B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1})} :$$

infatti, se x non appartiene alla chiusura a secondo membro esiste una palla $B(x,r)$ disgiunta da essa, e in particolare vale $x'-y \notin B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ per ogni $y \in \Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1}$ e per ogni $x' \in B(x,r)$. Perciò $k_{n,\varepsilon}(x'-y)(\psi_n u)(y) = 0$ per ogni $y \in \Omega$ e per ogni $x' \in B(x,r)$. Integrando su Ω, si trova $[k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)](x') = 0$ per ogni $x' \in B(x,r)$, e quindi x non appartiene al supporto di $k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)$.
Inoltre, poiché

$$d(z, \partial\Omega) - |y|_N \le d(y+z, \partial\Omega) \le d(z, \partial\Omega) + |y|_N \,,$$

avremo per $y \in B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ e $z \in \Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} < d(y+z, \partial\Omega) < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{1}{n-2} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n-2} \,, \end{aligned}$$

ed anche $|y+z|_N \le \frac{1}{(n-1)(n-2)} + n < n+2$. Ciò mostra che

$$\operatorname{supp} k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u) \subseteq \overline{B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1})} \subseteq \Omega_{n+2} \setminus \Omega_{n-2} \,,$$

e dunque l'integrale della convoluzione $k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)$ è fatto al più su $\Omega_{n+2} \setminus \Omega_{n-2}$.
Premesso tutto ciò, poniamo

$$v_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)](x), \quad x \in \Omega.$$

La serie converge perché per ogni $x \in \Omega$ esiste $m \in \mathbb{N}^+$ tale che $x \in \Omega_{m+2} \setminus \Omega_{m-2}$, e dunque nella somma gli unici addendi non nulli sono quelli da $n = m-3$ a $n = m+4$. Inoltre $v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ perché

$$D^\alpha v_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [D^\alpha k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u)](x) \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,$$

e questa serie converge per lo stesso motivo di prima. Si ha poi

$$\begin{aligned} \|u - v_\varepsilon\|_{1,p,\Omega_m} &= \sum_{n=1}^{m+1} \|k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u) - (\psi_n u)\|_{1,p,\Omega_m} \le \\ &\le \sum_{n=1}^{m+1} \|k_{n,\varepsilon} * (\psi_n u) - (\psi_n u)\|_{1,p,\Omega} < \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon; \end{aligned}$$

per monotonia, per $m \to \infty$ si trova $\|u - v_\varepsilon\|_{1,p,\Omega} < \varepsilon$. Dunque, scelto $\varepsilon = \frac{1}{m}$, esiste una successione $\{v_m\}$ tale che, per $m \to \infty$, $v_m \to$ in $L^p(\Omega)$ e $D_i v_m \to u_i$ in $L^p(\Omega)$, $1 \le i \le N$. Ciò prova che $u \in H^{1,p}(\Omega)$ e che le derivate parziali forti di u sono le u_i.

□

Osserviamo, infine, che si definiscono gli spazi di Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni $f \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che le derivate deboli f_i di f sono dotate a loro volta di derivate deboli $f_{ij} \in L^p(\Omega)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, e in modo analogo, induttivamente, gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N}^+)$. La digressione finisce qui.

Esempio 1.4.5 I prossimi esempi sono dedicati al *semigruppo delle traslazioni*, che è estremamente importante, essendo legato all'operatore derivata prima. Per $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, poniamo

$$[T(t)f](x) = f(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0. \tag{1.17}$$

È ovvio verificare che $T(\cdot)$ è un semigruppo; esso è anche un gruppo, potendo essere definito anche per $t < 0$. Se scegliessimo invece $X = L^p(0, \infty)$, $T(\cdot)$ sarebbe solamente un semigruppo.

Esempio 1.4.6 (Il gruppo delle traslazioni in $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty[$) Consideriamo il gruppo $T(\cdot)$ definito da (1.17) nello spazio $L^p(\mathbb{R})$. Verifichiamo che esso è fortemente continuo per $1 \le p < \infty$: per la continuità delle traslazioni in L^p, si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \|T(h)f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \lim_{h\to 0^+} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}). \tag{1.18}$$

Si noti che il gruppo $T(\cdot)$ non è uniformemente continuo nello spazio $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$: infatti, se $h > 0$ e $f = I_{[0,h]}$, ove $I_{[0,h]}$ è la *funzione indicatrice* di $[0, h]$, che vale 1 in $[0, h]$ e 0 altrove, si ha

$$\|T(h)f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |I_{[0,h]}(x+h) - I_{[0,h]}(x)|^p \, dx = \int_{-h}^0 |1-0|^p \, dx + \int_0^h |0-1|^p \, dx = 2h,$$

mentre $\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_0^h 1 \, dx = h$; pertanto

$$\|T(t) - I_{L^p(\mathbb{R})}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} \ge \left[\frac{2h}{h}\right]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} > 0 \qquad \forall t > 0.$$

Chi è il generatore infinitesimale A di questo gruppo? Deve essere

$$Af(x) = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)f(x) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}) :$$

verificheremo che risulta

$$\begin{cases} D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}) \\ Af = f' \quad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.19}$$

ove $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è lo *spazio di Sobolev*, definito nella digressione precedente, delle funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$ che hanno le derivata (debole, ovvero forte) f' in $L^p(\mathbb{R})$.

Proviamo che $D(A) \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R})$. Osserviamo preliminarmente che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, indicato con K_φ il supporto di φ, in virtù del teorema di Lagrange si ha per $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left\| \varphi'(\cdot) - \frac{\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)}{h} \right\|_{L^q(\mathbb{R})} &\leq \left(\int_{K_\varphi \cup (K_\varphi - h)} |\varphi'(x) - \varphi'(\xi_{hx})|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\leq \|\varphi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |h| \, [2 m_1(K_\varphi)]^{\frac{1}{q}} \leq C|h| \qquad \forall q \in [1, \infty[\,,
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\left\| \varphi'(\cdot) - \frac{\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)}{h} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\varphi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |h| \leq C|h|,$$

cosicché

$$\lim_{h \to 0} \left\| \varphi'(\cdot) - \frac{\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)}{h} \right\|_{L^q(\mathbb{R})} = 0 \qquad \forall q \in [1, \infty]. \tag{1.20}$$

Stabilito ciò, sia $f \in D(A)$. Allora per definizione

$$\frac{T(h)f - f}{h} = \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} \to f' \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}) \quad \text{per } h \to 0,$$

per cui, grazie a (1.20), otteniamo per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) \, dx &= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \varphi(x) \, dx = \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(t) \, \frac{\varphi(t - h) - \varphi(t)}{h} \, dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t) \, dt.
\end{aligned}$$

Dunque f' è la derivata debole di f in $L^p(\mathbb{R})$, e pertanto $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.
Viceversa, proviamo che $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subseteq D(A)$. Se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, e f' è la derivata forte di f in $L^p(\mathbb{R})$, allora esiste $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1(\mathbb{R})$ tale che f_n, $f_n' \in L^p(\mathbb{R})$ e $f_n \to f$, $f_n' \to f'$ in $L^p(\mathbb{R})$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $h \neq 0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{f_n(\cdot + h) - f_n(\cdot)}{h} - f_n'(\cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{ds} f_n(t + sh) \, ds - f_n'(t) \right|^p dt = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^1 [f_n'(t + sh) - f_n'(t)] \, ds \right|^p dt \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |f_n'(t + sh) - f_n'(t)|^p \, ds dt = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |f_n'(t + sh) - f_n'(t)|^p \, dt ds = \\
&= \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} |f_n'(t + a) - f_n'(t)|^p \, dt da.
\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo nell'ultimo membro $\frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} |f'(t + a) - f'(t)|^p \, dt da$, otteniamo

$$\left\| \frac{f_n(\cdot + h) - f_n(\cdot)}{h} - f_n'(\cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq C_p \|f_n' - f'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} |f'(t + a) - f'(t)|^p \, dt da.$$

Adesso passiamo al limite, con $h \neq 0$ fissato, per $n \to \infty$: dalle proprietà della successione $\{f_n\}$ si ricava

$$\left\| \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} - f'(\cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} |f'(t+a) - f'(t)|^p \, dtda,$$

e infine, se $h \to 0$, per la continuità delle traslazioni in $L^p(\mathbb{R})$ si ottiene

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} - f'(\cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = 0;$$

ne segue che $f \in D(A)$ con $Af = f'$.

Esempio 1.4.7 (Il gruppo delle traslazioni in $L^\infty(\mathbb{R})$) Supponiamo ora $p = \infty$. Si vede subito che il gruppo delle traslazioni $T(\cdot)$, definito in (1.17), non è fortemente continuo: basta considerare la funzione indicatrice $f = I_{[a,b]}$, per la quale si ha, qualunque sia $h > 0$,

$$\|T(h)f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |I_{[a,b]}(x+h) - I_{[a,b]}(x)| \geq \sup_{x \in [b-h,b]} |I_{[a,b]}(x+h) - I_{[a,b]}(x)| = 1.$$

tuttavia, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}))} = 1$ per ogni $t \geq 0$. Quanto al generatore A, si può osservare che se $f \in D(A)$ deve essere

$$\frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} \to Af(\cdot) \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R}; \tag{1.21}$$

Questo fatto implica che $Af = f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, e in particolare f è derivabile e lipschitziana, dunque uniformemente continua. In particolare, il rapporto incrementale di f, per $h \neq 0$ fissato, è continuo come funzione di t. Pertanto f', essendo limite uniforme di funzioni continue, è continua. Ma f' è anche uniformemente continua: infatti, fissati $s, t \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$, si ha

$$\begin{aligned} |f'(t) - f'(s)| \leq & \left| f'(t) - \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| + \\ & + \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right| + \left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} - f'(s) \right|. \end{aligned}$$

Il primo e terzo addendo a secondo membro, grazie a (1.21), sono minori di ε per $|h| \leq h_\varepsilon$; detta $\omega(r)$ l'oscillazione di f su intervalli di ampiezza non superiore a r, vale a dire $\omega(r) = \sup_{0 < |t-s| \leq r} |f(t) - f(s)|$, l'addendo intermedio si maggiora così:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right| = \\ & \quad = \frac{1}{|h|} \big[|f(t+h) - f(s+h)| + |f(t) - f(s)| \big] \leq \frac{2\omega(|t-s|)}{|h|}. \end{aligned}$$

Scelto $h = \pm h_\varepsilon$, prendendo $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che $\frac{2\omega(\delta_\varepsilon)}{h_\varepsilon} < \varepsilon$, si ottiene

$$\sup_{|t-s|<\delta_\varepsilon} |f'(t) - f'(s)| \leq 3\varepsilon,$$

e ciò mostra che f' è uniformemente continua. Si conclude perciò che

$$D(A) \subseteq \{f \in C^1(\mathbb{R}) \cap UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) : f' \in UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

D'altra parte, se $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ con $f' \in UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, allora è facile vedere, usando il teorema di Lagrange, che vale (1.21); dunque

$$D(A) = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \cap UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) : f' \in UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Il gruppo delle traslazioni in $L^\infty(\mathbb{R})$, in virtù della proposizione 1.3.8(ii), è fortemente continuo in $\overline{D(A)}$; si vede facilmente che, rispetto alla norma uniforme, risulta

$$\overline{D(A)} = UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Ovviamente, il semigruppo non è uniformemente continuo in questo spazio, perché, fissato $h > 0$ e posto, per $0 < \varepsilon < h$,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \geq \varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon} & \text{se } 0 \leq |t| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

risulta

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1, \qquad \|T(h)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq |f_\varepsilon(h) - f_\varepsilon(0)| = 1,$$

da cui

$$\|T(h) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \frac{\|T(h)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} = 1 \qquad \forall h > 0.$$

Esempio 1.4.8 (Il gruppo delle traslazioni in C^α, $0 < \alpha < 1$) Sia X lo spazio di Hölder $C^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, ove $0 < \alpha < 1$, munito della norma

$$\|f\|_X = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad f \in X.$$

Il gruppo delle traslazioni, definito da (1.17), non è fortemente continuo neanche in questo spazio, poiché, posto

$$f(x) = |x|^\alpha \wedge 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si ha per $|h| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|T(h)f - f\|_X &\geq \sup_{x\neq y} \frac{|f(x+h) - f(y+h) - f(x) + f(y)|}{|x-y|^\alpha} \geq \\ &\geq \sup_{|x|\leq 1-|h|} \frac{||x+h|^\alpha - |h|^\alpha - |x|^\alpha|}{|x|^\alpha} \geq \left(\text{scelto } x = \frac{h}{2}\,, \text{con } 0 < h < \frac{2}{3}\right) \\ &\geq \frac{|\left(\frac{3}{2}\,h\right)^\alpha - h^\alpha - \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha|}{\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha} = |3^\alpha - 2^\alpha - 1| > 0. \end{aligned}$$

Si può verificare agevolmente che il generatore infinitesimale del semigruppo è $Af = f'$, con dominio
$$D(A) = C^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$
ove $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : \; f' \in C^\alpha(\mathbb{R})\}$. Esso è fortemente continuo su $\overline{D(A)}$, con
$$\overline{D(A)} = h^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$
ove
$$h^\alpha(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\alpha(\mathbb{R}) : \lim_{r\to 0^+} \sup_{|t-s|<r} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0 \right\}.$$

Esempio 1.4.9 (Traslazioni destre e sinistre) Se ci mettiamo sulla semiretta $\mathbb{R}^+ = [0,\infty[$, il semigruppo $T_r(\cdot)$ delle *traslazioni a destra*, ossia $[T_r(t)f](x) = f(x+t)$ per ogni $x, t \geq 0$, ha le stesse proprietà viste negli esempi precedenti nel caso del gruppo. Dunque esso è fortemente continuo, con generatore $Af = f'_+$, la derivata destra, negli spazi

- $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$, con $D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}^+)$;
- $UC(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, con $D(A) = \{f \in UC(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+) : f' \in UC(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$, ove $UC(\mathbb{R}^+)$ è l'insieme delle funzioni uniformemente continue su $\mathbb{R}^+$;
- $C^\alpha(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $0 < \alpha < 1$, con $D(A) = C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Si noti che non è affatto evidente che il dominio di A, negli ultimi due casi, sia fatto da funzioni di classe C^1; ciò segue da questo lemma elementare:

Lemma 1.4.10 *Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una funzione continua, dotata in ogni punto di derivata destra f'_+ continua. Allora $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $f' \equiv f'_+$.*

Dimostrazione Siano $s, t, \tau \geq 0$ con $\tau < s$, $t < s$. Andiamo a stimare la differenza fra due rapporti incrementali sinistri:
$$\left| \frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \frac{f(\tau)-f(s)}{\tau - s} \right| = \left| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - \frac{f(s)-f(\tau)}{s-\tau} \right| \leq$$
$$\leq \left| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - f'_+(t) \right| + |f'_+(t) - f'_+(\tau)| + \left| f'_+(\tau) - \frac{f(\tau)-f(s)}{\tau-s} \right|;$$
fissato $\varepsilon > 0$, a secondo membro il primo addendo è minore di ε per $0 < s-t < \delta_\varepsilon$, il secondo addendo è minore di ε per $|t-\tau| < \delta_\varepsilon$ e il terzo addendo è minore di ε per $0 < s - \tau < \delta_\varepsilon$. Quindi, se
$$\min\{s-t, s-\tau\} < \delta_\varepsilon, \qquad |t-\tau| < \delta_\varepsilon ,$$
si ottiene la condizione di Cauchy
$$\left| \frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \frac{f(\tau)-f(s)}{\tau-s} \right| < 3\varepsilon,$$

e dunque esiste la derivata sinistra

$$\lim_{t\to s^-} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'_-(s) \in \mathbb{R} \qquad \forall s > 0.$$

Proviamo ora che $f'_-(s) = f'_+(s)$, il che darà la tesi. Si ha per $0 \le t < s$

$$|f'_-(s) - f'_+(s)| \le \left| f'_-(s) - \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \right| + \left| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - f'_+(t) \right| + |f'_+(t) - f'_+(s)|;$$

come prima, il primo addendo a secondo membro è minore di ε per $0 < s-t < \delta_\varepsilon$, il secondo è minore di ε per $0 < s-t < \delta_\varepsilon$ e il terzo è minore di ε per $|t-s| < \delta_\varepsilon$. Perciò esiste $f'(s) = f'_-(s) = f'_+(s)$. Dato che f'_+ è continua, anche f' è continua. □

Possiamo definire anche le *traslazioni a sinistra*, ossia considerare $T(t)f(x) = f(x-t)$, ma per $x, t \in \mathbb{R}^+$ questo semigruppo non è ben definito. Possiamo invece porre per $x, t \ge 0$, nel caso di $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \le p < \infty$,

$$[T_l(t)f](x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{se } x-t \ge 0 \\ 0 & \text{se } x-t < 0, \end{cases}$$

mentre nel caso di $UC(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$

$$[T_l(t)f](x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{se } x-t \ge 0 \\ f(0) & \text{se } x-t < 0. \end{cases}$$

È facile verificare che entrambe queste definizioni danno luogo ad un semigruppo fortemente continuo; il generatore, in tutti e due i casi, è la derivata sinistra, $Af = f'_-$, con lo stesso dominio visto nel caso della derivata destra.

In modo analogo possiamo definire le traslazioni destre e sinistre su intervalli limitati: per $x \in [a,b]$ e $t \ge 0$, nel caso di $L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$,

$$[T_r(t)f](x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{se } x+t \le b \\ 0 & \text{se } x+t \ge b, \end{cases}$$

$$[T_l(t)f](x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{se } x-t \ge a \\ 0 & \text{se } x-t < a; \end{cases}$$

nel caso di $C[a,b]$ o di $C^\alpha[a,b]$, $0 < \alpha < 1$,

$$[T_r(t)f](x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{se } x+t \le b \\ f(b) & \text{se } x+t \ge b, \end{cases}$$

$$[T_l(t)f](x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{se } x-t \ge a \\ f(a) & \text{se } x-t < a. \end{cases}$$

Il generatore è sempre la derivata destra o sinistra, con $D(A)$ dato rispettivamente da $W^{1,p}(a,b)$, da $C^1[a,b]$ e da $C^{1,\alpha}[a,b]$. Si noti che nel caso di $L^p(a,b)$ entrambi questi semigruppi sono *nilpotenti*, vale a dire

$$T_r(t) = 0 \quad \forall t \ge b-a, \qquad T_l(t) = 0 \quad \forall t \ge b-a.$$

1.5 Comportamento asintotico, prima parte

Dopo aver analizzato il comportamento di un semigruppo attorno a $t = 0$, è il momento di vedere cosa succede quando $t \to +\infty$. Come vedremo, avremo un andamento di tipo al più esponenziale.
Iniziamo con una piccola generalizzazione della relazione (1.8).

Lemma 1.5.1 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo limitato in un intorno destro di* 0. *Per ogni $T > 0$ esiste $C_T \geq 1$ tale che*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_T \qquad \forall t \in [0, T].$$

Dimostrazione Poiché il semigruppo è limitato in un intorno $[0, \delta]$, esiste $C > 0$ tale che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \qquad \forall t \in [0, \delta].$$

Posto per comodità

$$p(t) = \ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\,, \qquad t \geq 0, \tag{1.22}$$

è evidente che

$$p(t + s) \leq p(t) + p(s) \qquad \forall t, s \geq 0;$$

dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ possiamo scrivere

$$p(t) = p\left(k\,\frac{t}{k}\right) \leq k\,p\left(\frac{t}{k}\right) \leq k \ln C \qquad \forall t \in \;]0, k\delta]\,.$$

Sia allora $t \in [0, T]$: scelto $k = \left[\frac{T}{\delta}\right] + 1$, otteniamo $k\delta > T$, e dunque, in particolare,

$$p(t) \leq k \ln C \qquad \forall t \in [0, T].$$

La tesi si ottiene scegliendo

$$C_T = C^k = C^{\left[\frac{T}{\delta}\right]+1}. \quad \square$$

Proposizione 1.5.2 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo limitato in un intorno destro di* 0. *Posto*

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t},$$

risulta $\omega_0 \in [-\infty, +\infty[$ e

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}\,. \tag{1.23}$$

La quantità ω_0 è detta soglia di crescita*, o* tipo*, del semigruppo.*

Dimostrazione Essendo ω_0 un estremo inferiore, è chiaro che $\omega_0 \in [-\infty, +\infty[$. Proviamo che si tratta di un limite, supponendo dapprima che $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $a > 0$ tale che

$$\omega_0 a \leq p(a) < (\omega_0 + \varepsilon)a,$$

ove la funzione $p(\cdot)$ è definita in (1.22). Se $0 \leq t \leq a$, il lemma 1.5.1 con $T = a$ ci dice che

$$p(t) = \ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_a \qquad \forall t \in [0, a];$$

se invece $t > a$ e se $n = \left[\frac{t}{a}\right]$, si avrà $na \leq t$ e dunque, per subadditività,

$$\begin{aligned}
\omega_0 \;\; &\leq \;\; \frac{p(t)}{t} \leq \frac{p(t-na)}{t} + \frac{p(na)}{t} \leq \frac{p(t-na)}{t} + n\,\frac{p(a)}{t} = \\
&= \;\; \frac{p(t-na)}{t} + \frac{na}{t}\,\frac{p(a)}{a} \leq \frac{p(t-na)}{t} + \frac{na}{t}\,(\omega_0 + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Per $t \to \infty$ si ha $0 \leq t - na \leq a$ e $\frac{na}{t} \leq 1$, e pertanto

$$\omega_0 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq 0 + 1 \cdot (\omega_0 + \varepsilon) \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

cosicché

$$\exists \lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \omega_0\,.$$

Se $\omega_0 = -\infty$, si procede analogamente, fissando $M > 0$ e scegliendo $a > 0$ tale che

$$p(a) < -Ma;$$

dopodiché se $0 < t \leq a$ vale ancora il lemma 1.5.1, mentre se $t > a$ e $n = \left[\frac{t}{a}\right]$, si ha come sopra

$$\frac{p(t)}{t} \leq \frac{p(t-na)}{t} - \frac{na}{t}\,M,$$

e per $t \to +\infty$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq 0 - 1 \cdot M,$$

ovvero

$$\exists \lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = -\infty = \omega_0\,. \quad \square$$

Possiamo finalmente enunciare la stima di tipo esponenziale preannunciata all'inizio del paragrafo.

Proposizione 1.5.3 *Sia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo limitato in un intorno destro di 0. Allora esistono $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ tali che*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\,e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.24}$$

Dimostrazione Sia ω_0 il tipo del semigruppo, definito da (1.23). Supponiamo dapprima $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Allora, scelto un qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste $K_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{(\omega_0+\varepsilon)t} \qquad \forall t \ge K_\varepsilon;$$

d'altra parte per $0 \le t \le K_\varepsilon$ vale il lemma 1.5.1 e quindi esiste $M_\varepsilon \ge 1$ tale che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M_\varepsilon \qquad \forall t \in [0, K_\varepsilon].$$

Ne segue la tesi con $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ e $M = M_\varepsilon \, e^{|\omega_0+\varepsilon|K_\varepsilon}$.
Quando invece $\omega_0 = -\infty$, va bene qualunque $\omega \in \mathbb{R}$, con $M = M_\varepsilon \, e^{|\omega|K_\varepsilon}$. $\square$

Il semigruppo $T(t)$ si dice *limitato* se si può scegliere $\omega = 0$ nella stima (1.24); si dice *di contrazione*, o *contrattivo*, se si può scegliere $\omega = 0$ e $M = 1$.

Esempi 1.5.4 **(1)** Siano $X = \mathbb{C}^2$, con $\left\|\binom{z}{w}\right\|_X = \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ per ogni $\binom{z}{w} \in X$, e

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ossia} \quad T(t)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + tw \\ w \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad \forall t \ge 0.$$

Per questo semigruppo si ha

$$\|T(t)\|^2_{\mathcal{L}(X)} \le 2 + t^2 \qquad \forall t \ge 0,$$

ed anche

$$\left\|T(t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\|^2_X = 2 + t^2 \qquad \forall t \ge 0,$$

cosicché $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \ge \sqrt{1 + \frac{t^2}{2}}$ per ogni $t \ge 0$. Ne segue che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \to \infty$ per $t \to \infty$, ma la soglia di crescita di questo semigruppo è $\omega_0 = 0$. Dunque ω_0 non è un minimo.
(2) Sia $X = L^p(a, b)$, $1 \le p < \infty$, e consideriamo il semigruppo delle traslazioni a destra

$$[T(t)f](x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{se } x + t \le b \\ 0 & \text{se } x + t > b, \end{cases} \qquad x \in [a, b], \quad t \ge 0, \quad f \in X.$$

Poiché per $t \ge b - a$ si ha $[T(t)f](x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, risulta $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ per ogni $t \ge b - a$, da cui $\omega_0 = -\infty$.
(3) Sia $X = L^1(\mathbb{R})$ e poniamo per $f \in X$

$$[T(t)f](x) = \begin{cases} 2f(x+t) & \text{se } x \in [-t, 0] \\ f(x+t) & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0.$$

Questo è un semigruppo, anche se la verifica è alquanto delicata: a questo scopo si può scrivere

$$[T(t)f](x) = 2f(x+t)I_{[-t,0]}(x) + f(x+t)I_{[-t,0]^c}(x),$$

da cui, osservato che le funzioni sono definite a meno di insiemi di misura nulla, per ogni $f \in X$ e per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[T(0)f](x) = 2f(x)I_{\{0\}}(x) + f(x)I_{\{0\}^c}(x) = f(x),$$

mentre, per ogni $s, t > 0$,

$$\begin{aligned}
\big[T(t)[T(s)f]\big](x) &= \big[T(t)\left[2f(\cdot+s)I_{[-s,0]} + f(\cdot+s)I_{[-s,0]^c}\right]\big](x) = \\
&= 2\left[2f(\cdot+t+s)I_{[-s,0]}(\cdot+t) + f(\cdot+t+s)I_{[-s,0]^c}(\cdot+t)\right] I_{[-t,0]}(x) + \\
&\quad + \left[2f(\cdot+t+s)I_{[-s,0]}(\cdot+t) + f(\cdot+t+s)I_{[-s,0]^c}(\cdot+t)\right] I_{[-t,0]^c}(x) = \\
&= 4f(x+t+s)I_{[-s-t,-t]}(x)I_{[-t,0]}(x) + 2f(x+t+s)I_{[-s-t,-t]^c}(x)I_{[-t,0]}(x) + \\
&\quad +2f(x+t+s)I_{[-s-t,-t]}(x)I_{[-t,0]^c}(x) + f(x+t+s)I_{[-s-t,-t]^c}(x)I_{[-t,0]^c}(x) = \\
&= 0 + 2f(x+t+s)I_{[-t,0]}(x) + \\
&\quad +2f(x+t+s)I_{[-s-t,-t]}(x) + f(x+t+s)I_{[-s-t,0]^c}(x) = \\
&= 2f(x+t+s)I_{[-s-t,0]}(x) + f(x+t+s)I_{[-s-t,0]^c}(x) = [T(s+t)f](x).
\end{aligned}$$

Questo semigruppo verifica

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le 2 \qquad \forall t \ge 0,$$

ma essendo, come si vede facilmente,

$$[T(t)I_{[0,t]}](x) = 2I_{[-t,0]}(x) \quad \forall t \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

si trova subito che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 2$ per ogni $t \ge 0$. In questo caso dunque il semigruppo è limitato, ossia il suo tipo è $\omega_0 = 0$, e possiamo scegliere $\omega = 0$ in (1.24); tuttavia il semigruppo non è contrattivo, perché non possiamo prendere $M = 1$.

(4) Consideriamo in $X = L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ il gruppo delle traslazioni a destra

$$[T(t)f](x) = f(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0, \quad f \in X,$$

il quale, come sappiamo da (1.18), è fortemente continuo. È immediato verificare che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ per ogni $t \ge 0$ e, di più, per ogni $t \ge 0$ l'applicazione $T(t)$ è un'isometria su X. Dunque il gruppo è limitato e contrattivo. Lo stesso vale nel caso $X = UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Il semigruppo delle traslazioni è limitato e contrattivo nel caso in cui al posto di $\mathbb{R}$ vi è $[0, \infty[$ oppure $[a, b]$.

1.6 Proprietà spettrali del generatore

Come abbiamo visto, la proposizione 1.5.3 stabilisce che il comportamento asintotico di un semigruppo è sempre di tipo esponenziale con certi parametri M, ω. In particolare la soglia di crescita del semigruppo è strettamente legata alle proprietà spettrali del generatore. Andiamo allora ad analizzare quest'ultimo tema, iniziando dal seguente lemma.

Lemma 1.6.1 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo e sia A il suo generatore. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $t > 0$, valgono le relazioni*

$$\begin{aligned} -x + e^{-\lambda t}T(t)x &= (A - \lambda I_X)\int_0^t T(s)x\,ds, \qquad \forall x \in X, \\ -x + e^{-\lambda t}T(t)x &= \int_0^t T(s)(A - \lambda I_X)x\,ds \qquad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Dimostrazione Sia $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$: esso è un semigruppo fortemente continuo, con generatore $A - \lambda I_X$, di dominio $D_X = D(A)$. Le relazioni sopra scritte seguono applicando a $S(\cdot)$ il lemma 1.3.4(iv). $\square$

Il teorema che segue è il risultato centrale relativo al legame fra tipo del semigruppo e proprietà spettrali del generatore. Ricordiamo che $\rho(A)$, l'*insieme risolvente* di A, è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che l'operatore $R(\lambda, A) := (\lambda I_X - A)^{-1}$ esiste (ossia $\lambda I_X - A : D(A) \to X$ è surgettivo) ed è un operatore limitato da X in X (si vedano la definizione A.0.1 e l'osservazione A.0.2).

Teorema 1.6.2 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo e sia A il suo generatore. Siano poi $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Valgono i seguenti fatti:

(i) *Se per un fissato $\lambda \in \mathbb{C}$ esiste l'operatore*

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds, \qquad x \in X,$$

nel senso che l'integrale è assolutamente convergente per ogni $x \in X$, allora $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A) \equiv R(\lambda)$.

(ii) *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, allora $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A) \equiv R(\lambda)$.*

(iii) *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, allora*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}\,.$$

Dunque, per $\lambda \in \rho(A)$ l'operatore risolvente è la trasformata di Laplace del semigruppo:

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds, \qquad x \in X. \tag{1.25}$$

Dimostrazione **(i)** Sia $h > 0$: per ogni $x \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I_X}{h} R(\lambda)x &= \frac{T(h) - I_X}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds = \\ &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}\, T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds = \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds. \end{aligned}$$

Per $h \to 0^+$ si ottiene $R(\lambda)x \in D(A)$ e $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, ossia $(\lambda I_X - A)R(\lambda)x = x$, per ogni $x \in X$. D'altra parte, per $x \in D(A)$ si ha per definizione di $R(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\lambda s}\, T(s)x\, ds &= R(\lambda)x, \\
\lim_{t\to\infty} A \int_0^t e^{\lambda s}\, T(s)x\, ds &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\lambda s}\, T(s)Ax\, ds = R(\lambda)Ax;
\end{aligned}$$

essendo A chiuso, si deduce $R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, ossia $R(\lambda)(\lambda I_X - A)x = x$. Ciò prova che $R(\lambda) = (\lambda I_X - A)^{-1} = R(\lambda, A)$.

(ii)-(iii) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\lambda > \omega$: allora l'integrale che definisce $R(\lambda)$ è assolutamente convergente. Quindi vale la tesi di (i), il che prova (ii). Inoltre, da (ii),

$$\|R(\lambda, A)x\|_X = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\, ds \right\|_X \le M\|x\|_X \int_0^\infty e^{(\omega - \mathrm{Re}\lambda)s}\, ds = \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}\, \|x\|_X\, . \quad \Box$$

Corollario 1.6.3 *Sotto le stesse ipotesi del teorema 1.6.2, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ si ha, per $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}\lambda > \omega$,*

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1}\, e^{-\lambda s}\, T(s)x\, ds, \qquad \|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n}\, .$$

Dimostrazione Proviamo la prima relazione. Dalla formula (A.3) nell'osservazione A.0.8 segue che

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A),$$

ove $R(\lambda, A)$ è dato dalla formula (1.25), nella quale si può derivare sotto il segno di integrale per convergenza dominata. Si ricava così, derivando $n-1$ volte,

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1}\, e^{-\lambda s}\, T(s)x\, ds \qquad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

che è quanto si voleva. Di conseguenza

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1}\, e^{(\omega - \mathrm{Re}\lambda)s}\, ds\, \|x\|_X\, ,$$

e dopo $n-1$ integrazioni per parti si arriva alla seconda relazione. $\Box$

Il seguente lemma illustra una fondamentale proprietà di approssimazione dei risolventi $R(\lambda, A)$.

Lemma 1.6.4 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso con dominio denso e spettro $\sigma(A)$ contenuto nel semipiano $\{z\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < \omega\}$, con $\omega \in \mathbb{R}$. Se*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M \qquad \forall \lambda > \omega,$$

con $M \ge 0$, allora si ha:

(i) *per ogni* $x \in X$, $\lambda R(\lambda, A)x \to x$ *in* X *per* $\lambda \to +\infty$;

(ii) *per ogni* $x \in D(A)$, $\lambda AR(\lambda, A)x \to Ax$ *in* X *per* $\lambda \to +\infty$.

Dimostrazione **(i)** Se $x \in D(A)$, dalla stima segue

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X = \|R(\lambda, A)Ax\|_X \leq \frac{\|Ax\|_X}{\lambda} \to 0 \quad \text{per } \lambda \to \infty.$$

Se $x \in X$, dato che $D(A)$ è denso in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in D(A)$ tale che $\|x - x_\varepsilon\|_X < \varepsilon$. Dunque

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X \leq (M+1)\varepsilon + \|\lambda R(\lambda, A)x_\varepsilon - x_\varepsilon\|_X ,$$

e per $\lambda \to \infty$ si ottiene

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X \leq (M+1)\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

che è la tesi.
(ii) Grazie a (i), si ha per $x \in D(A)$

$$\|\lambda AR(\lambda, A)x - Ax\|_X = \|\lambda R(\lambda, A)Ax - Ax\|_X \to 0 \ \text{ per } \lambda \to \infty. \quad \square$$

Esempi 1.6.5 **(1)** Sia $T(\cdot)$ il semigruppo moltiplicativo $T(t)f = e^{tq}f$ $(t \geq 0,\ f \in X)$ dell'esempio 1.4.1, ove $X = C_0(\Omega)$ oppure $X = L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$, e q è una funzione continua definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Se la parte reale di q è limitata superiormente, allora il semigruppo è fortemente continuo, con generatore $M_q f = qf$, e si ha per $\mathrm{Re}\lambda > \sup_\Omega \mathrm{Re}\, q$,

$$[R(\lambda, M_q)]f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} e^{sq(x)} f(x)\, ds \quad \forall f \in .$$

(2) Sia $T(t)$ il semigruppo delle traslazioni a destra nello spazio $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, oppure $X = UC(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (esempio 1.4.7). Il semigruppo è contrattivo, con generatore $Af = f'$; risulta

$$\left[R\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) f\right](r) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(r+s)\, ds = \int_r^\infty e^{\lambda(t-r)} f(t)\, dt.$$

L'espressione all'ultimo membro, non a caso, è l'unica soluzione dell'equazione differenziale $\lambda g - g' = f$, con la condizione $g(\infty) = 0$.

1.7 Comportamento asintotico, seconda parte

Abbiamo visto esempi di semigruppi limitati, di semigruppi contrattivi e di semigruppi nilpotenti. La questione generale che ci poniamo adesso è: quali condizioni assicurano che un semigruppo abbia all'infinito crescita esponenziale *negativa*?
Per rispondere a questa domanda sono utili alcuni preliminari. Per cominciare, introduciamo, accanto alla soglia di crescita o tipo (definita in (1.23)), altre due quantità basilari.

Definizione 1.7.1 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo su X con generatore A.*

(i) *La* limitazione spettrale *di A è il numero $s(A)$ definito da*

$$s(A) = \sup\{Re\,\lambda : \; \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{1.26}$$

(ii) *Il* raggio spettrale *di $T(t)$ è il numero non negativo (si veda la definizione A.0.5)*

$$r(T(t)) = \sup\{|\mu| : \; \mu \in \sigma(T(t))\} = \lim_{n\to\infty} \|T(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}, \qquad t \geq 0.$$

Osservazioni 1.7.2 **(1)** Non è difficile verificare che

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 \leq r(T(t)) < +\infty \qquad \forall t \geq 0.$$

La prima diseguaglianza è banale. Per la seconda basta usare il teorema 1.6.2(ii), e notare che, se $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$, allora $\lambda \in \rho(A)$, cosicché deve essere $\mathrm{Re}\,\lambda > s(A)$. Infine, la terza disuguaglianza è immediata, essendo $\mathrm{Re}\,\lambda \leq |\lambda|$. L'ultima disuguaglianza è pure evidente, essendo $r(T(t)) \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ per qualche $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$.
(2) È utile osservare che risulta

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} r(T(t)) &= \lim_{n\to\infty} \|T(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T(nt)\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{t\cdot\frac{1}{nt}\ln\|T(nt)\|_{\mathcal{L}(X)}} = e^{t\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nt}\ln\|T(nt)\|_{\mathcal{L}(X)}} = e^{t\omega_0}. \end{aligned}$$

(3) Se $A \in \mathcal{L}(X)$ allora $s(A) = \omega_0$. Ciò è conseguenza del teorema dell'applicazione spettrale (teorema C.0.3): essendo infatti $t \mapsto e^{tA}$ una funzione olomorfa quando $A \in \mathcal{L}(X)$, vale la relazione

$$\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)} \qquad \forall A \in \mathcal{L}(X), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.27}$$

Perciò

$$\begin{aligned} r(e^{tA}) &= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(e^{tA})\} = \sup\{|\mu| : \; \mu \in e^{t\sigma(A)}\} = \\ &= \sup\{|e^{t\lambda}| : \; \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\{e^{t\mathrm{Re}\,\lambda} : \; \lambda \in \sigma(A)\} = \\ &= e^{\sup\{t\mathrm{Re}\,\lambda :\; \lambda\in\sigma(A)\}} = e^{ts(A)}. \end{aligned}$$

Dunque, dato che $r(e^{tA}) = e^{t\omega_0}$, si deduce $s(A) = \omega_0$. Le stesse proprietà, vale a dire la (1.27) e l'uguaglianza fra $s(A)$ e ω_0, valgono (ancora in virtù del teorema C.0.3) per i semigruppi analitici, che analizzeremo nel paragrafo 1.11.

Esistono semigruppi fortemente continui, per i quali vale $s(A) < \omega_0$.

Esempio 1.7.3 Consideriamo lo spazio

$$X = UC([0,\infty[\,) \cap L^\infty(0,\infty) \cap L^1(0,\infty; e^x\,dx),$$

munito della norma naturale

$$\|f\|_X = \sup_{x\geq 0} |f(x)| + \int_0^\infty |f(x)|e^x\,dx, \qquad f \in X,$$

e consideriamo il semigruppo delle traslazioni a destra

$$[T(t)f](x) = f(t+x) \qquad \forall x \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall f \in X.$$

Calcoliamo la norma di $T(t)$ in $\mathcal{L}(X)$ per $t \geq 0$ fissato. Si ha per ogni $f \in X$

$$\|T(t)f\|_X = \sup_{x\geq 0} |f(t+x)| + \int_0^\infty |f(t+x)|e^x\,dx \leq \sup_{x\geq 0} |f(x)| + e^{-t}\int_0^\infty |f(x)|e^x\,dx \leq \|f\|_X;$$

dunque $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. D'altra parte, scegliendo una successione $\{f_n\} \subset X$ tale che $0 \leq f_n \leq n$, $f_n(t) = n$ e $f_n \equiv 0$ in $[0,\infty[\,\setminus\,]t-e^{-n}, t+e^{-n}[$, si ha

$$\sup_{x>0} |f_n(x)| = \sup_{x>0} |[T(t)f_n](x)| = n,$$

mentre

$$\|f_n\|_{L^1(0,\infty;e^x\,dx)} = \int_{t-e^{-n}}^{t+e^{-n}} f_n(x)e^x\,dx \leq 2ne^{-n}e^{t+1} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

$$\|T(t)f_n\|_{L^1(0,\infty;e^x\,dx)} = e^{-t}\int_t^{t+e^{-n}} f_n(s)e^s\,ds \leq ne^{-n}e^{t+1} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|T(t)f_n\|_X}{\|f_n\|_X} = 1,$$

e ciò prova che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ per ogni $t \geq 0$; perciò si ha $\omega_0 = 0$.
Proviamo adesso che il generatore di questo semigruppo è

$$D(A) = \{f \in X : \ f' \in X\}, \qquad Af = f' \quad \forall f \in D(A).$$

Nello spazio più grande $Y = UC([0,\infty[\,) \cap L^\infty(0,\infty)$, il semigruppo $T(\cdot)$ è ben definito, ed è invariante per X; il suo generatore è la derivata prima $Bf = f'$, con dominio $D(B) = \{f \in Y : \ \exists f' \in Y\}$ (si veda l'esempio 1.4.9). Se $f \in D(A) \subset D(B)$, dal teorema 1.6.2(i) e dall'invarianza di $T(\cdot)$ segue, per $\lambda > 0$ sufficientemente grande, che

$$R(\lambda, B)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)f\,dt = R(\lambda, A)f;$$

dunque, per n sufficientemente grande,

$$nBR(n,B)f = [-n + n^2R(n,B)]f = [-n+n^2R(n,A)]f = nAR(n,A)f \qquad \forall f \in D(A),$$

da cui, per $n \to \infty$, grazie al lemma 1.6.4, si ricava

$$Af = Bf \qquad \forall f \in D(A).$$

In altre parole, A è la cosiddetta *parte di B in X*, cioè è tale che

$$(A) = \{f \in X \cap D(B) : \ Bf \in X\}, \qquad Af = Bf \quad \forall f \in D(A). \tag{1.28}$$

Ciò detto, mostriamo che se $\operatorname{Re}\lambda > -1$ risulta $\lambda \in \rho(A)$. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f \, dt \right\|_X = \\
&\quad = \sup_{x \geq 0} \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t+x) \, dt \right| + \int_0^\infty e^x \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t+x) \, dt \right| dx = I + II;
\end{aligned}$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}
I &\leq \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda + 1)t} e^t |f(t+x)| \, dt \leq \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty e^t |f(t+x)| \, dt = \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \int_x^\infty e^{s-x} |f(s)| \, ds \leq \int_0^\infty |f(s)| e^s \, ds \leq \|f\|_X \,,
\end{aligned}$$

e similmente

$$II \leq \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda + 1)t} \int_0^\infty e^{t+x} |f(t+x)| dx \, dt \leq \frac{\|f\|_X}{1 + \operatorname{Re}\lambda} \,.$$

Dunque, per il teorema1.6.2(i), il risolvente $R(\lambda, A)$ esiste per $\operatorname{Re}\lambda > -1$, e di conseguenza deve essere $s(A) \leq -1$. D'altronde, per $\operatorname{Re}\lambda < -1$ la funzione $g(x) = e^{\lambda x}$ appartiene a $D(A)$ e $Ag = \lambda g \in X$, per cui $\lambda \in \sigma(A)$: pertanto $s(A) \geq -1$. In conclusione

$$s(A) = -1 < 0 = \omega_0 \,.$$

Diamo finalmente qualche risposta al quesito che ci siamo posti all'inizio del paragrafo.

Definizione 1.7.4 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo nello spazio di Banach X. Diciamo che:*

(i) $T(\cdot)$ *è* esponenzialmente stabile*, se esistono $M, \delta > 0$ tali che*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\delta t} \qquad \forall t \geq 0;$$

(ii) $T(\cdot)$ *è* uniformemente stabile*, se*

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0;$$

(iii) $T(\cdot)$ *è* fortemente stabile*, se*

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t)x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X;$$

(iv) $T(\cdot)$ *è* debolmente stabile*, se*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(T(t)x) = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall \varphi \in X^*.$$

È evidente che (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv). Ma possiamo dire di più.

Proposizione 1.7.5 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo nello spazio di Banach X. Sono fatti equivalenti:*

(i) *$T(\cdot)$ è esponenzialmente stabile;*

(ii) *$T(\cdot)$ è uniformemente stabile;*

(iii) *Esiste $t_0 > 0$ tale che $\|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$;*

(iv) *Esiste $t_1 > 0$ tale che $r(T(t_1)) < 1$.*

Dimostrazione Ovviamente si ha (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii); inoltre (iii)$\Longrightarrow$(iv) perché, grazie alla proposizione A.0.4, si ha $r(T(t_1)) \leq \|T(t_1)\|_{\mathcal{L}(X)}$. Poi, vale l'implicazione (iv)$\Longrightarrow$(iii), in quanto, per definizione,

$$r(T(t_1)) = \lim_{k\to\infty} \|T(kt_1)\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{k}}.$$

Infine, proviamo che (iii)$\Longrightarrow$(i): poniamo

$$q = \|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1, \qquad B = \sup_{s\in[0,t_0]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\,,$$

e, fissato $t > 0$, scriviamo $t = kt_0 + s$, con $s \in [0, t_0[$. Si ha allora, notando che $t \leq (k+1)t_0$, e scegliendo $\delta = \frac{|\ln q|}{t_0}$ e $M = B/q$,

$$\begin{aligned}
\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(kt_0 + s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(t_0)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Bq^k = \frac{B}{q}\, q^{k+1} = \\
&= M\, e^{(k+1)\ln q} = M\, e^{-(k+1)|\ln q|} = Me^{-(k+1)t_0 \frac{|\ln q|}{t_0}} \leq M\, e^{-\delta t}. \quad \square
\end{aligned}$$

Vi è un'altra condizione equivalente all'esponenziale stabilità:

Proposizione 1.7.6 *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo nello spazio di Banach X. Sono fatti equivalenti:*

(a) *$T(\cdot)$ è esponenzialmente stabile.*

(b) *Esiste $p \in [1, \infty[$ tale che*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^p \, dt < \infty \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione È chiaro che (a) implica (b). Viceversa, vogliamo provare che (b) implica che $T(\cdot)$ è uniformemente stabile. Poniamo, per $n \in \mathbb{N}^+$,

$$T_n : X \to L^p(0,\infty;X), \qquad [T_n x](t) = \begin{cases} T(t)x & \text{se } t \in [0,n] \\ 0 & \text{se } t > n. \end{cases}$$

Allora

$$\|T_n x\|_X^p = \int_0^n \|T(t)x\|_X^p \, dt \le \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^p \, dt =: C_x \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall x \in X,$$

da cui, per il teorema di Banach-Steinhaus,

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,L^p(0,\infty;X))} \le C < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

ed anche, per convergenza monotona,

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^p \, dt \le C^p \|x\|_X^p \qquad \forall x \in X.$$

D'altra parte, essendo $T(\cdot)$ fortemente continuo, per la proposizione 1.5.3 esistono $M \ge 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M e^{\omega t} \qquad \forall t \ge 0,$$

e chiaramente si può supporre $\omega \ge 0$, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. Allora

$$\int_0^t e^{-p\omega s} ds \|T(t)x\|_X^p = \int_0^t e^{-p\omega s} \|T(s)T(t-s)x\|_X^p \, ds \le M^p \int_0^t \|T(t-s)x\|_X^p \, ds,$$

da cui

$$\|T(t)x\|_X^p \le \frac{p\,\omega}{1-e^{-p\omega t}} M^p \int_0^t \|T(\sigma)x\|_X^p \, d\sigma \le \frac{p\,\omega M^p C^p}{1-e^{-p\omega t}} \|x\|_X^p \quad \forall x \in X, \quad \forall t \ge 0.$$

Se $t \ge 1$ ricaviamo per qualche $K > 0$

$$\|T(t)x\|_X^p \le K^p \|x\|_X^p \qquad \forall x \in X,$$

mentre se $t \in [0,1]$ ovviamente si ha

$$\|T(t)x\|_X^p \le M^p e^{\omega p} \|x\|_X^p \qquad \forall x \in X.$$

Perciò esiste $H > 0$ tale che

$$\|T(t)x\|_X \le H \|x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \ge 0.$$

Ne segue

$$t\,\|T(t)x\|_X^p = \int_0^t \|T(s)T(t-s)x\|_X^p \, ds \le H^p \int_0^t \|T(\sigma)x\|_X^P \, d\sigma \le H^p C^p \|x\|_X^p \quad \forall x \in X,$$

e dunque $T(t)$ è uniformemente stabile. Ne segue la tesi per la proposizione 1.7.5. $\square$

Esempi 1.7.7 **(1)** Il semigruppo moltiplicativo dell'esempio 1.6.5 (1)

$$[T(t)f](x) = e^{tq(x)}f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad f \in X,$$

ove $X = C_0(\Omega)$ oppure $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, con $q : \Omega \to \mathbb{C}$ continua e Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, è esponenzialmente stabile nel caso in cui $\sup_{x\in\Omega} \operatorname{Re} q(x) < 0$.
(2) Mostriamo che esistono semigruppi fortemente stabili, ma non uniformemente stabili. Sia $X = L^p(0, \infty)$, e consideriamo il semigruppo delle traslazioni a destra, che è $[T(t)f](s) = f(t+s)$ per ogni $f \in L^p(0, \infty)$ e $t, s \geq 0$. Questo semigruppo è fortemente stabile, perché

$$\|T(t)f\|_X^p = \int_0^\infty |f(t+s)|^p \, ds = \int_t^\infty |f(\sigma)|^p \, d\sigma \to 0 \quad \text{per } t \to \infty$$

qualunque sia $f \in L^p(0, \infty)$; tuttavia il semigruppo non è uniformemente stabile, poiché

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

(2) Mostriamo che esistono semigruppi debolmente stabili, ma non fortemente stabili. Consideriamo ancora il semigruppo delle traslazioni a destra, stavolta nello spazio $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. In questo caso $T(\cdot)$ è un gruppo di isometrie, quindi non può essere fortemente stabile. Proveremo che esso è debolmente stabile. Osservato che $X^* = L^q(\mathbb{R})$ con $q = \frac{p}{p-1}$, siano $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo f_ε e g_ε continue a supporto compatto in $\mathbb{R}$, tali che $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon$, $\|g - g_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Allora si ha per $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} [T(t)f](x)g(x)\, dx \right| \leq \\
&\leq \|T(t)(f - f_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^q(\mathbb{R})} + \|T(t)f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g - g_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} + \left| \int_{\mathbb{R}} [T(t)f_\varepsilon](x)g_\varepsilon(x)\, dx \right| \leq \\
&\leq \varepsilon\|g\|_{L^q(\mathbb{R})} + \varepsilon\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left| \int_{\mathbb{R}} [T(t)f_\varepsilon](x)g_\varepsilon(x)\, dx \right| \leq \\
&\leq \varepsilon\|g\|_{L^q(\mathbb{R})} + \varepsilon[\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon] + \left| \int_{\mathbb{R}} [T(t)f_\varepsilon](x)g_\varepsilon(x)\, dx \right|.
\end{aligned}$$

Adesso osserviamo che se u, v sono due funzioni continue a supporto compatto, risulta

$$\int_{\mathbb{R}} [T(t)u](x)v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(t+x)v(x)\, dx = 0$$

non appena t è sufficientemente grande da disgiungere i due supporti. Dunque

$$\limsup_{t\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} [T(t)f](x)g(x)\, dx \right| \leq \varepsilon \left[\|g\|_{L^q(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \right] + \varepsilon^2 + 0$$

con ε arbitrario: ne segue che $T(\cdot)$ è debolmente stabile.

Il teorema della mappa spettrale

Col nome di "teorema della mappa spettrale" si denota un gruppo di risultati, dei quali il prototipo è il seguente:

Teorema 1.7.8 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora si ha*

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(e^{tA}) \qquad \forall t \geq 0,$$

ove $e^{t\sigma(A)} = \{e^{t\lambda} : \ \lambda \in \sigma(A)\}$.

Dimostrazione Basta scegliere $f(A) = e^{tA}$ nel teorema C.0.3. □
Si noti che se A è generatore di un semigruppo fortemente continuo in X, il teorema 1.7.8 è falso in generale.

Esempio 1.7.9 Si consideri il semigruppo delle traslazioni a destra (esempio 1.5.4(2)) nello spazio

$$X = \{f \in C[0,1] : \ f(1) = 0\}.$$

L'operatore A, grazie al lemma 1.4.10, è la derivata prima: $Af = f'$ sul suo dominio $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : \ f(1) = f'(1) = 0\}$. Si verifica che per ogni $g \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha l'unica soluzione

$$f(x) = \int_x^1 e^{\lambda(x-y)} g(y)\, dy, \quad x \in [0,1],$$

e tale funzione appartiene a $D(A)$. Dunque $\sigma(A) = \emptyset$, cosicché $e^{t\sigma(A)} = \emptyset$; d'altra parte, essendo $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ per ogni $t \geq 0$, si ha $\sigma(T(t)) \neq \emptyset$, salvo che nel caso banale $X = \{0\}$ (si veda il corollario A.0.9). Pertanto non vale la tesi del teorema 1.7.8.

Se il teorema 1.7.8 non vale, ci sono tuttavia dei teoremi più deboli ma comunque significativi ed importanti. Anzitutto:

Proposizione 1.7.10 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subset X \to X$ il generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo in X. Allora*

$$e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t)) \qquad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Fissato $t > 0$, sia $e^{t\lambda} \in \rho(T(t))$ e poniamo $Q = (e^{t\lambda} I_X - T(t))^{-1}$. Consideriamo l'operatore

$$B_\lambda(t)x := \int_0^t e^{(t-s)\lambda} T(s)x\, ds, \qquad x \in X:$$

esso è limitato, come è immediato constatare, e verifica

$$\begin{aligned} (\lambda I_X - A)B_\lambda(t)x &= e^{t\lambda}x - T(t)x \qquad \forall x \in X, \\ B_\lambda(t)(\lambda I_X - A)x &= e^{t\lambda}x - T(t)x \qquad \forall x \in D(A). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Queste relazioni si provano nella stessa maniera usata nella dimostrazione del teorema 1.6.2(i). Infatti si ha per $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I_X}{h}B_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\frac{T(s+h)-T(s)}{h}x\,ds = \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h} e^{(t+h-\sigma)\lambda}T(\sigma)x\,d\sigma - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}T(s)x\,ds\right] = \\ &= \frac{e^{h\lambda}-1}{h}\int_h^t e^{(t-\sigma)\lambda}T(\sigma)x\,d\sigma - \frac{1}{h}\int_0^h e^{(t-s)\lambda}T(s)x\,ds + \frac{e^{h\lambda}}{h}\int_t^{t+h} e^{(t-s)\lambda}T(s)x\,ds;\end{aligned}$$

per $h \to 0^+$, l'ultimo membro converge a $\lambda B_\lambda(t)x - e^{t\lambda}x + T(t)x$, e di conseguenza $B_\lambda(t)x \in D(A)$ e $AB_\lambda(t)x = \lambda B_\lambda(t)x - e^{t\lambda}x + T(t)x$, ossia vale la prima relazione. La seconda segue dalla prima osservando che se $x \in D(A)$ risulta $AB_\lambda(t)x = B_\lambda(t)Ax$. Poiché inoltre Q commuta con $B_\lambda(t)$, si deduce

$$\begin{aligned}&(\lambda I_X - A)B_\lambda(t)Qx = x && \forall x \in X,\\ &QB_\lambda(t)(\lambda I_X - A)x = B_\lambda(t)Q(\lambda I_X - A)x && \forall x \in D(A).\end{aligned}$$

Dunque $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A) = B_\lambda(t)Q$. Abbiamo così mostrato che $\rho(T(t)) \subseteq e^{t\rho(A)}$; passando ai complementari si ottiene $\{0\} \cup e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t))$, e pertanto vale l'inclusione richiesta. $\square$

Osservazione 1.7.11 Se A genera un semigruppo $T(\cdot)$ tale che $s(A) < \omega_0$, come quello dell'esempio 1.7.3 (si vedano la definizione 1.7.1(i) e la (1.23)), allora l'inclusione della proposizione 1.7.10 è stretta. Infatti, $e^{t\sigma(A)} \subseteq \{\lambda : \ |\lambda| \leq e^{ts(A)}\}$, mentre $\sigma(T(t))$ è più grande, visto che il raggio spettrale di $T(t)$ (definizione 1.7.1(ii)) verifica, in virtù dell'osservazione 1.7.2(2), $r(T(t)) = e^{t\omega_0} > e^{ts(A)}$.

Si ottengono risultati più precisi ricordando (osservazione A.0.2) la decomposizione dello spettro $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$. Per ciascuna di queste parti dello spettro vi è un teorema che lega tale parte a quella corrispondente dello spettro di $T(t)$.
Cominciamo con lo spettro puntuale $\sigma_p(A)$.

Teorema 1.7.12 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subset X \to X$ il generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo in X. Allora*

$$e^{t\sigma_p(A)} = \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} \qquad \forall t \geq 0.$$

In particolare, se $e^{t\lambda} \in \sigma_p(T(t))$, esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\lambda + \frac{2\pi i t}{k} \in \sigma_p(A)$.

Dimostrazione Se $\lambda \in \sigma_p(A)$, allora esiste $x_0 \in D(A)$, non nullo, tale che $\lambda x_0 = Ax_0$; dunque, dalla seconda delle (1.29), $e^{t\lambda}x_0 = T(t)x_0$. Quindi $e^{t\lambda} \in \sigma_p(T(t))$; poiché ovviamente $0 \notin e^{t\sigma_p(A)}$, la prima inclusione è provata.
Sia ora $z \in \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\}$: dunque z è della forma $z = e^{t\lambda} \in \sigma_p(T(t))$. Esiste allora $x_0 \neq 0$ tale che $e^{t\lambda}x_0 = T(t)x_0$. Dunque la funzione continua (e non identicamente nulla) $s \mapsto e^{-s\lambda}\,T(s)x_0$ è periodica di periodo t; pertanto almeno uno dei suoi coefficienti di

Fourier rispetto al sistema ortonormale $\{e^{\frac{2\pi ikx}{t}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ deve essere diverso da 0: in altre parole esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$x_k = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\frac{2k\pi is}{t}} e^{-s\lambda}\, T(s)x_0\, ds \neq 0.$$

Proviamo che $\lambda_k = \lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \sigma_p(A)$. Poiché $T(\cdot)$ è un semigruppo fortemente continuo, per la proposizione 1.5.3 esistono $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t}$ per ogni $t \geq 0$. Per ogni $\mu \in \mathbb{C}$, tale che $\operatorname{Re}\mu > \omega$ e $\mu \neq \lambda_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha, ricordando (1.25),

$$\begin{aligned} R(\mu, A)x_0 &= \int_0^\infty e^{-s\mu}\, T(s)x_0\, ds = \sum_{k=0}^\infty \int_{kt}^{(k+1)t} e^{-s\mu}\, T(s)x_0\, ds = \qquad [s = \sigma + nt] \\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{-nt\mu} \int_0^t e^{-\sigma\mu}\, T(\sigma + nt)x_0\, d\sigma; \end{aligned}$$

d'altronde, per periodicità, risulta $T(\sigma + nt)x_0 = e^{nt\lambda}\, T(\sigma)x_0$, da cui

$$R(\mu, A)x_0 = \sum_{k=0}^\infty e^{-nt(\lambda-\mu)} \int_0^t e^{-\sigma\mu}\, T(\sigma)x_0\, d\sigma = \frac{1}{1 - e^{t(\lambda-\mu)}} \int_0^t e^{-\sigma\mu}\, T(\sigma)x_0\, d\sigma. \quad (1.30)$$

L'integrale nel membro destro è chiaramente una funzione olomorfa intera della variabile μ, cosicché $R(\mu, A)$ è estendibile tramite la (1.30) ad una funzione meromorfa con possibili poli nei punti λ_k, $k \in \mathbb{Z}$. Usando (1.30) è facile vedere che

$$\lim_{\mu\to\lambda_k} (\mu - \lambda_k)R(\mu, A)x_0 = x_k :$$

infatti, essendo $e^{t(\lambda-\mu)} = e^{t(\lambda_k-\mu)}$, si ha per $\mu \to \lambda_k$

$$(\mu - \lambda_k)R(\mu, A)x_0 = \frac{\mu - \lambda_k}{1 - e^{t(\lambda_k-\mu)}} \int_0^t e^{-\sigma\mu}\, T(\sigma)x_0\, d\sigma \to \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\sigma\lambda_k}\, T(\sigma)x_0\, d\sigma = x_k\, .$$

Analogamente,

$$\lim_{\mu\to\lambda_k} A(\mu - \lambda_k)R(\mu, A)x_0 = \lambda_k x_k :$$

infatti, per $\mu \to \lambda_k$,

$$\begin{aligned} A(\mu - \lambda_k)R(\mu, A)x_0 &= (A - \mu I_X + \mu I_X)(\mu - \lambda_k)R(\mu, A)x_0 = \\ &= -(\mu - \lambda_k)x_0 + \mu(\mu - \lambda_k)R(\mu, A)x_0 \to 0 + \lambda_k x_k\, . \end{aligned}$$

Essendo A un operatore chiuso, si conclude che $x_k \in D(A)$ e $Ax_k = \lambda_k x_k$, cioè $x_k \in \sigma_p(A)$: quindi $e^{t\lambda} = e^{t\lambda_k} \in e^{t\sigma_p(A)}$. $\square$

Passiamo ora allo spettro residuo $\sigma_r(A)$.

Teorema 1.7.13 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subset X \to X$ il generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo in X. Fissato $t \geq 0$, valgono i seguenti fatti:*

(i) *se* $\lambda \in \sigma_r(A)$ *e nessuno dei numeri* $\lambda_k = \lambda + \frac{2k\pi i}{t}$, $k \in \mathbb{Z}$, *appartiene a* $\sigma_p(A)$, *allora* $e^{t\lambda} \in \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\}$;

(ii) *se* $e^{t\lambda} \in \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\}$, *allora nessuno dei numeri* $\lambda_k = \lambda + \frac{2k\pi i}{t}$, $k \in \mathbb{Z}$, *appartiene a* $\sigma_p(A)$ *e uno di questi,* λ_{k^*}, *appartiene a* $\sigma_r(A)$.

In particolare, detto $N = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda + \frac{2k\pi i}{t} \notin \sigma_p(A)\ \forall k \in \mathbb{N}\}$, *vale l'uguaglianza*

$$e^{t(\sigma_r(A)\cap N)} = \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\}.$$

Dimostrazione **(i)** Sia $\lambda \in \sigma_r(A)$: allora $\lambda I_X - A$ è iniettivo con immagine non densa, e quindi esiste $\varphi^* \in X^* \setminus \{0\}$ tale che $\varphi^*(\lambda x - Ax) = 0$ per ogni $x \in D(A)$. Dalla prima delle (1.29) segue che $\varphi^*(e^{t\lambda}x - T(t)x) = 0$ per ogni $x \in X$, e dunque $e^{t\lambda}I_X - T(t)$ ha immagine non densa. Esso è anche iniettivo, perché altrimenti, per il teorema 1.7.12, esisterebbe $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\lambda_k \in \sigma_p(A)$, contraddicendo la nostra ipotesi. Dunque $e^{t\lambda} \in \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\}$.

(ii) Sia $e^{t\lambda} \in \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\}$. Anzitutto, se qualcuno dei λ_k appartenesse a $\sigma_p(A)$, dal teorema 1.7.12 avremmo $e^{t\lambda} = e^{t\lambda_k} \in \sigma_p(T(t))$: assurdo. Per provare l'ultima affermazione, mostreremo che è impossibile che sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \rho(A) \cup \sigma_c(A)$. Dalle seconda delle (1.29) si ha

$$e^{t\lambda_k}x - T(t)x = B_{\lambda_k}(t)(\lambda_k I_X - A)x \quad \forall x \in D(A), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Essendo $e^{t\lambda_k} = e^{t\lambda}$, il primo membro appartiene ad un fissato sottospazio non denso Y (l'immagine di $e^{t\lambda}I_X - T(t)$, indipendente da k). D'altra parte, se $\lambda_k \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$, l'immagine di $\lambda_k I_X - A$ è densa in X, e quindi l'immagine di $B_{\lambda_k}(t)$ deve essere contenuta in Y per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Scriviamo adesso la serie di Fourier della funzione continua $e^{-s\lambda}T(s)x$, $x \in D(A)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\frac{2k\pi ir}{t}} e^{-r\lambda}\, T(r)x\, ds\right] e^{\frac{2k\pi is}{t}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t} B_{\lambda_k}(t)x\, e^{\frac{2k\pi is}{t}}.$$

Questa serie converge in $L^2(0,t;X)$ a $e^{-s\lambda}T(s)x$, ma la serie delle medie aritmetiche, ossia la serie delle somme di Fejér, converge uniformemente in $[\delta, t-\delta]$ a $e^{-s\lambda}T(s)x$ per ogni $\delta \in]0,t[$. Dato che ogni somma finita appartiene a Y, si ottiene che $T(s)x \in \overline{Y}$ per ogni $x \in D(A)$ e $s > 0$. Per $s \to 0^+$, si deduce che ogni $x \in D(A)$ appartiene a $\overline{Y}$, il che è assurdo perché $D(A)$ è denso in X mentre $\overline{Y}$ non lo è. Dunque, esiste $k^* \in \mathbb{Z}$ tale che $\lambda_{k^*} \in (\rho(A) \cup \sigma_c(A))^c = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$. Ma $\lambda_{k^*} \notin \sigma_p(A)$, come abbiamo visto; quindi $\lambda_{k^*} \in \sigma_r(A)$, come si voleva. □

Concludiamo con lo spettro continuo $\sigma_c(A)$.

Teorema 1.7.14 *Sia* X *uno spazio di Banach e sia* $A : D(A) \subset X \to X$ *il generatore di un semigruppo* $T(\cdot)$ *fortemente continuo in* X. *Fissato* $t \geq 0$, *se* $\lambda \in \sigma_c(A)$ *e nessuno dei numeri* $\lambda_k = \lambda + \frac{2k\pi i}{t}$, $k \in \mathbb{Z}$, *appartiene a* $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, *allora* $e^{t\lambda} \in \sigma_c(T(t)) \setminus \{0\}$.

Dimostrazione Se $\lambda \in \sigma_c(A)$, dalla proposizione 1.7.10 segue che $e^{t\lambda} \in \sigma(T(t))$. D'altra parte, se fosse $e^{t\lambda} \in \sigma_p(T(t))$, per il teorema 1.7.12 esisterebbe un $\lambda_k \in \sigma_p(A)$ contro l'ipotesi. Se invece fosse $e^{t\lambda} \in \sigma_r(T(t))$, per il teorema 1.7.13 esisterebbe un $\lambda_k \in \sigma_r(A)$, nuovamente contro l'ipotesi. Dunque $e^{t\lambda} \in \sigma_c(T(t)) \setminus \{0\}$. □

Osservazione 1.7.15 il viceversa del teorema 1.7.14 è falso, come è abbastanza facile intuire: se nella proposizione 1.7.10 l'inclusione è stretta, e se nei teoremi 1.7.12 e 1.7.13 ci sono uguaglianze, nel caso dello spettro continuo uguaglianze simili non potranno esserci in generale. In effetti, esistono semigruppi $T(\cdot)$ e numeri $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $e^{t\lambda} \in \sigma_c(T(t))$ con tutti i $\lambda_k = \lambda + \frac{2k\pi i}{t}$, $k \in \mathbb{Z}$, appartenenti a $\rho(A)$, come mostra l'esempio 1.7.3. Infatti, come si sa, per questo semigruppo $T(\cdot)$ si ha $s(A) = -1$, $\omega_0 = 0$ e $r(T(t)) = e^{t\omega_0} = 1$ per ogni $t \geq 0$. Dunque $e^{t\sigma(A)} \subseteq B(0, e^{ts(A)}) = B(0, e^{-t})$, mentre dai teoremi 1.7.12 e 1.7.13 segue

$$\sigma_p(T(t)) \subseteq e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\} \subseteq B(0, e^{-t}), \quad \sigma_r(T(t)) \subseteq e^{t(\sigma_r(A) \cap N)} \cup \{0\} \subseteq B(0, e^{-t}).$$

Dunque i punti $e^{t\lambda} \in \sigma(T(t))$ vicini in modulo a 1 devono essere in $\sigma_c(T(t))$ e non possono appartenere a $e^{t\sigma(A)}$. Perciò i corrispondenti λ sono in $\rho(A)$, così come i corrispondenti λ_k, almeno se t è sufficientemente grande.

1.8 Il teorema di Hille-Yosida

Sia X uno spazio di Banach. Quali operatori $A : D(A) \subseteq X \to X$ sono generatori infinitesimali di semigruppi fortemente continui?
Coma sappiamo condizioni necessarie affinché ciò avvenga sono:

- A è un operatore lineare e chiuso (lemma 1.3.4 e teorema 1.3.5(i)),
- $D(A)$ è denso in X (teorema 1.3.5(i)),
- $\rho(A)$ contiene qualche semipiano del tipo $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$, con $\omega \in \mathbb{R}$ (teorema 1.6.2).

Ma queste condizioni non bastano, come mostra il seguente

Esempio 1.8.1 Sia

$$X = \{f \in C_0([0, \infty[\,) : \exists f' \in C[0, 1]\},$$

ove $C_0([0, \infty[\,)$ è l'insieme delle funzioni continue in $[0, \infty[$ che hanno limite nullo per $t \to \infty$, munito della norma

$$\|f\|_X = \sup_{t \geq 0} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

Poniamo

$$D(A) = \{f \in X : f' \in X\}, \qquad Af = f' \quad \forall f \in D(A).$$

Si verifica facilmente che A è chiuso, che $D(A)$ è denso in X, e che $R(\lambda, A)$ esiste per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re}\lambda > 0$, con

$$[R(\lambda, A)f](x) = \int_x^\infty e^{-\lambda(\tau - x)} f(\tau)\, d\tau \quad \forall f \in X, \quad \forall x \geq 0.$$

Se A fosse il generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo, per $f \in D(A)$ e $s, t \geq 0$ potremmo definire la funzione derivabile

$$\xi(\tau) = [T(t-\tau)f](s+\tau), \qquad 0 \leq \tau \leq t,$$

ed avremmo, essendo $Af = f'$,

$$\xi'(\tau) = -[T(t-\tau)Af](s+\tau) + [T(t-\tau)f'](s+\tau) = 0;$$

quindi $\xi(\cdot)$ è costante, da cui

$$[T(t)f](s) = \xi(0) = \xi(t) = f(s+t).$$

Perciò $T(\cdot)$ è il semigruppo delle traslazioni a destra (esempio 1.5.4(2)). Ma questo è impossibile, perché tale semigruppo non manda X in sé: infatti, se $f \in X$ in generale $s \mapsto f(s+t)$ non è derivabile per $s \in]1-t, 1]$.

Il teorema forse più importante dell'intera teoria dei semigruppi è il seguente.

Teorema 1.8.2 (di Hille-Yosida) *Sia X uno spazio di Banach, siano $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$, sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Sono fatti equivalenti:*

(i) *A è generatore di un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$ con*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0;$$

(ii) *A è chiuso, $D(A)$ è denso in X e*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } \lambda > \omega, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(iii) *A è chiuso, $D(A)$ è denso in X e*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione **(i) $\Longrightarrow$ (iii)** Basta ricordare il corollario 1.6.3.
(iii) $\Longrightarrow$ (ii) È evidente.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Questa è l'implicazione importante. Per dimostrarla, introduciamo gli *approssimanti di Yosida*

$$A_n = nAR(n, A) = n^2R(n, A) - nI_X\,, \quad n \in \mathbb{N},\ n > \omega. \tag{1.31}$$

Gli A_n appartengono a $\mathcal{L}(X)$ e, per la commutatività dei risolventi, commutano fra loro. Sia

$$T_n(t) = e^{tA_n}, \qquad t \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n > \omega.$$

I semigruppi $T_n(\cdot)$ sono uniformemente continui, commutano fra loro e convergono per $n \to \infty$. Infatti si ha:

Lemma 1.8.3 *Sotto l'ipotesi (ii) del teorema 1.8.2, esiste il limite*

$$T(t)x := \lim_{n\to\infty} T_n(t)x \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0,$$

ed il limite è uniforme sui limitati di $[0,\infty[$*; inoltre* $T(\cdot)$ *è un semigruppo fortemente continuo con*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Anzitutto, i semigruppi $T_n(\cdot)$ sono equilimitati: infatti, per ogni $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha, in virtù di (1.4),

$$\begin{aligned} \|T_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|e^{-nt}e^{n^2R(n,A)t}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k}R(n,A)^k}{k!}\, t^k \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \\ &\leq M\, e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{n^2 t}{n-\omega} \right)^k = M\, e^{-nt} e^{\frac{n^2 t}{n-\omega}} = M\, e^{\frac{n}{n-\omega}\,t} \leq M\, e^{(\omega+\delta)t}, \end{aligned}$$

con $\delta > 0$ opportuno.
Siano ora $x \in D(A)$ e $t > 0$. Consideriamo la funzione $s \mapsto T_m(t-s)T_n(s)x$ da $[0,t]$ in $\mathcal{L}(X)$: per $n, m \in \mathbb{N} \cap \,]\omega, \infty[$ risulta, visto che A_n commuta con $T_m(s)$,

$$\begin{aligned} T_n(t)x - T_m(t)x &= T_m(0)T_n(t)x - T_m(t)T_n(0)x = \int_0^t \frac{d}{ds} T_m(t-s)T_n(s)x\, ds = \\ &= \int_0^t [-T_m(t-s)T_n(s)A_m x + T_m(t-s)T_n(s)A_n x]\, ds = \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_n(s)[A_n - A_m]x\, ds, \end{aligned}$$

da cui

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\|_X \leq M^2\, t\, e^{(\omega+\delta)t} \|A_n x - A_m x\|_X \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \cap \,]\omega, \infty[\,.$$

Grazie al lemma 1.6.4(ii), $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X. Ne segue che $\{T_n(t)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X, uniformemente rispetto a t in ogni limitato $[0,T] \subset [0,\infty[$, qualunque sia $x \in D(A)$. Per la completezza di X, resta definito il limite

$$T(t)x := \lim_{n\to\infty} T_n(t)x \qquad \forall x \in D(A), \quad \forall t \geq 0,$$

ma in realtà, tale limite esiste per ogni $x \in X$, grazie alla densità di $D(A)$ in X ed alla equilimitatezza dei semigruppi $T_n(\cdot)$. Di conseguenza, $T(\cdot)$ è a sua volta un semigruppo, e verifica

$$\|T(t)x\|_X = \lim_{n\to\infty} \|T_n(t)x\|_X \leq \lim_{n\to\infty} M\, e^{\frac{n}{n-\omega}\,t} \|x\|_X = M\, e^{\omega t}\|x\|_X \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0.$$

Infine, l'uniformità della convergenza sui limitati $[0,T] \subset [0,\infty[$ implica che $t \mapsto T(t)x$ è continua in $[0,\infty[$ per ogni $x \in D(A)$; ma la stima sopra scritta ci dice che ciò accade per ogni $x \in X$, il che significa che $T(\cdot)$ è fortemente continuo. $\square$

Adesso dimostriamo che il generatore infinitesimale del semigruppo $T(\cdot)$ sopra costruito è proprio A. Sia $B : D(B) \subseteq X \to X$ il generatore di $T(\cdot)$: allora B è chiuso, $D(B)$ è denso in X e, in virtù della stima asintotica per $T(\cdot)$, si ha $\rho(B) \supseteq]\omega, \infty[$. Fissati $t_0 > 0$ e $x \in D(A)$, poniamo

$$\xi_n(t) = T_n(t)x, \quad \xi(t) = T(t)x, \quad t \in [0, t_0].$$

Dato che $x \in D(A)$, si ha $\xi_n \to \xi$ uniformemente in $[0, t_0]$ e $\xi_n' = T_n(\cdot)Ax \to T(\cdot)Ax$ uniformemente in $[0, t_0]$; dunque esiste $\xi'(t) = T(t)Ax$ per ogni $t \in [0, t_0]$. In particolare, scelto $t = 0$, per definizione di B si ha

$$Ax = \xi'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Bx \qquad \forall x \in D(A),$$

ossia $D(A) \subseteq D(B)$ e $Bx = Ax$ per ogni $x \in D(A)$.

Viceversa, sia $x \in D(B)$: scelto $\lambda > \omega$, poniamo $y = (\lambda I_X - B)x$ e $z = R(\lambda, A)y$. Allora, essendo $z \in D(A)$, per quanto visto sopra si ha $(\lambda I_X - B)z = (\lambda I_X - A)z = y$, ed anche $(\lambda I_X - B)x = y$. Dato che $\lambda I_X - B$ è iniettivo, si deduce $x = z$: in particolare $x \in D(A)$ e $Bx = \lambda x - y = \lambda z - y = Az = Ax$. Ciò prova che $D(B) \subseteq D(A)$ e $Ax = Bx$ per ogni $x \in D(B)$. La tesi è provata. $\square$

In definitiva, il teorema di Hille-Yosida ci dice che, affinché un operatore lineare chiuso, con dominio denso, generi un semigruppo, occorre e basta che, per qualche $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$, si abbia $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\}$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n} \quad \text{per} \ \ \mathrm{Re}\,\lambda > \omega \ \ \text{e} \ \ n \in \mathbb{N};$$

tuttavia quest'ultima condizione è difficile da verificare, salvo il caso in cui $M = 1$.

1.9 Alcuni esempi di generatori

Vediamo qualche importante esempio di generatore infinitesimale.

La derivata seconda con condizioni di Neumann

Consideriamo l'operatore *derivata seconda* con condizioni al bordo di Neumann:

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in X : \ f'' \in X, \ f'(0) = f'(1) = 0\}, \\ Af = f'' \qquad \forall f \in D(A), \end{cases}$$

con $X = C[0,1]$ oppure $X = L^p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Se $\lambda > 0$, allora $\lambda \in \rho(A)$. Infatti il problema ai limiti (*problema di Neumann*)

$$\begin{cases} \lambda f - f'' = g \in X \\ f'(0) = f'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

contiene un'equazione lineare di secondo grado, la cui soluzione è

$$f(x) = c_1\, e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2\, e^{\sqrt{\lambda}x} + v_1(x)e^{-\sqrt{\lambda}x} + v_2(x)e^{\sqrt{\lambda}x},$$

ove v_1 e v_2 sono funzioni opportune, dipendenti da g, e c_1, c_2 sono costanti tali da soddisfare le condizioni agli estremi. Dunque, per $\lambda > 0$ la soluzione del problema (1.32) esiste unica. Si noti che, al contrario, il punto 0 non appartiene a $\rho(A)$. Infatti ogni funzione costante risolve il problema (1.32) con $\lambda = 0$ e $g = 0$: dunque A non è iniettivo, ossia 0 è autovalore per A.
Vogliamo ora dimostrare una stima per la soluzione f di (1.32) in termini di g, nel caso $\lambda > 0$, di tipo "Hille-Yosida".

Caso $p = 2$. Nello spazio $L^2(0,1)$ la stima è facile. Precisamente, fissata $g \in X$, si moltiplica l'equazione $\lambda f - f'' = g$ per f e la si integra su $[0,1]$:

$$\lambda \int_0^1 |f|^2 dx - \int_0^1 f'' f\, dx = \int_0^1 g f\, dx.$$

Si integra per parti:

$$\lambda \int_0^1 |f|^2 dx + \int_0^1 |f'|^2\, dx = \int_0^1 g f\, dx.$$

A questo punto si maggiora:

$$\lambda \int_0^1 |f|^2 dx + \int_0^1 |f'|^2\, dx \le \|g\|_{L^2(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)}\,, \tag{1.33}$$

e infine si conclude:

$$\lambda \int_0^1 |f|^2 dx \le \|g\|_{L^2(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)}\,,$$

ovvero

$$\lambda \|f\|_{L^2(0,1)} \le \|g\|_{L^2(0,1)}\,.$$

Ciò significa che $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1))} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0.$$

Caso $p \in]2, \infty[$. Nello spazio $L^p(0,1)$, $2 < p < \infty$, il conto è simile: si moltiplica l'equazione per $f|f|^{p-2}$

$$\lambda \int_0^1 |f|^p dx - \int_0^1 f'' f |f|^{p-2}\, dx = \int_0^1 g f |f|^{p-2}\, dx,$$

da cui, integrando per parti,

$$\lambda \int_0^1 |f|^p dx + \int_0^1 f' \left(f'|f|^{p-2} + (p-2) f |f|^{p-3} \frac{f}{|f|} f' \right) dx \le \int_0^1 |g||f|^{p-1}\, dx;$$

usando ora la disuguaglianza di Hölder

$$\lambda \int_0^1 |f|^p dx + (p-1) \int_0^1 |f'|^2 |f|^{p-2} dx \le \|g\|_{L^p(0,1)} \|f\|^{p-1}_{L^p(0,1)}\,. \tag{1.34}$$

In particolare
$$\lambda\|f\|_{L^p(0,1)} \le \|g\|_{L^p(0,1)}\,, \tag{1.35}$$
e dunque $\rho(A) \supseteq]0,\infty[$ e

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\lambda>0, \quad \forall p\in[2,\infty[\,.$$

Caso $p=\infty$**.** Per ogni $g\in L^\infty(0,1)$ si ha anche $g\in L^p(0,1)$, quindi la soluzione f del problema (1.32) verifica la stima (1.35). Tale f, che appartiene a $D(A)$, sta certamente in $L^\infty(0,1)$: quindi, passando al limite per $p\to\infty$ in (1.35), otteniamo

$$\lambda\|f\|_{L^\infty(0,1)} \le \|g\|_{L^\infty(0,1)}\,, \tag{1.36}$$

vale a dire $\rho(A) \supseteq]0,\infty[$ e

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0,1))} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\lambda>0.$$

Caso $p\in]1,2[$**.** Nello spazio $L^p(0,1)$, $1<p<2$, si ragiona per dualità: detto $q=\frac{p}{p-1}\in]2,\infty[$ l'esponente coniugato di p, moltiplicando l'equazione $\lambda f - f'' = g$ per $\varphi\in L^q(0,1)$, si ha
$$\lambda\int_0^1 f\varphi\,dx - \int_0^1 f''\varphi\,dx = \int_0^1 g\varphi\,dx.$$
Scegliendo in particolare $\varphi\in D(A)$ si può integrare per parti:

$$\lambda\int_0^1 f\varphi\,dx - \int_0^1 f\varphi''\,dx = \int_0^1 g\varphi\,dx.$$

Se, ancor più in particolare, si sceglie come φ la soluzione del problema (1.32) con dato $\psi\in L^q(0,1)$, si trova

$$\left|\int_0^1 f\psi\,dx\right| = \left|\int_0^1 f(\lambda\varphi-\varphi'')\,dx\right| = \left|\int_0^1 g\varphi\,dx\right| \le \|g\|_{L^p(0,1)}\|\varphi\|_{L^q(0,1)},$$

e dalla stima (1.35)

$$\left|\int_0^1 f\psi\,dx\right| \le \|g\|_{L^p(0,1)}\|\varphi\|_{L^q(0,1)} \le \frac{1}{\lambda}\|g\|_{L^p(0,1)}\|\psi\|_{L^q(0,1)} \qquad \forall\psi\in L^q(0,1).$$

Ciò implica $f\in[L^q(0,1)]^* = L^p(0,1)$ e

$$\|f\|_{L^p(0,1)} \le \frac{1}{\lambda}\|g\|_{L^p(0,1)}\,.$$

In altre parole, $\rho(A) \supseteq]0,\infty[$ e

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\lambda>0, \quad \forall p\in]1,2[\,.$$

Caso $X = C[0,1]$. Si fissa $g \in C[0,1] \subset L^\infty(0,1)$: la soluzione del problema (1.32) sta in $D(A)$, quindi certamente $f \in C[0,1]$ e vale la stima (1.36), da cui $\rho(A) \supseteq]0,\infty[$ e

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(C[0,1])} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0.$$

Caso $p = 1$. Fissata $g \in L^1(0,1)$, la si approssima con una successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(0,1)$; si considera $f_n = R(\lambda, A)g_n$, la quale appartiene a $L^p(0,1)$, e verifica (1.35). Si ottiene subito, allora, che

$$\|f_n - f_m\|_{L^p(0,1)} \le \frac{1}{\lambda}\|g_n - g_m\|_{L^p(0,1)} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

e per $p \to 1$ si ricava che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^1(0,1)$. Quindi esiste $f \in L^1(0,1)$ tale che $f_n \to f$ in $L^1(0,1)$. Dall'equazione $\lambda f_n - f_n'' = g_n$ segue allora $f_n'' \to \lambda f - g$ in $L^1(0,1)$. Essendo A chiuso, si deduce che $f \in D(A)$ (dunque $f'(0) = f'(1) = 0$) e $Af = f'' = \lambda f - g$. Perciò f risolve il problema (1.32) e la stima segue da quella per le f_n in $L^p(0,1)$, passando al limite per $p \to 1$ e per $n \to \infty$.

In conclusione, il semigruppo generato dalla derivata seconda è limitato e contrattivo in tutti gli spazi $X = L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$, ed in $X = C[0,1]$, con

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}, \qquad \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} \quad \text{per } \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

in virtù dell'implicazione (iii)$\Longrightarrow$(ii) del teorema di Hille-Yosida.

Derivata seconda con condizioni di Dirichlet

Consideriamo ancora l'operatore *derivata seconda*, stavolta con condizioni al bordo di Dirichlet:

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in X : \ f'' \in X, \ f(0) = f(1) = 0\}, \\ Af = f'' \qquad \forall f \in D(A), \end{cases}$$

con $X = L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$, oppure $X = C[0,1]$.

Anche in questo caso, se $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ allora $\lambda \in \rho(A)$: il procedimento è lo stesso, e vale la stima

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} \quad \text{per } \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

Però stavolta il punto 0 appartiene a $\rho(A)$: infatti il problema ai limiti (*problema di Dirichlet*)

$$\begin{cases} \lambda f - f'' = g \in X \\ f(0) = f(1) = 0, \end{cases} \tag{1.37}$$

quando $\lambda = 0$, ha l'unica soluzione

$$f(x) = -\int_0^x (x-t)g(t)\,dt + x\int_0^1 (1-t)g(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

ed inoltre si hanno le seguenti stime fini ma elementari: poiché risulta, come è facile verificare,

$$f(x) = (1-x)\int_0^x t\,g(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)g(t)\,dt,$$

otteniamo, per $p = \infty$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty(0,1)} &\le \sup_{x\in[0,1]}\left[(1-x)\int_0^x t\,dt + x\int_x^1 (1-t)dt\right]\|g\|_{L^\infty(0,1)} = \\
&= \sup_{x\in[0,1]}\left[(1-x)\,\frac{x^2}{2} + x\frac{(1-x)^2}{2}\right]\|g\|_{L^\infty(0,1)} = \frac{1}{8}\|g\|_{L^\infty(0,1)}\,,
\end{aligned}$$

ed anche, per $p = 1$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(0,1)} &= \int_0^1 \left|(1-x)\int_0^x t\,g(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)g(t)\,dt\right| dx \le \\
&\le \int_0^1 \left[(1-x)\int_0^x t|g(t)|\,dt + x\int_x^1 (1-t)|g(t)|\,dt\right] dx = \\
&= \int_0^1 |g(t)|\int_t^1 t(1-x)\,dxdt + \int_0^1 |g(t)|\int_0^t (1-t)x\,dxdt \le \\
&\le \int_0^1 |g(t)|\int_0^1 x(1-x)\,dxdt = \frac{1}{6}\|g\|_{L^1(0,1)}\,.
\end{aligned}$$

A questo punto, un classico teorema di interpolazione, dovuto a Riesz e Thorin, darebbe la stima nel caso $p \in \,]1,\infty[\,$; tuttavia essa segue anche direttamente, modificando di poco quella fatta per $p = 1$:

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(0,1)} &= \int_0^1 \left|(1-x)\int_0^x t\,g(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)g(t)\,dt\right|^p dx \le \\
&\le \int_0^1 \left[x(1-x)\int_0^1 |g(t)|\,dt\right]^p dx \le \\
&\le \int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx\left[\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\right] \le 4^{-p}\|g\|^p_{L^p(0,1)}\,.
\end{aligned}$$

Dunque $0 \in \rho(A)$ e $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))} \le \frac{1}{4}$. Ma, essendo $\rho(A)$ aperto in $\mathbb{C}$, esiste un intorno U di 0 tale che $\lambda \in \rho(A)$ per ogni $\lambda \in U$. Per tali λ vorremmo procurarci una stima più precisa. A questo scopo notiamo che nelle stime (1.33) e (1.34) abbiamo trascurato a primo membro il termine integrale contenente la f': nel caso del problema di Neumann esso non ci dava alcun aiuto, ma nel caso del problema di Dirichlet la situazione cambia. Vale infatti questo lemma:

Lemma 1.9.1 (Disuguaglianza di Poincaré) *Per ogni funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che $f' \in L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$, si ha*

$$\|f\|_{L^p(0,1)} \le p^{-1/p}\|f'\|_{L^p(0,1)}, \qquad \|f\|_{L^\infty(0,1)} \le \|f'\|_{L^\infty(0,1)}\,.$$

Dimostrazione Sia $x \in [0,1]$. Dato che $f(0) = 0$, possiamo scrivere

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t)\,dt \right| \le \left[\int_0^x |f'(t)|^p\,dt \right]^{\frac{1}{p}} x^{\frac{p-1}{p}},$$

da cui, integrando,

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx \le \int_0^x \left[\int_0^x |f'(t)|^p\,dt \right] x^{p-1}\,dx \le \frac{1}{p} \int_0^1 |f'(t)|^p\,dt;$$

ne segue la tesi nel caso $1 < p < \infty$. I casi $p = 1$ e $p = \infty$ sono ancora più facili. $\square$

In realtà questo lemma verrà usato solo nel caso $p = 2$.
Torniamo alla (1.33): dalla disuguaglianza di Poincaré segue

$$(\lambda + 2)\|f\|^2_{L^2(0,1)} \le \|g\|_{L^2(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)}$$

da cui

$$\|f\|_{L^2(0,1)} \le \frac{1}{\lambda + 2} \|g\|_{L^2(0,1)}\,.$$

Nel caso di $p \neq 2$, $p \neq \infty$, bisogna osservare che vale l'identità

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 |f(x)|^{p-2}\,dx = \frac{4}{p^2} \int_0^1 \left[\frac{d}{dx} \left(|f(x)|^{\frac{p}{2}-1} f(x) \right) \right]^2 dx :$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(|f(x)|^{\frac{p}{2}-1} f(x) \right) &= \left(\frac{p}{2} - 1 \right) |f(x)|^{\frac{p}{2}-2} \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x) f(x) + |f(x)|^{\frac{p}{2}-1} f'(x) = \\ &= \frac{p}{2} |f(x)|^{\frac{p}{2}-1} f'(x). \end{aligned}$$

Dunque, nel caso $2 < p < \infty$, da (1.34) e dalla relazione precedente segue

$$\lambda \|f\|^p_{L^p(0,1)} + \frac{4(p-1)}{p^2} \int_0^1 \left[\frac{d}{dx} \left(|f(x)|^{\frac{p}{2}-1} f(x) \right) \right]^2 dx \le \|g\|_{L^p(0,1)} \|f\|^{p-1}_{L^p(0,1)};$$

utilizzando ora la disuguaglianza di Poincaré con esponente 2, si ottiene

$$\left(\lambda + \frac{8(p-1)}{p^2} \right) \|f\|^p_{L^p(0,1)} \le \|g\|_{L^p(0,1)} \|f\|^{p-1}_{L^p(0,1)}\,,$$

ovvero

$$\|f\|_{L^p(0,1)} \le \frac{1}{\lambda + \frac{8(p-1)}{p^2}} \|g\|_{L^p(0,1)}\,, \quad 2 < p < \infty.$$

La stessa stima si ottiene, col metodo di dualità visto nel caso del problema di Neumann, nel caso $1 < p < 2$: detto q l'esponente coniugato di p, essendo $\frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{pq}$, si ottiene

$$\|f\|_{L^p(0,1)} \le \frac{1}{\lambda + \frac{8(q-1)}{q^2}} \|g\|_{L^p(0,1)} = \frac{1}{\lambda + \frac{8(p-1)}{p^2}} \|g\|_{L^p(0,1)}\,, \quad 1 < p < 2.$$

Questa argomentazione non funziona nei casi $p = 1$ e $p = \infty$, perché la costante della maggiorazione tende a 0 per $p \to 1$ e per $p \to \infty$. Torneremo in seguito su questo esempio (esempio 1.12.2).

1.10 Operatori dissipativi

Gli operatori dissipativi hanno grande importanza a causa della loro stretta connessione con i semigruppi contrattivi.

Definizione 1.10.1 *Sia X uno spazio di Banach. Un operatore $A : D(A) \subseteq X \to X$ è* dissipativo *se risulta*

$$\|\lambda x - Ax\|_X \geq \lambda \|x\|_X \qquad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Osservazione 1.10.2 Se X è uno spazio di Hilbert, la condizione di dissipatività equivale alla seguente:

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle_X \leq 0 \qquad \forall x \in D(A). \tag{1.38}$$

Infatti, se $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle_X \leq 0$ per ogni $x \in D(A)$, allora per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\|\lambda x - Ax\|_X^2 = \lambda^2 \|x\|_X^2 + \|Ax\|_X^2 - 2\lambda \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle_X \geq \lambda^2 \|x\|_X^2\,,$$

e dunque A è dissipativo. Viceversa, se A è dissipativo, allora per ogni $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$ dalla definizione 1.10.1 si ricava

$$2\lambda \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle_X = \lambda^2 \|x\|_X^2 + \|Ax\|_X^2 - \|\lambda x - Ax\|_X^2 \leq \|Ax\|_X^2\,,$$

da cui

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle_X \leq \frac{1}{2\lambda} \|Ax\|_X^2 \qquad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in D(A);$$

per $\lambda \to \infty$ si ottiene (1.38).

Osservazione 1.10.3 Possiamo estendere l'osservazione 1.10.2 al caso di uno spazio di Banach X, introducendo l'*applicazione di dualità* $x \mapsto J(x)$, $x \in X$, ove $J(x)$ è l'insieme

$$J(x) = \{\varphi \in X^* : \ \varphi x = \|x\|_X^2 = \|\varphi\|_{X^*}^2\}.$$

Vale allora l'enunciato seguente: se $A : D(A) \subseteq X \to X$ è un operatore lineare, allora A è dissipativo se e solo se per ogni $x \in D(A)$ esiste $\varphi \in J(x)$ tale che

$$\mathrm{Re}\,\varphi(Ax) \leq 0. \tag{1.39}$$

Infatti, fissato $x \in D(A)$ con $\|x\|_X = 1$ e scelto il corrispondente $\varphi \in J(x)$ per cui vale (1.39), si ha per ogni $\lambda > 0$

$$\|\lambda x - Ax\|_X \geq \mathrm{Re}\,\varphi(\lambda x - Ax) = \lambda - \mathrm{Re}\,\varphi(Ax) \geq \lambda > 0.$$

Viceversa, se A è dissipativo, sia $x \in D(A)$ con $\|x\|_X = 1$. Allora

$$\|\lambda x - Ax\|_X \geq \lambda \|x\|_X = \lambda \qquad \forall \lambda > 0.$$

Scegliamo $\varphi_\lambda \in J(\lambda x - Ax)$ e poniamo $\psi_\lambda = \frac{\varphi_\lambda}{\|\varphi_\lambda\|_X^*}$. Si ha $\psi_\lambda(\lambda x - Ax) = \|\lambda x - Ax\|_X$, da cui

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \|\lambda x - Ax\|_X = \psi_\lambda(\lambda x - Ax) = \mathrm{Re}\,\psi_\lambda(\lambda x - Ax) = \\ &= \lambda \mathrm{Re}\,\psi_\lambda(x) - \mathrm{Re}\,\psi_\lambda(Ax) \leq \min\{\lambda - \mathrm{Re}\,\psi_\lambda(Ax), \lambda \mathrm{Re}\,\psi_\lambda(x) + \|Ax\|_X\}. \end{aligned}$$

Ciò implica

$$\operatorname{Re}\psi_\lambda(Ax) \le 0, \qquad 1 - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|_X \le \operatorname{Re}\psi_\lambda(x).$$

Sia ora $\psi \in X^*$ un punto di accumulazione per la topologia debole* relativo alla famiglia $\{\psi_\lambda\}$ per $\lambda \to +\infty$: allora $\|\psi\|_{X^*} \le 1$, $\operatorname{Re}\psi(Ax) \le 0$ e $\operatorname{Re}\psi(x) \ge 1$; ne segue $\|\psi\|_{X^*} = 1 = \|x\|_X$ e $\psi(x) = 1$, ossia $\psi \in J(x)$ e $\operatorname{Re}\psi(Ax) \le 0$. Quindi vale (1.39) con $\varphi = \psi$.

Osservazione 1.10.4 Si noti che se A genera un semigruppo contrattivo $T(\cdot)$ nello spazio di Banach X, allora si ha

$$\operatorname{Re}\varphi(Ax) \le 0 \qquad \forall x \in D(A), \quad \forall \varphi \in J(x).$$

Infatti

$$\operatorname{Re}\varphi(Ax) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\operatorname{Re}[\varphi(T(h)x) - \varphi(x)] \le \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[\|T(h)x\|_X\|\varphi\|_{X^*} - \|x\|_X^2] \le 0.$$

Si capisce dunque che vi è un legame fra operatori dissipativi e semigruppi contrattivi.

La prossima proposizione è un po' tecnica, ma molto importante perché apre la strada alla piena descrizione di questo legame. Indichiamo con $\mathcal{R}(A)$ l'*immagine* di A, ossia

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in X : \exists x \in D(A) : \ Ax = y\}.$$

Proposizione 1.10.5 *Sia X uno spazio di Banach e sia A dissipativo. Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) *$\lambda I_X - A$ è iniettivo per ogni $\lambda > 0$ e*

$$\|(\lambda I_X - A)^{-1}z\|_X \le \frac{1}{\lambda}\|z\|_X \qquad \forall z \in R(\lambda I_X - A);$$

(ii) *$\lambda I_X - A$ è surgettivo per qualche $\lambda > 0$ se e solo se è surgettivo per ogni $\lambda > 0$, e in tal caso $]0,\infty[\subseteq \rho(A)$ (si vedano la definizione A.0.1 e l'osservazione A.0.2);*

(iii) *A è chiuso se e solo se $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ è chiuso in X per qualche $\lambda > 0$, ed anche se e solo se $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ è chiuso in X per ogni $\lambda > 0$;*

(iv) *se $\mathcal{R}(A) \subseteq \overline{D(A)}$ (e questo vale in particolare quando $D(A)$ è denso in X), allora:*

- **(a)** *A è* chiudibile, *ossia esiste un operatore lineare chiuso $\overline{A} : D(\overline{A}) \subseteq X \to X$, con $D(\overline{A}) \supseteq D(A)$, il cui grafico $G(\overline{A})$ coincide con la chiusura $\overline{G(A)}$ del grafico di A in $X \times X$;*
- **(b)** *l'operatore $\overline{A}$ è dissipativo;*
- **(c)** *risulta $\mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A}) = \overline{\mathcal{R}(\lambda I_X - A)}$ per ogni $\lambda > 0$.*

L'operatore $\overline{A}$ definito in (iv)(a) è detto *chiusura* di A: esso costituisce la minima estensione chiusa di A.

Dimostrazione **(i)** È una immediata riformulazione della definizione di dissipatività.
(ii) Sia $\lambda_0 > 0$ tale che $\lambda_0 I_X - A$ sia surgettivo. Allora, per (i), risulta $\lambda_0 \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda_0}$. Poiché si ha (si veda la dimostrazione della proposizione A.0.7)

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R(\lambda_0, A)]^{n+1} \quad \text{per} \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

ciò vale in particolare per $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$, ossia per ogni $\lambda \in]0, 2\lambda_0[$. Applicamdo (i), si ha allora $\lambda \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ per ogni $\lambda \in]0, 2\lambda_0[$, e in particolare $\lambda I_X - A$ è surgettivo per $\lambda \in]0, 2\lambda_0[$. Iterando questo ragionamento, si ottengono le stesse proprietà per $\lambda \in]0, 4\lambda_0[$, poi per $\lambda \in]0, 8\lambda_0[$, eccetera. In definitiva, $]0, \infty[\subseteq \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ per ogni $\lambda > 0$; in particolare $\lambda I_X - A$ è surgettivo per ogni $\lambda > 0$.
(iii) Sia A chiuso. Allora $\lambda I_X - A$ è chiuso per ogni $\lambda > 0$: infatti, se $\{x_n\} \subseteq D(A)$ e $x_n \to x$ in X, $\lambda x_n - Ax_n \to y$ in X, allora $Ax_n \to \lambda x - y$, da cui, essendo A chiuso, $x \in D(A)$ e $Ax = \lambda x - y$, ossia $\lambda x - Ax = y$. Dunque anche $(\lambda I_X - A)^{-1} : \mathcal{R}(\lambda I_X - A) \to D(A)$ è chiuso, dato che ha lo stesso grafico di $\lambda I_X - A$ (a parte l'inversione degli assi), ed inoltre è un operatore limitato. Da questi fatti è immediato verificare che il suo dominio $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ è chiuso. Il viceversa è assolutamente uguale.

Prima di dimostrare (iv), premettiamo un lemma sugli operatori chiudibili.

Lemma 1.10.6 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Allora A è chiudibile se e solo se vale la seguente proprietà:*

$$\{x_n\} \subseteq D(A), \quad x_n \to 0 \text{ in } X, \quad Ax_n \to y \text{ in } X, \quad \Longrightarrow \quad y = 0. \tag{1.40}$$

Dimostrazione Se A è chiudibile, sia $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset X \to X$ l'operatore chiuso che estende A, ossia la chiusura di A. Per A vale la (1.40) in quanto, se $\{x_n\} \subseteq D(A)$, se $x_n \to 0$ e se $Ax_n \to y$, allora si ha $\{x_n\} \subseteq D(\overline{A})$, $x_n \to 0$ e $\overline{A}x_n \to y$ e dunque, dato che $\overline{A}$ è chiuso, risulta $0 = \overline{A}0 = y$, ossia $y = 0$.

Viceversa, supponiamo che per A valga la (1.40). Mostriamo anzitutto che $\overline{G(A)}$, la chiusura di $G(A)$ in $X \times X$, è un grafico, ossia esiste un sottospazio $D \supseteq D(A)$ tale che

$$\forall x \in D \quad \exists!\, y_x \in X : \quad (x, y_x) \in \overline{G(A)}. \tag{1.41}$$

In effetti, se $x \in D(A)$ allora necessariamente $y_x = Ax$. Se invece $x \in D \setminus D(A)$, e se per assurdo esistessero $y, z \in X$, distinti, tali che $(x, y), (x, z) \in \overline{G(A)}$, allora per densità potremmo scegliere due successioni $\{(x_n, Ax_n)\}$ e $\{(\xi_n, A\xi_n)\}$ in $G(A)$, tali che $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ e $(\xi_n, A\xi_n) \to (x, z)$ in $X \times X$. Ne seguirebbe $x_n - \xi_n \in D(A)$, $x_n - \xi_n \to 0$ in X e $A(x_n - \xi_n) \to y - z$ in X, da cui, per (1.40), $y = z$: assurdo. Perciò $\overline{G(A)}$ è il grafico di un operatore $\overline{A} : D(\overline{A}) = D \subseteq X \to X$ la cui definizione è obbligata: $\overline{A}x = y_x$ per ogni $x \in D$ e, in particolare, $\overline{A}x = Ax$ per ogni $x \in D(A)$, ossia $\overline{A}$ estende A. Resta da provare che $\overline{A}$ è un operatore chiuso: per questo basta osservare che $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$, il che è vero per costruzione. $\square$

(iv)-(a) Per provare che A è chiudibile, utilizziamo il lemma 1.10.6. Sia $\{x_n\} \subseteq D(A)$ tale che $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$ in X. La definizione di dissipatività applicata al vettore $\lambda x_n + w$ fornisce

$$\|\lambda(\lambda I_X - A)x_n + (\lambda I_X - A)w\|_X \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|_X \quad \forall w \in D(A),\ \forall \lambda > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per $n \to \infty$ otteniamo

$$\| - \lambda y + (\lambda I_X - A)w\|_X \geq \lambda \|w\|_X \qquad \forall w \in D(A), \quad \forall \lambda > 0;$$

dividendo per λ e mandando $\lambda \to +\infty$, si ricava

$$\| - y + w\|_X \geq \|w\|_X \qquad \forall w \in D(A).$$

Dall'ipotesi $\mathcal{R}(A) \subseteq \overline{D(A)}$ segue che si può scegliere $\{w_n\} \in D(A)$ tale che $w_n \to y$ in X: la relazione precedente, con w sostituito da w_n, implica allora, per $n \to \infty$,

$$0 \geq \|y\|_X\,,$$

cioè $y = 0$. Dunque A è chiudibile.
(iv)-(b) Sia $\overline{A}$ la chiusura di A, dunque tale che $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$; proviamo che $\overline{A}$ è dissipativo. Se $x \in D(\overline{A})$, come abbiamo visto in precedenza esiste $\{x_n\} \subseteq D(A)$ tale che $(x_n, Ax_n) \to (x, \overline{A}x)$ in $X \times X$. Quindi $x_n \to x$ in X e $Ax_n \to \overline{A}x$ in X. Essendo A dissipativo, possiamo scrivere

$$\|\lambda x_n - Ax_n\|_X \geq \lambda\|x_n\|_X \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda > 0;$$

per $n \to \infty$ segue, con $x \in D(\overline{A})$ arbitrario,

$$\|\lambda x - \overline{A}x\|_X \geq \lambda\|x\|_X \qquad \forall \lambda > 0.$$

Dunque $\overline{A}$ è dissipativo.
(iv)-(c) Dal fatto che $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$, per ogni $\lambda > 0$ segue che $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ è denso in $\mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A})$, il quale è chiuso in X per (iii), dato che $\overline{A}$ è chiuso. Quindi $\overline{\mathcal{R}(\lambda I_X - A)} = \mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A})$ per ogni $\lambda > 0$. $\square$

Esempio 1.10.7 Nello spazio $X = C[0,1]$ consideriamo l'operatore A definito da

$$\begin{cases} D(A) = C^1[0,1] \\ Af = f'(0)\mathbb{1} \quad \forall f \in D(A), \end{cases}$$

ove $\mathbb{1}$ è la funzione costante $\mathbb{1}(x) = 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Il grafico di f è $\{(f, f'(0)\mathbb{1}) : f \in C^1[0,1]\}$. Scegliendo una successione $\{f_n\} \subset C^1[0,1]$ tale che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$ e $f_n'(0) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si trova che

$$f_n \to 0 \quad \text{in } X, \qquad Af_n = \mathbb{1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque l'operatore A non è chiudibile.

Veniamo al legame con i semigruppi contrattivi.

Proposizione 1.10.8 *Sia X uno spazio di Banach, sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatore di un semigruppo contrattivo. Allora A è chiuso e dissipativo, con $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$.*

Dimostrazione Essendo un generatore di semigruppo, A è chiuso (corollario 1.3.8). Essendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, dal teorema di Hille-Yosida (teorema 1.8.2) segue che

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0,$$

stima che equivale alla dissipatività ed implica l'ultima condizione. $\square$

Teorema 1.10.9 (di Lumer-Phillips) *Sia X uno spazio di Banach, sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare dissipativo con dominio $D(A)$ denso in X. Sono fatti equivalenti:*

(i) *A è chiudibile e la sua estensione chiusa minimale $\overline{A}$ genera un semigruppo contrattivo;*

(ii) *$\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ è denso in X per qualche $\lambda > 0$;*

(iii) *$\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ è denso in X per ogni $\lambda > 0$.*

Dimostrazione **(i)$\Longrightarrow$(iii)** Per il teorema di Hille-Yosida si ha $\mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A}) = X$; ne segue la tesi, essendo (proposizione 1.10.5(iv)(c)) $\overline{\mathcal{R}(\lambda I_X - A)} = \mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A})$.
(iii)$\Longrightarrow$(ii) Evidente.
(ii)$\Longrightarrow$(i) A è dissipativo con dominio denso, ed esiste $\lambda > 0$ tale che $\mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A}) = \overline{\mathcal{R}(\lambda I_X - A)} = X$: dunque, per la proposizione 1.10.5(iv), A è chiudibile, la sua estensione $\overline{A}$ è dissipativa, con $\overline{D(\overline{A})} = X$ e $\mathcal{R}(\lambda I_X - \overline{A}) = X$. Quindi, per la proposizione 1.10.5(i) ed il teorema di Hille-Yosida, $\overline{A}$ genera un semigruppo contrattivo. $\square$

Riassumendo: se A genera un semigruppo contrattivo, allora A è chiuso e dissipativo per la proposizione 1.10.8; se A è chiuso e dissipativo, con $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ denso per almeno un $\lambda > 0$, allora per il teorema 1.10.9(i) A genera un semigruppo contrattivo. Tuttavia, in generale, gli operatori dissipativi sono solo chiudibili e $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ può essere non denso e non chiuso per ciascun $\lambda > 0$.

Corollario 1.10.10 *Sia X uno spazio di Banach, sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare con dominio denso. Se A ed A^* sono dissipativi in X ed in X^* rispettivamente, allora la chiusura $\overline{A}$ di A genera un semigruppo contrattivo in X.*

Dimostrazione In virtù del teorema di Lumer-Phillips (teorema 1.10.9(ii)), basta mostrare che $\mathcal{R}(I_X - A)$ è denso in X. Se così non fosse, per il teorema di Hahn-Banach esisterebbe $T \in X^* \setminus \{0\}$ tale che

$$T(I_X - A)x = 0 \qquad \forall x \in D(A).$$

La relazione $Tx = TAx$, valida per ogni $x \in D(A)$, mostra che $Tx \in D(A^*)$ e che $A^*Tx = Tx$ per ogni $x \in D(A)$, cioè $A^*T = T$. Dunque, $I_{X^*} - A^*$ non è iniettivo, il che, per la proposizione 1.10.5(i), contraddice l'ipotesi della dissipatività di $A^* : D(A^*) \subseteq X^* \to X^*$. $\square$

Corollario 1.10.11 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore dissipativo. Se esiste $\lambda > 0$ tale che $\lambda I_X - A$ è surgettivo, allora il dominio di A è denso in X ed A genera un semigruppo contrattivo.*

Dimostrazione Per la proposizione 1.10.5(ii), $\lambda I_X - A$ è surgettivo per ogni $\lambda > 0$ e $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$. Quindi, fissato $x \in X$, possiamo definire gli approssimanti di Yosida $x_n = nR(n, A)x$. Essendo A dissipativo, si ha $\|R(n, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{n}$ e quindi la successione $\{x_n\} \subset D(A)$ è limitata in X. Dalla riflessività di X segue che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ debolmente convergente ad un elemento $z \in \overline{D(A)}$ (poiché $\overline{D(A)}$ è debolmente chiuso, essendo un sottospazio). Dunque

$$R(1, A)x_{n_k} = n_k R(n_k, A)R(1, A)x \rightharpoonup R(1, A)z,$$

e d'altra parte

$$R(1, A)x_{n_k} = R(1, A)x + R(n_k, A)AR(1, A)x \to R(1, A)x + 0 = R(1, A)x;$$

perciò $R(1, A)x = R(1, A)z$ e, per iniettività, $x = z \in \overline{D(A)}$. Ciò mostra che $\overline{D(A)} = X$. Il fatto che A generi un semigruppo contrattivo segue dal teorema di Hille-Yosida (teorema 1.8.2). $\square$

Esempio 1.10.12 Sia $X = C[0, 1]$ e poniamo

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : \ f(0) = 0\} \\ Af = -f' \quad \forall f \in D(A), \end{cases}$$

L'operatore A è chiuso, il dominio non è denso in X, ed A è dissipativo poiché per ogni $f \in X$ e $\lambda > 0$ l'equazione $\lambda u - Au = f$ ha l'unica soluzione

$$[R(\lambda, A)f](x) = \int_0^x e^{-\lambda(x-s)} f(s)\, ds, \quad x \in [0, 1],$$

e vale la stima

$$\|R(\lambda, A)f\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_X \qquad \forall f \in X, \quad \forall \lambda > 0,$$

che implica la dissipatività.
Poniamo $X_0 = \overline{D(A)} = \{f \in C[0, 1] : \ f(0) = 0\}$, e definiamo la seguente restrizione A_0 di A:

$$\begin{cases} D(A_0) = \{f \in D(A) : Af \in X_0\} = \{f \in C^1[0, 1] : \ f(0) = f'(0) = 0\} \\ A_0 f = -f' \quad \forall f \in D(A_0), \end{cases}$$

Si dice che A_0 è la *parte di A in X_0* (si veda la (1.28)). Allora A_0 è chiuso ed ha dominio denso nello spazio X_0, ed è ancora dissipativo: quindi, per il teorema di Lumer-Phillips (teorema 1.10.9), A_0 genera un semigruppo contrattivo $T_0(\cdot)$ in X_0. Come sappiamo dall'esempio 1.4.9, tale semigruppo è dato da

$$[T_0(t)f](x) = \begin{cases} f(x - t) & \text{se } t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < t, \end{cases} \qquad x \in [0, 1], \quad t \geq 0.$$

Questo semigruppo non è estendibile a X, perché in generale se $f \in C[0, 1]$ la funzione $T_0(t)f$ non è continua nel punto $x = t$.

Nel caso hilbertiano gli enunciati si semplificano. Anzitutto si ha

Proposizione 1.10.13 *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $\omega \in \mathbb{R}$ e sia $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operatore lineare autoaggiunto. Allora A genera un semigruppo fortemente continuo (ed autoaggiunto) $T(\cdot)$ con $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le e^{\omega t}$ per ogni $t \ge 0$ se e solo se A è chiuso e*

$$\langle Ax, x\rangle_H \le \omega \|x\|_H^2 \qquad \forall x \in D(A). \tag{1.42}$$

Dimostrazione Se A è chiuso e vale (1.42), allora

$$\mathrm{Re}\langle (A - \omega I_H)x, x\rangle_H = \langle Ax, x\rangle_X - \omega\|x\|_H^2 \le 0,$$

quindi $A - \omega I_H$ è dissipativo, chiuso, autoaggiunto. Per il corollario 1.10.10, $A - \omega I_H$ genera un semigruppo contrattivo autoaggiunto $S(t)$; ne segue che A genera il semigruppo fortemente continuo e autoaggiunto $T(t) = e^{\omega t}S(t)$, che verifica $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le e^{\omega t}$ per ogni $t \ge 0$.
Viceversa, sia A autoaggiunto e generatore di un semigruppo fortemente continuo e autoaggiunto $T(\cdot)$ tale che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le e^{\omega t}$ per ogni $t \ge 0$. Allora per ogni $x \in D(A)$ si ha

$$\langle Ax, x\rangle_H = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\langle T(h)x - x, x\rangle_X \le \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[e^{\omega h}\|x\|_H^2 - \|x\|_H^2] = \omega\|x\|_H^2 . \quad \square$$

Nel caso hilbertiano anche i corollari 1.10.10 e 1.10.11 sono integrati da un risultato più preciso. Si ha infatti:

Teorema 1.10.14 (di Stone) *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operatore lineare con dominio denso. Allora A è il generatore di un gruppo unitario $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ se e solo se $A^* = -A$.*

Naturalmente un *gruppo unitario* è una famiglia $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(H)$ tale che $T(t)^* = T(-t) = T(t)^{-1}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Dimostrazione Se A genera un gruppo unitario $\{T(\cdot)\}$, allora si vede immediatamente che A^* genera il gruppo $T(t)^* = T(-t)$, e dunque, per definizione di generatore infinitesimale (definizione 1.3.2), si ha $A^* = -A$.
Viceversa, sia $A^* = -A$. Per ogni $x \in D(A) = D(A^*)$ si ha

$$\langle Ax, x\rangle_H = \langle x, A^*x\rangle_H = -\langle x, Ax\rangle_H = -\overline{\langle Ax, x\rangle_H}\,,$$

e quindi il numero $\langle Ax, x\rangle_H$ è immaginario puro per ogni $x \in D(A)$. Dunque tanto A quanto $-A$ sono dissipativi. Siccome $\overline{D(A)} = H$, A è chiudibile per la proposizione 1.10.5(iv). Per il corollario 1.10.10, le chiusure $\pm\overline{A}$ di $\pm A$ generano due semigruppi contrattivi $T_+(\cdot)$, $T_-(\cdot)$; poiché $\overline{A}^* = -\overline{A}$, si verifica che

$$\frac{d}{dt}T_+(t)T_-(t)x = 0 \quad \forall x \in D(A), \quad \forall t \ge 0,$$

da cui, per densità e per il fatto che $T_+(0)T_-(0) = I_X$, segue che $T_+(t) = T_-(t)^{-1}$ per ogni $t \ge 0$. Similmente, essendo

$$\frac{d}{dt}T_-(t)^{-1}T_+(t)^*x = 0 \quad \forall x \in D(A) = D(A^*), \quad \forall t \ge 0,$$

si trova $T_+(t)^* = T_-(t)$ per ogni $t \geq 0$. Perciò $T_+(t)^{-1} = T_-(t) = T_+(t)^*$ per ogni $t \geq 0$, e in definitiva

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{se } t \geq 0 \\ T_-(t) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

è un gruppo contrattivo con $T(t)^{-1} = T(-t) = T(t)^*$ per ogni $t \in \mathbb{R}$: dunque $\{T(\cdot)\}$ è un gruppo unitario. $\square$

Esempi 1.10.15 (1) Consideriamo l'operatore di moltiplicazione $A = M_q$ (esempio 1.4.1) nello spazio $X = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Si ha $D(M_q) = \{f \in X : qf \in X\}$, ove $q : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione misurabile assegnata, e $M_q f = qf$. Si ha allora $M_q^* g = \overline{q} g$ per ogni $g \in D(A^*)$; quindi M_q è autoaggiunto se e solo se $q = \overline{q}$, vale a dire $q : \Omega \to \mathbb{R}$. In tal caso risulta $M_{iq}^* = M_{\overline{iq}} = M_{-iq} = -M_{iq}$. Perciò il semigruppo $T(t)f = e^{itq} f$ si estende ad un gruppo unitario, con $T(t) = T(t)^* = T(t)^{-1}$.
Supponiamo anche che esista $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $q(x) \leq \omega$ per q.o. $x \in \Omega$. Allora

$$\langle M_q f, f \rangle_X = \int_\omega q(x)|f(x)|^2 \, dx \leq \omega \|f\|_X^2 \qquad \forall f \in D(M_q),$$

quindi $M_q - \omega I_X$ è dissipativo.
(2) Sia $X = C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \ f(x) \to 0 \text{ per } |x| \to \infty\}$, e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 con $\|\nabla F\|_\infty < \infty$ (dunque F è globalmente lipschitziana). Consideriamo il sistema dinamico n-dimensionale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = F(\phi(t,x)), & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \phi(0,x) = x, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

del quale $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è il *flusso*. Definiamo

$$[T(t)f](x) = f(\phi(t,x)), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in X.$$

La famiglia $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo in virtù delle proprietà di $\phi(t,x)$:

$$[T(t+\tau)f](\cdot) = f(\phi(t+\tau,\cdot)) = f(\phi(t,\phi(\tau,\cdot))) = [T(t)f](\phi(\tau,\cdot)) = T(t)T(\tau)f(\cdot)$$

per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}$. Si noti che tale gruppo è contrattivo, visto che, ovviamente,

$$\|T(t)f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in X, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.43}$$

Vogliamo dimostrare che esso è fortemente continuo, cioè che

$$\lim_{t \to 0} \|T(t)f - f\|_\infty = 0 \qquad \forall f \in X. \tag{1.44}$$

Per provare la (1.44) è sufficiente, grazie a (1.43), considerare $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap X$. Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che $|f(y)| \leq \varepsilon$ per ogni $y \in \overline{K^c}$: allora per uniforme continuità esiste $\delta > 0$ per cui risulta

$$|\phi(t,x) - \phi(\tau,x)|_n < \varepsilon \qquad \forall x \in K, \quad \forall t, \tau \in [-\delta, \delta]. \tag{1.45}$$

Andiamo a stimare la quantità $|f(\phi(t,x)) - f(x)|$ per $x \in \mathbb{R}^n$ e $|t| \leq \delta$. Distinguiamo tre casi: (a) $x \in K$, (b) $x \in K^c$ e $\phi(t,x) \in \overline{K^c}$, (c) $x \in K^c$ e $\phi(t,x) \in K$.
Osserviamo che

$$|f(\phi(t,x)) - f(x)| = \left| \int_0^t \langle \nabla f(\phi(s,x)), F(\phi(s,x)) \rangle_n \, ds \right|. \tag{1.46}$$

Nel caso (a), poiché l'insieme $\phi([-\delta,\delta] \times K)$ è compatto, risulta

$$|f(\phi(t,x)) - f(x)| \leq \sup_{y \in \phi([-\delta,\delta]\times K)} |\langle \nabla f(y), F(y) \rangle_n||t| \leq C_\delta |t|.$$

Nel caso (b), per definizione di K si ha

$$|f(\phi(t,x)) - f(x)| \leq |f(\phi(t,x))| + |f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Infine, nel caso (c), per continuità, esiste τ tale che $0 < |\tau| < |t|$ e $\phi(\tau,x) \in \partial K$; possiamo allora scrivere, applicando i casi (a) e (b),

$$|f(\phi(t,x)) - f(x)| \leq |f(\phi(t,x)) - f(\phi(\tau,x))| + |f(\phi(\tau,x)) - f(x)| \leq C_\delta |t| + 2\varepsilon.$$

Pertanto

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(\phi(t,x)) - f(x)| \leq C_\delta |t| + 2\varepsilon \qquad \forall t \in [-\delta,\delta],$$

cosicché, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t \to 0} |f(\phi(t,x)) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ciò prova la (1.44).
Il generatore del gruppo $T(\cdot)$ è l'operatore A dato da

$$Af(x) = \langle \nabla f(x), F(x) \rangle_n \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall f \in D(A), \tag{1.47}$$

ove

$$D(A) = \{ f \in C^1(\mathbb{R}^n) : \ f \in X, \ \langle \nabla f, F \rangle_n \in X \}.$$

Per dimostrarlo, fissiamo dapprima $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ (lo spazio delle funzioni di classe C^1 a supporto compatto); per uniforme continuità si ha per $x \in K$ e $|t| < \delta$:

$$\left| \frac{T(t)f - f}{t}(x) - \langle \nabla f(x), F(x) \rangle_n \right| = \left| \frac{f(\phi(t,x)) - f(x)}{t} - \langle \nabla f(x), F(x) \rangle_n \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{t} \int_0^t \left[\langle \nabla f(\phi(s,x)), F(\phi(s,x)) \rangle_n - \langle \nabla f(x), F(x) \rangle_n \right] ds \right| \leq \varepsilon.$$

Poiché $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $C_0(\mathbb{R}^n)$ ed è invariante per $T(t)$, esso è un nocciolo (definizione 1.3.13) per A; ne segue che la stessa proprietà vale per ogni $f \in D(A)$.
Notiamo che A è dissipativo. Sia infatti $f \in D(A)$ e sia x_0 un punto di massimo per $|f|^2$; allora, scelto $\varphi = \overline{f(x_0)}\delta_{x_0}$, si ha $\varphi \in X^*$, con $\|\varphi\|_{X^*} = |f(x_0)|$, ed anzi φ

appartiene all'insieme $J(f)$ (applicazione di dualità: si veda l'osservazione 1.10.3), dato che $|\varphi(f)| = |f(x_0)|^2 = \|f\|_\infty^2 = \|\varphi\|_{X^*}^2$. Inoltre, essendo $\nabla f(x_0) = 0$,

$$\mathrm{Re}\ \varphi(Af) = \mathrm{Re}\,\langle \nabla f(x_0), F(x_0)\rangle_n \overline{f(x_0)} = 0.$$

Poiché $\overline{D(A)} = X$, l'operatore A è chiudibile per la proposizione 1.10.5(iv). Se $g \in X$ e $\lambda = 1$, vale l'identità $f - Af = g$ se e solo se

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-t}[T(t)g](x)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} g(\phi(t,x))\,dt = \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-t}[f(\phi(t,x)) - \langle \nabla f(\phi(t,x)), F(\phi(t,x))\rangle_n], dt = \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-t}\left[f(\phi(t,x)) - \frac{\partial}{\partial t} f(\phi(t,x))\right] dt = \text{(integrando per parti)} \\
&\quad = f(x) - \int_0^\infty e^{-t} f(\phi(t,x))\,dt + \int_0^\infty e^{-t} f(\phi(t,x))\,dt = f(x).
\end{aligned}$$

Dunque $1 \in \rho(A)$ e $[R(1,A)g] = \int_0^\infty e^{-t}[T(t)g](x)\,dt$. In particolare, A è chiuso (proposizione 1.10.5(iii)), e come abbiamo visto genera un gruppo contrattivo.

(3) Nello spazio $X = C[-1,0]$, fissati $a \leq 0$ e $L \in X^*$ (dunque L è una misura con segno, finita), poniamo

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in C^1[-1,0] :\ f'(0) = af(0) + Lf\} \\ Af = f' \quad \forall f \in D(A). \end{cases} \tag{1.48}$$

Naturalmente, $Lf = \int_{-1}^0 f(x)dL(x)$ per ogni $f \in X$, e $\|L\|_{X^*} = |L|([-1,0])$, essendo $|L|$ la variazione totale di L. È immediato verificare che A è chiuso e che $D(A)$ è denso in X. Mostriamo che $A - \|L\|_{X^*} I_X$ è dissipativo. Fissata $f \in D(A)$, scegliamo nuovamente $\varphi = \overline{f(x_0)}\delta_{x_0}$, dove x_0 è un punto di massimo per $|f|^2$. Come sappiamo, risulta $\varphi \in J(f)$.
Se $x_0 \in]-1,0[$, allora $f'(x_0) = 0$, da cui

$$\mathrm{Re}\,\varphi(A - \|L\|_{X^*} I_X) = \mathrm{Re}\, f'(x_0)\overline{f(x_0)} - \|L\|_{X^*}|f(x_0)|^2 = -\|L\|_{X^*}|f(x_0)|^2 \leq 0;$$

se $x_0 = -1$, allora la derivata di $|f|^2$ in -1 è non positiva, da cui

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,\varphi(A - \|L\|_{X^*} I_X) = \mathrm{Re}\, f'(-1)\overline{f(-1)} - \|L\|_{X^*}|f(-1)|^2 = \\
&\quad = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[f(s)\overline{f(s)}\right]_{s=-1} - \|L\|_{X^*}|f(-1)|^2 \leq 0 - \|L\|_{X^*}|f(x_0)|^2 \leq 0;
\end{aligned}$$

infine, se $x_0 = 0$, allora la derivata di $|f|^2$ in 0 è non negativa, ma sfruttando la negatività di a si trova

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,\varphi(A - \|L\|_{X^*} I_X) = \mathrm{Re}\, f'(0)\overline{f(0)} - \|L\|_{X^*}|f(0)|^2 = \\
&\quad = \mathrm{Re}\,((af(0) + Lf)\overline{f(0)}) - \|L\|_{X^*}|f(0)|^2 \leq \\
&\quad = a|f(0)|^2 + \mathrm{Re}((Lf)\overline{f(0)}) - \|L\|_{X^*}|f(0)|^2 \leq \|L\|_{X^*}|f(0)|^2 - \|L\|_{X^*}|f(0)|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Inoltre, $\lambda I_X - A$ è surgettivo per ogni $\lambda > \|L\|_{X^*}$: infatti, fissata $g \in X$, se cerchiamo $f \in D(A)$ tale che $\lambda f - f' = g$, risolvendo l'equazione differenziale troviamo

$$f(x) = c\, e^{\lambda x} - \int_0^x e^{\lambda(x-y)} g(y)\, dy =: ce_\lambda(x) - h(x),$$

ove $c \in \mathbb{C}$, e imponendo che $f'(0) = af(0) + Lf$ ricaviamo

$$Lf = f'(0) - af(0) = cLe_\lambda - Lh - ac;$$

d'altra parte l'equazione differenziale dice che

$$Lf = f'(0) - af(0) = \lambda f(0) - g(0) - af(0) = \lambda c - ac - g(0).$$

Dobbiamo dunque scegliere la costante c in modo che

$$cLe_\lambda - Lh - ac = \lambda c - ac - g(0), \quad \text{ossia} \quad c = \frac{g(0) - Lh}{\lambda - Le_\lambda},$$

il che è possibile in quanto, essendo $e_\lambda(x) = e^{\lambda x} \le 1$ per ogni $x \in [-1, 0]$,

$$Le_\lambda \le \|L\|_{X^*} \|e_\lambda\|_X \le \|L\|_{X^*} < \lambda.$$

Dunque, per quanto osservato al termine della dimostrazione del teorema di Lumer-Phillips (teorema 1.10.9), $A - \|L\|_{X^*} I_X$ genera un semigruppo contrattivo e quindi A genera un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$ tale che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{\|L\|_{X^*} t}$ per ogni $t \ge 0$.
Mostriamo che $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ verifica la seguente relazione:

$$[T(t)f](s) = \begin{cases} f(t+s) & \text{se } t+s \le 0, \\ [T(t+s)f](0) & \text{se } t+s > 0, \end{cases} \qquad s \in [-1, 0], \quad t \ge 0. \tag{1.49}$$

Ci limitiamo a provare il caso $t + s > 0$, poiché l'altro si prova nello stesso modo. Consideriamo la funzione

$$\varphi(\tau) = [T(t+s-\tau)f](\tau), \qquad \tau \in [-1, 0],$$

ove $f \in D(A)$, ed osserviamo che

$$\varphi(s) = [T(t)f](s), \qquad \varphi(0) = [T(t+s)f](0);$$

dunque basta provare che φ è costante in $[-1, 0]$. Risulta per $\tau \in]-1, 0[$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau+h) - \varphi(\tau)}{h} &= \frac{[T(t+s-\tau-h)f](\tau+h) - [T(t+s-\tau)f](\tau)}{h} = \\ &= \frac{[T(t+s-\tau-h)f](\tau) - [T(t+s-\tau)f](\tau)}{h} + \\ &+ \frac{1}{h}\Big([T(t+s-\tau)f](\tau) - [T(t+s-\tau)f](\tau+h) + \\ &\quad +[T(t+s-\tau-h)f](\tau+h) - [T(t+s-\tau-h)f](\tau)\Big) + \\ &+ \frac{[T(t+s-\tau)f](\tau+h) - [T(t+s-\tau)f](\tau)}{h} = I_1 + I_2 + I_3\,. \end{aligned}$$

Poiché $f \in D(A)$, si ha $I_1 \to -[T(t+s-\tau)Af](\tau)$ per $h \to 0^+$. Similmente, poiché $f \in D(A)$, la funzione $[T(t+s-\tau)f](\cdot)$ è di classe C^1, e dunque $I_3 \to [T(t+s-\tau)f]'(\tau) = A[T(t+s-\tau)f](\tau) = [T(t+s-\tau)Af](\tau)$ per $h \to 0^+$. Infine, si ha

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}[T(t+s-\tau)f]'(r)\,dr + \frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}[T(t+s-\tau-h)f]'(r)\,dr = \\ &= \frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\Big([T(t+s-\tau-h)Af](r) - [T(t+s-\tau)Af](r)\Big)dr \leq \\ &\leq \frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\omega(h)\,dr = \omega(h), \end{aligned}$$

ove $\omega(h) = \|[T(t+s-\tau+h) - T(t+s-\tau)]Af\|_X$ è un infinitesimo per $h \to 0$; dunque $I_2 \to 0$ per $h \to 0^+$. Pertanto $\varphi'(\tau) = 0$ e dunque φ è costante.
Similmente, nel caso $t+s \leq 0$, si prova che la funzione

$$\psi(\tau) = [T(\tau)f](t+s-\tau), \qquad \tau \in [0,t],$$

la quale verifica $\psi(t) = [T(t)f](s)$ e $\psi(0) = f(t+s)$, è costante. Pertanto la relazione (1.49) è provata quando $f \in D(A)$; il caso $f \in X$ si prova per densità.
Questo semigruppo è importante perché è legato alle *equazioni con ritardo*. La più semplice delle equazioni differenziali con ritardo ha la forma seguente:

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + Lu_t, & t > 0, \\ u|_{[-1,0]} = h \end{cases} \tag{1.50}$$

nello spazio $X = C[-1,0]$, dove $a \leq 0$, $L \in X^*$, $h \in D(A)$, ove A è l'operatore (1.48); inoltre, per ogni $t > 0$, $u_t \in X$ è la funzione

$$u_t(s) = u(t+s), \quad s \in [-1,0]. \tag{1.51}$$

Dunque il grafico di u_t in $[-1,0]$ è il traslato del grafico di u in $[t-1,t]$. L'equazione differenziale coinvolge quindi, insieme a $u'(t)$, non solo il valore $u(t)$, ma i valori dell'incognita u nell'intero intervallo $[t-1,t]$; il dato iniziale è rimpiazzato da un dato nell'intero intervallo $[-1,0]$, cosicché l'incognita u è in effetti definita in $[-1,\infty[$. Si noti che, per ogni t, $u(t)$ è un elemento di X, ossia una funzione continua definita su $[-1,0]$.
Si vede facilmente che una soluzione di (1.50) è data da

$$u(t) = \begin{cases} h(t) & \text{se } t \in [-1,0], \\ [T(t)h](0) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Infatti, osserviamo preliminarmente che dalla definizione di u e dalla (1.49) segue che

$$u_t(s) = [T(t)h](s) \qquad \forall s \in [-1,0], \quad \forall t > 0,$$

il che, essendo $h \in D(A)$, implica $u_t \in D(A)$ per ogni $t > 0$ (lemma 1.3.4(ii)). Usando la definizione (1.48) di A si ottiene, per ogni $t > 0$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left[\frac{d}{dt}T(t)h\right](0) = [AT(t)h](0) = Au(t) = \\ &= Au_t(0) = u_t'(0) = au_t(0) + Lu_t = au(t) + Lu_t\,. \end{aligned}$$

Inoltre, ovviamente, si ha $u \equiv h$ in $[-1, 0]$. Dunque u risolve (1.50).
Mostriamo infine che la funzione u sopra definita è l'unica soluzione di (1.50). Sia v un'altra soluzione di tale equazione e sia $w = u - v$. Allora w risolve

$$\begin{cases} w'(t) = aw(t) + Lw_t\,, & t > 0, \\ w|_{[-1,0]} = 0, \end{cases}$$

ove w_t è definita come in (1.51). Poniamo $x(t) = w_t$, $t \geq 0$. Allora per ogni $t > 0$ si ha $x(t) \in C^1[-1, 0]$, e poiché

$$w_t'(0) = w'(t) = aw(t) + Lw_t,$$

risulta addirittura $x(t) = w_t \in D(A)$. Inoltre, per ogni $s \in [-1, 0]$

$$x'(s) = \lim_{r\to 0} \frac{w_{t+r}(s) - w_t(s)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{w_t(s + r) - w_t(s)}{r} = w_t'(s) = [Aw_t](s).$$

Dunque, osservato che $x(0) = w_0 = w|_{[-1,0]} = 0$, si ottiene che $x(\cdot)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t > 0, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

e pertanto $x(\cdot) = T(\cdot)0 = 0$. Si conclude che $w_t(s) = w(t + s) = 0$ per ogni $t > 0$ e $s \in [-1, 0]$, ossia $w \equiv 0$, come si voleva.
(4) Consideriamo adesso $X = C[0, 1]$ e

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in C^2[0, 1] : \ f'(0) = f'(1) = 0\} \\ Af = f''. \end{cases}$$

Verifichiamo che l'operatore A è dissipativo. Sia $f \in D(A)$ e sia $x_0 \in [0, 1]$ un punto di massimo per $|f|^2$: allora, come abbiamo visto più volte, $\varphi := \overline{f(x_0)}\delta_{x_0}$ è un elemento di $J(f)$ e la funzione $x \mapsto \mathrm{Re}\, f(x)\overline{f(x_0)}$ ha massimo in x_0. Se $x_0 \in]0, 1[$, allora

$$\mathrm{Re}\, f''(x_0)\overline{f(x_0)} = \left[\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{Re}\, f(x)\overline{f(x_0)}\right]_{x=x_0} \leq 0.$$

Se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$, allora si ha $f'(x_0) = 0$ in quanto $f \in D(A)$; quindi

$$\mathrm{Re}\, f''(x_0)\overline{f(x_0)} \leq 0,$$

poiché se tale quantità fosse invece positiva, dalla formula di Taylor avremmo per continuità, in un opportuno punto ξ fra x e x_0,

$$\mathrm{Re}\, f(x)\overline{f(x_0)} = |f(x_0)|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f''(\xi)\overline{f(x_0)} > |f(x_0)|^2 = \|f\|_\infty^2,$$

il che è assurdo. Dunque A è dissipativo.
Inoltre, $\lambda I_X - A$ è surgettivo per ogni $\lambda > 0$, poiché se $g \in X$ l'equazione $\lambda f - f'' = g$ ha la soluzione generale

$$f(x) = a\, e^{\sqrt{\lambda}x} + b\, e^{-\sqrt{\lambda}x} - \frac{1}{2\lambda}\int_x^1 \left[e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} - e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)}\right] g(y)\, dy,$$

ed è facile vedere che esistono unici $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $f'(0) = f'(1) = 0$. Perciò, come del resto già sapevamo (paragrafo 1.9), A genera un semigruppo contrattivo.
(5) Anche nel caso $X = L^2[0,1]$ e

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in C^2[0,1] : \ f(0) = f(1) = 0\} \\ Af = f'' \end{cases}$$

è facile verificare che A è dissipativo:

$$\mathrm{Re}\,\langle Af, f\rangle_X = \mathrm{Re}\int_0^1 f''(x)\overline{f(x)}\, dx = -\int_0^1 |f'(x)|^2\, dx \le 0 \quad \forall f \in D(A).$$

Come sappiamo già dal paragrafo 1.9, A genera un semigruppo contrattivo.
(6) Nello spazio $X = C[0,1]$ consideriamo l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = \left\{f \in C[0,1] \cap C^2(\,]0,1[\,) : \ \lim\limits_{x\to 0^+} x(1-x)f''(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x(1-x)f''(x) = 0\right\} \\ [Af](x) = x(1-x)f''(x) \quad \forall x \in]0,1[\,, \quad \forall f \in D(A). \end{cases}$$

Si vede facilmente che A è chiuso: se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ e se $f_n \to f$ in X, $Af_n \to g$ in X, allora in particolare in ogni sottointervallo $[\delta, 1-\delta]$ risulta $f_n \to f$ uniformemente e $f_n'' \to h$ uniformemente, con $x(1-x)h(x) = g(x)$. Per interpolazione, essendo per ogni $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n' - f_m'\|_\infty \le \|f_n - f_m\|_\infty^{1/2}\|f_n'' - f_m''\|_\infty^{1/2},$$

anche $\{f_n'\}$ è uniformemente convergente in $[\delta, 1-\delta]$ ad una funzione $k \in X$. Ne segue $k = f'$ in $[\delta, 1-\delta]$, e di conseguenza $h = f''$ in $[\delta, 1-\delta]$. Ma δ è arbitrario, quindi $h(x) = f''(x)$ per ogni $x \in]0,1[\,$, e di conseguenza $x(1-x)f''(x) = g(x)$ per ogni $x \in]0,1[\,$. Dato che $g \in X$, si ricava $f \in D(A)$ e quindi $Af = g$. Ciò prova che A è chiuso. Inoltre il dominio di A è ovviamente denso in X. Mostriamo che A è dissipativo: con il solito metodo, sia $f \in D(A)$ e sia x_0 un punto di massimo per $|f|^2$. Scelta $\varphi = \overline{f(x_0)}\delta_{x_0} \in J(f)$, si trova

$$\mathrm{Re}\left[x_0(1-x_0)f''(x_0)\overline{f(x_0)}\right] = 0 \quad \text{se } x_0 = 0 \text{ oppure } x_0 = 1,$$

mentre

$$\operatorname{Re}\left[x_0(1-x_0)f''(x_0)\overline{f(x_0)}\right] = x_0(1-x_0)\frac{d^2}{dx^2}\left[\operatorname{Re} f(x)\overline{f(x_0)}\right]_{x=x_0} \le 0 \quad \text{se } x_0 \in]0,1[\,.$$

Inoltre, $\lambda I_X - A$ è surgettivo per ogni $\lambda \ge 0$: per $\lambda = 0$ è facile, poiché per ogni $g \in X$ il problema

$$\begin{cases} x(1-x)f''(x) = g(x), \quad 0 < x < 1, \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$f(x) = -\int_0^x \frac{(1-x)}{(1-y)}\, g(y)\, dy - \int_x^1 \frac{x}{y}\, g(y)\, dy, \quad x \in [0,1].$$

La verifica per il caso $\lambda > 0$ è un po' più complicata che nei casi precedenti. Notiamo anzitutto che le funzioni $f_0(x) = 1$ e $f_1(x) = x$ appartengono a $D(A)$ e $Af_0 = Af_1 = 0$. Poniamo

$$X_0 = \{f \in X : \ f(0) = f(1) = 0\}$$

e osserviamo che $f_0, f_1 \notin X_0$. Consideriamo la seguente restrizione A_0 di A:

$$\begin{cases} D(A_0) = \left\{ f \in X_0 \cap C^2(\,]0,1[\,) : \ \lim\limits_{x\to 0^+} x(1-x)f''(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x(1-x)f''(x) = 0 \right\} \\ [A_0 f](x) = x(1-x)f''(x) \quad \forall x \in]0,1[\,, \quad \forall f \in D(A_0). \end{cases}$$

Nello spazio X_0, A_0 è ancora dissipativo, con dimostrazione analoga ma più semplice, perché non c'è il caso degli estremi. Inoltre, con lo stesso conto di prima si vede che $0 \in \rho(A_0)$, ed essendo $\rho(A_0)$ aperto, esiste qualche $\lambda > 0$ tale che $\lambda \in \rho(A_0)$; dunque in particolare $\lambda I_{X_0} - A_0$ è surgettivo per tale λ. Quindi, per la proposizione 1.10.5(ii), $\rho(A_0) \supseteq [0, \infty[\,$.
Sia adesso $g \in X$: esistono unici $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $g_0(x) := g(x) - a - bx \in X_0$. Posto $f_0 = R(\lambda, A_0)g_0$, si verifica subito che la funzione

$$f(x) = f_0(x) + \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\, x$$

soddisfa la relazione $\lambda f - Af = g$. Dunque $\rho(A) \supseteq [0, \infty[$ e, per il teorema di Lumer-Phillips (teorema 1.10.9) A genera un semigruppo contrattivo.

1.11 Semigruppi analitici

Dato uno spazio di Banach X, se $A : D(A) \subseteq X \to X$ genera un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$, allora vale il teorema di Hille-Yosida (teorema 1.8.2); in particolare, $\rho(A)$ contiene il settore

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

ed esiste $M > 0$ per cui vale la stima

$$\|R(\lambda, A)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega}\,;$$

inoltre

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt \qquad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega}\,.$$

Però questa relazione fra risolvente e semigruppo non è invertibile, cioè non sappiamo ricavare $T(t)$ in funzione di $R(\lambda, A)$.
Vogliamo adesso modificare le ipotesi su A, in modo da definire una speciale classe di semigruppi per i quali esiste una formula che li rappresenta in funzione del risolvente.

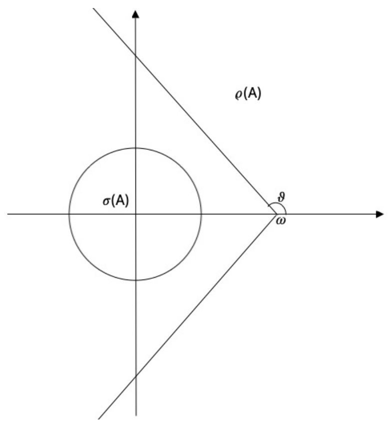
Definizione 1.11.1 *Sia X uno spazio di Banach. Dato un operatore $A : D(A) \subseteq X \to X$, diciamo che A è* settoriale *se esistono $\vartheta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\rho(A) \supseteq \Sigma_{\vartheta,\omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg(\lambda - \omega)| < \vartheta\}$$

ed esiste $M > 0$ per il quale vale la maggiorazione

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\vartheta,\omega}\,. \tag{1.52}$$

Si osservi che questa ipotesi è differente dalla tesi del teorema di Hille-Yosida: in questo caso il risolvente è più grande e la stima più precisa (contiene a denominatore $|\lambda - \omega|$ anziché $\operatorname{Re}\lambda - \omega$), però tale stima vale solo per $k = 1$.



Osservazione 1.11.2 Se $A \in \mathcal{L}(X)$, allora A è settoriale. Infatti, dato che lo spettro di A è contenuto nella palla $B(0, \|A\|_{\mathcal{L}(X)})$, per ogni $\omega > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ esiste $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ tale che $\rho(A) \supset \Sigma_{\vartheta,\omega}$.

Osservazione 1.11.3 Esistono generatori di semigruppi fortemente continui che non sono settoriali: ad esempio, nello spazio $X = C_0([0, \infty[\,)$, per l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in X : \ f' \in X\} \\ Af = f' \quad \forall f \in D(A), \end{cases}$$

che genera il semigruppo delle traslazioni a destra (esempio 1.4.9), risulta

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\lambda > 0\} :$$

infatti, le funzioni $g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ soddisfano $\lambda g_\lambda - g'_\lambda = 0$ e, per $\operatorname{Re}\lambda < 0$, appartengono a $D(A)$; quindi ciascuna delle g_λ, per $\operatorname{Re}\lambda < 0$, è autovettore per A con autovalore λ.

Ne segue $\sigma(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Ma, essendo $\sigma(A)$ chiuso, si ha $\sigma(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$. D'altronde, $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, perché per $\operatorname{Re}\lambda > 0$ e $g \in X$ l'equazione $\lambda f - f' = g$ è sempre univocamente risolubile, e si ha

$$f(x) = e^{\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda y} g(y)\, dy.$$

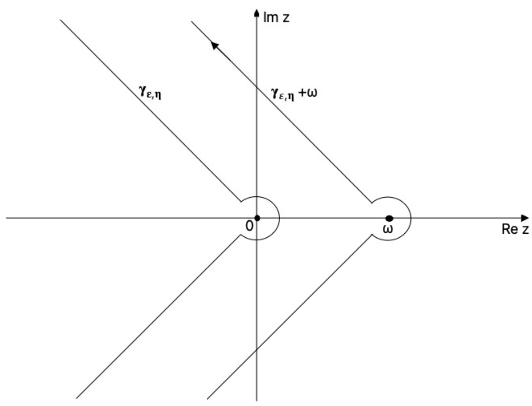
Dunque vale l'uguaglianza sopra scritta.

Dato un operatore settoriale A, andiamo a costruire un semigruppo $T(\cdot)$, del quale A sarà il generatore, in un senso opportuno.
Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore settoriale di costanti $\vartheta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Definiamo

$$T(0) = I_X$$

e, per $t \geq 0$,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}+\omega} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda, \qquad (1.53)$$



ove $\varepsilon > 0$, $\eta \in \left]\frac{\pi}{2}, \vartheta\right]$, la curva $\gamma_{\varepsilon,\eta} + \omega$ è la traslata della curva

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon,\eta} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg\lambda| = \eta, \ |\lambda| > \varepsilon\} \cup \\ &\cup \ \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg\lambda| \leq \eta, \ |\lambda| = \varepsilon\} \end{aligned}$$

ed è percorsa nel verso delle $\operatorname{Im}\lambda$ crescenti.
Dato che la funzione $\lambda \mapsto e^{\lambda t} R(\lambda, A)$ è olomorfa da $\Sigma_{\vartheta,\omega}$ in $\mathcal{L}(X)$, l'integrale 1.53 che definisce $T(t)$ è indipendente da ε e η, ed è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$: quindi $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ per ogni $t \geq 0$. Proviamo che $T(\cdot)$ è un semigruppo.

Teorema 1.11.4 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore settoriale di costanti $\vartheta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\omega \in \mathbb{R}$; sia $T(\cdot)$ definito da* (1.53). *Allora esiste $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset +0, \infty[$ tale che:*

(i) $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_0\, e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0$;

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s) \qquad \forall t, s \geq 0$;

(iii) $T(t)x \in D(A^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in X$, *e*

$$A^k T(t)x = T(t)A^k x \qquad \forall x \in D(A^k);$$

$$\|(A - \omega I_X)^k T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_k\, e^{\omega t}\, t^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0;$$

(iv) $T(\cdot) \in C^\infty(\,]0, \infty[\,, \mathcal{L}(X))$ *e*

$$\frac{d^k}{dt^k} T(t) = A^k T(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0;$$

(v) *$t \mapsto T(t)$ ha una estensione analitica al settore $\Sigma_{\vartheta-\pi/2,\omega}$;*

(vi) *risulta*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x)\|_X = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \overline{D(A)};$$

(vii) *esiste $y \in X$ tale che*

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{T(t)x - x}{t} - y \right\|_X = 0$$

se e solo se $x \in D(A)$ e $Ax = y \in \overline{D(A)}$.

Si dice che $T(\cdot)$, definito da (1.53), è un *semigruppo analitico*. Si noti che da (iv) segue che, in generale, un semigruppo analitico può non essere fortemente continuo (si veda il successivo esempio 1.12.2).

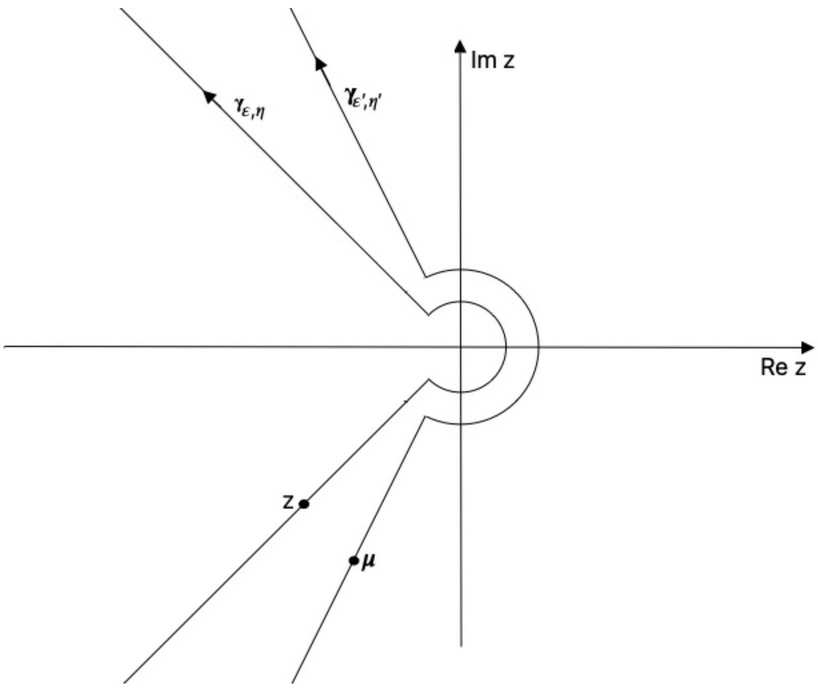
Dimostrazione **(i)** Poniamo per comodità $B = A - \omega I_X$. Si ha

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}+\omega} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} e^{(\lambda-\omega)t} R(\lambda-\omega, B)\, d\lambda = \\ &= \frac{e^{\omega t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{t\varepsilon,\eta}} \frac{e^z}{t}\, R\left(\frac{z}{t}, B\right)\, dz = \text{[per olomorfia]} \\ &= \frac{e^{\omega t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} \frac{e^z}{t}\, R\left(\frac{z}{t}, B\right)\, dz; \end{aligned}$$

quindi

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{e^{\omega t}}{2\pi}\left[2\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{r\cos\vartheta}}{t} M \frac{t}{r}\, dr + 2\int_0^\vartheta \frac{e^{\varepsilon\cos\vartheta}}{t} M \frac{t}{\varepsilon}\, \varepsilon\, d\eta\right] \le M_{\varepsilon,\vartheta}\, e^{\omega t},$$

da cui segue (i).



(ii) Ponendo nuovamente $B = A - \omega I_X$ si ha, con $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ e $0 < \eta' < \eta$,

$$\begin{aligned}
T(t)T(s) &= \frac{e^{\omega(t+s)}}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} e^{tz} R(z,B)\, dz \int_{\gamma_{\varepsilon',\eta'}} e^{s\mu} R(\mu,B)\, d\mu = \\
&= \frac{e^{\omega(t+s)}}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} \int_{\gamma_{\varepsilon',\eta'}} e^{tz} e^{s\mu} \frac{R(z,B) - R(\mu,B)}{\mu - z}\, d\mu dz = \\
&= \frac{e^{\omega(t+s)}}{(2\pi i)^2} \left[\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} e^{tz} R(z,B) \left(\int_{\gamma_{\varepsilon',\eta'}} \frac{e^{s\mu}}{\mu - z}\, d\mu \right) dz - \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\gamma_{\varepsilon',\eta'}} e^{s\mu} R(\mu,B) \left(\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} \frac{e^{tz}}{\mu - z}\, dz \right) d\mu \right] = [\text{calcolo dei residui}] \\
&= \frac{e^{\omega(t+s)}}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} e^{tz} R(z,B) e^{sz}\, dz - \int_{\gamma_{\varepsilon',\eta'}} e^{s\mu} R(\mu,B) \cdot 0\, d\mu \right] = \\
&= \frac{e^{\omega(t+s)}}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} e^{(t+s)z} R(z,B)\, dz = T(t+s).
\end{aligned}$$

(iii) Utilizzando l'identità $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I_X$, per $n \to \infty$ si ha, per convergenza dominata,

$$nR(n,A)T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta+\omega}} e^{\lambda t}\, nR(n,A)R(\lambda,A)x\, d\lambda \to T(t)x,$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
nAR(n,A)T(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta+\omega}} e^{\lambda t}\, nR(n,A)[\lambda R(\lambda,A) - I_X]x\, d\lambda \to \\
&\to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta+\omega}} \lambda e^{\lambda t}\, R(\lambda,A)x\, d\lambda + 0,
\end{aligned}$$

da cui $T(t)x \in D(A)$ e

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta+\omega}} \lambda e^{\lambda t}\, R(\lambda,A)x\, d\lambda \qquad \forall x \in X.$$

Per induzione su k si ottiene in modo analogo

$$A^k T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta+\omega}} \lambda^k e^{\lambda t}\, R(\lambda,A)x\, d\lambda \qquad \forall x \in X, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Infine, ragionando come nella dimostrazione di (i),

$$(A - \omega I_X)^k T(t) = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} z^k\, e^{zt} R(z,B)\, dz = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}} \frac{z^k}{t^k}\, e^z\, R\left(\frac{z}{t}, A\right) \frac{dt}{t},$$

e dunque per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $M_k > 0$ tale che

$$\|(A - \omega I_X)^k T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_k}{t^k}\, e^{\omega t}.$$

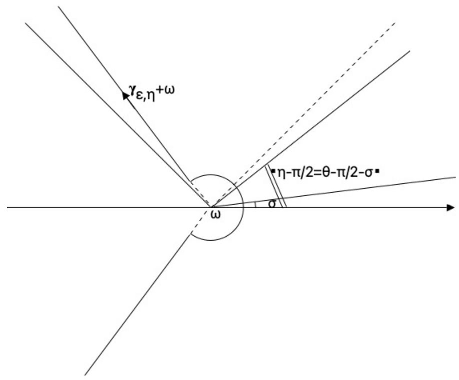
(iv) Derivando sotto il segno di integrale, per convergenza dominata si ha

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}+\omega} \lambda e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)x\, d\lambda = AT(t),$$

e per induzione su k si arriva subito alla tesi.

(v) Fissiamo $\sigma \in]0, \vartheta - \pi/2[$ e scegliamo $\eta = \vartheta - \sigma$. Per $z \in \Sigma_{\eta-\pi/2,0}$ consideriamo l'applicazione

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\eta}+\omega} e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)x\, d\lambda :$$



questo integrale converge in $\mathcal{L}(X)$. Infatti, se $\lambda \in \gamma_{\varepsilon,\eta}+\omega$ e $z \in \Sigma_{\eta-\pi/2,0}$, si ha nei due tratti rettilinei dell'integrale

$$\arg\,(\lambda-\omega)z = \arg(\lambda-\omega) + \arg z \geq |\arg(\lambda-\omega)| - |\arg z| = \eta - |\arg z| \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\,,$$

cosicché nel corrispondente pezzo di integrale l'esponenziale è negativa e dunque esso è finito; nel tratto curvilineo, l'integrando risulta limitato rispetto a z, e pertanto anche tale integrale converge. Perciò, essendo σ arbitrariamente piccolo, η è arbitrariamente vicino a ϑ e quindi l'intero integrale definisce una funzione olomorfa dal settore $\Sigma_{\vartheta-\pi/2,0}$ allo spazio $\mathcal{L}(X)$.

(vi) Se $T(t)x \to x$ in X per $t \to 0^+$, allora ovviamente, grazie a (iii), si ha $x \in \overline{D(A)}$. Viceversa, sia $x \in D(A)$ e sia $\omega_0 > \omega$. Posto $B = A - \omega_0 I_X$, si ha, procedendo come in (i) e utilizzando l'identità del risolvente (proposizione A.0.7) ed il calcolo dei residui:

$$\begin{aligned}
T(t)x &= T(t)B^{-1}Bx = \frac{e^{\omega_0 t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} e^{tz}R(z,B)B^{-1}Bx\, dz = \\
&= \frac{e^{\omega_0 t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}}{z}[R(z,B)+B^{-1}]Bx\, dz = \\
&= \frac{e^{\omega_0 t}}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}}{z}R(z,B)Bx\, dz + \int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}}{z}x\, dz\right] = \\
&= e^{\omega_0 t}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}}{z}R(z,B)Bx\, dz + x\right] = \\
&= e^{\omega_0 t}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}-1}{z}R(z,B)Bx\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{1}{z}R(z,B)Bx\, dz + x\right] = \\
&= e^{\omega_0 t}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}-1}{z}R(z,B)Bx\, dz + x\right],
\end{aligned}$$

visto che l'integrale $\int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{1}{z}R(z,B)Bx\, dz$ è nullo, se ε è sufficientemente piccolo, per olomorfia dell'integrando. Pertanto, detto $S(t) = e^{-\omega_0 t}T(t)$ il semigruppo generato da

B, risulta

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\|_X &= \left\| \frac{e^{\omega_0 t}}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \frac{e^{tz}-1}{z} R(z,B)Bx\,dz + [e^{\omega_0 t}-1]x \right\|_X \le \\
&\le \left\| \frac{e^{\omega_0 t}}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\vartheta}} \int_0^t e^{sz}\,ds\,R(z,B)Bx\,dz \right\|_X + [e^{\omega_0 t}-1]\|x\|_X \le \\
&\le e^{\omega_0 t} \left\| \int_0^t S(\sigma)Bx\,d\sigma \right\|_X + [e^{\omega_0 t}-1]\|x\|_X \le \\
&\le cte^{\omega t}\|Bx\|_X + cte^{\omega_0 t}\|x\|_X\,.
\end{aligned}$$

Ciò prova che $T(t)x \to x$ in X per $t \to 0^+$, per ogni $x \in D(A)$. Per densità, la stessa proprietà è vera per $x \in \overline{D(A)}$.

(vii) Se esiste $y \in X$ tale che $\frac{T(t)x-x}{t} \to y$ in X per $t \to 0^+$, allora $T(t)x \to x$ in X per $t \to 0^+$; dunque $x \in \overline{D(A)}$ e di conseguenza $y \in \overline{D(A)}$. Inoltre, scelto $\lambda \in \rho(A)$, si ha

$$\begin{aligned}
R(\lambda,A)y &= \lim_{t\to 0^+} R(\lambda,A)\frac{T(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)-I_X)R(\lambda,A)x = \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)AR(\lambda,A)x\,ds = AR(\lambda,A)\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds = AR(\lambda,A)x.
\end{aligned}$$

Ne segue $x = R(\lambda,A)(\lambda x - y)$, da cui $x \in D(A)$; la relazione precedente implica allora $R(\lambda,A)y = AR(\lambda,A)x = R(\lambda,A)Ax$, da cui subito $y = Ax$ ed infine $Ax = y \in \overline{D(A)}$. Viceversa, se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$, allora da (iv) segue, per $t \to 0^+$,

$$\frac{T(t)x-x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t AT(s)x\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds \to T(0)Ax = Ax. \quad \square$$

Osservazioni 1.11.5 **(1)** Dal teorema 1.11.4 (iii) segue che se A genera un semigruppo analitico $T(\cdot)$ di costanti $\vartheta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ e $\omega \in \mathbb{R}$, allora

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{\omega t}\left[\frac{1}{t}+\omega\right] \le c_1\,e^{\omega t}\left[\frac{1}{t}+1\right] \qquad \forall t>0 \tag{1.54}$$

e similmente

$$\|A^kT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le c_k\,e^{\omega t}\left[\frac{1}{t^k}+1\right] \qquad \forall t>0, \quad \forall k \in N^+. \tag{1.55}$$

(2) Dal teorema 1.11.4(v) e dal teorema dell'applicazione spettrale (teorema C.0.3) segue che per un semigruppo analitico $T(\cdot)$, con generatore A, vale la relazione $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)}$ per ogni $t > 0$ (si veda l'osservazione 1.7.2(3)).

Per riconoscere se un semigruppo $T(\cdot)$ è analitico, la cosa importante è verificare la stima $\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{|\lambda-\omega|}$ per tutti i λ nel semipiano $\Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega}$. Vale infatti la seguente

Proposizione 1.11.6 *Sia X uno spazio di Banach, e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso, tale che:*

(i) *esista $\omega \in \mathbb{R}$ per cui $\rho(A) \supseteq \Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega}$;*

(ii) *esista $M > 0$ per cui*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega}\,.$$

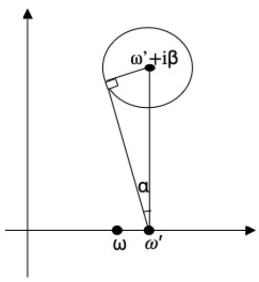
Allora per ogni $\varepsilon \in \left]0, \arcsin \frac{1}{M}\right[$ esiste $M_\varepsilon > 0$ per cui

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda - \omega|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\omega};$$

dunque A è settoriale, e in particolare è generatore di un semigruppo analitico in X (teorema 1.11.4).

Dimostrazione Dalla dimostrazione della proposizione A.0.3 segue che

$$B(\lambda, \|R(\lambda, A)\|^{-1}_{\mathcal{L}(X)}) \subseteq \rho(A) \qquad \forall \lambda \in \rho(A).$$

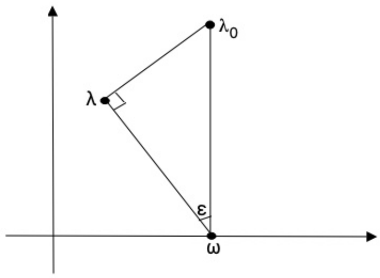


Scelto $\omega' > \omega$, si ha per ipotesi $\omega' + i\beta \in \rho(A)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e

$$\|R(\omega' + i\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\omega' - \omega + i\beta|} \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Dunque la palla $B(\omega' + i\beta, \frac{|\omega' - \omega + i\beta|}{M})$, ed a maggior ragione la palla $B(\omega' + i\beta, \frac{|\beta|}{M})$, è contenuta in $\rho(A)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$; l'unione di queste palle è pure contenuta in $\rho(A)$. Tale unione è costituita dal settore $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha,\omega'}$, ove l'angolo α è tale che $\sin\alpha = \frac{1}{M}$. Infatti, detto α l'angolo fra il segmento verticale di estremi ω', $\omega' + i\beta$ e la tangente al disco $B(\omega' + i\beta, \frac{|\beta|}{M})$ uscente dal punto ω', risulta $|\beta| \sin\alpha = \frac{|\beta|}{M}$. Si ottiene dunque $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha,\omega'} \subseteq \rho(A)$ per ogni $\omega' > \omega$, e quindi anche $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha,\omega} \subseteq \rho(A)$.

Vediamo adesso la stima risultante. Sia $\lambda \in \partial\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\omega}$ con $0 < \varepsilon < \alpha$. Scelto $\lambda_0 = \omega + i\beta$ tale che $\lambda - \lambda_0$ sia ortogonale a $\lambda - \omega$, vale la relazione



$$|\lambda - \lambda_0| = |\mathrm{Im}\,\lambda_0| \sin\varepsilon < \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}{M};$$

quindi $\lambda \in B\big(\lambda_0, \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}{M}\big)$.

Dunque, con lo stesso conto fatto nella dimostrazione della proposizione A.0.7,

$$
\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} &\le \|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \frac{1}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)}} \le \\
&\le \frac{M}{|\operatorname{Im} \lambda_0|} \frac{1}{1 - |\operatorname{Im} \lambda_0| (\sin \varepsilon) \frac{M}{|\operatorname{Im} \lambda_0|}} = \\
&= \frac{M}{|\operatorname{Im} \lambda_0|} \frac{1}{1 - M \sin \varepsilon} = \frac{M \sin \varepsilon}{1 - M \sin \varepsilon} \frac{1}{|\lambda - \omega|}.
\end{aligned}
$$

Ciò prova la stima con $M_\varepsilon = \frac{M \sin \varepsilon}{1 - M \sin \varepsilon}$. $\square$

1.12 Esempi

In questo paragrafo raggruppiamo alcuni basilari esempi di semigruppi analitici.

Esempio 1.12.1 Ogni operatore $A \in \mathcal{L}(X)$ è settoriale (osservazione 1.11.2): verifichiamo che il semigruppo (1.53) in questo caso coincide con $t \mapsto e^{tA}$. Anzitutto, vale la seguente stima del risolvente su un opportuno semipiano: se $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ si ha

$$
\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(I_X - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \\
&\le \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}.
\end{aligned}
$$

Dunque, considerando il semigruppo (1.53), ed osservando che l'integrando è una funzione olomorfa, si ha, per $\omega > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$,$\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ opportuni,

$$
T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\eta} + \omega} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{[\gamma_{\varepsilon,\eta} + \omega] \cap B(0,r)} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda;
$$

chiudendo la curva a sinistra per mezzo della semicirconferenza

$$
\beta_r = \{ z \in \mathbb{C} : \ |z| = r, \ |\arg(-z)| < \eta \},
$$

orientata nel verso delle $\operatorname{Im} \lambda$ decrescenti, si ottiene il residuo e^{tA}, mentre il termine aggiunto, ossia l'integrale lungo β_r, tende a 0 per $r \to \infty$, essendo

$$
\lim_{r \to \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda \right| \le \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-rt \cos \vartheta} \frac{1}{r - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}\, dr = 0.
$$

Dunque, se $A \in \mathcal{L}(X)$, il semigruppo (1.53) si riduce all'esponenziale $t \mapsto e^{tA}$.

Esempio 1.12.2 Nello spazio $X = C[0,1]$ consideriamo l'operatore

$$
\begin{cases}
D(A) = \{ u \in C^2[0,1] : \ u(0) = u(1) = 0 \} \\
Au = u''.
\end{cases}
$$

Si noti che $D(A)$ non è denso in X. Si può agevolmente verificare che se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in X$ il problema

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f & \text{in }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

è univocamente risolubile se e solo se $\lambda \neq -n^2$, $n \in \mathbb{N}^+$, mentre per $\lambda = -n^2$, con $f \equiv 0$, vi è l'autovettore $u_n(x) = \sin n\pi x$. In effetti, per $\lambda \neq -n^2$ la soluzione è

$$u(x) = \int_0^1 K_\lambda(x,t) f(t)\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

ove il nucleo K_λ è dato dalle formule seguenti (verifica noiosa ma facile):

$$K_\lambda(x,t) = \begin{cases} -t(1-x) & \text{se} \quad 0 \le t \le x \le 1 \\ -x(1-t) & \text{se} \quad 0 \le x \le t \le 1, \end{cases} \qquad x,t \in [0,1],$$

per $\lambda = 0$;

$$K_\lambda(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{-\lambda}t)\sin(\sqrt{-\lambda}(1-x))}{\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}} & \text{se} \quad 0 \le t \le x \le 1 \\ \dfrac{\sin(\sqrt{-\lambda}x)\sin(\sqrt{-\lambda}(1-t))}{\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}} & \text{se} \quad 0 \le x \le t \le 1 \end{cases} \qquad x,t \in [0,1],$$

per $\lambda < 0$, $\lambda \neq -n^2$;

$$K_\lambda(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}t)\sinh(\sqrt{\lambda}(1-x))}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{se} \quad 0 \le t \le x \le 1 \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}x)\sinh(\sqrt{\lambda}(1-t))}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} & \text{se} \quad 0 \le x \le t \le 1, \end{cases} \qquad x,t \in [0,1],$$

per $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0]$, scegliendo la radice di λ tale che $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$.
In quest'ultimo caso, posto $\rho = \sqrt{\lambda}$, si ha la stima

$$|K_\lambda(x,t)| \le \begin{cases} \dfrac{\cosh(\mathrm{Re}\,\rho t)\cosh(\mathrm{Re}\,\rho(1-x))}{|\rho\sinh\rho|} & \text{se} \quad 0 \le t \le x \le 1 \\ \dfrac{\cosh(\mathrm{Re}\,\rho x)\cosh(\mathrm{Re}\,\rho(1-t))}{|\rho\sinh\rho|} & \text{se} \quad 0 \le x \le t \le 1, \end{cases} \qquad x,t \in [0,1],$$

dalla quale segue, per $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon,0}$ e $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K_\lambda(x,t)|dt \quad &\le \quad \frac{\cosh(\mathrm{Re}\,\rho(1-x))}{|\rho\sinh\rho|}\int_0^x \cosh(\mathrm{Re}\,\rho t)\, dt + \\ &\qquad + \frac{\cosh(\mathrm{Re}\,\rho x)}{|\rho\sinh\rho|}\int_x^1 \cosh(\mathrm{Re}\,\rho(1-t))\, dt = \\ &= \frac{\cosh(\mathrm{Re}\,\rho(1-x))\sinh(\mathrm{Re}\,\rho x) + \cosh(\mathrm{Re}\,\rho x)\sinh(\mathrm{Re}\,\rho(1-x))}{|\rho\sinh\rho|\mathrm{Re}\,\rho} = \\ &= \frac{\sinh \mathrm{Re}\,\rho}{|\rho\sinh\rho|\mathrm{Re}\,\rho} \le \frac{1}{|\rho|\mathrm{Re}\,\rho} \le \frac{1}{|\lambda|\sin\frac{\varepsilon}{2}}\,. \end{aligned}$$

Perciò, per ogni $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon,0}$,

$$\|u\|_X \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K_\lambda(x,t)|dt\, \|f\|_X \leq \frac{1}{|\lambda| \sin \frac{\varepsilon}{2}}\, \|f\|_X\,,$$

e ciò mostra che A è generatore di un semigruppo analitico in X.

Vediamo adesso alcune classi di operatori che generano semigruppi analitici in opportuni spazi.

Proposizione 1.12.3 *Sia X uno spazio di Hilbert e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare, chiuso, autoaggiunto e tale che esista $\omega \in \mathbb{R}$ per cui*

$$\langle Ax, x\rangle_H \leq \omega\|x\|_H^2 \qquad \forall x \in D(A).$$

Allora A genera un semigruppo analitico con $\rho(A) \supset \Sigma_{\pi,\omega}$.

Dimostrazione Dalla proposizione 1.10.13 segue che A genera un semigruppo fortemente continuo, e che in particolare, per il teorema 1.6.2, si ha $\rho(A) \supset \Sigma_{\frac{\pi}{2},\omega}$.
Mostriamo ora che se $\lambda \in \Sigma_{\pi,\omega}$ e $\operatorname{Re}\lambda \leq \omega$ (in particolare, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), si ha ancora $\lambda \in \rho(A)$. Anzitutto, se $x \in D(A)$ e $\lambda x - Ax = y$, allora

$$\lambda\|x\|_X^2 - \langle Ax, x\rangle_X = \langle y, x\rangle_X;$$

quindi, essendo $\langle Ax, x\rangle_X \in \mathbb{R}$,

$$|\operatorname{Im}\lambda|\|x\|_X^2 = |\operatorname{Im}\langle y, x\rangle_X| \leq \|x\|_X\|y\|_H\,,$$

da cui

$$\|x\|_X \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\, \|\lambda x - Ax\|_X \qquad \forall x \in D(A).$$

Dunque $\lambda I_X - A$ è iniettivo. D'altra parte $\lambda I_X - A$ ha immagine densa. Infatti, sia $z \in X$ ortogonale all'immagine di $\lambda I_X - A$: allora $z \in D(A^*)$, visto che

$$|\langle z, Ax\rangle_X| = |\langle z, \lambda x\rangle_X| \leq |\lambda|\|z\|_X\|x\|_X \qquad \forall x \in D(A),$$

ed inoltre

$$\langle \overline{\lambda} z - A^* z, x\rangle_X = \langle z, \lambda x - Ax\rangle_X = 0 \qquad \forall x \in D(A),$$

ossia $\overline{\lambda} z = A^* z$. Ma, dato che $A^* = A$ e $\overline{\lambda} I_X - A$ è iniettivo (visto che $\overline{\lambda} \in \Sigma_{\pi,\omega}$ al pari di λ), si deduce che $z = 0$. Ciò prova che $\overline{\mathcal{R}(\lambda I_X - A)} = X$. Un facile argomento basato sulla stima sopra dimostrata ci dice che $\mathcal{R}(\lambda I_X - A) = X$, e quindi $\lambda \in \rho(A)$.
Infine, se $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon,\omega}$ e $\arg(\lambda - \omega) = \vartheta$, si ha per $y \in X$ e $|\vartheta| \leq \varepsilon$

$$\|R(\lambda, A)y\|_X \leq \frac{\|y\|_X}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} = \frac{\|y\|_X}{|\lambda - \omega| \cos\vartheta} \leq \frac{\|y\|_X}{|\lambda - \omega| \cos\varepsilon}\,,$$

mentre per $y \in X$ e $\varepsilon \leq |\vartheta| \leq \pi - \varepsilon$

$$\|R(\lambda, A)y\|_X \leq \frac{\|y\|_X}{|\operatorname{Im}\lambda|} = \frac{\|y\|_X}{|\lambda - \omega|| \sin\vartheta|} \leq \frac{\|y\|_X}{|\lambda - \omega| \sin\varepsilon}\,.$$

Ciò prova la stima per l'analiticità richiesta dalla proposizione 1.11.6. □

Proposizione 1.12.4 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ il generatore di un gruppo fortemente continuo $T(\cdot)$. Allora l'operatore A^2, con dominio*

$$D(A^2) = \{x \in D(A) : \ Ax \in D(A)\},$$

genera un semigruppo analitico in X.

Dimostrazione Proveremo che $\rho(A^2)$ contiene un settore $\Sigma_{\alpha,0}$, con $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, sul quale vale una stima di tipo (1.52).
Per ipotesi esiste $\omega > 0$ tale che gli operatori $\pm A - \omega I_X$ generano semigruppi limitati: quindi esiste $M > 0$ tale che

$$\|R(\mu, \pm A - \omega I_X)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\mu} \qquad \text{per } \operatorname{Re}\mu > 0.$$

Fissiamo $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Affermiamo che esistono $r_0 > 0$ e β in $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ tali che

$$\Sigma_{\alpha,0} \setminus B(0, r_0) \subseteq \{z^2 : \ z \in \Sigma_{\beta,\omega}\}\,. \tag{1.56}$$

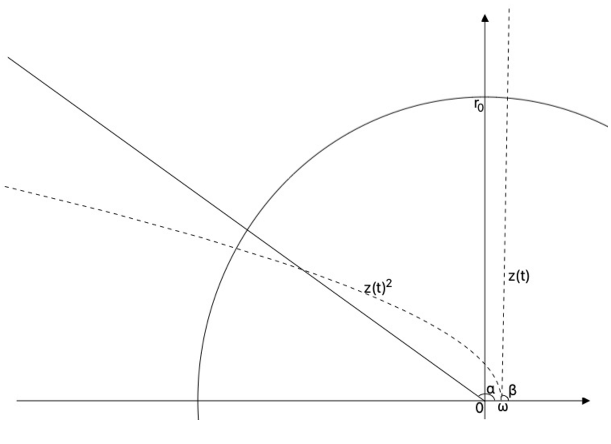
Per provare questa inclusione osserviamo che la semiretta $\{\omega + r\,e^{i\vartheta},\ r \geq 0\}$ può essere parametrizzata da $z(t) = \omega + t + it\,\tan\vartheta$, $t \geq 0$. Dunque

$$z(t)^2 = (\omega + t)^2 - t^2\tan^2\vartheta + 2it(\omega + t)\tan\vartheta, \quad t \geq 0.$$

Questa curva, per $t \to \infty$, ha un asintoto obliquo il cui coefficiente angolare è, come è facile verificare,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\operatorname{Im} z(t)^2}{\operatorname{Re} z(t)^2} = \frac{2\tan\vartheta}{\tan^2\vartheta - 1}\,.$$

In particolare, quando $\vartheta > \frac{\pi}{4}$ tale coefficiente è negativo. Dunque, in corrispondenza del valore α fissato è possibile scegliere $\beta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, sufficientemente vicino a $\frac{\pi}{2}$, in modo che la pendenza negativa del corrispondente asintoto, $\frac{2\tan\beta}{\tan^2\beta - 1}$, sia minore della pendenza $\tan\alpha$ della semiretta che delimita il settore $\Sigma_{\alpha,0}$. In questo modo, esiste certamente $r_0 > 0$ tale che i punti di $\Sigma_{\alpha,0} \setminus B(0, r_0)$ stiano al di sopra della curva $z(t)^2$ di parametro β.



Ciò dimostra l'inclusione (1.56). Ciò premesso, sia $\lambda \in \Sigma_{\alpha,0} \setminus B(0, r_0)$: allora, per (1.56), esistono $\vartheta \in]-\beta, \beta[$ e $r_0 > 0$ tali che $\lambda = (\omega + r\,e^{i\vartheta})^2$. Dunque

$$\lambda I_X - A^2 = ((r\,e^{i\vartheta} + \omega)I_X - A)((r\,e^{i\vartheta} + \omega)I_X + A),$$

da cui segue che $\lambda \in \rho(A^2)$ e

$$R(\lambda, A^2) = R(r\,e^{i\vartheta}, A - \omega I_X) R(r\,e^{i\vartheta}, -A - \omega I_X).$$

In particolare, per ogni $\lambda = (\omega + r\,e^{i\vartheta})^2$ con $|\vartheta| < \beta$ si ha

$$|\lambda| \|R(\lambda, A^2)\|_{\mathcal{L}(X)} \le |\lambda| \frac{M^2}{(r\cos\beta - \omega)^2} \le \frac{|\lambda|}{r^2} \frac{M^2}{\cos^2\beta}\,,$$

e dunque vi è una costante $K > 0$ per cui

$$|\lambda| \|R(\lambda, A^2)\|_{\mathcal{L}(X)} \le K \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\alpha,0} \setminus B(0, r_0).$$

Questo è sufficiente per avere la tesi: infatti avendo a disposizione questa stima si può definire il semigruppo $T(\cdot)$ generato da A^2 come in (1.53):

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\eta, r_0 + \varepsilon}} e^{\lambda t} R(\lambda, A^2)\, d\lambda,$$

ove $\eta \in \left]\frac{\pi}{2}, \alpha\right[$ ed $\varepsilon > 0$. $\square$

Il Laplaciano

Sia $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, oppure $X = C_0(\mathbb{R}^n)$, definito come in (1.15) con $\Omega = \mathbb{R}^n$. Consideriamo l'*operatore di Laplace*

$$\begin{cases} D(\Delta) = \{u \in X : \Delta u \in X\} \\ \Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,, \end{cases} \tag{1.57}$$

ove Δu è inteso nel senso delle distribuzioni, vale a dire

$$v = \Delta u \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^n} u\, \Delta\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} v\, \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Vogliamo mostrare che tale operatore è settoriale con angolo π, ed in particolare esso genera un semigruppo analitico in X. Consideriamo per $f \in X$ i gruppi fortemente continui

$$[U_j(t)f](x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

i cui generatori sono gli operatori

$$\begin{cases} D(A_j) = \left\{ u \in X : \ \exists \dfrac{\partial}{\partial x_j} \in X \right\} \\ A_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\, : \end{cases}$$

questo si prova come negli esempi 1.4.6 e 1.4.7. Dato che i semigruppi U_j agiscono su variabili diverse, si ha inoltre per $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}&U_j(t)U_i(s)f = U_i(s)U_j(t)f \qquad \forall s, t \geq 0, \quad \forall f \in X,\\ &A_jA_if = A_iA_jf \qquad \forall f \in X \text{ con } A_if,\, A_jf,\, A_iA_jf,\, A_jA_if \in X.\end{aligned}$$

Per la proposizione 1.12.4, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ l'operatore A_j^2 è settoriale di angolo π e in particolare genera un semigruppo analitico $T_j(\cdot)$ in X, e ancora risulta $T_j(t)T_i(s) = T_i(s)T_j(t)$ per ogni $s, t \geq 0$. Quindi

$$T(t) := \prod_{j=1}^{n} T_j(t), \qquad t \geq 0,$$

è ben definito ed è un semigruppo analitico, con generatore A, settoriale di angolo π. Il dominio di questo operatore è

$$D(A) \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} D(A_j^2) \supseteq \left\{ u \in X : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in X \right\}; \tag{1.58}$$

se $u \in \bigcap_{j=1}^{n} D(A_j^2)$ si ha

$$Af = (A_1^2 + \ldots + A_n^2)f = \Delta f.$$

In generale, come è naturale, $D(A)$, ossia $D(\Delta)$, coincide col dominio (1.57). Se $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, le inclusioni in (1.58) sono tutte uguaglianze (si veda l'osservazione 1.12.6). Se $X = C_0(\mathbb{R}^n)$, invece, tali inclusioni sono strette.
Come è fatto il semigruppo generato dal Laplaciano? Esso, detto *semigruppo di diffusione* oppure *semigruppo del calore*, è dato dalla formula seguente:

$$[T(t)f](x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|_n^2}{4t}} f(y)\, dy, \qquad t > 0, \quad f \in X. \tag{1.59}$$

Non è evidente che questo sia un semigruppo. Tuttavia notiamo anzitutto che

$$[T(t)[T(s)f](x) = (4\pi t)^{-n/2}(4\pi s)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|_n^2}{4t}} e^{-\frac{|y-z|_n^2}{4s}}\, dy\, f(z)\, dz \tag{1.60}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $s, t > 0$. Adesso proviamo questo lemma:

Lemma 1.12.5 *Per $t, s > 0$ e $x, z \in \mathbb{R}^n$ vale l'identità*

$$(4\pi t)^{-n/2}(4\pi s)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|_n^2}{4t}} e^{-\frac{|y-z|_n^2}{4s}}\, dy = (4\pi(t+s))^{-n/2} e^{-\frac{|x-z|_n^2}{4(t+s)}}.$$

Dimostrazione Si parte dalla relazione

$$-\frac{|x-y|_n^2}{4t} - \frac{|y-z|_n^2}{4s} = -\frac{|x-z|_n^2}{4(t+s)} - \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{t}+\frac{1}{s}} \left| \frac{x-y}{t} - \frac{y-z}{s} \right|_n^2, \tag{1.61}$$

la quale si ottiene per verifica diretta, scrivendo $x-z=(x-y)+(y-z)$ e sviluppando i quadrati a secondo membro. Allora, posto

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{s}}}\left(\frac{x-y}{t}-\frac{y-z}{s}\right),$$

si ha

$$dv = \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\right)^{\frac{n}{2}} dy$$

e si ottiene, utilizzando (1.61),

$$\begin{aligned}(4\pi t)^{-n/2}(4\pi s)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|_n^2}{4t}}e^{-\frac{|y-z|_n^2}{4s}}\,dy = \\ = \frac{(4\pi t)^{-n/2}(4\pi s)^{-n/2}}{\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-z|_n^2}{4(t+s)}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|v|_n^2}{4}}\,dv = (4\pi(t+s))^{-n/2}e^{-\frac{|x-z|_n^2}{4(t+s)}}.\end{aligned}$$

Ciò prova il lemma. □

Da questo lemma e da (1.59), (1.60) segue immediatamente che

$$T(t)T(s)f = T(t+s)f \qquad \forall f \in X.$$

Bisogna provare ora che il semigruppo $T(t)$ è fortemente continuo. Notiamo che, ponendo $v = \frac{x-y}{\sqrt{4t}}$ in (1.59), si ha

$$T(t)f(x) = \pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|v|_n^2} f(x-\sqrt{4t}\,v)\,dv, \qquad f \in X.$$

Dunque, essendo $\pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|v|_n^2}\,dv = 1$, possiamo scrivere per $t>0$ e $x \in \mathbb{R}^n$

$$[T(t)f-f](x) = \pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|v|_n^2}[f(x-\sqrt{4t}\,v)-f(x)]\,dv, \qquad f \in X. \tag{1.62}$$

Ora, se $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ si ha da (1.62), per la disuguaglianza di Young,

$$\|T(t)f-f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|v|_n^2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\sqrt{4t}\,v)-f(x)|^p\,dx\right]dv;$$

grazie alla continuità delle traslazioni in L^p, l'integrando (relativo all'integrale rispetto a v) è infinitesimo per $t \to 0^+$, ed è dominato dalla funzione sommabile $e^{-|v|_n^2}\cdot 2\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$: dunque $\|T(t)f-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ tende a 0 per $t \to 0^+$.

Se $X = C_0(\mathbb{R}^n)$, torniamo alla (1.62). Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $R > 0$ abbastanza grande, in modo che

$$\pi^{-n/2}\int_{|v|_n>R} e^{-|v|_n^2}\,dv < \varepsilon, \qquad \sup\{|f(y)| :\ |y|_n > R\} < \varepsilon.$$

Allora risulta

$$\begin{aligned}\|T(t)f(x)-f(x)\|_X &\leq \pi^{-n/2}\int_{|v|_n>R} e^{-|v|_n^2}|f(x-\sqrt{4t}\,v)-f(x)|\,dv+\\ &\qquad +\pi^{-n/2}\int_{|v|_n\leq R} e^{-|v|_n^2}|f(x-\sqrt{4t}\,v)-f(x)|\,dv;\end{aligned}$$

il primo integrale si maggiora semplicemente con $2\varepsilon\|f\|_{C_0(\mathbb{R}^n)}$, mentre il secondo si stima con la quantità

$$\sup\{|f(z)-f(y)|:\ z,y\in B(x,R),\ |z-y|_n<R\sqrt{4t}\}. \tag{1.63}$$

Precisamente, se $x\in\overline{B(0,2R)}$, allora $B(x,R)\subset B(0,3R)$ e quindi (1.63) è dominata da

$$\sup\{|f(z)-f(y)|:\ z,y\in\overline{B(0,3R)},\ |z-y|_n<R\sqrt{4t}\},$$

numero che tende a 0 per $t\to 0^+$, per uniforme continuità. Se invece $x\notin\overline{B(0,2R)}$, allora $B(x,R)\subset\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)$ e quindi la quantità (1.63) è minore di 2ε. Ciò prova che $\|T(t)f-f\|_{C_0(\mathbb{R}^n)}$ tende a 0 per $t\to 0^+$.
Dunque $T(\cdot)$ è un semigruppo fortemente continuo su X.
Verifichiamo adesso che il generatore di $T(\cdot)$ è proprio il Laplaciano (e quindi $T(\cdot)$ è un semigruppo analitico, visto che, come abbiamo osservato, Δ è settoriale). Notiamo che, posto

$$\mu_t(v)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|v|_n^2}{4t}},\qquad v\in\mathbb{R}^n,\quad t>0,$$

la (1.59) mostra che $T(t)f=\mu_t\star f$. Indichiamo con $\mathcal{F}$ l'operatore *trasformata di Fourier* in $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}g(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle x,\xi\rangle_n}g(\xi)\,d\xi,\quad x\in\mathbb{R}^n,\qquad g\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Allora si ha per $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $t>0$

$$[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi)=[\mathcal{F}(\mu_t\star f)](\xi)=[\mathcal{F}\mu_t](\xi)\cdot[\mathcal{F}f](\xi)=e^{-|\xi|^2t}\cdot[\mathcal{F}f](\xi)\quad\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

ove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo *spazio di Schwartz*, vale a dire

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\{v\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ |x^\alpha D^\beta v(x)|\leq M_{v,\alpha,\beta}\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\}.$$

La trasformata di Fourier è un isomorfismo dello spazio di Schwartz in sé; inoltre tale spazio è invariante per il semigruppo $T(\cdot)$, come facile conseguenza del fatto che anche μ_t appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dato che, ovviamente, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset D(\Delta)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in X, per la proposizione 1.3.14 lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un nocciolo per $D(\Delta)$ in X. Ciò osservato, per $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha, come abbiamo visto,

$$[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi)=e^{-|\xi|^2t}\cdot[\mathcal{F}f](\xi),\quad\xi\in\mathbb{R}^n,\quad t>0.$$

Ne segue

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi)=-|\xi|^2e^{-|\xi|^2t}\cdot[\mathcal{F}f](\xi),\quad\xi\in\mathbb{R}^n,\quad t>0,$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{d}{dt}[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi)\right] = -|\xi|^2[\mathcal{F}f](\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

dove la derivata ed il limite sono non solo puntuali, ma nel senso di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: cioè, per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$\xi^\alpha D^\beta \frac{d}{dt}[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi) = \frac{d}{dt}\xi^\alpha D^\beta[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi) = \xi^\alpha D^\beta[-|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t}\cdot[\mathcal{F}f](\xi)],$$

$$\xi^\alpha D^\beta \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{d}{dt}[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi)\right] = \lim_{t\to 0^+}\xi^\alpha D^\beta\left[\frac{d}{dt}[\mathcal{F}(T(t)f)](\xi)\right] = \xi^\alpha D^\beta[-|\xi|^2[\mathcal{F}f](\xi)].$$

Applicando l'isomorfismo $\mathcal{F}^{-1}$, si ottiene per $x\in\mathbb{R}^n$

$$\left[\frac{d}{dt}[T(t)f](x)\right]_{t=0} = \left[\mathcal{F}^{-1}\left(-|\xi|^2[\mathcal{F}f](\xi)\right)\right](x) = \Delta f(x) \qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

ancora puntualmente e nel senso di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ossia, per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$,

$$x^\alpha D^\beta\left[\frac{d}{dt}[T(t)f](x)\right]_{t=0} = x^\alpha D^\beta\Delta f(x) \qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è incluso con continuità in X, si ricava

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)f-f}{t} = \left[\frac{d}{dt}[T(t)f]\right]_{t=0} = \Delta f \quad \text{in } X \qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dato che lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un nocciolo per $D(\Delta)$, la stessa proprietà vale per ogni $f\in D(\Delta)$. Abbiamo così verificato che l'operatore Δ, dato da (1.57), è il generatore del semigruppo $T(\cdot)$, dato da (1.59), in X.

Osservazione 1.12.6 Si noti che se $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$D(\Delta) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n),$$

grazie a classici teoremi di regolarità per i problemi ellittici; invece nel caso $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ è facile verificare che

$$D(\Delta)\subset\bigcap_{p<\infty}W^{2,p}(\mathbb{R}^n),$$

ma manca una caratterizzazione esplicita di tale dominio.

Concludiamo con un cenno a due dei principali problemi ai limiti che coinvolgono il Laplaciano. Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^2. Consideriamo per $f\in X$, con $X = L^p(\Omega)$, $1\le p<\infty$, oppure $X = C(\overline{\Omega})$,

$$\begin{cases}\Delta u = f & \text{in } \Omega\\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\end{cases}$$

(*problema di Dirichlet*), e

$$\begin{cases}\Delta u = f & \text{in } \Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega,\end{cases}$$

ove n è il versore normale esterno a Ω calcolato nei punti di $\partial\Omega$ (*problema di Neumann*). Entrambi questi problemi coinvolgono l'operatore di Laplace con un opportuno dominio: si dimostra che per il problema di Dirichlet, con $X = L^p(\Omega)$, l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \\ Au = \Delta u \qquad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

genera un semigruppo analitico e fortemente continuo, con $0 \in \rho(A)$. Analogamente, nel caso $X = C(\overline{\Omega})$, l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in \bigcap_{q<\infty} W_0^{2,q}(\Omega) : \ Au \in C(\overline{\Omega}) \right\} \\ Au = \Delta u \qquad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

genera un semigruppo analitico ma non fortemente continuo, essendo il dominio non denso. Per il problema di Neumann si hanno risultati analoghi, con la differenza che $0 \notin \rho(A)$, dato che le costanti sono soluzioni, e che il dominio è sempre denso: precisamente, nel caso $X = L^p(\Omega)$ si ha

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\Omega) \\ Au = \Delta u \qquad \forall u \in D(A), \end{cases}$$

mentre nel caso $X = C(\overline{\Omega})$ risulta

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in \bigcap_{q<\infty} W^{2,q}(\Omega) : \ Au \in C(\overline{\Omega}) \right\} \\ Au = \Delta u \qquad \forall u \in D(A). \end{cases} \tag{1.64}$$

Tutti questi fatti hanno dimostrazioni più o meno complicate, che non possono entrare in questi appunti.

Capitolo 2

Problema di Cauchy non omogeneo

2.1 Introduzione

Sia X uno spazio di Banach. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

ove $u : [0,T] \to X$ è l'incognita, $x \in X$ e $f \in C([0,T],X)$ sono i dati, e $A : D(A) \subseteq X \to X$ è un operatore lineare chiuso, generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo in X.
Nel caso del problema omogeneo, in cui $f \equiv 0$, sappiamo che la candidata soluzione è

$$u(t) = T(t)x, \qquad t \geq 0;$$

poiché $D(A)$ è denso in X, essa è una funzione continua su $[0,\infty[$; tuttavia se $x \notin D(A)$ essa non è derivabile e quindi non risolve (2.1). Se invece $x \in D(A)$, allora u è di classe C^1 in $[0,\infty[$ e risolve (2.1) in $[0,\infty[$.
Torniamo al caso non omogeneo, iniziando con le varie possibili nozioni di soluzione per il problema (2.1).

Definizione 2.1.1 *Sia $u : [0,T] \to X$ una funzione.*

(i) *Diciamo che u è* soluzione stretta *di (2.1) se $u \in C^1([0,T],X) \cap C([0,T],D(A))$ e risolve l'equazione in $[0,T]$.*

(ii) *Diciamo che u è* soluzione classica *di (2.1) se $u \in C([0,T],X) \cap C^1(\,]0,T],X) \cap C(\,]0,T],D(A))$ e risolve l'equazione in $]0,T]$.*

(iii) *Diciamo che u è* soluzione forte *di (2.1) se $u \in C([0,T],X)$ ed esiste $\{u_n\} \subset C^1([0,T],X) \cap C([0,T],D(A))$ tale che*

$$u_n \to u \text{ in } C([0,T],X), \quad u_n' - Au_n \to f \text{ in } C([0,T],X), \quad u_n(0) \to x \text{ in } X.$$

In particolare, se $f \equiv 0$ e $x \in D(A)$ la funzione $T(t)x$ è soluzione stretta in $[0,\infty[$ del problema di Cauchy (2.1).

Osservazioni 2.1.2 **(1)** È evidente dalle definizioni che ogni soluzione stretta è anche sia soluzione classica, sia soluzione forte.
(2) Se $A \in \mathcal{L}(X)$, allora per ogni $x \in X$ e $f \in C[0,T],X)$ vi è un'unica soluzione stretta di (2.1), data da

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Infatti, per verifica diretta questa funzione risolve (2.1) ed ha la regolarità richiesta. Se poi v è un'altra soluzione di (2.1), per $t \in]0,T]$ fissato consideriamo la funzione

$$w(s) = e^{(t-s)A}v(s), \qquad s \in [0,t]:$$

si ha $w \in C^1([0,t],X)$ e

$$\begin{aligned} w'(s) &= -Ae^{(t-s)A}v(s) + e^{(t-s)A}v'(s) = \\ &= -Ae^{(t-s)A}v(s) + e^{(t-s)A}[Av(s) + f(s)] = e^{(t-s)A}f(s). \end{aligned}$$

Integrando in $[0,t]$ si trova

$$w(t) - w(0) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds,$$

ed essendo $w(0) = e^{tA}v(0) = e^{tA}x$, si ottiene che w è data da (2.2).
(3) Ripetendo l'argomento precedente, si vede subito che se v è soluzione stretta del problema (2.1), allora necessariamente v è data dalla formula

$$v(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds, \qquad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

la quale, per analogia con le equazioni differenziali ordinarie, è detta *formula di variazione delle costanti*.
Infatti, essendo $v(s) \in D(A)$, la funzione $w(s) = T(t-s)v(s)$, $s \in [0,t]$, è derivabile e

$$\begin{aligned} w'(s) &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s) = \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)[Av(s) + f(s)] = T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Integrando su $[0,t]$ e osservando che $w(t) = v(t)$, $w(0) = T(t)x$, si ottiene (2.3).
(4) Se $A \notin \mathcal{L}(X)$, $x = 0$ e $f(t) = T(t)y$ con $y \notin D(A)$, allora la soluzione stretta di (2.1) non esiste. Infatti se ve ne fosse una, v, essa sarebbe data dalla formula (2.3), cioè

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)y\, ds = tT(t)y,$$

ma questa funzione non è derivabile in $]0,\infty[$.

2.2 Il caso dei semigruppi fortemente continui

Diamo un teorema di esistenza e unicità per le soluzioni strette, classiche e forti del problema (2.1).

Teorema 2.2.1 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso, generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo di costanti M e ω.*

(i) *Se $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T], D(A))$, esiste un'unica soluzione stretta u del problema* (2.1)*, data da*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

(ii) *Se $x \in D(A)$ e $f \in C^1([0,T], X)$, esiste un'unica soluzione stretta u del problema* (2.1)*, data da* (2.4)*.*

(iii) *Se $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T], X)$ con $Af \in C(\,]0,T], X) \cap L^1(0,T;X)$, esiste un'unica soluzione classica u del problema* (2.1)*, data da* (2.4)*.*

(iv) *Se $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T], X)$ con $f' \in C(\,]0,T], X) \cap L^1(0,T;X)$, esiste un'unica soluzione classica u del problema* (2.1)*, data da* (2.4)*.*

(v) *Se $x \in X$ e $f \in C([0,T], X)$, esiste un'unica soluzione forte u del problema* (2.1)*, data da* (2.4)*.*

Dimostrazione (i) Proviamo l'esistenza della soluzione. Sia u la funzione (2.4): poiché $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T], D(A))$, è chiaro che $u \in C([0,T], X)$ e che

$$Au(t) = T(t)Ax + \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

D'altra parte, dato che, per ogni $y \in D(A)$, $t \mapsto T(t)y$ è derivabile con derivata $T(t)Ay$, si ha anche

$$u'(t) = T(t)Ax + f(t) + \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

Tenuto conto che $u(0) = x$, si conclude che u è soluzione stretta del problema (2.1). L'unicità verrà provata più avanti, per soluzioni sia strette che classiche.

(ii) Per mostrare l'esistenza, sia ancora u la funzione (2.4): poiché $f \in C^1([0,T]; X)$, integrando per parti si ha

$$u(t) = T(t)x - A^{-1}f(t) + A^{-1}T(t)f(0) + \int_0^t A^{-1}T(t-s)f'(s)\,ds, \tag{2.5}$$

e quindi possiamo derivare, ottenendo

$$u'(t) = T(t)Ax - A^{-1}f'(t) + T(t)f(0) + A^{-1}f'(t) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

D'altra parte, da (2.5) segue immediatamente che $u \in C([0,T],D(A))$ e che

$$Au(t) = T(t)Ax - f(t) + T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

Dunque, per differenza, si vede subito che u è soluzione stretta del problema (2.1).
(iii) Siano $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T],X)$ con $Af \in C(\,]0,T],X) \cap L^1(0,T;X)$. Per provare che la funzione u definita in (2.4) è soluzione classica, occorre qualche precauzione, perché non è evidente che il termine $\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$ appartenga a $D(A)$. Tuttavia, osserviamo che la quantità $T(t-s)Af(s)$ è ben definita per ogni $s \in\,]0,t]$, e che

$$\left\| \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \right\|_X \le Me^{\omega t}\|Af\|_{L^1(0,t;X)}\,,$$

cosicché possiamo scrivere

$$\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = A^{-1}\int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \in D(A). \tag{2.6}$$

Ciò premesso, è evidente che $u \in C(\,]0,T],D(A))$ e che

$$Au(t) = T(t)Ax + \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \qquad \forall t \in\,]0,T].$$

D'altra parte, dalla (2.6) segue che

$$\frac{d}{dt}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = f(t) + \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds,$$

e pertanto la u è derivabile con

$$u'(t) = T(t)Ax + f(t) + \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \qquad \forall t \in\,]0,T].$$

Poiché $u \in C([0,T],X)$ con $u(0) = x$, si deduce che u è soluzione classica del problema (2.1).
(iv) Siano $x \in D(A)$ e $f \in C([0,T],X)$ con $f' \in C(\,]0,T],X) \cap L^1(0,T;X)$. In questo caso, per $t \in\,]0,T]$ il termine integrale può essere riscritto, integrando per parti, come

$$\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = -A^{-1}f(t) + A^{-1}T(t)f(0) + A^{-1}\int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds; \tag{2.7}$$

dunque u è derivabile, con

$$\begin{aligned} u'(t) &= T(t)Ax - A^{-1}f'(t) + T(t)f(0) + A^{-1}f'(t) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds = \\ &= T(t)Ax + T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \qquad \forall t \in\,]0,T]. \end{aligned}$$

Inoltre la (2.7) mostra che

$$Au(t) = T(t)Ax - f(t) + T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \qquad \forall t \in]0,T].$$

Per differenza si verifica subito che u è soluzione classica di (2.1).
Proviamo infine l'unicità della soluzione stretta o classica, con un facile argomento valido in entrambi i casi. Sia u una soluzione stretta, o classica, di (2.1). Fissato $t \in]0,T]$, definiamo la funzione

$$w(s) = T(t-s)u(s), \qquad s \in [0,t].$$

Allora w è derivabile in $[0,t[$, con

$$\begin{aligned} w'(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) = \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)[Au(s) + f(s)] = T(t-s)f(s) \qquad \forall s \in [0,t[\,. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon \in]0,t[$, integriamo la relazione precedente su $[0,t-\varepsilon]$:

$$w(t-\varepsilon) - w(0) = \int_0^{t-\varepsilon} w'(s)\,ds = \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)f(s)\,ds,$$

da cui

$$T(\varepsilon)u(t-\varepsilon) - T(t)u(0) = \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)f(s)\,ds.$$

Per $\varepsilon \to 0^+$ si ricava che u è data necessariamente dalla formula (2.4).
(v) Dati $x \in X$ e $f \in C([0,T],X)$, sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tale che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T],X)$ tale che $f_n \to f$ in $C([0,T],X)$ per $n \to \infty$. Per (ii), esiste la soluzione stretta u_n del problema (2.1) con dati x_n e f_n; tale u_n è data dalla formula

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\,ds, \qquad t \in [0,T].$$

Per $n \to \infty$ ne segue che $u_n \to u$ in $C([0,T],X)$, ove u è data da (2.5); inoltre, per $n \to \infty$, $u_n' - Au_n = f_n \to f$ in $C([0,T],X)$ e $u_n(0) = x_n \to x$ in X: dunque u, data da (2.5), è soluzione forte del problema (2.1).
Per l'unicità si ragiona come in (iv): se u è una soluzione forte, e se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica per $n \to \infty$

$$u_n \to u \text{ in } C([0,T],X), \quad u_n(0) =: x_n \to x \text{ in } X, \quad u_n - Au_n =: f_n \to f \text{ in } C([0,T],X),$$

allora per $t \in]0,T]$ arbitrariamente fissato

$$\frac{d}{ds}[T(t-s)u_n(s)] = -T(t-s)Au_n(s) + T(t-s)u_n'(s) = T(t-s)f_n(s) \qquad \forall s \in [0,t],$$

da cui, integrando su $[0,t]$,

$$u_n(t) - T(t)x_n = \int_0^t T(t-s)f_n(s)\,ds.$$

Per $n \to \infty$ otteniamo, per $t \in [0,T]$,

$$u_n(t) \to T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Dunque u è data da (2.5). $\square$

2.3 Il caso dei semigruppi analitici

Analizziamo ancora il problema (2.1), supponendo stavolta che nello spazio di Banach X l'operatore A sia generatore di un semigruppo analitico con dominio $D(A)$ non necessariamente denso in X. Cercheremo ancora soluzioni strette, classiche e forti (definizione 2.1.1). Faremo uso, per $\alpha \in]0,1[$, degli spazi hölderiani:

$$C^\alpha([0.T],X) = \{f \in C((0,T],X) : \ \|f(t)-f(s)\|_X \le c_f|t-s|^\alpha \quad \forall s,t \in [0,T]\},$$

ove la migliore costante c_f nella stima sopra scritta è, per definizione,

$$[f]_\alpha = \sup_{t\neq s} \frac{\|f(t)-f(s)\|_X}{|t-s|^\alpha};$$

definiamo anche

$$C^\alpha(\,]0,T],X) = \bigcap_{\delta\in\,]0,T[} C^\alpha([\delta,T],X).$$

Cominciamo con alcune osservazioni.

Osservazioni 2.3.1 **(1)** Le condizioni

$$x \in D(A), \qquad Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$$

sono necessarie per l'esistenza di una soluzione stretta u. Infatti, essendo per definizione $u \in C([0,T],D(A))$, deve essere $u(0) = x \in D(A)$ ed anche

$$Ax + f(0) = u'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h)-x}{h} \in \overline{D(A)}.$$

Risulterà anzi $Au(t) + f(t) \in \overline{D(A)}$ per ogni $t \in [0,T]$.
(2) Affinché esista una soluzione classica o forte è necessario solamente che $x \in \overline{D(A)}$. Risulterà poi $Au(t) + f(t) \in \overline{D(A)}$ per ogni $t \in]0,T]$.

Ed ecco il teorema di esistenza.

Teorema 2.3.2 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso, generatore di un semigruppo analitico $T(\cdot)$, di costanti M e ω.*

(i) *Se $x \in D(A)$, $f \in C^\alpha([0,T],X)$ e $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, esiste un'unica soluzione stretta u del problema* (2.1)*, data da* (2.4)*; inoltre $u', Au \in C^\alpha(\,]0,T],X)$.*

(ii) *Se* $x \in \overline{D(A)}$ *e* $f \in C^\alpha(\,]0,T],X) \cap L^1(0,T;X)$, *esiste un'unica soluzione classica* u *del problema* (2.1), *data da* (2.4).

(iii) *Se* $x \in \overline{D(A)}$ *e* $f \in C([0,T],X)$, *esiste un'unica soluzione forte* u *del problema* (2.1), *data da* (2.4).

Dimostrazione L'unicità si dimostra come nel teorema 2.2.1.
(i) Sia u data da (2.4). Possiamo scrivere

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)[f(s) - f(t)]\,ds + \int_0^t T(t-s)f(t)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Ora notiamo che i tre addendi appartengono a $D(A)$: infatti

$$T(t)x = A^{-1}T(t)Ax;$$

$$\int_0^t T(t-s)[f(s) - f(t)]\,ds = A^{-1}\int_0^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\,ds,$$

e l'integrale ha norma convergente grazie a (1.54) e al fatto che $f \in C^\alpha([0,T],X)$;

$$\int_0^t T(t-s)f(t)\,ds = A^{-1}[T(t) - I_X]f(t).$$

Dunque $u(t) \in D(A)$ per ogni $t \in [0,T]$, con

$$Au(t) = T(t)Ax + \int_0^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\,ds + [T(t) - I_X]f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.8}$$

Per provare che $Au \in C([0,T],X)$ basta verificare la continuità nel punto $t = 0$, poiché negli altri punti la verifica è evidente. Si ha, essendo $f \in C^\alpha([0,T],X)$ e $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, e ricordando la stima (1.54),

$$\begin{aligned}
&\|Au(t) - Ax\|_X \leq \\
&\quad \leq \|T(t)Ax - Ax + T(t)f(t) - f(t)\|_X + \left\|\int_0^t AT(t-s)[f(t) - f(s)]\,ds\right\|_X \leq \\
&\quad \leq \|[T(t) - I_X]Ax + T(t)[f(t) - f(0)] - [f(t) - f(0)] + [T(t) - I_X]f(0)\|_X + \\
&\qquad\qquad + \int_0^t \|AT(t-s)[f(t) - f(s)]\|_X\,ds \leq \\
&\quad \leq \|[T(t) - I_X][Ax + f(0)]\|_X + ct^\alpha = \mathrm{o}(1) \text{ per } t \to 0^+.
\end{aligned}$$

Per provare che $u \in C^1([0,T],X)$, fissiamo $\delta \in\,]0,T[$ e consideriamo le funzioni, definite su $[\delta,T]$,

$$u_\varepsilon(t) = T(t)x + \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)f(s)\,ds, \qquad 0 < \varepsilon < \delta.$$

Chiaramente, $u_\varepsilon \to u$ uniformemente in $[\delta, T]$ per $\varepsilon \to 0^+$. Inoltre, poiché la funzione u_ε non ha singolarità, possiamo derivare:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon'(t) &= T(t)Ax + T(\varepsilon)f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)f(s)\,ds = \\ &= T(t)Ax + T(\varepsilon)f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds - [T(t-s)f(t)]_0^{t-\varepsilon} = \\ &= T(t)Ax + T(\varepsilon)f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds + T(t)f(t) - T(\varepsilon)f(t). \end{aligned}$$

Per $\varepsilon \to 0^+$ si ottiene $u_\varepsilon'(t) \to Au(t) + f(t)$: infatti da (2.8) segue

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon'(t) - Au(t) - f(t)\|_X = \\ &\quad = \left\| - \int_{t-\varepsilon}^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds + T(\varepsilon)[f(t-\varepsilon) - f(t)] \right\|_X \le \\ &\quad \le c \int_{t-\varepsilon}^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds + c\,\varepsilon^\alpha \le C\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Perciò $u_\varepsilon \to u$ e $u_\varepsilon' \to Au + f$ per $\varepsilon \to 0^+$, uniformemente in $[\delta, T]$; dunque, per l'arbitrarietà di δ, esiste $u' = Au + f$ in $]0, T]$. Ma siccome $Au + f \in C([0,T], X)$, per $t \to 0^+$ si ricava che esiste $u'(0) = Ax + f(0)$ e pertanto $u \in C^1([0,T], X)$. In definitiva, u è soluzione stretta.
Resta da provare che $u', Au \in C^\alpha(\,]0,T], X)$, e basta mostrare che Au appartiene a tale spazio. Siano $t, \tau \in [\delta, T]$ con $t > \tau$. Da (2.8) si ha

$$\begin{aligned} Au(t) - Au(\tau) &= [T(t) - T(\tau)]Ax + [T(t) - T(\tau)]f(t) + [T(\tau) - I_X][f(t) - f(\tau)] + \\ &\quad + \int_\tau^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds + \int_0^\tau AT(t-s)[f(\tau) - f(t)]\,ds + \\ &\quad + \int_0^\tau [AT(t-s) - AT(\tau-s)][f(s) - f(\tau)]\,ds. \end{aligned}$$

Sono 6 addendi I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6. Risulta

$$\begin{aligned} \|I_1\|_X &= \left\| \int_\tau^t AT(\sigma)Ax\,d\sigma \right\|_X \le c \int_\tau^t \frac{d\sigma}{\sigma} \|Ax\|_X \le \frac{c}{\tau^{1-\alpha}} \|Ax\|_X (t-\tau)^\alpha \le \\ &\le \frac{c}{\delta^{1-\alpha}} \|Ax\|_X (t-\tau)^\alpha; \end{aligned}$$

analogamente, si ha

$$\|I_2\|_X \le \frac{c}{\delta^{1-\alpha}} \|f\|_{C([0,T],X)} (t-\tau)^\alpha.$$

Inoltre

$$\|I_3\|_X \le c\|f(t) - f(\tau)\|_X \le c(t-\tau)^\alpha,$$

$$\|I_4\|_X \le c \int_\tau^t \frac{1}{t-s}(t-s)^\alpha\,ds = C(t-\tau)^\alpha,$$

$$\|I_5\|_X = \|[T(t) - T(t-\tau)][f(t) - f(\tau)]\|_X \leq c(t-\tau)^\alpha,$$

ed infine, grazie a (1.55),

$$\begin{aligned}
\|I_6\|_X &= \left\| \int_0^\tau \int_{\tau-s}^{t-s} A^2 T(\sigma)[f(s) - f(t)]\, d\sigma\, ds \right\|_X \leq c \int_0^\tau \int_{\tau-s}^{t-s} \frac{(t-s)^\alpha}{\sigma^2} d\sigma\, ds \leq \\
&\leq c \int_0^\tau \left[\frac{1}{(\tau-s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} \right] ds \leq (t-\tau)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Dunque, $Au \in C([\delta, T], X)$, e l'arbitrarietà di δ ci permette di concludere.

(ii) Sia u data da (2.4). Fissato $\delta \in]0, T[$, possiamo scrivere per $t \in [\delta, T]$

$$\begin{aligned}
Au(t) = T(t)Ax + \int_0^{\delta/2} AT(t-s) f(s)\, ds + \\
+ \int_{\delta/2}^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds + T(t-\delta/2) f(t) - f(t);
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ed anche

$$\begin{aligned}
u'(t) &= T(t)Ax + \int_0^{\delta/2} AT(t-s) f(s)\, ds + f(t) + \\
&+ \lim_{h \to 0} \frac{T(t+h-s) - T(t-s)}{h} [f(s) - f(t) + f(t)]\, ds = \\
&= T(t)Ax + \int_0^{\delta/2} AT(t-s) f(s)\, ds + f(t) + \\
&+ \int_{\delta/2}^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds + \\
&+ \lim_{h \to 0} \left[-A^{-1} \frac{T(h) - I_X}{h} f(t) + A^{-1} \frac{T(t-\delta/2+h) - T(t-\delta/2)}{h} f(t) \right] = \\
&= T(t)Ax + \int_0^{\delta/2} AT(t-s) f(s)\, ds + \\
&+ \int_{\delta/2}^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds + T(t-\delta/2) f(t).
\end{aligned}$$

Ne segue $u'(t) - Au(t) = f(t)$ in $[\delta, T]$, e dunque, per l'arbitrarietà di δ, in $]0, T]$. Proviamo che u' e Au appartengono a $C^\alpha(]0, T], X)$: basta provarlo per Au. Dalla relazione sopra scritta segue, per $t > \tau \geq \delta$,

$$\begin{aligned}
Au(t) - Au(\tau) &= \int_\tau^t AT(\sigma)Ax\, d\sigma + \int_0^{\delta/2} \int_{\tau-s}^{t-s} A^2 T(\sigma) f(s)\, d\sigma ds + \\
&+ \int_\tau^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds + \int_{\delta/2}^\tau AT(t-s)[f(\tau) - f(t)]\, ds + \\
&+ \int_{\delta/2}^\tau \int_{\tau-s}^{t-s} A^2 T(\sigma)[f(s) - f(\tau)]\, d\sigma ds + \int_{\tau-\delta/2}^{t-\delta/2} AT(\sigma) f(t)\, d\sigma + \\
&+ [T(\tau-\delta/2) - I_X][f(t) - f(\tau)] = \sum_{i=1}^7 J_i\,.
\end{aligned}$$

Analizziamo separatamente ciascun addendo J_i. Utilizzando le stime (1.54), (1.55) e l'ipotesi di regolarità su f, risulta

$$\|J_1\|_X \leq c\int_\tau^t \frac{d\sigma}{\sigma} = c\ln\left(1+\frac{t-\tau}{\tau}\right) \leq c\frac{(t-\tau)^\alpha}{\delta^\alpha};$$

$$\|J_2\|_X \leq c\int_0^{\delta/2}\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{d\sigma}{\sigma^2}\,ds = c\int_0^{\delta/2}\frac{t-\tau}{(\tau-s)(t-s)}\,ds \leq c\frac{(t-\tau)^\alpha}{(\delta/2)^\alpha};$$

$$\|J_3\|_X \leq c\int_{\delta/2}^{\tau}\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{(\tau-s)^\alpha}{\sigma^2}\,d\sigma\,ds = c\int_{\delta/2}^{\tau}\frac{t-\tau}{(\tau-s)^{1-\alpha}(t-s)}\,ds \leq c\frac{(t-\tau)^\alpha}{(\delta/2)^\alpha};$$

$$\|J_4\|_X \leq c\int_{\delta/2}^{\tau}\frac{(t-\tau)^\alpha}{t-s}\,ds \leq c\frac{(t-\tau)^\alpha}{\delta/2};$$

$$\|J_5\|_X \leq c\int_{\delta/2}^{\tau}\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{(\tau-s)^\alpha}{\sigma^2}\,d\sigma\,ds = c\int_{\delta/2}^{\tau}\frac{t-\tau}{(\tau-s)^{1-\alpha}(t-s)}\,ds \leq c\frac{(t-\tau)^\alpha}{(\delta/2)^\alpha};$$

$$\|J_6\|_X \leq c\int_{\tau-\delta/2}^{t-\delta/2}\frac{d\sigma}{\sigma} \leq c\ln\left(1+\frac{t-\tau}{\delta/2}\right) \leq c\frac{(t-\tau)^\alpha}{\delta^\alpha};$$

ed infine, ovviamente,

$$\|J_7\|_X \leq c(t-\tau)^\alpha.$$

Dunque $Au \in C^\alpha([\delta,T],X)$, ed essendo δ arbitrario si ha $Au \in C^\alpha(\,]0,T],X)$.

(iii) La dimostrazione è uguale a quella del teorema 2.2.1(v), con la variante che adesso $x \in \overline{D(A)}$, il che garantisce la forte continuità di $t \mapsto T(t)x$ per $t \to 0^+$. $\square$

Osservazione 2.3.3 Si possono fare molti perfezionamenti al teorema 2.3.2, ma questo richiede l'uso degli *spazi di interpolazione* fra $D(A)$ e X: si tratta di spazi intermedi, un po' come $C^\alpha([0,T],X)$ è intermedio fra $C^1([0,T],X)$ e $C([0,T],X)$. Precisamente, osservando che per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|T(t)x - x\|_X \leq C \quad \forall x \in X, \qquad \|T(t)x - x\|_X \leq C\,t \quad \forall x \in D(A),$$

possiamo definire per $\alpha \in]0,1[$

$$D_A(\alpha,\infty) = \{x \in X : \ \|T(t)x - x\|_X \leq C\,t^\alpha \ \ \forall t \in [0,1]\};$$

questo è un sottospazio normato di X con norma

$$\|x\|_{D_A(\alpha,\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t\in[0,1]} t^{-\alpha}\|T(t)x - x\|_X\,. \tag{2.10}$$

Di più, osservato che

$$\|tAT(t)x\|_X \leq C \quad \forall x \in X, \qquad \|AT(t)x\|_X \leq C \quad \forall x \in D(A),$$

si dimostra che

$$D_A(\alpha,\infty) = \{x \in X : \ \|t^{1-\alpha}AT(t)x\|_X \leq C \ \ \forall t \in [0,1]\},$$

e che la quantità
$$\|x\|_X + \sup_{t\in[0,1]} t^{1-\alpha}\|AT(t)x\|_X$$
è una norma su $D_A(\alpha,\infty)$ equivalente alla norma (2.10). Questi spazi sono stati caratterizzati in molti casi concreti. Per esempio, se $X = C(\overline{\Omega})$, con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2 (si veda l'osservazione 1.12.6, in particolare la (1.64)), allora si dimostra che il Laplaciano Δ, con condizioni di Dirichlet al bordo, genera un semigruppo analitico, e che in tal caso si ha per $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$
$$D_A(\alpha,\infty) = \{u \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega}) : \ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$
mentre per $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$
$$D_A(\alpha,\infty) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : \ u' \in C^{2\alpha}(\overline{\Omega}), \ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\};$$
nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha invece
$$D_A(\tfrac{1}{2},\infty) = \{u \in \Lambda^1(\overline{\Omega}) : \ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$
ove
$$\Lambda^1(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \ |u(x) + u(y) - 2u(\tfrac{x+y}{2})| \le C|x-y| \ \ \forall x, y \in \overline{\Omega}\}.$$
Ciò premesso, si hanno i seguenti risultati, che non dimostriamo per brevità:

1. se $f \in C^\alpha([0,T],X)$, $x \in D(A)$ e $Ax + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$, allora per la soluzione stretta u del problema (2.1) si ha $u', Au \in C^\alpha([0,T],X)$; inoltre $u' \in B(0,T; D_A(\alpha,\infty))$, ossia è limitata a valori in $D_A(\alpha,\infty)$;

2. se $f \in C([0,T],X) \cap B(0,T; D_A(\alpha,\infty))$, $x \in D(A)$ e $Ax \in D_A(\alpha,\infty)$, allora per la soluzione stretta u del problema (2.1) si ha $u', Au \in B([0,T], D_A(\alpha,\infty))$; inoltre $u' \in C^\alpha(0,T;X)$.

Questi enunciati sono risultati di *regolarità massimale*, e sono tipici dei problemi di evoluzione modellati da semigruppi analitici. Le dimostrazioni però richiederebbero uno spazio eccessivo per i limiti di questo corso.

Capitolo 3

Perturbazione di semigruppi

Il problema generale è il seguente: in uno spazio di Banach X, dato un operatore lineare chiuso $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatore di un semigruppo, e dato un altro operatore lineare $B : D(B) \subseteq X \to X$, cercare condizioni affinché $A + B$ generi a sua volta un semigruppo. L'operatore B è una *perturbazione* di A; il suo dominio $D(A + B)$ è, a priori, l'intersezione $D(A) \cap D(B)$, la quale in generale potrebbe essere $\{0\}$.

Esempi 3.0.1 **(1)** Se A è un operatore illimitato, quindi con $D(A) \neq X$, e scegliamo $B = -A$, allora $A + B = 0$ sul suo dominio, che è $D(A)$. Dunque questo operatore non è chiuso. Se invece $B = -2A$, allora $A + B = -A$ sul suo dominio $D(A)$; esso genera un semigruppo solo nel caso in cui A generi un gruppo, e non solo un semigruppo.
(2) Sia $X = C_0([0, \infty[)$, e poniamo $Af = f'$ con dominio $D(A) = C_0^1([0, \infty[)$. Sia S l'operatore di moltiplicazione $Sf = q\,f$ per ogni $f \in X$, con q funzione positiva, continua, tale che q e q^{-1} siano limitate e mai derivabili in $[0, \infty[$. Posto $B = SAS^{-1}$, ossia $Bf = q(q^{-1}f)'$, sul dominio $D(B) = \{f \in X : \; q^{-1}f \in D(A)\}$, si vede che $A + B$ è definito solo in $\{0\}$: infatti, se fosse $f \in D(A) \cap D(B)$ e $f \neq 0$, allora f e $q^{-1}f$ dovrebbero essere di classe C^1. Dunque avremmo

$$\begin{aligned}
(q^{-1}f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{q^{-1}(x+h)f(x+h) - q^{-1}(x)f(x)}{h} = \\
&= q^{-1}(x+h)\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{q^{-1}(x+h) - q^{-1}(x)}{h}\,f(x)
\end{aligned}$$

da cui, se $f(x) \neq 0$,

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{q^{-1}(x+h) - q^{-1}(x)}{h} = \frac{1}{f(x)} \left[(q^{-1}f)'(x) - q^{-1}(x)f'(x)\right],$$

il che è assurdo. Dunque deve essere $f \equiv 0$.

Quindi, il problema delle perturbazioni di un semigruppo è delicato. Ma, come vedremo, in certi casi funziona.

3.1 Perturbazioni limitate

Il caso di perturbazioni $B \in \mathcal{L}(X)$ è relativamente semplice: vale infatti il seguente risultato.

Teorema 3.1.1 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo di costanti M, ω. Se $B \in \mathcal{L}(X)$, allora $A+B$, con dominio $D(A)$, è un operatore chiuso che genera un semigruppo fortemente continuo $S(\cdot)$, di costanti M e $\omega + M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}$.*

Dimostrazione Il fatto che $A + B$ sia chiuso è banale: se $\{x_n\} \subset D(A)$ e $x_n \to x$, $(A + B)x_n \to y$, allora $Bx_n \to Bx$ e dunque $Ax_n \to y - Bx$. Poiché A è chiuso, deve essere $y \in D(A)$ e $y - Bx = Ax$, ossia $(A + B)x = y$.
Proviamo l'esistenza del semigruppo $S(\cdot)$. Si ha $\lambda \in \rho(A)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, e possiamo scrivere per tali λ

$$\lambda I_X - (A + B) = [I_X - BR(\lambda, A)](\lambda I_X - A).$$

Essendo $\lambda I_X - A$ bigettivo, si deduce che $\lambda I_X - (A + B)$ è bigettivo se e solo se lo è $I_X - BR(\lambda, A)$, ed anzi

$$\lambda \in \rho(A+B) \quad \Longleftrightarrow \quad [\lambda I_X-(A+B)]^{-1} \in \mathcal{L}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad [I_X-BR(\lambda, A)]^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

ed in tal caso avremo

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A)[I_X - BR(\lambda, A)]^{-1}. \tag{3.1}$$

Scegliamo ora $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega + M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}$: allora

$$\|BR(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega} < 1,$$

quindi $\lambda \in \rho(A + B)$ e

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A)\sum_{n=0}^{\infty}[BR(\lambda, A)]^n,$$

e vale la stima

$$\|R(\lambda, A + B)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}{\mathrm{Re}\,\lambda-\omega}} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega - M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Dunque, in virtù del teorema di Hille-Yosida, (teorema 1.8.2) $A + B$ genera un semigruppo $S(\cdot)$ tale che

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{(\omega+M\|B\|_{\mathcal{L}(X)})t} \qquad \forall t \ge 0. \quad \square$$

Abbiamo dimostrato che il semigruppo $S(\cdot)$ generato da $A+B$ esiste: adesso vogliamo trovarne una formula di rappresentazione. Fissato $x \in X$, sia $u(t) = S(t)x$, $t \geq 0$: allora u è soluzione forte del problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + Bu(t), & t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

e quindi, utilizzando la formula (2.4),

$$u(t) = S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x\,ds, \quad t \geq 0,$$

Fissiamo $t_0 > 0$ e consideriamo questa equazione integrale in $[0,t_0]$ nell'incognita $S(\cdot)$: si tratta di um'equazione integrale di Volterra. Posto

$$[VG](t) = \int_0^t T(t-s)BG(s)\,ds, \quad t \in [0,t_0], \quad G \in C([0,t_0],\mathcal{L}(X)),$$

essa si può riscrivere nella forma operatoriale

$$[(I_{\mathcal{L}(X)} - V)S](t) = T(t), \quad t \in [0,t_0]. \tag{3.2}$$

Formalmente, la soluzione di questa equazione è la serie

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty}[V^kT](t), \quad t \in [0,t_0];$$

per mostrare che questa formula ha senso e fornisce davvero il semigruppo $S(\cdot)$, occorre provare che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} V^k \tag{3.3}$$

è convergente nella norma di $C([0,t_0],\mathcal{L}(X))$. A questo scopo, dimostriamo che per ogni $t \in [0,t_0]$ e per ogni $F \in C([0,t_0],\mathcal{L}(X))$ vale la relazione

$$\|V^kF\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))} \leq \frac{1}{k!}\left[t \cdot \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s\in[0,t]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right]^k \|F\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Infatti, per $k=1$ risulta per ogni $\tau \in [0,t]$

$$\begin{aligned} \|[VF](\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_0^\tau \|T(\tau-s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}\|F(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\,ds \leq \\ &\leq t \cdot \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{\sigma\in[0,t]} \|T(\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)}\|F\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))}\,. \end{aligned}$$

Se la (3.4) vale per k, allora

$$\begin{aligned} &\|V^{k+1}F\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))} = \\ &\quad = \|V[V^kF]\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))} \leq \sup_{\tau\in[0,t]} \int_0^\tau \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s\in[0,t]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|V^kF\|_{C([0,\tau],\mathcal{L}(X))}\,d\tau, \end{aligned}$$

e utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\|V^{k+1}F\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))} \le$$
$$\le \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s\in[0,t} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{\tau\in[0,t]} \int_0^\tau \frac{1}{k!} \left[\tau \cdot \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s\in[0,t]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right]^k d\tau \le$$
$$\le \left[t \cdot \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s\in[0,t]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right]^{k+1} \|F\|_{C([0,t],\mathcal{L}(X))}\,;$$

ciò prova la (3.4). Questa stima mostra che la serie (3.3) è convergente nello spazio $C([0,t_0],\mathcal{L}(X))$: perciò il semigruppo $S(\cdot)$ è dato da

$$S(t) = [(I_{\mathcal{L}(X)} - V)^{-1}T](t) = \sum_{k=0}^{\infty}[V^kT](t), \qquad t \in [0,t_0],$$

ovvero, in forma più esplicita e ricordando che t_0 è arbitrario,

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t), \qquad t \ge 0,$$

ove $S_k(\cdot)$ è definito ricorsivamente da

$$S_0(t) = T(t), \qquad S_{k+1}(t) = [VS_k](t), \quad k \in \mathbb{N}, \qquad t \ge 0.$$

Notiamo infine che, essendo $T(\cdot)$ fortemente continuo, anche $S(\cdot)$ risulta fortemente continuo. □

Osservazioni 3.1.2 **(1)** Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ genera un semigruppo analitico, e se $B \in \mathcal{L}(X)$, allora $A + B$ genera un semigruppo analitico. La dimostrazione è la stessa: il semigruppo $S(\cdot)$ è analitico perché, in virtù di (3.1), se $\rho(A)$ contiene il settore $\Sigma_{\vartheta,\omega}$, con $\omega \in \mathbb{R}$ e $\pi/2 < \vartheta < \pi$, allora $\rho(A + B)$ contiene il settore $\Sigma_{\vartheta,\omega+M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}$.
(2) Se $R(\lambda, A)$ è compatto e $B \in \mathcal{L}(X)$, allora $R(\lambda, A+B)$ è compatto, essendo, grazie a (3.1), il prodotto di due operatori, uno dei quali è compatto.

3.2 Perturbazioni non limitate

Consideriamo adesso il caso di una perturbazione costituita da un operatore lineare $B : D(B) \subseteq X \to X$, non limitato, sotto opportune ipotesi.

Definizione 3.2.1 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Diciamo che $B : D(B) \subseteq X \to X$ è* relativamente limitato *rispetto ad A, o più brevemente* A-limitato, *se $D(A) \subseteq D(B)$ ed esistono $a, b \ge 0$ tali che*

$$\|Bx\|_X \le a\|Ax\|_X + b\|x\|_X \qquad \forall x \in D(A). \tag{3.5}$$

La A-limitazione *di B è il numero*

$$a_0 = \inf\{a > 0 : \ \exists b > 0 \text{ per cui vale } (3.5)\}.$$

Esempio 3.2.2 Sia $I = [a, b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e definiamo nello spazio $X = L^p(a, b)$, con $1 \le p < \infty$,

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(a,b) \\ Au = u'' \quad \forall u \in D(A), \end{cases} \qquad \begin{cases} D(B) = W^{1,p}(a,b) \\ Bu = u' \quad \forall u \in D(B). \end{cases}$$

Dimostriamo che B è A-limitato con $a_0 = 0$. Sia $J = [\alpha, \beta] \subset I$. Siano inoltre, ponendo per comodità $\varepsilon = \beta - \alpha$,

$$J_1 = [\alpha, \alpha + \varepsilon/3], \quad J_2 = [\alpha + \varepsilon/3, \beta - \varepsilon/3], \quad J_3 = [\beta - \varepsilon/3, \beta].$$

Allora se $f \in D(A)$, $s \in J_1$ e $t \in J_3$, per il teorema di Lagrange esiste $x_0 \in J$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s};$$

dunque per ogni $x \in J$ si ha

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| f'(x_0) + \int_{x_0}^x f''(y)\,dy \right| \le \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| + \left| \int_{x_0}^x f''(y)\,dy \right| \le \\ &\le \frac{3}{\varepsilon}\,[|f(t)| + |f(s)|] + \int_J |f''(y)|\,dy. \end{aligned}$$

Integriamo rispetto a $s \in J_1$ e a $t \in J_3$:

$$\frac{\varepsilon^2}{9}|f'(x)| \le \int_{J_3} |f(t)|\,dt + \int_{J_1} |f(s)|\,ds + \frac{\varepsilon^2}{9} \int_J |f''(y)|\,dy.$$

Ne segue, per ogni $x \in J$,

$$\frac{\varepsilon^2}{9}|f'(x)| \le \|f\|_{L^1(J)} + \frac{\varepsilon^2}{9}\|f''\|_{L^1(J)}\,. \tag{3.6}$$

Se $p = 1$ abbiamo quasi finito: con una nuova integrazione su J, dopo semplificazioni, si trova

$$\|f'\|_{L^1(J)} \le \varepsilon\|f''\|_{L^1(J)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{L^1(J)}\,,$$

relazione che vale per ogni intervallo $J \subset I$ di ampiezza ε. Possiamo ora ricoprire I con un numero finito di intervalli di questo tipo: sommando le relazioni valide per ciascuno di questi, si ricava subito

$$\|f'\|_{L^1(a,b)} \le \varepsilon\|f''\|_{L^1(a,b)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{L^1(a,b)}\,.$$

Questa stima prova che $a_0 = 0$ nel caso $X = L^1(a, b)$.
Prima di passare al caso $p > 1$ notiamo che anche nel caso di $X = C[a, b]$, con

$$\begin{cases} D(A) = C^2[a,b] \\ Au = u'' \quad \forall u \in D(A), \end{cases} \qquad \begin{cases} D(B) = C^1[a,b] \\ Bu = u' \quad \forall u \in D(B), \end{cases}$$

si ottiene, come ovvia conseguenza di (3.6),

$$\|f'\|_{C(J)} \le \varepsilon \|f''\|_{C(J)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{C(J)}\,,$$

e dunque, fissato un punto di massimo x_0 per $|f'|$ in I e scelto un intervallo $J \subset I$ di ampiezza ε contenente x_0, da questa relazione segue subito

$$\|f'\|_{C(I)} = \|f'\|_{C(J)} \le \varepsilon \|f''\|_{C(J)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{C(J)} \le \varepsilon \|f''\|_{C(I)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{C(I)}\,,$$

e ciò prova che $a_0 = 0$ nel caso $X = C[a,b]$.
Vediamo il caso $p > 1$: ripartendo da (3.6) e passando alla norma p, si ottiene, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$\frac{\varepsilon^2}{9}\|f'\|_{L^p(J)} \le \varepsilon^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^1(J)} + \frac{\varepsilon^{2+\frac{1}{p}}}{9}\|f''\|_{L^1(J)} \le \varepsilon\|f\|_{L^p(J)} + \frac{\varepsilon^3}{9}\|f''\|_{L^1(J)};$$

pertanto, analogamente al conto precedente, si ha, per ogni intervallo J di ampiezza ε,

$$\|f'\|_{L^p(J)} \le \varepsilon\|f''\|_{L^p(J)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{L^p(J)}\,.$$

Come prima, ricoprendo I con un numero finito di tali intervalli, e sommando le relative relazioni, si ha

$$\|f'\|^p_{L^p(I)} \le 2^{p-1}\left[\varepsilon^p\|f''\|^p_{L^p(I)} + \left(\frac{9}{\varepsilon}\right)^p\|f\|^p_{L^p(I)}\right],$$

da cui

$$\|f'\|_{L^p(I)} \le 2^{\frac{p-1}{p}}\left[\varepsilon^p\|f''\|^p_{L^p(I)} + \left(\frac{9}{\varepsilon}\right)^p\|f\|^p_{L^p(I)}\right]^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{p-1}{p}}\left[\varepsilon\|f''\|_{L^p(I)} + \frac{9}{\varepsilon}\|f\|_{L^p(I)}\right].$$

Ciò mostra che $a_0 = 0$ anche nel caso $X = L^p(a,b)$, $1 < p < \infty$.

La nozione di A-limitatezza garantisce che $D(A+B) = D(A)$, ma non è sufficiente per estendere il teorema 3.1.1 senza una stima superiore per la A-limitazione a_0. Iniziamo il cammino verso l'estensione con alcuni lemmi.

Lemma 3.2.3 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore chiuso; sia inoltre $B : D(B) \subseteq X \to X$ un operatore A-limitato con $a_0 < 1$. Allora $A + B : D(A) \subseteq X \to X$ è chiuso.*

Dimostrazione Essendo A chiuso, lo spazio $D(A)$, munito della norma del grafico di A, è uno spazio di Banach. Dunque, per provare la tesi basta dimostrare che su $D(A)$ la norma del grafico di A è equivalente alla norma del grafico di $A + B$, perché in tal caso $D(A)$, con quest'ultima norma, sarà uno spazio di Banach e dunque $A + B$ sarà chiuso.
Per ipotesi, esistono $a \in]0,1[$ e $b > 0$ tali che

$$\|Bx\|_X \le a\|Ax\|_X + b\|x\|_X \qquad \forall x \in D(A).$$

Di conseguenza,

$$\|Ax\|_X = \|(A+B)x - Bx\|_X \leq \|(A+B)x\|_X + a\|Ax\|_X + b\|x\|_X\,,$$

e quindi

$$-b\|x\|_X + (1-a)\|Ax\|_X \leq \|(A+B)x\|_X \leq (1+a)\|Ax\|_X + b\|x\|_X;$$

pertanto

$$b\|x\|_X + (1-a)\|Ax\|_X \leq 2b\|x\|_X + \|(A+B)x\|_X \leq 3b\|x\|_X + (1+a)\|Ax\|_X\,,$$

ossia le due norme sono equivalenti. $\square$

Lemma 3.2.4 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore chiuso con risolvente $\rho(A) \neq \emptyset$; sia inoltre $B : D(B) \subseteq X \to X$ un operatore A-limitato con costanti $a \geq 0$ e $b > 0$. Se risulta*

$$\lambda_0 \in \rho(A), \quad c := a\|AR(\lambda_0, A)||_{\mathcal{L}(X)} + b\|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

allora $A + B$ è chiuso, $\lambda_0 \in \rho(A + B)$ e

$$\|R(\lambda_0, A+B)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1-c}\|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)}\,. \tag{3.7}$$

Dimostrazione Procedendo come all'inizio della dimostrazione del teorema 3.1.1, si trova

$$\lambda_0 I_X - A - B = [I_X - BR(\lambda_0, A)](\lambda_0 I_X - A).$$

Ora, $\lambda_0 I_X - A : D(A) \to X$ è bigettivo, mentre $BR(\lambda_0, A)$ è una contrazione: infatti

$$\|BR(\lambda_0, A)x\|_X \leq a\|AR(\lambda_0, A)x\|_X + b\|R(\lambda_0, A)x\|_X \leq c\|x\|_X < \|x\|_x \quad \forall x \in X.$$

Dunque si ottiene che $\lambda_0 \in \rho(A + B)$ e

$$R(\lambda_0, A+B) = R(\lambda_0, A)\sum_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda_0, A)]^k;$$

in particolare vale la stima (3.7).
Mostriamo infine che $A+B$ è chiuso. Sia $\{x_n\} \subset D(A)$ tale che $x_n \to x$ e $(A+B)x_n \to y$ in X. Allora $\lambda_0 x_n - (A+B)x_n \to \lambda_0 x - y$; d'altra parte, scrivendo

$$x_n = R(\lambda_0, A+B)[\lambda_0 x_n - (A+B)x_n]$$

si vede che il primo membro tende a x mentre il secondo ha limite $R(\lambda_0, A+B)(\lambda_0 x - y)$, il che implica $x = R(\lambda_0, A+B)(\lambda_0 x - y)$. Pertanto $x \in D(A)$ e $\lambda_0 x - (A+B)x = \lambda_0 x - y$, ossia $(A+B)x = y$. $\square$

Lemma 3.2.5 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore settoriale, tale che $\rho(A)$ contenga il settore $\Sigma_{\vartheta,0}$, con $\vartheta \in [0,\pi]$, ed esista $M \geq 1$ per cui*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\vartheta,0};$$

sia inoltre $B : D(B) \subseteq X \to X$ un operatore A-limitato con $a_0 < \frac{1}{M+1}$. Allora esistono $r > 0$ e $M' \geq 1$ tali che $\rho(A+B) \supseteq \Sigma_{\vartheta,0} \setminus B(0,r)$ e

$$\|R(\lambda, B)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M'}{|\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\vartheta,0} \setminus B(0,r).$$

Dimostrazione Siano $a \in \left]0, \frac{1}{M+1}\right[$ e $b > 0$ tali che

$$\|Bx\|_X \leq a\|Ax\|_X + b\|x\|_X \qquad \forall x \in D(A).$$

Allora risulta, per $|\lambda| > r := \frac{bM}{1-a(M+1)}$,

$$c := a\|AR(\lambda, A)x\|_X + b\|R(\lambda, A)x\|_X \leq a(1+M) + b\frac{M}{|\lambda|} < 1.$$

La tesi segue dal lemma 3.2.4. $\square$

Dai lemmi precedenti segue che sappiamo stimare la norma di $R(\lambda, A+B)$ ma non quella delle sue potenze: questo significa che potremo trattare solo le perturbazioni non limitate di semigruppi contrattivi o analitici, cosa che faremo nei prossimi due teoremi.

Teorema 3.2.6 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ il generatore di un semigruppo contrattivo; sia inoltre $B : D(B) \subseteq X \to X$ un operatore dissipativo e A-limitato con $a_0 < 1$. Allora $A + B : D(A) \to X$ è generatore di un semigruppo contrattivo.*

Dimostrazione Supponiamo dapprima $0 \leq a_0 < \frac{1}{2}$. Dalla dissipatività di B, in virtù dell'osservazione 1.10.3, segue che per ogni $x \in D(B)$ esiste $\varphi \in J(x)$ tale che $\operatorname{Re}\varphi(Bx) \leq 0$, ed in particolare questa proprietà vale per ogni $x \in D(A)$. Quindi

$$\operatorname{Re}\varphi((A+B)x) = \operatorname{Re}\varphi(Ax) + \operatorname{Re}\varphi(Bx) \leq 0,$$

visto che il primo addendo è non negativo per la proposizione 1.10.8. Pertanto $A+B$ è dissipativo, con dominio denso. Per provare che $A+B$ genera un semigruppo contrattivo, grazie al teorema di Lumer-Phillips (teorema 1.10.9) basta mostrare che esiste $\lambda_0 > 0$ tale che $\lambda_0 \in \rho(A+B)$: questo segue dal lemma 3.2.5, scegliendo $\vartheta = 0$ e $M = 1$.
Supponiamo ora $\frac{1}{2} \leq a_0 < 1$. Per $\alpha \in [0,1]$ definiamo

$$D(C_\alpha) = D(A), \qquad C_\alpha x = Ax + \alpha Bx \quad \forall x \in D(A).$$

Per ogni $x \in D(A)$ si ha, per qualche $a \in]a_0, 1[$ e $b > 0$,

$$\begin{aligned} \|Bx\|_X &\leq a\|Ax\|_X + b\|x\|_X \leq \\ &\leq a\|C_\alpha x\|_X + a\alpha\|Bx\|_X + b\|Bx\|_X \leq a\|C_\alpha x\|_X + a\|Bx\|_X + b\|x\|_X\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|Bx\|_X \le \frac{a}{1-a}\|C_\alpha x\|_X + \frac{b}{1-a}\|x\|_X\,.$$

Sia ora $k \in \mathbb{N}^+$ abbastanza grande, in modo che $c := \frac{a}{k(1-a)} < \frac{1}{2}$. Allora la stima precedente dà

$$\left\|\frac{1}{k}Bx\right\|_X \le c\|C_\alpha x\|_X + \frac{b}{k(1-a)}\|x\|_X \quad \forall x \in D(A).$$

Questo ci assicura che $\frac{1}{k}B$ è C_α-limitato con C_α-limitazione $a_k < \frac{1}{2}$: ciò , come si è visto, implica che l'operatore

$$C_\alpha + \frac{1}{k}B = A + \left(\alpha + \frac{1}{k}\right)B$$

genera un semigruppo contrattivo, purché C_α faccia altrettanto. Per $\alpha = 0$, dall'ipotesi su A otteniamo che $A+\frac{1}{k}B$ genera un semigruppo contrattivo. Ne segue iterativamente che $A + \frac{2}{k}B$, ..., $A + \frac{k-1}{k}B$, $A+B$ generano semigruppi contrattivi. $\square$

Teorema 3.2.7 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ il generatore di un semigruppo analitico $T(\cdot)$, tale che*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\vartheta,\omega},$$

con $\vartheta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\omega \ge 0$; sia inoltre $B : D(B) \subseteq X \to X$ un operatore dissipativo e A-limitato. Esiste $\alpha > 0$ tale che, se la A-limitazione di B è $a_0 < \alpha$, l'operatore $A+B$ genera un semigruppo analitico.

Dimostrazione Supponiamo dapprima $\omega = 0$. Posto $\alpha = \frac{1}{M+1}$, il lemma3.2.5 ci dice che

$$\|R(\lambda, A+B)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M'}{|\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\vartheta,0} \setminus B(0,r),$$

con $M' \ge 1$ e $r > 0$ opportuni. Ciò è sufficiente per la tesi.
Sia ora $\omega > 0$. Allora

$$\|Bx\|_X \le a\|Ax\|_X + b\|x\|_X \le \|(A - \omega I_X)x\|_X + (b + a\omega)\|x\|_X \quad \forall x \in D(A):$$

dunque B è $A - \omega I_X$-limitato, e la sua $A - \omega I_X$-limitazione coincide con la sua A-limitazione. Per quanto già provato, $A + B - \omega I_X$ genera un semigruppo analitico; dunque la stessa cosa vale per $A+B$. $\square$

Esempi 3.2.8 **(1)** Sia $X = L^2(0,1)$ e poniamo

$$D(A) = \{f \in W^{2,2}(0,1): \ f(1) = f(0) = 0\}, \qquad Af = f'' \quad \forall f \in D(A).$$

Come si sa dall'esempio 1.12.2, A genera un semigruppo analitico. Posto

$$D(B) = W^{1,2}(0,1), \qquad Bf = f' \quad \forall f \in D(B),$$

si è visto nell'esempio 3.2.2 che B è A-limitato con $a_0 = 0$. Dunque, per il teorema 3.2.7, l'operatore $Cf = f'' + f'$, con dominio $D(C) = D(A)$, genera un semigruppo analitico.
(2) Consideriamo il semigruppo di diffusione in $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ (si veda (1.59))

$$[T(t)f](x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|_n^2}{4t}} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y)\,dy,$$

ove

$$K_t(x-y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|x-y|_n^2}{4t}}.$$

Come abbiamo visto, il generatore di questo semigruppo analitico è il Laplaciano Δ con dominio $D(\Delta)$ contenente lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Scegliamo $X = L^1(\mathbb{R}^n)$ e prendiamo come B l'operatore di moltiplicazione M_q (si veda l'esempio 1.4.1) con $q \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > \max\{1, n/2\}$:

$$D(M_q) = \{g \in L^1(\mathbb{R}^n) :\ qg \in L^1(\mathbb{R}^n)\}, \qquad M_q g = q\,g \quad \forall g \in D(B).$$

Verifichiamo che B è Δ-limitato con $a_0 = 0$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$ si ha, ricordando (1.25),

$$\begin{aligned}
\|BR(\lambda,\Delta)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \left\| q \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f\,dt \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} |q(x)| \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)|f(y)|\,dy\,dt\,dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)|q(x)|\,dx\,dt\,dy \le \\
&\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)|q(x)|\,dx\,dt \le \\
&\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} [K_t(z)]^{p'} dz \right]^{\frac{1}{p'}} dt;
\end{aligned}$$

essendo poi

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\mathbb{R}^n} [K_t(z)]^{p'} dz \right]^{\frac{1}{p'}} &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} [4\pi t]^{-\frac{np'}{2}} e^{-\frac{|z|^2 p'}{4t}} dz \right]^{\frac{1}{p'}} = \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} [4\pi t]^{-\frac{np'}{2}} e^{-|\xi|^2 p'} (4t)^{\frac{n}{2}} d\xi \right]^{\frac{1}{p'}} = C t^{\frac{n}{2}(1-p')\frac{1}{p'}} = C t^{-\frac{n}{2p}},
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\|BR(\lambda,\Delta)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{-\frac{n}{2p}}\,dt = C_\lambda \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Scrivendo $g = R(\lambda,\Delta)f$, si trova

$$\|Bg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C_\lambda \|\lambda g - \Delta g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall g \in D(\Delta), \quad \forall \lambda > 0.$$

Dunque, $D(\Delta) \subseteq D(B)$ e

$$\|Bg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \lambda C_\lambda \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + C_\lambda \|\Delta g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall g \in D(\Delta), \quad \forall \lambda > 0.$$

Dato che $C_\lambda \to 0$ per $\lambda \to \infty$, ciò prova che B è Δ-limitato con $a_0 = 0$.

Capitolo 4

Formule di approssimazione

Scrivere un semigruppo $T(\cdot)$ in termini del risolvente del suo generatore ci è possibile solo nel caso di semigruppi analitici (formula (1.53)). Nel caso di semigruppi fortemente continui tuttavia esistono delle formule di approssimazione che possono essere d'aiuto.

4.1 Il teorema di Trotter-Kato

Iniziamo con un risultato fondamentale che ci servirà nel seguito.

Teorema 4.1.1 (di Trotter-Kato) *Sia X uno spazio di Banach e sia $\{T_n(\cdot)\}$ una famiglia di semigruppi fortemente continui su X, con generatori $A_n : D(A_n) \subseteq X \to X$. Supponiamo che esistano $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\|T_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0.$$

Fissato $\lambda_0 > \omega$, valgono le implicazioni

$$(a) \Longrightarrow (b), \qquad (b) \iff (c),$$

ove:

(a) *esiste $A : D(A) \subseteq X \to X$, con $\overline{D(A)} = X$ e $\overline{\mathcal{R}(\lambda_0 I_X - A)} = X$, tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_X = 0 \qquad \forall x \in D,$$

dove D è un nocciolo per A;

(b) *esiste $S \in \mathcal{L}(X)$, con $\overline{\mathcal{R}(S)} = X$, tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_0, A_n)x - Sx\|_X = 0 \qquad \forall x \in X;$$

(c) *esiste un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$, con generatore $B : D(B) \subseteq X \to X$, tale che $S = R(\lambda_0, B)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(t)x - T(t)x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0,$$

con convergenza uniforme in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$.

Inoltre, se vale (a) l'operatore B è la chiusura di A, ossia l'estensione chiusa minimale di A.

Dimostrazione Anzitutto proviamo il seguente lemma:

Lemma 4.1.2 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Se $\lambda_0 \in \rho(A)$ e se D è un nocciolo per A, allora $(\lambda_0 I_X - A)(D)$ è denso in X.*

Dimostrazione Sia $y \in X$. Poiché D è denso in $D(A)$ con la norma del grafico di A, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $x \in D$ tale che

$$\|x - R(\lambda_0, A)y\|_X < \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0|}, \qquad \|Ax - AR(\lambda_0, A)y\|_X < \varepsilon.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|(\lambda_0 - A)x - y\|_X &= \|\lambda_0 - A)[x - R(\lambda_0, A)y]\|_X \leq \\ &\leq |\lambda_0|\|x - R(\lambda_0, A)y\|_X + \|Ax - AR(\lambda_0, A)y\|_X < 2\varepsilon. \quad \Box \end{aligned}$$

Passiamo alla dimostrazione del teorema.

(a) $\Longrightarrow$ (b) Basta provare, grazie al lemma 4.1.2, che

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_0, A_n)x - Sx\|_X = 0 \qquad \forall x \in (\lambda_0 I_X - A)(D):$$

infatti, essendo $\|R(\lambda_0, A_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda_0 - \omega}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la tesi segue per densità. Sia dunque $x = (\lambda_0 I_X - A)\xi$, con $\xi \in D$: si ha

$$R(\lambda_0, A_n)x = R(\lambda_0, A_n)[(\lambda_0 I_X - A)\xi - (\lambda_0 I_X - A_n)\xi] + \xi = R(\lambda_0, A_n)[A_n\xi - A\xi] + \xi,$$

da cui

$$R(\lambda_0; A_n)x \to \xi \qquad \text{in } X \qquad \text{per } n \to \infty;$$

per densità, come si è osservato, esiste il limite

$$Sx = \lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)x \quad \text{in } X \qquad \forall x \in X.$$

Dato che

$$\|Sx\|_X = \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_0, A_n)x\|_X \leq \frac{M}{\lambda_0 - \omega}\|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

abbiamo $S \in \mathcal{L}(X)$ e $\|S\|_X \leq \frac{M}{\lambda_0 - \omega}$. Inoltre, se $\xi \in D$ si ha $\xi = Sx \in \mathcal{R}(S)$, da cui $\overline{\mathcal{R}(S)} = \overline{D} = X$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) Ricordando (1.25), si ha per $\lambda > \omega$

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A_n)x - R(\lambda, A)x\|_X &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}[T_n(t)x - T(t)x]dt \right\|_X \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T_n(t)x - T(t)x\|_X \, dt \qquad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Dato che $\|T_n(t)x - T(t)x\|_X \leq 2M\, e^{\omega t}$ per ogni $t \geq 0$, si ha $\|R(\lambda, A_n)x - R(\lambda, A)x\|_X \to 0$ per convergenza dominata, per ogni $x \in X$ e $\lambda > \omega$. In particolare vale (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c) Questa è la parte più lunga ed impegnativa: dobbiamo costruire il semigruppo limite dei $T_n(\cdot)$ ed il suo generatore. Per iniziare, ci occorre un altro lemma.

Lemma 4.1.3 *Nelle ipotesi del teorema 4.1.1, se vale (b) allora esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x =: G(\lambda)x \quad \textit{in } X \qquad \forall x \in X, \quad \forall \lambda > \omega,$$

ove $G(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ *verifica*

$$G(\lambda) - G(\mu) = (\mu - \lambda)G(\lambda)G(\mu) = (\mu - \lambda)G(\mu)G(\lambda) \qquad \forall \lambda, \mu > \omega,$$

$$\|G(\lambda)^k x\|_X \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}\|x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall \lambda > \omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Dimostrazione Sia

$$\Omega = \left\{\lambda > \omega : \ \exists \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x \text{ in } X \text{ per ogni } x \in X\right\}.$$

Per ipotesi, $\lambda_0 \in \Omega$. Proviamo che Ω è aperto, mostrando che se $\mu \in \Omega$ e $|\lambda - \mu| < \frac{\mu-\omega}{2M}$, allora $\lambda \in \Omega$. Infatti, anzitutto notiamo che, essendo $\mu \in \Omega$,

$$\exists \lim_{n\to\infty} R(\mu, A_n)x =: G(\mu)x \qquad \forall x \in X.$$

ne segue facilmente, per induzione,

$$\exists \lim_{n\to\infty} [R(\mu, A_n)]^k x =: G(\mu)^k x \qquad \forall x \in X, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Ciò premesso, osserviamo che $R(\cdot, A_n)$ è una funzione analitica in un intorno di μ; precisamente, il suo sviluppo di Taylor centrato in μ converge per ogni $\lambda \in B\left(\mu, \frac{\mu-\omega}{2M}\right)$, poiché

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A_n)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-\mu)^k[R(\mu, A_n)]^{k+1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda-\mu|^k\frac{M^{k+1}}{(\mu-\omega)^{k+1}} \leq \frac{M}{\mu-\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} \leq \frac{2M}{\mu-\omega} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda \in B\left(\mu, \frac{\mu-\omega}{2M}\right).\end{aligned}$$

Dato che la serie converge totalmente, per $|\lambda - \mu| < \frac{\mu-\omega}{2M}$ si ricava che $\lambda \in \Omega$ e che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-\mu)^k[R(\mu, A_n)]^{k+1}x = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-\mu)^k G(\mu)^{k+1}x \quad \text{in } X \qquad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Proviamo che Ω è chiuso in $]\omega, +\infty[$. Sia $\lambda > \omega$ un punto d'accumulazione per Ω: allora esiste $\mu \in \Omega$ tale che $|\lambda - \mu| < \frac{\mu-\omega}{2M}$. Con l'argomento sopra esposto, si trova che $\lambda \in \Omega$. In definitiva, ω è non vuoto, chiuso e aperto in $]\omega, +\infty[$: dunque $\Omega =]\omega, +\infty[$, e pertanto

$$\exists \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x =: G(\lambda)x \quad \text{in } X \qquad \forall x \in X, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Dalla precedente stima uniforme per $\|R(\lambda, A_n)\|_{\mathcal{L}(X)}$ segue che $G(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$; Inoltre, dall'identità del risolvente scritta per gli A_n,

$$R(\lambda, A_n) - R(\mu, A_n) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A_n)R(\mu, A_n) = (\mu - \lambda)R(\mu, A_n)R(\lambda, A_n),$$

segue subito, per $n \to \infty$, la stessa relazione per $G(\lambda) - G(\mu)$. Infine

$$\|G(\lambda)^k x\|_X = \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda, A_n)^k x\|_X \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}\|x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall \lambda > \omega, \tag{4.1}$$

e ciò prova la tesi. $\square$

Dal lemma 4.1.3 segue che $G(\lambda_0) = S$; inoltre

$$G(\lambda) = G(\lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda)G(\lambda_0)G(\lambda),$$

cosicché

$$\mathcal{R}(G(\lambda)) = \mathcal{R}(G(\lambda_0)) = \mathcal{R}(S),$$

e per ipotesi esso è denso in X. Ora si ha, per $\lambda > \omega$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|[nG(n) - I_X]G(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \|(n-\lambda)G(n)G(\lambda) + \lambda G(n)G(\lambda) - G(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \|G(\lambda) - G(n) + \lambda G(n)G(\lambda) - G(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \|G(n)[\lambda G(\lambda) - I]\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n-\omega}\left[\frac{\lambda M}{\lambda-\omega} + 1\right] = 0.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \|nG(n)x - x\|_X = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{R}(G(\lambda)) = \mathcal{R}(S),$$

e poiché $\mathcal{R}(S)$ è denso in X, dal fatto che $\|nG(n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{Mn}{n-\omega} \leq c$, segue che

$$\lim_{n\to\infty} \|nG(n)x - x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Di conseguenza, se $x \in \ker G(\lambda)$ si ha per $\lambda > \omega$

$$\begin{aligned}
x = \lim_{n\to\infty} nG(n)x &= \lim_{n\to\infty} [n[G(n) - G(\lambda)]x + nG(\lambda)x] = \\
&= \lim_{n\to\infty} [n(\lambda - n)G(n)G(\lambda)x + 0] = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,
\end{aligned}$$

ossia $G(\lambda)$ è iniettivo ed ha immagine densa per ogni $\lambda > \omega$. Possiamo allora porre

$$\begin{cases} D(B) = \mathcal{R}(S) \\ Bx = \lambda_0 x - S^{-1}x \quad \forall x \in \mathcal{R}(S). \end{cases}$$

L'operatore lineare B è chiuso, perché $\lambda_0 I_X - B$ ha inverso $S \in \mathcal{L}(X)$; inoltre, per definizione,

$$(\lambda_0 I_X - B)S = S(\lambda_0 I_X - B) = I_X\,,$$

ovvero $G(\lambda_0) = S = R(\lambda_0, B)$. Infine

$$\begin{aligned}
(\lambda I_X - B)G(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)G(\lambda) + (\lambda_0 I_X - B)G(\lambda) = \\
&= (\lambda - \lambda_0)G(\lambda) + (\lambda_0 I_X - B)[G(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)G(\lambda_0)G(\lambda)] = \\
&= (\lambda - \lambda_0)G(\lambda) + I_X + (\lambda_0 - \lambda)G(\lambda) = I_X
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
G(\lambda)(\lambda I_X - B) &= G(\lambda)[(\lambda - \lambda_0 + \lambda_0)I_X - B] = \\
&= G(\lambda)(\lambda - \lambda_0) + [G(\lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda)G(\lambda_0)G(\lambda)] = \\
&= G(\lambda)(\lambda - \lambda_0) + I_X + (\lambda_0 - \lambda)G(\lambda) = I_X\,,
\end{aligned}$$

il che mostra che $G(\lambda) = R(\lambda, B)$ per ogni $\lambda > \omega$. Da (4.1) segue che

$$\|R(\lambda, B)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^k} \qquad \forall \lambda > \omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi B genera un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$. Resta da provare che, per $n \to \infty$, $T_n(t)x$ tende a $T(t)x$ in X per ogni $x \in X$ e $t \ge 0$. A questo scopo, introduciamo il sottospazio $\mathbf{C}$ dello spazio $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ delle successioni limitate a valori in X, definito da

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \ \exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ in } X\},$$

munito della norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}.$$

È facile verificare che $\mathbf{C}$ è uno spazio di Banach. Per $\lambda > \omega$ poniamo

$$\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{x} = \{R(\lambda, A_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall \mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X.$$

L'operatore $\mathbf{G}(\lambda)$ manda $\mathbf{C}$ in se stesso, in quanto per ogni $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un limite x si ha per $n \to \infty$

$$\|R(\lambda, A_n)x_n - R(\lambda, B)x\|_X \le \|R(\lambda, A_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x_n - x\|_X + \|R(\lambda, A_n)x - R(\lambda, B)x\|_X \to 0,$$

e dunque $\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{x} \in \mathbf{C}$, con limite $R(\lambda, B)x$. Inoltre vale la stima

$$\|\mathbf{G}(\lambda)^k\mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\lambda, A_n)^k x_n\|_X \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

ossia

$$\|\mathbf{G}(\lambda)^k\|_{\mathcal{L}(\mathbf{C})} \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+. \tag{4.2}$$

Vale anche la relazione

$$\mathbf{G}(\lambda) - \mathbf{G}(\mu) = (\mu - \lambda)\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{G}(\mu) = (\mu - \lambda)\mathbf{G}(\mu)\mathbf{G}(\lambda) \qquad \forall \lambda, \mu > \omega.$$

Mostriamo infine che

$$\ker \mathbf{G}(\lambda) = \{0\}, \qquad \overline{\mathcal{R}(\mathbf{G}(\lambda))} = \mathbf{C} \qquad \forall \lambda > \omega.$$

Infatti, se $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{G}(\lambda)$, la successione $\{R(\lambda, A_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è nulla, ossia $R(\lambda, A_n)x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: ne segue $x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale a dire $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sia ora $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento di $\mathbf{C}$, con $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $w \in D(B)$ tale che $\|w - x\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$. Sia poi $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_n - x\|_X < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|[R(\lambda, A_n) - R(\lambda, B)](\lambda w - Bw)\|_X < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall n > N,$$

e infine per $n = 0, 1, \dots, N$ sia $z_n \in D(A_n)$ tale che

$$\|z_n - x_n\|_X < \varepsilon \qquad \text{per } n = 0, 1, \dots, N.$$

Allora, posto

$$y_n = \begin{cases} z_n = R(\lambda, A_n)(\lambda I_X - A)z_n & \text{se } n \le N \\ R(\lambda, A_n)(\lambda I_X - B)w & \text{se } n > N, \end{cases}$$

si ha $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{C}$ perché $y_n \to R(\lambda, B)(\lambda I_X - B)w = w$ per $n \to \infty$; inoltre $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{G}(\lambda))$ per costruzione. Valutiamo $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{C}}$: si ha

$$\|y_n - x_n\|_X = \|z_n - x_n\|_X < \varepsilon \qquad \text{per } n \le N,$$

mentre

$$\begin{aligned} \|y_n - x_n\|_X &= \|R(\lambda, A_n)(\lambda w - Bw) - x_n\|_X \le \\ &\le \|[R(\lambda, A_n) - R(\lambda, B)](\lambda w - Bw)\|_X + \|w - x\|_X + \|x - x_n\|_X < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{per } n > N; \end{aligned}$$

in altre parole, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} < \varepsilon$. Ciò prova che $\mathcal{R}(\mathbf{G}(\lambda))$ è denso in X.
Adesso procediamo come quando abbiamo costruito B: definiamo $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ponendo

$$\begin{cases} D(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{G}(\lambda_0)) \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x} - \mathbf{G}(\lambda_0)^{-1}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{G}(\lambda_0)). \end{cases}$$

Si noti che, per costruzione,

$$\mathbf{G}(\lambda_0)\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{G}(\lambda_0)\mathbf{x} - \mathbf{x},$$

ossia

$$R(\lambda_0, A_n)(\mathbf{A}\mathbf{x})_n = \lambda_0 R(\lambda_0, A_n)x_n - x_n = A_n R(\lambda_0, A_n)x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

vale a dire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \{A_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall \mathbf{x} \in D(\mathbf{A}). \tag{4.3}$$

L'operatore $\mathbf{A}$ è lineare, chiuso, con dominio denso, e risulta $\mathbf{G}(\lambda) = R(\lambda, \mathbf{A})$ per ogni $\lambda > \omega$; grazie alle stime (4.2), per il teorema di Hille-Yosida (teorema 1.8.2), $\mathbf{A}$ è generatore di un semigruppo $\mathbf{T}(\cdot)$ fortemente continuo su $\mathbf{C}$. Consideriamo adesso gli approssimanti di Yosida, definiti in (1.31), di $\mathbf{A}$, ossia gli operatori $\mathbf{A}_m$ definiti da $\mathbf{A}_m = m\mathbf{A}R(m, \mathbf{A}) \in \mathcal{L}(\mathbf{C})$. Per il lemma 1.8.3 si ha

$$\lim_{m\to\infty} e^{t\mathbf{A}_m}\mathbf{x} = \mathbf{T}(t)\mathbf{x} \quad \text{in } \mathbf{C} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C},$$

e la convergenza è uniforme in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. Pertanto possiamo scrivere, ricordando (4.3) e indicando con $(A_n)_m$ gli approssimanti di Yosida di A_n,

$$\mathbf{T}(t)\mathbf{x} = \lim_{m\to\infty} e^{t\mathbf{A}_m}\mathbf{x} = \lim_{m\to\infty} \left\{e^{t(A_n)_m}x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{T_n(t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{in } \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}, \quad \forall t \geq 0,$$

con convergenza uniforme in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. In particolare si deduce che la successione $\{T_n(t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in X per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente in X e per ogni $t \geq 0$. Scegliendo in particolare la successione $\overline{\mathbf{x}}$ costantemente uguale a x, si trova che $\{T_n(t)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ coincide con la successione convergente $\mathbf{T}(t)\overline{\mathbf{x}}$. Detto $S(t)x$ il suo limite, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t)x = S(t)x \quad \text{in } X \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0,$$

uniformemente in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. Chiaramente $S(\cdot)$ è un semigruppo fortemente continuo in X, tale che

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Proviamo che $S(t) = T(t)$, il semigruppo generato da B, per ogni $t \geq 0$: detto L il generatore di $S(\cdot)$, per la (1.25) si deve avere $R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda, L)x$ per $n \to \infty$; ma sappiamo che $R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda, B)x$ per $n \to \infty$, e dunque $R(\lambda, L) = R(\lambda, B)$, da cui $L = B$ e infine $S(\cdot) = T(\cdot)$. Dunque vale (c).
Proviamo finalmente che, se vale (a), allora $B = \overline{A}$, ove $\overline{A}$ è la chiusura di A. Anzitutto, vale $S = R(\lambda_0, B)$, e quindi se x appartiene al nocciolo D si ha, grazie all'equilimitatezza delle norme $\|R(\lambda_0, A_n)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e all'ipotesi (a),

$$\begin{aligned} S(\lambda_0 I_X - A)x &= \lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)(\lambda_0 I_X - A)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)(\lambda_0 I_X - A_n + A_n - A)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} [x + R(\lambda_0, A_n)(A_n x - Ax)] = x. \end{aligned}$$

Poiché X è un nocciolo anche per $\overline{A}$ (visto che per i grafici vale $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$), si ottiene facilmente

$$S(\lambda_0 I_X - A)x = x \qquad \forall x \in D(\overline{A}),$$

il che implica l'iniettività di $\lambda_0 I_X - \overline{A}$. Si ha poi

$$\mathcal{R}(\lambda_0 I_X - \overline{A}) \supseteq \mathcal{R}(\lambda_0 I_X - A)$$

e quindi $\overline{\mathcal{R}(\lambda_0 I_X - \overline{A})} = X$. D'altra parte, l'operatore $(\lambda_0 I_X - \overline{A})^{-1} : \mathcal{R}(\lambda_0 I_X - \overline{A}) \to X$ è bigettivo e verifica

$$(\lambda_0 I_X - \overline{A})^{-1} x = Sx \qquad \forall x \in \mathcal{R}(\lambda_0 I_X - \overline{A}).$$

Utilizzando il fatto che $\overline{A}$ è chiuso, è facile verificare che anche $(\lambda_0 I_X - \overline{A})^{-1}$ lo è; da qui si deduce che $\mathcal{R}(\lambda_0 I_X - \overline{A}) = X$. In definitiva, $(\lambda_0 I_X - \overline{A})^{-1} = S = (\lambda_0 I_X - B)^{-1}$, da cui infine $\overline{A} = B$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Trotter-Kato. □

4.2 Formula di Chernoff

La formula di Chernoff esprime un semigruppo fortemente continuo in funzione del risolvente del suo generatore, tramite un opportuno limite. Il teorema fondamentale, da cui otterremo questo risultato come corollario, è il seguente.

Teorema 4.2.1 (di Chernoff) *Sia X uno spazio di Banach e sia $V : [0, \infty[\to \mathcal{L}(X)$ una funzione tale che*

$$V(0) = I_X\,, \qquad \|V(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le M \quad \forall t \ge 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Se inoltre esiste il limite

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{V(h)x - x}{h} \quad \textit{in } X \qquad \forall x \in D,$$

ove D è un sottoinsieme denso in X, tale che $(\lambda_0 I_X - A)(D)$ sia a sua volta denso in X per un opportuno $\lambda_0 > 0$, allora la chiusura $\overline{A}$ di A genera un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo, per il quale

$$T(t)x = \lim_{n \to \infty} V\left(\frac{t}{n}\right)^n x \quad \textit{in } X \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \ge 0,$$

con convergenza uniforme in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$.

Dimostrazione Partiamo da un lemma fondamenale.

Lemma 4.2.2 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|T^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Allora*

$$\left\| e^{n(T - I_X)} x - T^n x \right\|_X \le M\sqrt{n} \|Tx - x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Dimostrazione Fissato $n \in \mathbb{N}^+$, vale

$$e^{n(T - I_X)} - T^n = e^{-n}[e^{nT} - e^n T^n] = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} [T^k - T^n].$$

D'altra parte

$$T^k - T^n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n}^{k-1} [T^{j+1} - T^j] = \sum_{j=n}^{k-1} T^j [T - I_X] & \text{se } k > n \\ 0 & \text{se } k = n \\ \displaystyle\sum_{j=k}^{n-1} [T^{j+1} - T^j] = \sum_{j=k}^{n-1} T^j [T - I_X] & \text{se } k < n, \end{cases}$$

da cui

$$\|[T^k - T^n]x\|_X \leq |n-k| M \|Tx - x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \left\| e^{n(T-I_X)}x - T^n x \right\|_X &\leq e^{-n} M \|Tx - x\|_X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} |n-k| \leq \\ &\leq e^{-n} M \|Tx - x\|_X \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (n-k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

essendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (n-k)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (n^2 - 2nk + k^2) = n^2 e^n - 2n^2 e^n + n^2 e^n + n e^n = n e^n,$$

si ottiene

$$\left\| e^{n(T-I_X)}x - T^n x \right\|_X \leq e^{-n} M \|Tx - x\|_X \cdot e^{\frac{n}{2}} [n e^n]^{\frac{1}{2}} = M\sqrt{n} \|Tx - x\|_X . \quad \square$$

Proviamo il teorema di Chernoff. Scegliamo un parametro s_n tale che $s_n \searrow 0$ quando $n \to \infty$; posto $A_n = \frac{1}{s_n}(V(s_n) - I_X) \in \mathcal{L}(X)$, si ha, per ogni $x \in D$, $A_n x \to Ax$ per $n \to \infty$. Inoltre, dall'ipotesi $\|V(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ per ogni $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$, si ha per ogni $t \geq 0$

$$\left\| e^{tA_n} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\frac{t}{s_n}} \left\| e^{t\frac{V(s_n)}{s_n}} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\frac{t}{s_n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \|V(s_n)^m\|_{\mathcal{L}(X)}}{s_n^m \, m!} \leq M.$$

Ne segue, per il teorema di Trotter-Kato (teorema 4.1.1), che la chiusura $\overline{A}$ di A genera un semigruppo fortemente continuo $T(\cdot)$, il quale verifica

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t)x - e^{tA_n}x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0,$$

uniformemente in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. Ma d'altronde, se scegliamo $s_n = \frac{t}{n}$, usando il lemma 4.2.2 con $T = V\left(\frac{t}{n}\right)$, si ha per $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_n}x - V\left(\frac{t}{n}\right)^n x \right\|_X &= \left\| e^{n\left[V\left(\frac{t}{n}\right) - I_X\right]}x - V\left(\frac{t}{n}\right)^n x \right\|_X \leq \\ &\leq M\sqrt{n} \left\| V\left(\frac{t}{n}\right)x - x \right\|_X = M \frac{t}{\sqrt{n}} \|A_n x\|_X \to 0 \qquad \forall x \in D, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

uniformemente in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. Essendo poi

$$\left\| e^{tA_n} - V\left(\frac{t}{n}\right)^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M, \quad \forall r \geq 0,$$

per densità si ottiene che la relazione sopra scritta vale per ogni $x \in X$ e $t \geq 0$, sempre uniformemente in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. Ne segue

$$\lim_{n \to \infty} \left\| T(t)x - V\left(\frac{t}{n}\right)^n x \right\|_X = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0,$$

uniformemente in $[0, t_0]$ per ogni $t_0 > 0$. La tesi è provata. $\square$

Corollario 4.2.3 (formula di Chernoff) *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo. Allora*

$$T(t)x = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right]^n x = \lim_{n \to \infty} \left(I_X - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x \qquad \forall x \in X, \quad \forall t > 0.$$

Dimostrazione Siano $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{\omega t}$ per ogni $t \geq 0$ (proposizione 1.5.3). Poniamo

$$V(t) = \begin{cases} I_X & \text{se } t = 0 \\ \dfrac{1}{t} R\left(\dfrac{1}{t}, A\right) & \text{se } 0 < t < \delta \\ 0 & \text{se } t > \delta, \end{cases}$$

ove $\delta \in]0, \infty[$ se $\omega \leq 0$, mentre $\delta \in \left]0, \frac{1}{\omega}\right[$ se $\omega > 0$. Allora $V :]0, \infty[\to \mathcal{L}(X)$ e

$$\|V(t)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{t^k} \left\| R\left(\frac{1}{t}, A\right)^k \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t^k \left(\frac{1}{t} - \omega\right)^k} = \frac{M}{(1 - \omega t)^k}.$$

Dato che, per $\delta > 0$ abbastanza piccolo,

$$e^{(\omega+1)t} > \frac{1}{1 - \omega t} \qquad \forall t \in]0, \delta],$$

otteniamo, per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo

$$\|V(t)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{(\omega+1)kt} \qquad \forall t \in [0, \delta], \quad \forall k \in \mathbb{N}^+;$$

dunque, per definizione di $V(t)$,

$$\|V(t)^k\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{(\omega+1)kt} \qquad \forall t \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Inoltre, per $t \to 0^+$,

$$\frac{V(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} R\left(\frac{1}{t}, A\right) Ax \to Ax \qquad \forall x \in D(A).$$

Possiamo allora applicare il teorema 4.2.1 di Chernoff alla funzione

$$\tilde{V}(t) = e^{-(\omega+1)t}V(t),$$

che ne verifica le ipotesi con $\tilde{A} = A - (\omega + 1)I_X$. Si ricava che esiste un semigruppo $\tilde{T}(\cdot)$ fortemente continuo e limitato, tale che

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \tilde{V}\left(\frac{t}{n}\right)^n x - \tilde{T}(t)x \right\|_X = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0.$$

Ne segue che il semigruppo $T(\cdot) = \{e^{(\omega+1)t}\tilde{T}(t)\}_{t\geq 0}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} \left\| V\left(\frac{t}{n}\right)^n x - T(t)x \right\|_X = 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0,$$

e ciò prova la tesi, essendo per ogni $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$

$$\left(I_X - \frac{t}{n}A\right)^{-n} = \left(\frac{n}{t}\right)^n \left(\frac{n}{t} - A\right)^{-n} = \left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right]^n = \left[V\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n. \quad \square$$

Appendice A

Teoria spettrale

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare non necessariamente limitato. La teoria spettrale analizza gli operatori $\lambda I - A$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$, e ne studia le proprietà di invertibilità e di non invertibilità.

Definizione A.0.1 *Un numero complesso λ è un* punto regolare *per A se l'operatore $\lambda I_X - A : X \to X$ è iniettivo con immagine $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ densa in X e con inverso $(\lambda I_X - A)^{-1} : \mathcal{R}(\lambda I_X - A) \to D(A)$ limitato rispetto alla norma di X. L'insieme $\rho(A)$ dei punti regolari è detto* insieme risolvente *di A e l'operatore $R(\lambda, A) := (\lambda I_X - A)^{-1}$, che è densamente definito per ogni $\lambda \in \rho(A)$, è detto* operatore risolvente *di A. L'insieme $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ è detto* spettro *di A.*

Osservazione A.0.2 Supponiamo che l'operatore A sia chiuso. Allora, se $\lambda \in \rho(A)$, risulta in effetti $\mathcal{R}(\lambda I_X - A) = X$. Infatti, se $y \in X = \overline{\mathcal{R}(\lambda I_X - A)}$, per densità esiste $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tale che $\lambda x_n - Ax_n \to y$ in X. Ne segue che $Ax_n \to -y + \lambda x$; poiché A è chiuso, si conclude che $x \in D(A)$ e $Ax = y - \lambda x$, ossia $y \in \mathcal{R}(\lambda I_X - A)$.

Lo spettro $\sigma(A)$ si decompone nel modo seguente.

- Lo *spettro puntuale* $\sigma_p(A)$ è costituito dai numeri $\lambda \in \sigma(A)$ tali che $\lambda I_X - A$ non è iniettivo. Gli elementi di $\sigma_p(A)$ si dicono *autovalori* di A e gli $x \in X \setminus \{0\}$ tali che $\lambda x - Ax = 0$ sono chiamati *autovettori* relativi a λ.

- Lo *spettro continuo* $\sigma_c(A)$ è formato dai numeri $\lambda \in \sigma(A)$ tali che $\lambda I_X - A$ è iniettivo, con immagine $\mathcal{R}(\lambda I_X - A)$ densa in X, ma con $(\lambda I_X - A)^{-1}$ non limitato su $\mathcal{R}(\lambda_X - A)$ rispetto alla norma di X.

- Infine lo *spettro residuo* $\sigma_r(A)$ consiste dei numeri $\lambda \in \sigma(A)$ tali che $\lambda I_X - A$ è iniettivo ed ha immagine non densa in X.

Alla luce dell'osservazione A.0.2, risulta $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$, con unione disgiunta.
La prima cosa che verifichiamo è che $\rho(A)$ è un aperto di $\mathbb{C}$, e che quindi lo spettro $\sigma(A)$ è un chiuso.

Proposizione A.0.3 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso. Allora l'insieme risolvente $\rho(A)$ è aperto in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione Se $\rho(A) = \emptyset$, allora esso è aperto. Altrimenti sia $\lambda \in \rho(A)$: allora, per l'osservazione A.0.2, $(\lambda I_X - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$|z| < \frac{1}{\|(\lambda I_X - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

proviamo che risulta $\lambda - z \in \rho(A)$: infatti, posto $B_k = \sum_{h=0}^{k} z^h (\lambda I_X - A)^{-h}$, la successione $(B_k)_{k \in N}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$ perché la serie $\sum_{h=0}^{\infty} z^h (\lambda I_X - A)^{-h}$ converge totalmente. Detto B il limite in $\mathcal{L}(X)$ dei B_k, ossia la somma della serie $\sum_{h=0}^{\infty} z^h (\lambda I_X - A)^{-h}$, verifichiamo che l'operatore $B(\lambda_X - A)^{-1}$ è l'inverso di $(\lambda - z)I_X - A$:

$$\begin{aligned} B(\lambda I_X - A)^{-1}[(\lambda - z)I_X - A] &= B - zB(\lambda I_X - A)^{-1} = B(I_X - z(\lambda I_X - A)^{-1}) = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} z^h (\lambda I_X - A)^{-h} - \sum_{h=0}^{\infty} z^{h+1} (\lambda I_X - A)^{-h-1} = I_X, \end{aligned}$$

ed analogamente si vede che $[(\lambda - z)I_X - A]B(\lambda I_X - A)^{-1} = I_X$. Perciò l'intero disco $B\left(\lambda, \frac{1}{\|(\lambda I_X - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}\right)$ è contenuto in $\rho(A)$. □

Proposizione A.0.4 *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Se $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, allora $\lambda \in \rho(A)$.*

Dimostrazione Infatti, supposto $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, è facile verificare che l'operatore $B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ inverte $\lambda I_X - A$. □

In realtà vale di più. Premettiamo la seguente

Definizione A.0.5 *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Il* raggio spettrale di A è

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Si noti che per la proposizione A.0.4 si ha $r(A) \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Proposizione A.0.6 *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora esiste il limite*

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} = r(A);$$

in particolare se $|\lambda| > r(A)$ si ha $\lambda \in \rho(A)$.

Dimostrazione È chiaro che l'ultima affermazione segue dalla definizione stessa di raggio spettrale.

Proviamo l'esistenza del limite. Sia

$$s = \liminf_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}.$$

Ovviamente risulta $0 \leq s \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $m \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$s - \varepsilon < \|A^m\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{m}} < s + \varepsilon.$$

Per ogni $n > m$, scegliamo l'unico $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $km < n \leq (k+1)m$; allora

$$\begin{aligned}\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} &= \|A^{km}A^{n-km}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \|A^{km}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}} \leq \\ &\leq \left[\|A^m\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{km}{n}} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}} < (s+\varepsilon)^{\frac{km}{n}}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}}.\end{aligned}$$

Poiché $\frac{1}{n} \leq \frac{n-km}{n} \leq \frac{m}{n}$, risulta $\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}} \to 1$ per $n \to \infty$; poiché $1 - \frac{m}{n} \leq \frac{km}{n} < 1$, si ha $(s+\varepsilon)^{\frac{km}{n}} \to s+\varepsilon$ per $n \to \infty$. Perciò, passando al massimo limite,

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq s + \varepsilon = \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui segue subito che il limite $s = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}$ esiste.
Dobbiamo adesso provare che $s = r(A)$. Sia $|\lambda| > s$ e mostriamo che $\lambda \in \rho(A)$. Esiste $\delta > 0$ tale che $|\lambda| > s + \delta$; quindi per un fisato indice n sufficientemente grande si avrà

$$|\lambda|^n > (s+\delta)^n > \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Allora si verifica agevolmente che l'operatore

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{nk}}{\lambda^{n(k+1)}}$$

è ben definito come elemento di $\mathcal{L}(X)$ e soddisfa

$$S(\lambda^n I_X - A^n) = (\lambda^n I_X - A^n)S = I_X,$$

ossia $S = (\lambda^n I_X - A^n)^{-1}$. Ne segue, posto $U = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h A^{n-1-h}$, che $U \in \mathcal{L}(X)$, che $US = SU$ e che

$$US(\lambda I_X - A) = (\lambda I_X - A)US = I_X,$$

ossia $US = (\lambda I_X - A)^{-1}$. Si noti che

$$US = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h A^{n-1-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{nk}}{\lambda^{n(k+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n-1} \frac{A^{nk+n-1-h}}{\lambda^{nk+n-h}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A^{nk+p}}{\lambda^{nk+p+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{\lambda^{m+1}}.$$

Dunque, se $|\lambda| > s$, allora $\lambda \in \rho(A)$ e $(\lambda I_X - A)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{\lambda^{m+1}}$. Per definizione di raggio spettrale, ciò prova che $s \geq r(A)$.
Proviamo ora che $s \leq r(A)$. Tutti i punti esterni alla palla chiusa $\overline{B(0, r(A))}$ appartengono a $\rho(A)$. La funzione $\lambda \mapsto (\lambda I_X - A)^{-1}$ è olomorfa nell'aperto $\rho(A)$, ed ha dunque uno sviluppo in serie di Laurent che converge nella norma di $\mathcal{L}(X)$ in ogni punto di $\rho(A)$. D'altronde, la proposizione A.0.4 ci dice che

$$(zI_X - A)^{-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{z^{h+1}} \qquad \forall |z| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Per l'unicità dello sviluppo di Laurent, deve essere

$$(zI_X - A)^{-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{z^{h+1}} \qquad \forall z \in \rho(A), \tag{A.1}$$

cosicché, in particolare,

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} |z|^{-n-1} = 0 \qquad \forall z \in \rho(A).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| = r(A) + \varepsilon$: si ha allora per n sufficientemente grande

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} < |\lambda|^{n+1} = (r(A) + \varepsilon)^{n+1},$$

e dunque

$$s = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq r(A) + \varepsilon,$$

da cui $s \leq r(A)$ per l'arbitrarietà di ε. $\square$

Vediamo ora due fondamentali proprietà dell'operatore risolvente.

Proposizione A.0.7 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso. Allora:*

(i) *la funzione $\lambda \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I_X - A)^{-1}$ è olomorfa sull'aperto $\rho(A)$;*

(ii) *vale l'*identità del risolvente

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \qquad \forall \lambda, \mu \in \rho(A).$$

Dimostrazione Proviamo dapprima (ii): si ha

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = R(\lambda, A)[(\mu - A) - (\lambda - A)]R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Proviamo (i). Da (ii) segue che $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ è limitata nell'intorno di ogni punto $\mu \in \rho(A)$: infatti

$$R(\lambda, A)[1 - (\mu - \lambda)R(\mu, A)] = R(\mu, A),$$

da cui per $|\lambda - \mu| < \frac{1}{2\|R(\mu,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}$ segue

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|R(\mu, A)[1 - (\mu - \lambda)R(\mu, A)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \\ &\leq \|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \|(\mu - \lambda)R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)}^k < \\ &< \|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2\|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} . \end{aligned}$$

Pertanto, per $\lambda \to \mu$ otteniamo

$$R(\lambda, A) \to R(\mu, A) \text{ in } \mathcal{L}(X),$$

e dunque, dividendo per $\lambda - \mu$,

$$\frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, A)R(\mu, A) \to -R(\mu, A)^2 \text{ per } \lambda \to \mu,$$

ossia

$$\exists \frac{d}{d\mu} R(\mu, A) = -R(\mu, A)^2 \qquad \forall \mu \in \rho(A). \tag{A.2}$$

Quindi $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ è una funzione olomorfa in $\rho(A)$. $\square$

Osservazione A.0.8 Si noti che dalla (A.2) segue facilmente per induzione che

$$\exists \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n \, n! \, R(\lambda, A)^{n+1} \qquad \forall \lambda \in \rho(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{A.3}$$

Corollario A.0.9 *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$, con $X \neq \{0\}$. Allora $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione Per la proposizione A.0.7, la funzione $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ è olomorfa su $\rho(A)$. Se fosse $\sigma(A) = \emptyset$ sarebbe $\rho(A) = \mathbb{C}$ e dunque tale funzione sarebbe olomorfa intera. Inoltre dallo sviluppo di Laurent (A.1) segue che essa tende a 0 per $|\lambda| \to \infty$. Per il teorema di Liouville, essa è costante, quindi in questo caso nulla: dunque tutti i coefficienti dello sviluppo sono nulli, in particolare il primo che è $A^0 = I_X$. Da $I_X = 0$ segue $X = \{0\}$, assurdo. $\square$

Esempio A.0.10 Poniamo $X = C[a, b]$ con $\|f\|_X = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Sia K una funzione di due variabili continua in $[a, b] \times [a, b]$ e sia $A : X \to X$ l'operatore integrale definito da $Af(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)\, ds$ per ogni $t \in [a, b]$ e per ogni $f \in X$. È immediato verificare che $A \in \mathcal{L}(X)$ con $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|K\|_\infty$: dunque $\rho(A)$ contiene tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|K\|_\infty$.
Un caso particolare di questo esempio si ha quando $K(t, s) = 0$ per $t < s$: in questo caso si ha $Af(t) = \int_a^t K(t, s)f(s)\, ds$ e A viene chiamato *operatore integrale di Volterra*. Per un operatore di questo tipo valgono le stime, verificabili per induzione,

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|K\|_\infty^n \frac{(b-a)^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

dunque la serie dell'operatore risolvente $\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1} A^n$ è totalmente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e di conseguenza $\rho(A) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$; al contrario, si ha $0 \in \sigma(A)$. Si noti che in questo caso si ha $0 = r(A) < \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. In particolare, per ogni fissata $g \in X$ l'*equazione integrale di Volterra*

$$\lambda f(t) - \int_a^t K(t, s)f(s)\, ds = g(t), \qquad t \in [a, b],$$

è univocamente risolubile in X qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Appendice B

Integrali a valori in uno spazio di Banach

Siano X uno spazio di Banach (reale o complesso) ed $(E, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio misurato: considereremo funzioni $f : E \to X$.

Definizione B.0.1 *Indichiamo con* $\mathcal{S}(E, X)$ *lo spazio vettoriale delle* funzioni semplici*, ossia delle funzioni* $\varphi : E \to X$ *tali che:*

(i) φ *assume un numero finito di valori* $x_1, \ldots, x_k \in X$*;*

(ii) *per ogni* $i = 1, \ldots, k$ *gli insiemi* $A_i = \{u \in E : \varphi(u) = x_i\}$ *appartengono alla* σ*-algebra* $\mathcal{E}$ *ed inoltre* $\mu(A_i) < \infty$.

La forma canonica *della funzione* φ *è dunque la seguente:*

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \chi_{A_i}(u), \qquad u \in E.$$

Definizione B.0.2 *Se* $\varphi \in \mathcal{S}(E, X)$*, con forma canonica* $\varphi = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{A_i}$*, l'* integrale *di* φ *su* E *è l'elemento di* X *definito da*

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \mu(A_i).$$

Osservazione B.0.3 L'integrale su $\mathcal{S}(E, X)$ gode delle usuali proprietà: in particolare è lineare, e in luogo della monotonia (che non ha senso nel generico spazio di Banach X) si ha la disuguaglianza

$$\left\| \int_E \varphi \, d\mu \right\|_X \le \int_E \|\varphi(\cdot)\|_X \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(E, X).$$

Si noti che $\|\varphi(\cdot)\|_X$ è una funzione semplice su E, a valori reali.

Passiamo ad introdurre le funzioni misurabili definite su E, a valori in X.

Definizione B.0.4 *Una funzione $f : E \to X$ è detta* fortemente misurabile *se esiste una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(E, X)$ tale che, per $n \to \infty$,*

$$\varphi_n(u) \to f(u) \quad \forall u \in E.$$

La funzione f è detta debolmente misurabile *se per ogni $T \in X^*$ la funzione reale o complessa $u \to Tf(u)$ è misurabile su E.*

È facile verificare che una funzione $f : E \to X$ è fortemente misurabile se e solo se essa è il limite puntuale di una successione di funzioni $f_n : E \to X$ fortemente misurabili. Inoltre, si vede facilmente che ogni funzione fortemente misurabile è debolmente misurabile; il viceversa è falso, come tra poco mostreremo nell'esempio B.0.5. Inoltre si vede immediatamente che se f è fortemente misurabile allora la funzione reale $u \to \|f(u)\|_X$ è misurabile su E.

Esempio B.0.5 Sia $X = L^\infty(a, b)$ e sia $f : [a, b] \to X$ definita da

$$f(t) = \chi_{[a,t]} \qquad \forall t \in [a, b].$$

Il fatto che f è debolmente misurabile segue notando che per ogni funzionale $T \in X^*$ *positivo* (ossia $Tg \geq 0$ se $g \geq 0$ q.o.) la funzione reale $t \mapsto Tf(t)$ è crescente, dunque misurabile. Dato che ogni funzionale $T \in X^*$ è differenza di due funzionali positivi, otteniamo che Tf è misurabile per ogni $T \in X^*$. Proviamo che, al contrario, f non è fortemente misurabile. Supponiamo, per assurdo, che esista una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}([a, b], X)$ tale che $\varphi_n \to f$ puntualmente in $[a, b]$ per $n \to \infty$; allora l'insieme dei valori di f, ossia l'insieme $\{\chi_{[a,t]} : t \in [a, b]\}$ dovrebbe essere la chiusura in X dell'insieme $\{\varphi_n(t) : \; t \in [a, b], \; n \in \mathbb{N}\}$, il quale è un insieme numerabile. Ne seguirebbe che $\{\chi_{[a,t]} : t \in [a, b]\}$ sarebbe un insieme separabile di X. Tuttavia, i punti $\chi_{[a,t]}$, che sono un'infinità più che numerabile, sono tutti isolati in $X = L^\infty(a, b)$, dato che le palle $B(\chi_{[a,t]}, 1/2)$ sono tutte disgiunte al variare di t in $[a, b]$. Quindi l'insieme $\{\chi_{[a,t]} : t \in [a, b]\}$ non può essere separabile in X e ciò mostra che f non può essere fortemente misurabile.

È importante la seguente proprietà delle funzioni fortemente misurabili:

Proposizione B.0.6 *Sia $f : E \to X$ una funzione fortemente misurabile; allora per ogni aperto $A \subseteq X$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ appartiene ad $\mathcal{E}$.*

Dimostrazione Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni semplici che converge a f puntualmente in E per $n \to \infty$. Allora, se A è un aperto di X, posto $A_k = \{x \in A : d(x, \partial A) > 1/k\}$ possiamo scrivere

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{\infty} \varphi_m^{-1}(A_k);$$

ora, detta $\varphi_m(t) = \sum_{j=1}^{h_m} x_{j,m}\, \chi_{B_{j,m}}$ la forma canonica di φ_m, gli insiemi $B_{j,m}$ sono elementi disgiunti di $\mathcal{E}$, e dunque avremo

$$\varphi_m^{-1}(A_k) = \bigcup_{j\in S} B_{j,m}$$

ove S è l'insieme degli indici $j \in \{1, ..., h_m\}$ per i quali si ha $x_j \in A_k$. Quindi $\varphi_m^{-1}(A_k)$ è un elemento di $\mathcal{E}$, e dunque la relazione precedente mostra che $f^{-1}(A)$ appartiene ad $\mathcal{E}$. $\square$

Anche il viceversa della proposizione precedente è falso: esistono funzioni che non sono fortemente misurabili, per le quali tuttavia si ha $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ per ogni aperto $A \subseteq X$.

Esempio B.0.7 Si consideri lo spazio misurato $([a,b], \mathcal{M}, m)$, ove $\mathcal{M}$ è la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue e m è la misura di Lebesgue. Posto $X = L^\infty(a,b)$, per la funzione $f(t) = \chi_{[a,t]}$ introdotta nell'esempio B.0.5 il viceversa della proposizione B.0.6 è falso. Infatti, per ogni palla $B(g,\delta) \subset X$ con $0 < \delta < 1/2$ l'insieme $f^{-1}(B(g,\delta))$ contiene al più un punto $t \in [a,b]$ (e quindi esso è misurabile): infatti se avessimo $t \neq s$ e $t, s \in f^{-1}(B(g,\delta))$, otterremmo $\|\chi_{[a,t]} - \chi_{[a,s]}\|_X < 2\delta < 1$ e ciò è impossibile. Ora la controimmagine mediante f di ogni aperto è unione numerabile di controimmagini di palle, e pertanto è un insieme misurabile. Tuttavia, come sappiamo dall'esempio B.0.5, la funzione f non è fortemente misurabile.

È importante la seguente caratterizzazione delle funzioni fortemente misurabili.

Teorema B.0.8 (di Pettis) *Sia $g : E \to X$. Allora g è fortemente misurabile se e solo se g è debolmente misurabile e l'insieme $\{g(u) : u \in E\}$ è separabile.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) È chiaro che g, essendo fortemente misurabile, è debolmente misurabile. Inoltre, detta $\{g_n\}$ una successione di funzioni semplici tali che $g_n(u) \to g(u)$ per ogni $u \in E$ per $n \to \infty$, gli insiemi $\{g_n(u) : u \in E\}$ sono tutti finiti, quindi la loro unione ha chiusura separabile e si ha

$$\{g(u) : u \in E\} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{g_n(u) : u \in E\}}.$$

Ne segue che $\{g(u) : u \in E\}$ è separabile.

($\Longleftarrow$) Sia g debolmente misurabile con $\{g(u) : u \in E\}$ separabile. Possiamo supporre che X sia a sua volta separabile: altrimenti possiamo sostituirlo con il più piccolo sottospazio chiuso M contenente $\{g(u) : u \in E\}$, che è certamente separabile.

Per prima cosa vogliamo provare che la funzione reale $u \mapsto \|g(u)\|_X$ è misurabile. Premettiamo questo lemma:

Lemma B.0.9 *Sia X separabile, e poniamo $S^* = \{T \in X^* : \|T\|_{X^*} \leq 1\}$. Allora per ogni successione $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S^*$ e per ogni $T_0 \in S^*$ esiste una sottosuccessione $\{T_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$\lim_{k\to\infty} T_{n_k} u = T_0 u.$$

Dimostrazione Sia $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione densa in X. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ definiamo l'operatore $\psi_n : S^* \to \ell^2(n)$ (ove $\ell^2(n)$ è $\mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$) ponendo

$$\psi_n(T) = (Tx_1, \ldots, Tx_n), \qquad T \in S^*.$$

Dato che $\ell^2(n)$ è separabile, tale è anche il suo sottoinsieme $\psi_n(S^*)$. Un insieme denso e numerabile contenuto in $\psi_n(S^*)$ sarà una successione del tipo $\{\psi_n(T_{n,k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $\{T_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S^*$. Allora, fissato $T_0 \in S^*$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $k_n \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$|\psi_n(T_0) - \psi_n(T_{n,k_n})|_n = \left(\sum_{j=1}^{n} |T_0 x_j - T_{n,k_n} x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{n}\,.$$

Se ne deduce che per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha, per $n > j$,

$$|T_{n,k_n} x_j - T_0 x_j| < \frac{1}{n}\,,$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} |T_{n,k_n} x_j - T_0 x_j| = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

La densità di $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ implica che

$$\lim_{n\to\infty} |T_{n,k_n} x - T_0 x| = 0 \qquad \forall x \in X,$$

e ciò prova il lemma. $\square$

Per dimostrare che $u \mapsto \|g(u)\|_X$ è misurabile, fissiamo $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'insieme

$$A = \{u \in E : \|g(u)\|_X \le a\}.$$

Per $T \in S^*$ poniamo $A_T = \{u \in E : |Tg(u)| \le a\}$ ed osserviamo che, evidentemente,

$$A \subseteq \bigcap_{\|T\|_{X^*}=1} A_T\,.$$

D'altra parte, fissato $u \in E$, per un corollario del teorema di Hahn-Banach esiste $T_0 \in S^*$, con $\|T_0\|_{X^*} = 1$, tale che $T_0 g(u) = \|g(u)\|_X$; ne segue l'inclusione opposta

$$\bigcap_{\|T\|_{X^*}=1} A_T \subseteq A_{T_0} \subseteq A.$$

Utilizzando il lemma B.0.9 si ricava

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{T_{n,k_n}} = \bigcap_{\|T\|_{X^*}=1} A_T = A.$$

Poiché g è debolmente misurabile, si ha $A_{T_{n,k_n}} \in \mathcal{E}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e l'uguaglianza precedente mostra che, di conseguenza,$A \in \mathcal{E}$. Dunque $\|g(\cdot)\|_X$ è misurabile.

Adesso facciamo il passo conclusivo. Essendo $\{g(u) : u \in E\}$ separabile, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ possiamo ricoprire tale insieme con una successione di sfere aperte $\{S_{jn}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di raggio $\frac{1}{n}$. Detto u_{jn} il centro di S_{jn}, le funzioni $\|g(\cdot) - u_{jn}\|_X$ sono misurabili. Perciò, posto

$$B_{jn} = \{u \in E : g(u) \in S_{jn}\}, \quad j \in \mathbb{N}^+, \qquad B'_{in} = B_{in} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} B_{jn}\,, \quad i \in \mathbb{N}^*,$$

gli insiemi B_{jn}, B'_{in} appartengono a $\mathcal{E}$ e risulta

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{jn} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_{in}.$$

Inoltre, definendo

$$g_n(u) = u_{nj} \quad \text{per } u \in B'_{in}, \quad i \in \mathbb{N}^+,$$

si ha

$$\|g(u) - g_n(u)\|_X < \frac{1}{n} \qquad \forall u \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_{in} = \Omega.$$

Dato che le g_n sono fortemente misurabili e convergono puntualmente a g per $n \to \infty$, anche g è fortemente misurabile. Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Pettis. □

Vediamo ora come e quando è possibile definire l'integrale di una funzione fortemente misurabile, il quale sarà un elemento di X.

Definizione B.0.10 *Sia $f : E \to X$ una funzione fortemente misurabile. Diciamo che f è* sommabile *su E se si ha*

$$\int_E \|f(\cdot)\|_X \, d\mu < +\infty.$$

Come sappiamo, questo integrale ha senso perché $\|f(\cdot)\|_X$ è una funzione misurabile non negativa. Osserviamo che, ovviamente, ogni funzione semplice è sommabile; naturalmente, bisogna verificare che per le funzioni semplici la nuova definizione di integrale coincida con la vecchia. A questo scopo stabiliamo anzitutto la seguente

Proposizione B.0.11 *Sia $f : E \to X$ fortemente misurabile. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) *f è sommabile;*

(ii) *esiste $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(E, X)$ tale che $\int_E \|f(\cdot) - \psi_n(\cdot)\|_X \, d\mu \to 0$ per $n \to \infty$.*

Dimostrazione **(ii)$\Longrightarrow$ (i)** Per ipotesi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_E \|f(\cdot) - \psi_n(\cdot)\|_X \, d\mu < 1 \qquad \forall n \geq \nu;$$

quindi

$$\int_E \|f(\cdot)\|_X \, d\mu \leq \int_E \|f(\cdot) - \psi_\nu(\cdot)\|_X \, d\mu + \int_E \|\psi_\nu(\cdot)\|_X \, d\mu \leq 1 + \int_E \|\psi_\nu(\cdot)\|_X \, d\mu < \infty.$$

Pertanto f è sommabile.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Poiché f è fortemente misurabile, esiste $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{S}(E,X)$ tale che $\varphi_n(u) \to f(u)$ in X per $n \to \infty$, per ogni $u \in E$. Definiamo

$$\psi_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_n(u) = 0, \\ \frac{\varphi_n(u)}{\|\varphi_n(u)\|_X}\, h_n(u) & \text{se } \varphi_n(u) \neq 0, \end{cases}$$

ove la funzione $h_n : E \to \mathbb{R}$ è data da

$$h_n(u) = \begin{cases} n & \text{se } \|f(u)\|_X \geq n \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq \|f(u)\|_X < \frac{k}{2^n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n2^n). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{S}(E,X)$ e che $\|\psi_n(u)\|_X \leq \|f(u)\|_X$ per ogni $u \in E$; proviamo che si ha

$$\psi_n(u) \to f(u) \quad \text{in } X \qquad \forall u \in E \qquad \text{per } n \to \infty.$$

In effetti, se $f(u) = 0$ si ha $\psi_n(u) = 0$ per definizione. Se invece $f(u) \neq 0$, esisterà $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|f(u)\|_X \geq 2^{-\nu}$: quindi per $n \geq \nu$ risulta $\varphi_n(u) \neq 0$ e dalla definizione di $\psi_n(u)$ segue

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(u)}{\|\varphi_n(u)\|_X}\, h_n(u) = \frac{f(u)}{\|f(u)\|_X} \|f(u)\|_X = f(u) \qquad \forall u \in E.$$

Poiché inoltre $\|\psi_n(u) - f(u)\|_X \leq 2\|f(u)\|_X$, dato che f è sommabile la convergenza è dominata. Ne segue la tesi. $\square$

Siamo ora in grado di definire l'integrale di una funzione sommabile $f : E \to X$. Infatti, per la proposizione B.0.11 esiste $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(E,X)$ tale che $\int_E \|f(\cdot) - \psi_n(\cdot)\|_X \, d\mu \to 0$ per $n \to \infty$. Ne segue che la successione $\left\{\int_E \psi_n \, d\mu\right\}_{n\in N}$ è di Cauchy in X, in quanto

$$\begin{aligned} \left\| \int_E \psi_n \, d\mu - \int_E \psi_m \, d\mu \right\|_X &\leq \int_E \|\psi_n(\cdot) - \psi_m(\cdot)\|_X \, d\mu \leq \\ &\leq \int_E \|\psi_n(\cdot) - f(\cdot)\|_X \, d\mu + \int_E \|f(\cdot) - \psi_m(\cdot)\|_X \, d\mu \to 0 \quad \text{per } n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Essendo X completo, tale successione converge in X ed il suo limite, per definizione, sarà l'integrale su E della funzione f. In altre parole, definiamo l'integrale di una funzione sommabile nel modo seguente:

Definizione B.0.12 *Sia $(E, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio misurato, sia X uno spazio di Banach e sia $f : E \to X$ sommabile. L'*integrale (di Bochner) *di f in E è l'elemento di X definito da*

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \, d\mu,$$

ove il limite è fatto nella norma di X e $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque successione di funzioni semplici tale che $\lim_{n\to\infty} \int_E \|f(\cdot) - \psi_n(\cdot)\|_X d\mu = 0$.

La definizione non dipende dalla scelta delle funzioni approssimanti ψ_n: infatti, se $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione in $\mathcal{S}(E,X)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \|f(\cdot)-\eta_n(\cdot)\|_X\,d\mu = 0,$$

allora evidentemente

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_E \psi_n\,d\mu - \int_E \eta_n\,d\mu\right\|_X \le \lim_{n\to\infty}\int_E \|\psi_n(\cdot)-\eta_n(\cdot)\|_X\,d\mu = 0.$$

L'integrale di Bochner gode di tutte le proprietà usuali: ad esempio, se per $A\in\mathcal{E}$ si definisce

$$\int_A f\,d\mu = \int_E f\chi_A\,d\mu,$$

allora risulta

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu \qquad \forall A,B\in\mathcal{E} \text{ con } A\cap B=\emptyset,$$

poiché è facile dedurre che tale relazione vale per ogni funzione semplice. Si ha anche, come facile conseguenza della definizione,

$$\left\|\int_E f\,d\mu\right\|_X \le \int_E \|f(\cdot)\|_X\,d\mu. \tag{B.1}$$

Per l'integrale di Bochner di funzioni vettoriali definite su un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$ vale anche la continuità delle traslazioni.

Proposizione B.0.13 *Sia f sommabile su un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$. Prolunghiamo f ponendola uguale a 0 nei punti di $\mathbb{R}\setminus I$. Allora*

$$\lim_{s\to 0}\int_I \|f(t+s)-f(t)\|_X\,dt = 0.$$

Dimostrazione Fissato $\delta>0$, sia $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R},X)$ una funzione semplice, nulla fuori di I, tale che $\int_I \|f(t)-\varphi(t)\|_X\,dt<\delta$; per $\varepsilon>0$ sia poi ω_ε una mollificatrice reale di classe C^∞, in modo che la convoluzione (definita, in un caso particolare, in (1.16)) $\omega_\varepsilon*\varphi$ verifichi

$$\int_I \|\omega_\varepsilon*\varphi(t)-\varphi(t)\|_X\,dt<\delta \qquad \forall\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_\delta].$$

Allora possiamo scrivere, per $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_\delta]$,

$$\begin{aligned}\int_I \|f(t+s)-f(t)\|_X\,dt &\le \int_I \|f(t+s)-\varphi(t+s)\|_X\,dt+\\ &+\int_I \|\varphi(t+s)-\omega_\varepsilon*\varphi(t+s)\|_X\,dt+\int_I \|\omega_\varepsilon*\varphi(t+s)-\omega_\varepsilon*\varphi(t)\|_X\,dt+\\ &+\int_I \|\varphi(t)-\omega_\varepsilon*\varphi(t)\|_X\,dt+\int_I \|\varphi(t)-f(t)\|_X\,dt\le\\ &\le 4\delta+\ell(I)\sup_{t\in I}\|\omega_\varepsilon*\varphi(t+s)-\omega_\varepsilon*\varphi(t)\|_X\,,\end{aligned}$$

da cui, per $s \to 0$,

$$\limsup_{s \to 0} \int_I \|f(t+s) - f(t)\|_X \, dt \leq 4\delta.$$

Dato che δ è arbitrario, si ha la tesi. $\square$

Introduciamo adesso gli spazi L^p per funzioni definite su E a valori in X.

Definizione B.0.14 *Se $1 \leq p < \infty$ denotiamo con $L^p(E;X)$ lo spazio delle funzioni $f : E \to X$ fortemente misurabili tali che $\int_E \|f(\cdot)\|_X^p \, d\mu < \infty$. Se $p = \infty$ denotiamo con $L^\infty(E;X)$ lo spazio delle funzioni $f : E \to X$ fortemente misurabili e tali che* $\operatorname{supess}_{u \in E} \|f(u)\|_X < \infty$.

Si verifica facilmente, riconducendosi al caso di funzioni da E in $\mathbb{R}$, che gli spazi $L^p(E;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, sono spazi normati con le usuali rispettive norme:

$$\|f\|_{L^p(E;X)} = \left[\int_E \|f(\cdot)\|_X^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \|f\|_{L^\infty(E;X)} = \operatorname{supess}_{u \in E} \|f(u)\|_X.$$

Inoltre, con la stessa dimostrazione che si fa nel caso $X = \mathbb{R}$, si ottiene che tali spazi sono di Banach. Quando X è riflessivo, si sa anche caratterizzare, in analogia col caso scalare, il duale di $L^p(E;X)$:

Teorema B.0.15 (di Riesz-Fischer) *Siano $(E, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio misurato e X uno spazio di Banach riflessivo; sia inoltre $p \in [1, \infty[$. Allora $(L^p(E;X))^*$ è isomorfo ed isometrico a $L^q(E;X^*)$, ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; in altre parole, per ogni $T \in (L^p(E;X))^*$ esiste un'unica funzione $g \in L^q(E;X^*)$ tale che*

(i) $Tf = \int_E \langle g(\cdot), f(\cdot) \rangle_X \, d\mu$ *per ogni $f \in L^p(E;X)$, ove $\langle g(u), f(u) \rangle_X$ indica l'azione del funzionale $g(u) \in X^*$ sull'elemento $f(u) \in X$;*

(ii) $\|T\|_{(L^p(E;X))^*} = \|g\|_{L^q(E;X^*)}$.

Consideriamo in particolare il caso in cui $(E, \mathcal{E}, \mu) = ([a,b], \mathcal{M}, m)$. In questo caso, evidentemente, tutte le funzioni continue $f : [a,b] \to X$ sono fortemente misurabili e sommabili, ed anzi lo spazio $C([a,b], X)$ delle funzioni continue da $[a,b]$ in X è contenuto (propriamente) in tutti gli spazi $L^p(a,b;X)$. In particolare, vale il seguente enunciato:

Proposizione B.0.16 *Sia X uno spazio di Banach. Se $f \in C([a,b], X)$, allora la funzione integrale $F(t) = \int_a^t f(s) \, ds$ appartiene a $C^1([a,b], X)$ e $F'(t) = f(t)$ per ogni $t \in [a,b]$.*

Dimostrazione Se $t, t+h \in [a,b]$, si ha

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \right\|_X &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [f(s) - f(t)] \, dt \right\|_X \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|_X \, ds \right|, \end{aligned}$$

ed in virtù della continuità di f, l'ultimo membro è infinitesimo per $h \to 0$. $\square$

Corollario B.0.17 *Sia X uno spazio di Banach. Se $f \in C^1([a,b],X)$ risulta*

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f'(r)\,dr \qquad \forall t, s \in [a,b].$$

Dimostrazione Fissato $s \in [a,b]$, la funzione

$$\gamma(t) = f(t) - \int_s^t f'(r)\,dr, \qquad t \in [a,b],$$

appartiene a $C^1([a,b],X)$ ed ha derivata nulla per la proposizione precedente. Perciò, fissato $T \in X^*$, la funzione reale o complessa $g(t) = T\gamma(t)$ ha ancora derivata nulla in quanto, in virtù della linearità e continuità di T,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = T\left(\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right) = 0.$$

Dunque, g è costante su $[a,b]$; ne segue $T(\gamma(t) - \gamma(s)) = 0$ per ogni $t \in [a,b]$ e per ogni $T \in X^*$. Per il teorema di Hahn-Banach, fissato $t \in [a,b]$ si può scegliere T tale che $T(\gamma(t) - \gamma(s)) = \|\gamma(t) - \gamma(s)\|_X$; si conclude che $\gamma(t) = \gamma(s)$ per ogni $t \in [a,b]$. Essendo $\gamma(s) = f(s)$, si ha la tesi. $\square$

Con la stessa dimostrazione del caso scalare, si provano per le funzioni a valori in uno spazio di Banach la *disuguaglianza di Hölder*

$$\int_E |\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle_X|\ d\mu \le \|f\|_{L^p(E,X)} \cdot \|g\|_{L^q(E;X^*)} \qquad \forall f \in L^p(E,X), \quad \forall g \in L^q(E;X^*),$$

ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e la *disuguaglianza di Minkowski*

$$\left[\int_E \|f(\cdot) + g(\cdot)\|_X^p\ d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\int_E \|f(\cdot)\|_X^p\ dt\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E \|g(\cdot)\|_X^p\ dt\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall f, g \in L^p(E,X).$$

Appendice C

Funzioni olomorfe di operatori

Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Come sappiamo, l'operatore risolvente $R(\lambda, A)$ è ben definito nell'aperto $\rho(A)$, certamente non vuoto poiché $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r(A)\}$.

Definizione C.0.1 *Sia*

$$\Theta(A) = \{f : U \to \mathbb{C} : f \text{ olomorfa, } U \text{ aperto, } U \supset \sigma(A)\}.$$

Per $f \in \Theta(A)$ poniamo

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda,$$

ove Γ è una qualunque curva regolare, semplice e chiusa, orientata in verso antiorario, contenuta in $U \setminus \sigma(A)$.

L'espressione che definisce $f(A)$ ha senso, alla luce di quanto visto nell'appendice B: infatti se la curva Γ è parametrizzata da $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [a, b]$, si ottiene l'integrale vettoriale

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) R(\boldsymbol{\varphi}(t), A) |\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2\, dt.$$

L'integrale che definisce $f(A)$ non dipende in realtà dalla scelta della curva Γ nella classe indicata, visto che l'integrando è una funzione olomorfa. Inoltre $f(A)$ è un operatore lineare e limitato su X:

$$\begin{aligned}
\|f(A)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|f(A)x\|_X \leq \\
&\leq \sup_{\|x\|_X=1} \frac{1}{2\pi} \left[\int_a^b |f(\boldsymbol{\varphi}(t))| \|R(\boldsymbol{\varphi}(t), A)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X |\boldsymbol{\varphi}'(t)| dt \right] \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\Gamma} [|f(\cdot)| \|R(\cdot, A)\|_{\mathcal{L}(X)}]\, \ell(\Gamma).
\end{aligned}$$

Verifichiamo adesso che l'applicazione $f \mapsto f(A)$, da $\Theta(A)$ in $\mathcal{L}(X)$ è lineare e trasforma il prodotto ordinario in un prodotto di composizione.

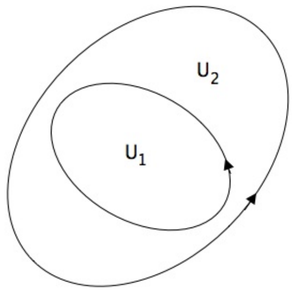
Proposizione C.0.2 *Siano $f, g \in \Theta(A)$. Allora:*

(i) *per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ si ha $\lambda f + \mu g \in \Theta(A)$ e $(\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A)$;*

(ii) *$fg \in \Theta(A)$ e $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$;*

(iii) *se vale lo sviluppo $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ per $\lambda \in U$, allora $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$.*

Dimostrazione **(i)** Segue direttamente dalla linearità dell'integrale.



(ii) Siano U_1, U_2 intorni di $\sigma(A)$ con $\partial U_1, \partial U_2$ regolari e supponiamo (il che non è restrittivo) che $\overline{U_1} \subseteq U_2$. Allora si ha, utilizzando il teorema di Fubini, l'identità del risolvente e la formula di Cauchy:

$$\begin{aligned}
f(A)g(A) &= \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_1} f(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda\right]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_2} g(\mu)R(\mu,A)\,d\mu\right] = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{+\partial U_1}\int_{+\partial U_2} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda,A)R(\mu,A)\,d\mu d\lambda = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{+\partial U_1}\int_{+\partial U_2} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda,A)-R(\mu,A)}{\mu-\lambda}\,d\mu d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_1} f(\lambda)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_2}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu\right]R(\lambda,A)\,d\lambda - \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_2} g(\mu)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_1}\frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\right]R(\mu,A)\,d\mu = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U_1} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda + 0 = (fg)(A).
\end{aligned}$$

(iii) Per ogni $\varepsilon \in]0, r(A)[$ la serie di potenze di f converge totalmente in $B(0, r(A)-\epsilon)$. Scelto ε in modo che $\partial U \subset B(0, r(A)-\epsilon)$, si ha

$$\begin{aligned}
f(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n\right)R(\lambda,A)\,d\lambda = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{+\partial U}\lambda^n R(\lambda,A)\,d\lambda = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{+\partial U}\lambda^n\sum_{h=0}^{\infty}\frac{A^h}{\lambda^{h+1}}\,d\lambda = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{A^h}{2\pi i}\int_{+\partial U}\lambda^{n-h-1}\,d\lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n,
\end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la formula di Cauchy ed il teorema dei residui, dai quali segue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial U} \lambda^k \, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } k \geq 0 \\ 1 & \text{se } k = -1 \\ 0 & \text{se } k < -1. \quad \square \end{cases}$$

Dal precedente risultato otteniamo, ad esempio, la rapppresentazione

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \int_{+\partial U} e^{t\lambda} R(\lambda, A) \, d\lambda,$$

dove U è una palla di centro 0 e raggio minore di $r(A)$.

Teorema C.0.3 (dell'applicazione spettrale) *Se* $f \in \Theta(A)$, *allora*

$$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)).$$

Dimostrazione Sia $\lambda \in \sigma(A)$. Consideriamo la funzione

$$g(\xi) = \frac{f(\lambda) - f(\xi)}{\lambda - \xi}, \qquad \xi \in U,$$

che è olomorfa in un opportuno intorno U di λ. Se fosse $f(\lambda) \in \rho(f(A))$, l'operatore

$$B = [f(\lambda)I_X - f(A)]^{-1}$$

apparterrebbe a $\mathcal{L}(X)$. Ne seguirebbe

$$g(A)B(\lambda I_X - A) = [f(\lambda)I_X - f(A)](\lambda I_X - A)^{-1}[f(\lambda)I_X - f(A)]^{-1}(\lambda I_X - A) = I_X\,,$$

quindi avremmo $\lambda \in \rho(A)$, che è assurdo. Ciò prova la prima inclusione.
D'altra parte, sia $\mu \in \sigma(f(A))$: se fosse $\mu \notin f(\sigma(A))$, posto $h(\xi) = (f(\xi) - \mu)^{-1}$ avremmo $h \in \Theta(A)$. Ma allora $h(A)[f(A) - \mu I_X] = I_X$, contro l'ipotesi $\mu \in \sigma(f(A))$. Cò prova la seconda inclusione. $\square$

Bibliografia

[1] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, I, Interscience Publ., New York 1958.

[2] K.-J. Engel, R. Nagel, One-paremeter semigroups for linear evolution equations, Springer, New York 2000.

[3] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer, New York 1980.

[4] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhäuser, Basel 1995.

[5] A Lunardi, Interpolation theory, Edizioni della Normale, Pisa 1999.

[6] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, New York 1983.

[7] K. Yosida, Functional Analysis, Springer, New York 1980.

Indice analitico