UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Analisi di medie generalizzate tramite misure di Borel

Relatore:
Paolo Acquistapace

Laureando:
Matteo Stefanini

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

*"Alla mia famiglia e alla mia ragazza,
che non hai mai smesso di credere in me"*

Matteo

Indice

Introduzione

Nel 1898 Borel estese il concetto di lunghezza di un intervallo a quello di una misura definita su una vasta classe di insiemi della retta reale; tale misura possiede proprietà particolarmente utili e per definirla utilizziamo in questo caso le locuzioni *misura di Borel* e *insiemi di Borel* o più semplicemente boreliani. La sua innovativa idea chiave è la nozione di additività numerabile. Una funzione definita su una famiglia di insiemi è numerabilmente additiva se il valore che essa assegna all'unione di una successione infinita di insiemi disgiunti è uguale alla somma dei valori che assegna a ciascuno degli elementi della successione. Partendo dalla famiglia degli intervalli e dalla funzione che assegna a ogni intervallo la sua lunghezza, Borel procedette ricorsivamente allo scopo di ampliare, passo dopo passo, il dominio di definizione della funzione aggiungendo a ogni stadio insiemi i cui complementari erano già definiti o che erano l'unione di una successione disgiunta di insiemi già definiti. In questo modo si ottiene una famiglia chiusa rispetto alle operazioni di complementazione e di unione numerabile e la misura risultante è numerabilmente additiva. Una qualsiasi famiglia di insiemi in un qualsiasi spazio la quale goda di queste proprietà viene chiamata attualmente *famiglia di Borel* o *σ-algebra*. Il lavoro di Borel fa parte di una teoria molto vasta, la teoria della misura, che fu largamente ampliata da Lebesgue, sino a diventare uno dei rami principi dell'analisi e della fisica del XX secolo.

Lo scopo di questo articolo è quello di trattare un piccolissimo filone di questa vasta teoria. Analizzeremo la possibilità di generalizzare il concetto di media: dalla ordinaria media tra una quantità finita di numeri ad una media definita su una classe di sottoinsiemi dei reali, utilizzando in particolare misure di Borel. Ovviamente la scelta che faremo è in larga parte arbitraria, e non è certo l'unica possibile. Infatti porteremo anche un esempio differente, ma sempre affine a tutta la trattazione, per mostrare che, seppur piccolo, questo filone apre molte possibilità.

Nella prima parte della tesi illustreremo la differenza tra media ordinaria e media generalizzata. Introdurremo inoltre il metodo chr utilizzeremo per generalizzare una media tramite una misura di Borel e ne analizzeremo una serie di proprietà. Vedremo ad esempio che la media generalizzata passa al limite per successioni "monotone" di insiemi e che è monotona rispetto all'unione. Passeremo poi a confrontare medie definite da differenti misure, e vedremo in che modo le relazioni tra le medie ottenute sono condizionate dalle relazioni tra le misure che le definiscono. Concluderemo la prima parte con un risultato di parziale unicità tra queste medie generalizzate.

La seconda parte della trattazione sarà interamente dedicata alla giustificazione del termine “media generalizzata”. Partiremo infatti da una media ordinaria calcolata tra due quantità e dimostreremo, sotto oppurtune ipotesi, come sia possibile costruire la misura che dà origine alla generalizzazione della media ordinaria considerata. Dopo questo importante risultato osserveremo che le relazioni note che sussistono tra media aritmetica, geometrica e armonica persistono anche tra le loro generalizzate. Concluderemo presentando, come già anticipato, un metodo alternativo di ottenere l'obbiettivo cercato.

L'idea della parte conclusiva è ancora una volta suggerita da fatti molto noti sulle medie ordinarie. Infatti è facile verificare che le medie aritmetica e geometrica, calcolate in $a+x$ e $b+x$, hanno comportamento asintoticamente equivalente per $x \to +\infty$. L'obbiettivo finale è quindi quello di mostrare che anche le generalizzate , se calcolate su insiemi della forma $H + x$, si comportano in modo analogo per $x \to +\infty$.

Capitolo 1

Studio delle medie attraverso le misure

In questo capitolo il tema principale sarà lo studio di una media, definita da una misura, e delle sue proprietà. Inizieremo da proprietà molto semplici e simili a quelle che si possono definire per una media ordinaria, ad esempio di essere interna, per poi proseguire con risultati più corposi, quali il passaggio al limite per unioni e intersezioni di insiemi, monotonia su catene discendenti di insiemi e risultati di continuità. Quello che sarà interessante osservare è come le proprietà di una media, in realtà, non discostino molto dalle proprietà di una misura. Passeremo in secondo luogo a confrontare medie generate da differenti misure e quali relazioni presenti tra le misure vengano preservate dalla nostra costruzione. Questo ci porterà a concludere con un risultato di quasi unicità.

1.1 Notazioni e definizioni

In questa sezione andremo a definire le nozioni e notazioni che utilizzeremo per quasi tutto il lavoro.

Definizione 1.1.1. Una funzione $\mathcal{K} : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ si definisce *media ordinaria* se D è formato da soli insiemi finiti e $\min H \leq \mathcal{K}(H) \leq \max(H)$.

Indicheremo con $\mathcal{K}$ una generica media e con $Dom(\mathcal{K})$ il dominio di $\mathcal{K}$.

Osservazione. La definizione data sopra è molto generica, ma serve a evitare di escludere casistiche particolari. Infatti se ci soffermiamo a pensare al concetto di media, ci aspettiamo che il risultato stia "nel mezzo" dei valori assegnati, ovvero che sia *interna* ad H.

Richiamiamo un elenco di semplici definizioni per una media ordinaria $\mathcal{K}$, utilizzata per calcolare la media tra due soli oggetti $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{K}$ si dice *simmetrica* se $\mathcal{K}(a,b) = \mathcal{K}(b,a)$
- $\mathcal{K}$ è *interna in senso stretto* se $a < \mathcal{K}(a,b) < b$
- $\mathcal{K}$ è *continua* se è continua come funzione nelle due variabili a e b

Osservazione. Le definizioni sopracitate devono essere ovviamente vere su tutto il dominio di $\mathcal{K}$

Definizione 1.1.2. Siano $H \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ useremo le notazioni

$$H^{-y} := H \cap (-\infty, y], \qquad H^{+y} := H \cap [y, +\infty)$$

Definizione 1.1.3. Come è usuale, per $H \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ poniamo:

$$H + x := \{h + x : h \in H\}$$

Per convenzione definiremo che questa operazione agisce con maggiore priorità rispetto alle usuali operazioni tra insiemi: ad esempio

$$A \cup B \cup C + x = A \cup B \cup (C + x).$$

Utilizzeremo $\overline{H}$ per indicare la *chiusura* di H. Mentre $\mathcal{D}(H)$ sarà il *derivato* di H, cioè l'insieme dei sui punti di accumulazione.

Definizione 1.1.4. Sia H un insieme limitato allora indichiamo con

$$\underline{\lim}(H) := \inf(\mathcal{D}(H)) \text{ e } \overline{\lim}(H) := \sup(\mathcal{D}(H)).$$

Andiamo a definire con precizione l'oggetto principale del nostro lavoro: una media generalizzata.

Definizione 1.1.5. Una funzione $\mathcal{M} : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, si dice *media generalizzata* se D è formato da insiemi limitati di $\mathbb{R}$, finiti o infiniti. Inoltre per ogni $H \in D$ chiediamo che $\inf H \leq \mathcal{M}(H) \leq \sup H$.

Osservazione. La richiesta fatta nella definizione su $\mathcal{M}$ è per sottolineare il fatto di essere una generalizzazione di una media ordinaria interna, quindi ci aspettiamo che il suo risultatto finisca internamente ad H.

Esattamente come per la media $\mathcal{K}$ con la scrittura $Dom(\mathcal{M})$ indicheremo il dominio di $\mathcal{M}$.

Da qui in avanti indicheremo con λ la *misura di Lebesgue*, della quale rimandiamo a una lettura dell'appendice a fine articolo per una definizione dettagliata. Presentiamo un primo esempio di media generalizzata, definita attraverso la misura λ, che non sarà oggetto di analisi dettagliata, dato che ci preoccuperemo di medie definite da misure di Borel, ma l'idea con la quale è definita è la stessa che utiliremo nella nostra trattazione.

Definizione 1.1.6. Sia $H \subset \mathbb{R}$ limitato, misurabile secondo Lebesgue, con $\lambda(H) > 0$ allora:

$$Avg(H) = \frac{\int_H x d\lambda}{\lambda(H)}$$

Tutte le misure μ che considereremo nella tesi sono da considerarsi *misure di Borel*, su un intervallo, finito o infinito, nell'insieme dei reali $\mathbb{R}$. Invece con μ_f indicheremo la misura di Lebesgue-Stieltjes, delle quale rimandiamo a una definizione più esaustiva in appendice. In entrambi i casi, a meno di specificare diversamente, utilizzeremo misure che godono delle seguenti proprietà:

(i) Se $H \subset \mathbb{R}$ è limitato e misurabile, allora $\mu(H) < \infty$

(ii) Se I è un intervallo non degenere, allora $\mu(I) > 0$

1.2 Definizione di media e prime proprietà

In questa sezione, come già anticipato, ci preoccuperemo di andare a definire una media $\mathcal{M}^\mu$ corrispondente ad una misura μ e di studiarne le proprietà più semplici, ad esempio quella di essere strettamente interna.

Definizione 1.2.1. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, eventualmente illimitato, e sia μ una misura di Borel come nelle ipotesi di lavoro. Preso $H \subset \mathbb{R}$ limitato e misurabile secondo μ, tale che $0 < \mu(H) < +\infty$, definiamo *la media di H secondo μ*:

$$\mathcal{M}^\mu(H) = \frac{\int_H x d\mu}{\mu(H)}.$$

È interessante vedere che la definizione sopra data può essere interpretata come generalizzazione di una media ordinaria, invero è possibile da essa ridursi alla sua media ordinaria associata come segue:

Definizione 1.2.2. Se $\mathcal{M}^\mu$ è assegnata, presi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ allora definiamo $\mathcal{M}^\mu(a, b) = \mathcal{M}^\mu([a, b])$. Abbiamo così ricavato una media ordinaria da $\mathcal{M}^\mu$.

Osservazione. Notiamo che $Dom(\mathcal{M}^\mu)$ non è una σ-algebra a causa della condizione imposta su H (ovvero $0 < \mu(H) < +\infty$). Infatti, sebbene sia chiuso rispetto a unioni finite, e se I è limitato è chiuso anche per unioni numerabili, non è chiuso però per intersezione.

Proposizione 1.2.3. *$\mathcal{M}^\mu$ è una media generalizzata.*

Dimostrazione. La condizione sull'insieme di definizione di $\mathcal{M}^\mu$ è ovviamente verificata. Resta solo da controllare che valga $\inf(H) \leq \mathcal{M}^\mu(H) \leq \sup(H)$.

$$\inf(H) = \frac{\inf(H)\mu(H)}{\mu(H)} \leq \int_H x d\mu \frac{1}{\mu(H)} \leq \frac{\sup(H)\mu(H)}{\mu(H)} = \sup(H).$$

□

Definizione 1.2.4. Una media $\mathcal{M}$ si dice *fortemente interna* se $\underline{\lim}(H) \leq \mathcal{M}(H) \leq \overline{\lim}(H)$

Definizione 1.2.5. Una media $\mathcal{M}$ si dice *finitamente indipendente* se preso H insieme infinito, allora $\mathcal{M}(H) = \mathcal{M}(H \cup V)$ per ogni V insieme finito.

Proposizione 1.2.6. *Se $\mathcal{M}$ è interna e finitamente indipendente allora $\mathcal{M}$ è strettamente interna*

Dimostrazione. Siano $H \subset \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Allora :

$$\mathcal{M}(H) = \mathcal{M}(H \cap (-\infty, \overline{\lim}\, H + \varepsilon] \leq \overline{\lim}\, H + \varepsilon.$$

Dove la maggiorazione è stata possibile perchè H può avere alpiù un numero finito di punti isolati a destra di $\overline{\lim}\, H$, quindi la finita indipendenza permette la maggiorazione. Analogamente:

$$\underline{\lim}\, H - \varepsilon \leq \mathcal{M}(H \cap [\underline{\lim}\, H - \varepsilon, +\infty) = \mathcal{M}(H).$$

Per arbitrarietà di ε si conclude la dimostrazione. □

Proposizione 1.2.7. *Se la misura μ è tale che $\mu(H) = 0$ ogni qualvolta H è finito, allora $\mathcal{M}^\mu$ è fortemente interna.*

Dimostrazione. Grazie ai risultati precedenti basta mostrare che $\mathcal{M}^\mu$ è finitamente indipendente per avere la tesi. Prendiamo quindi H e V tali che $0 < \mu(H) < +\infty$ e V è finito. Verifichiamo preliminarmente che $\mu(H) = \mu(H \cup V)$, infatti:

$$\mu(H) \leq \mu(H \cup V) \leq \mu(H) + \mu(V) = \mu(H).$$

Concludiamo adesso la dimostrazione:

$$|\mathcal{M}^\mu(H \cup V) - \mathcal{M}^\mu(H)| = \left| \int_{H \cup V} x d\mu \frac{1}{\mu(H \cup V)} - \int_H x d\mu \frac{1}{\mu(H)} \right| =$$

$$\left| \int_{H \cup V} x d\mu - \int_H x d\mu \right| \frac{1}{\mu(H)} = \left| \int_{V \setminus H} x d\mu \right| \frac{1}{\mu(H)} \leq \max_{x \in V} |x| \frac{\mu(V)}{\mu(H)} = 0.$$

□

1.3 Passaggio al limite, continuità e monotonia

Entriamo nel vivo di questo capitolo, cercando di capire inizialmente se la media risente o meno di piccole variazioni sull'insieme dove viene calcolata. La risposta si trova nel lemma sottostante, che oltre a fornirci la risposta alla domanda, vedremo che sarà un utile strumento per analizzare problemi più complessi.

Lemma 1.3.1. *Siano $H_1, H_2 \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ tali che $\mu((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)) = 0$, allora $\mathcal{M}^\mu(H_1) = \mathcal{M}^\mu(H_2)$*

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente una serie di semplici conseguenze che agevoleranno le conclusioni finali. Iniziamo con mostrare che $\mu(H_1 \setminus H_2) = \mu(H_2 \setminus H_1) = 0$. Abbiamo per la monotonia di μ:

$$\mu(H_1 \setminus H_2) \leq \mu((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)) = 0.$$

L'altra si ottiene in modo analogo. Da questa, segue velocemente, ricordando che gli $H_i \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ sono limitati, che

$$\left| \int\limits_{H_2 \setminus H_1} x d\mu \right| = 0.$$

Concludiamo queste verifiche mostrando che $\mu(H_1) - \mu(H_2) = 0$. Stavolta useremo la finita additività di μ, in pratica:

$$\begin{aligned} \mu(H_1) - \mu(H_2) &= \mu(H_1) - \mu(H_1 \cap H_2) + \mu(H_1 \cap H_2) - \mu(H_2) = \\ &= \mu(H_1 \setminus H_2) - \mu(H_2 \setminus H_1) = 0. \end{aligned}$$

Siamo pronti per concludere:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}^\mu(H_1) - \mathcal{M}^\mu(H_2)| &= \left| \frac{1}{\mu(H_1)} \int\limits_{H_1} x d\mu - \frac{1}{\mu(H_2)} \int\limits_{H_2} x d\mu \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\mu(H_1)} \int\limits_{H_1} x d\mu - \frac{1}{\mu(H_2)} \left(\int\limits_{H_1} x d\mu + \int\limits_{H_2 \setminus H_1} x d\mu \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \int\limits_{H_1} x d\mu \right| \left| \frac{1}{\mu(H_1)} - \frac{1}{\mu(H_2)} \right| + \left| \frac{1}{\mu(H_2)} \int\limits_{H_2 \setminus H_1} x d\mu \right| = \\ &= \left| \int\limits_{H_1} x d\mu \right| \frac{|\mu(H_2) - \mu(H_1)|}{\mu(H_1)\mu(H_2)} + \frac{1}{\mu(H_2)} \left| \int\limits_{H_2 \setminus H_1} x d\mu \right| = 0 \end{aligned}$$

□

Definizione 1.3.2. Una media $\mathcal{M}$ è *fortemente interna in senso stretto* se è fortemente interna e ogni qualvolta H ha almeno due punti di accumulazione vale $\underline{\lim}\, H < \mathcal{M}(H) < \overline{\lim}\, H$.

Proposizione 1.3.3. *Se $\mu(H) = 0$ ogni qualvolta H è numerabile, allora $\mathcal{M}^\mu$ è fortemente interna in senso stretto.*

Dimostrazione. Siano $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$, $a = \underline{\lim}\, H$, $b = \overline{\lim}\, H$. Per proprietà topologiche si ha che H^{-a} e H^{+b} sono numerabili quindi $\mu(H^{-a}) = 0$ e $\mu(H^{+b}) = 0$. Da questo si ottiene che $\mu(H \cap [a, b]) = \mu(H)$. Ovviamente, poichè $\mu(H) > 0$, esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\mu(H \cap [c, b]) > 0$. Siano allora $H_1 = H \cap [a, c)$ e $H_2 = H \cap [c, b]$. Si conclude con:

$$\mathcal{M}^\mu(H) = \left(\int_{H_1} x d\mu + \int_{H_2} x d\mu \right) \frac{1}{\mu(H)} \geq$$

$$\geq \frac{\mu(H_1)a + \mu(H_2)c}{\mu(H)} > \frac{a(\mu(H_1) + \mu(H_2))}{\mu(H)} = a$$

Dove è importante osservare che la maggiorazione stretta è stata possibile solo avendo preso H_2 in modo tale che $\mu(H_2) > 0$. L'altra maggiorazione si ottiene in modo simmetrico. □

Con la stessa strategia di lavoro possiamo dimostrare la seguente:

Proposizione 1.3.4. *Sia μ assolutamente continua rispetto a λ, $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$. Siano $a = \sup \{x \in \mathbb{R} : \lambda(H^{-x}) = 0\}$, $b = \inf \{x \in \mathbb{R} : \lambda(H^{+x}) = 0\}$. Allora $a < \mathcal{M}^\mu(H) < b$.*

Dimostrazione. Osservando che $\lambda(H^{-a}) = \lambda(H^{+b}) = 0$, si ottiene sfruttando l'assoluta continuità di μ rispetto a λ, che $\mu(H^{-a}) = \mu(H^{+b}) = 0$. Questo è sufficiente a riottenere che $\mu(H) = \mu(H \cap [a, b])$, per poi concludere la dimostrazione in modo analogo alla precedente. □

Giungiamo ai primi risultati su famiglie numerabili di insiemi, osservando che la media di un'unione di insiemi disgiunti può essere interpretata come una media pesata delle medie dei singoli insiemi, dove i pesi sono dati dalle loro misure. Questa proprietà discende in modo naturale dalla σ-additività della misura μ.

Proposizione 1.3.5. *Siano H, $H_i \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ con $i \in \mathbb{N}$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$. $H = \cup_{i=1}^\infty H_i$. Allora:*

$$\mathcal{M}^\mu(H) = \frac{\sum_{i=1}^\infty \mu(H_i)\mathcal{M}^\mu(H_i)}{\sum_{i=1}^\infty \mu(H_i)}.$$

Ovviamente la formula è valida anche per un numero finito di insiemi:

$$\mathcal{M}^\mu(\cup_{i=1}^n H_i) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(H_i)\mathcal{M}^\mu(H_i)}{\sum_{i=1}^n \mu(H_i)}.$$

Vediamo che la scelta della nostra costruzione fa discendere, in maniera abbastanza naturale, che la media conserva il passaggio al limite per catene discendenti di insiemi, in modo analogo alle misure. Possiamo quindi considerarlo come un primo risultato di continuità.

Definizione 1.3.6. Una media $\mathcal{M}$ è *continua secondo Cantor* se presi $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Dom(\mathcal{M})$, $H_{n+1} \subset H_n$, $H = \cap_{i=1}^{\infty} H_i \in Dom(\mathcal{M})$, allora $\mathcal{M}(H_n) \to \mathcal{M}(\cap_{i=1}^{\infty} H_i)$.

Proposizione 1.3.7. *$\mathcal{M}^\mu$ è continua secondo Cantor.*

Dimostrazione. Siano $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$, $H_{n+1} \subset H_n$, $\cap_{i=1}^{\infty} H_i \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ allora:

$$|\mathcal{M}^\mu(H_n) - \mathcal{M}^\mu(H)| = \left| \int\limits_{H_n} x d\mu \frac{1}{\mu(H_n)} - \int\limits_{H} x d\mu \frac{1}{\mu(H)} \right| =$$

$$= \left| \mu(H) \left(\int\limits_{H_n} x d\mu - \int\limits_{H} x d\mu \right) + (\mu(H) - \mu(H_n)) \int\limits_{H} x d\mu \right| \frac{1}{\mu(H)\mu(H_n)} \leq$$

$$\leq \frac{|\mu(H)\mu(H_n \setminus H) \sup H_1| + |(\mu(H) - \mu(H_n))\mu(H) \sup H|}{\mu^2(H)} \to 0.$$

Dove nell'ultima riga abbiamo usato che, poichè $\mu(H_n) < +\infty$, la misura μ passa al limite per successioni monotone decrescenti di insiemi: $\mu(H_n) \to \mu(H)$. Da questo segue facilmente che $\mu(H_n \setminus H) \to 0$. □

Se la Definizione 1.2.2 può non essere una giustificazione molto esaustiva del fatto che il lavoro che stiamo compiendo è un'effettiva generalizzazione del concetto di media ordinaria, la seguente proposizione renderà più lampante che questa costruzione è davvero vantaggiosa.

Proposizione 1.3.8. *Sia $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$, allora $\mathcal{M}^\mu(H)$ è ben determinata da tutti i $\mathcal{M}^\mu((a, b))$ con $a < b$*

Dimostrazione. Siano $I_{n,k} = (a_{n,k}, b_{n,k})$ con $a_{n,k} < b_{n,k}$, intervalli aperti disgiunti tali che $H_n = \cup_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$. Inoltre gli H_n sono presi in modo che $\mu((H \setminus \cap_{n=1}^{\infty} H_n) \cup (\cap_{n=1}^{\infty} H_n \setminus H)) = 0$. Quindi per il Lemma 1.3.1 posso dire che $\mu(H) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} H_n)$. Osserviamo che, per la Proposizione 1.3.5, la media degli H_n è determinata da $\mathcal{M}^\mu(I_{n,k})$, e che per la Proposizione 1.3.7 le medie degli H_n convergono alla media di H. □

Riportiamo un esempio che serve a sottilineare ulteriormente l'importanza di questo risultato. Se infatti conosciamo la natura della misura con la quale lavoriamo, ad esempio prendendo una μ_f misura di Lebesgue-Stieltjes, con f nota, vediamo come è facile, a meno di saper integrare la nostra funzione, ricavare i valori di $\mathcal{M}^\mu(a, b)$ e di conseguenza, in via teorica, tutti gli altri.

Esempio 1.3.9. Sia $f(x) = x^2$ e μ_f la rispettiva misura di Lebesgue-Stieltjes definita su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$. Allora:

$$\mathcal{M}^\mu(a,b) = \frac{\int\limits_a^b x d\mu_f}{\mu_f([a,b])} = \frac{\int\limits_a^b x f'(x) d\lambda}{f(b)-f(a)} = \frac{2}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Intraprendiamo adesso lo studio della monotonia di una media sugli insiemi. Per comprendere meglio il significato del termine monotonia associato ad una media, bisogna inanzitutto capire che questo concetto è da intendersi legato all'unione di insiemi, esattamente come per le misure.

Quello che sembra naturale, pensando anche alle medie ordinarie, è che prendendo due intervalli disgiunti, il primo a sinistra del secondo sulla retta reale, la media fatta sugli estremi del primo intervallo sia minore della media de secondo. Preso questo come punto di partenza, e ricordando l'interpretazione della media dell'unione come media pesata tra le altre due, ovviamente quello ci aspettiamo è che questa media si vada a posizionare tra le due precedenti. Vediamo che anche questa proprietà si generalizza alle nostre medie.

Definizione 1.3.10. Una media $\mathcal{M}$ si dice *monotona su insiemi disgiunti* se $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $\mathcal{M}(H_1) \leq \mathcal{M}(H_2)$ implica $\mathcal{M}(H_1) \leq \mathcal{M}(H_1 \cup H_2) \leq \mathcal{M}(H_2)$.

Proposizione 1.3.11. *$\mathcal{M}^\mu$ è monotona su insiemi disgiunti.*

Dimostrazione. Siano H_1 e H_2 tali che $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $\mathcal{M}^\mu(H_1) \leq \mathcal{M}^\mu(H_2)$, allora;

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\mu(H_1 \cup H_2) = \frac{\mu(H_1)\mathcal{M}^\mu(H_1) + \mu(H_2)\mathcal{M}^\mu(H_2)}{\mu(H_1)+\mu(H_2)} \leq \\ \leq \frac{\mu(H_1)\mathcal{M}^\mu(H_2) + \mu(H_2)\mathcal{M}^\mu(H_2)}{\mu(H_1)+\mu(H_2)} = \mathcal{M}^\mu(H_2).\end{aligned}$$

L'altra diseguaglianza si ottiene in modo simmetrico □

Definizione 1.3.12. Una media $\mathcal{M}$ si dice *monotona sull'unione* se presi comunque $A, B, C \in Dom(\mathcal{M})$ tali che $B \cap C = \emptyset$ si ha contemporaneamente;

(i) se $\mathcal{M}(A) \leq \mathcal{M}(A \cup B)$ e $\mathcal{M}(A) \leq \mathcal{M}(A \cup C)$ allora $\mathcal{M}(A) \leq \mathcal{M}(A \cup B \cup C)$

(ii) se $\mathcal{M}(A \cup B) \leq \mathcal{M}(A)$ e $\mathcal{M}(A \cup C) \leq \mathcal{M}(A)$ allora $\mathcal{M}(A \cup B \cup C) \leq \mathcal{M}(A)$

Inoltre ogni qualvolta le prime due disuguaglianze sono strette anche la terza lo è.

Proposizione 1.3.13. *$\mathcal{M}^\mu$ è monotona sull'unione.*

Dimostrazione. Siano $B \cap C = \emptyset$, $\mathcal{M}^\mu(A) \leq \mathcal{M}^\mu(A \cup B)$ e $\mathcal{M}^\mu(A) \leq \mathcal{M}^\mu(A \cup C)$. Posso inoltre assumere che $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ a patto di considerare $B' = B \setminus A$ e $C' = C \setminus A$, infatti basta osservare che $\mathcal{M}^\mu(A) \leq \mathcal{M}^\mu(A \cup B')$ e $\mathcal{M}^\mu(A) \leq \mathcal{M}^\mu(A \cup C')$ perchè $A \cup B = A \cup B'$ e $A \cup C = A \cup C'$. Dalle ipotesi e usando la Proposizione 1.3.5 si ottiene:

$$\mathcal{M}^\mu(A) \leq \mathcal{M}^\mu(A \cup B) = \frac{\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(B)}{\mu(A) + \mu(B)}$$
$$\mathcal{M}^\mu(A) \leq \mathcal{M}^\mu(A \cup C) = \frac{\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(C)\mathcal{M}^\mu(C)}{\mu(A) + \mu(C)}.$$

In particolare utilizzeremo le relazioni:

$$\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(B) \geq \mathcal{M}^\mu(A)(\mu(A) + \mu(B))$$
$$\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(C)\mathcal{M}^\mu(C) \geq \mathcal{M}^\mu(A)(\mu(A) + \mu(C))$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^\mu(A \cup B \cup C) &= \frac{\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(B) + \mu(C)\mathcal{M}^\mu(C)}{\mu(A) + \mu(B) + \mu(C)} \geq \\
&\geq \frac{(\mu(A) + \mu(B))\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(C)\mathcal{M}^\mu(C)}{\mu(A) + \mu(B) + \mu(C)} = \\
&= \frac{\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(C)\mathcal{M}^\mu(C) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(A)}{\mu(A) + \mu(B) + \mu(C)} \geq \\
&\geq \frac{(\mu(A) + \mu(C))\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(A)}{\mu(A) + \mu(B) + \mu(C)} = \mathcal{M}^\mu(A).
\end{aligned}$$

Ovviamente se nelle ipotesi le maggiorazioni fossero state strette, anche nella dimostrazione avremmo ottenuto maggiorazioni strette. La disuguaglianza opposta si ottiene nello stesso identico modo. □

Volendo proseguire lo studio della continuità di una media, ci rendiamo conto che il Lemma 1.3.1 non ci fornisce un sufficiente grado di libertà su cui poter lavorare. Ci serve qualcosa di un pochino più generale.

Lemma 1.3.14. *Sia I un intervallo limitato, μ una misura di Borel su I. Allora per un qualsiasi H_1 $Dom(\mathcal{M}^\mu)$ e per un qualsiasi $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $\mu((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)) < \delta$, con $H_2 \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$, implica che $|\mathcal{M}^\mu(H_1) - \mathcal{M}^\mu(H_2)| < \varepsilon$.*

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}^\mu(H_1) - \mathcal{M}^\mu(H_2)| &= \left| \int\limits_{H_1} x d\mu \frac{1}{\mu(H_1)} - \int\limits_{H_2} x d\mu \frac{1}{\mu(H_2)} \right| = \\
&= \left| \frac{\int_{H_1 \setminus H_2} x d\mu + \int_{H_1 \cap H_2} x d\mu}{\mu(H_1)} - \frac{\int_{H_1 \cap H_2} x d\mu + \int_{H_2 \setminus H_1} x d\mu}{\mu(H_2)} \right| \leq \\
\leq \left| \frac{\int_{H_1 \setminus H_2} x d\mu}{\mu(H_1)} \right| + \left| \int\limits_{H_1 \cap H_2} x d\mu \right| \left| \frac{1}{\mu(H_1)} - \frac{1}{\mu(H_2)} \right| + \left| \frac{\int_{H_2 \setminus H_1} x d\mu}{\mu(H_2)} \right| &= \\
= \left| \frac{\int_{H_1 \setminus H_2} x d\mu}{\mu(H_1)} \right| + \left| \int\limits_{H_1 \cap H_2} x d\mu \right| \left| \frac{\mu(H_2) - \mu(H_1)}{\mu(H_1)\mu(H_2)} \right| + \left| \frac{\int_{H_2 \setminus H_1} x d\mu}{\mu(H_2)} \right|&.
\end{aligned}
$$

Per proseguire dobbiamo fare alcune osservazioni; le prime sono abbastanza evidenti:

$$
\begin{gathered}
\left| \int\limits_{H_1 \setminus H_2} x d\mu \right| < \delta \sup |H_1|, \\
\left| \int\limits_{H_1 \cap H_2} x d\mu \right| \leq \mu(H_1) \sup |H_1| =: K_1, \\
\left| \int\limits_{H_2 \setminus H_1} x d\mu \right| < \delta \sup |H_2| \leq \delta \sup |I|.
\end{gathered}
$$

Dove $|H| = \{|x| : x \in H\}$. Inoltre vediamo che:

$$
\begin{aligned}
|\mu(H_2) - \mu(H_1)| \leq |\mu(H_1) - \mu(H_1 \cap H_2)| + |\mu(H_1 \cap H_2) - \mu(H_2)| &= \\
= |\mu(H_2 \setminus H_1)| + |\mu(H_1 \setminus H_2)| &< \delta.
\end{aligned}
$$

Adesso chiediamo che valga anche: $\delta < \mu(H_2)$. Così, usandola con la relazione sopra, si ottiene $|\mu(H_2) - \mu(H_1)| < \mu(H_2)$, quindi $\mu(H_1) < 2\mu(H_2)$. Usando tutte le maggiorazioni ottenute, nella relazione lasciata in sospeso si ottiene:

$$
|\mathcal{M}^\mu(H_1) - \mathcal{M}^\mu(H_2)| < \frac{\delta \sup |H_1|}{\mu(H_1)} + K_1 \frac{2\delta}{(\mu(H_1))^2} + \frac{2\delta \sup |I|}{\mu(H_1)} < \varepsilon.
$$

Questo mostra che è possibile scegliere un δ fissato ε e quindi conclude.

$\square$

Per poter parlare di continuità, avremmo bisogno di introdurre una distanza, ma purtroppo come spesso accade in teoria della misura due oggetti seppur distinti hanno distanza nulla tra loro. Diremo quindi che una funzione d è una *pseudo-distanza* se è una distanza privata della proprietà che due oggetti differenti abbiano distanza non nulla.

Corollario 1.3.15. *Sia I un intervallo limitato, μ una misura di Borel su I. Se muniamo il $Dom(\mathcal{M}^\mu)$ della pseudo-distanza $d_\mu(H_1, H_2) = \mu((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1))$, allora $\mathcal{M}^\mu$ è continua in accordo con d_μ.*

Osservazione. Quanto detto sopra non è ovviamente vero se I non è limitato. Prendiamo infatti $I = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda$, $H_1 = [0,1]$, $\varepsilon = 0,1$, $H_2 = [0,1] \cup \left[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta} + \delta\right]$ con $\delta > 0$ in modo tale che $\mu((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)) < \delta$. Allora si ha che $Avg(H_1) = 0.5$, mentre $Avg(H_2) = \frac{0.5 \cdot 1 + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\delta}{1+\delta} \geq 1$ da cui la differenza delle due medie non è minore di ε per nessun δ.

Concludiamo questa trattazione della continuità vedendo come sia possibile attraverso $\mathcal{M}^\mu$ definire una funzione $f(x, y)$ continua.

Definizione 1.3.16. Una media $\mathcal{M}$ si dice *continua su due parti di H* se, preso $H \in Dom(\mathcal{M})$, allora anche $H^{+\underline{\lim} H}$ e $H^{-\underline{\lim} H} \in Dom(\mathcal{M})$. Inoltre definendo $f(x, y) := \mathcal{M}^\mu(H^{-x} \cup H^{+y})$, questa è continua sul suo dominio, ovvero $Dom(f) = \{(x, y) : H^{-x} \cup H^{+y} \in Dom(\mathcal{M})\}$.

Proposizione 1.3.17. *Se μ è assolutamente continua rispetto a λ allora $\mathcal{M}^\mu$ è continua su due parti di H.*

Dimostrazione. Iniziamo verificando la prima proprietà, ovvero che se $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ allora anche $H^{+\underline{\lim} H}$ e $H^{-\underline{\lim} H}$ ci stanno. Per verificarlo basta capire, ad esempio, che $H^{+\underline{\lim} H}$ è H privato dei punti isolati a sinistra di $\inf \mathcal{D}(H)$. Qundi, poichè $H \cap (-\infty, \underline{\lim} H)$ è al più numerabile, $\lambda(H \cap (-\infty, \underline{\lim} H)) = 0$ da cui ,per assoluta continuità, anche $\mu(H \cap (-\infty, \underline{\lim} H)) = 0$, allora $\mu(H^{+\underline{\lim} H}) > 0$ e quindi sta nel dominio di $\mathcal{M}^\mu$.

Per ogni $(x, y) \in Dom(f)$ prendiamo una successione $\{(x_n, y_n)\}$ nel $Dom(f)$ con $n \in \mathbb{N}$ tale che $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ν tale che $\lambda(((H^{-x} \cup H^{+y}) \setminus (H^{-x_n} \cup H^{+y_n})) \cap ((H^{-x_n} \cup H^{+y_n}) \setminus (H^{-x} \cup H^{+y}))) < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Usando l'assoluta continuità si ottiene $\mu(((H^{-x} \cup H^{+y}) \setminus (H^{-x_n} \cup H^{+y_n})) \cap ((H^{-x_n} \cup H^{+y_n}) \setminus (H^{-x} \cup H^{+y}))) < \delta$, da cui usando il Lemma 1.3.14 si ottiene che $f(x, y)$ passa al limite per successioni, quindi è continua. $\square$

1.4 Medie a confronto e unicità

In questa ultima parte del capitolo, ci accingiamo inizialmente ad analizzare il comportamento di medie che derivano da differenti misure, osservando ad esempio che è sufficiente che valga una relazione d'ordine su una particolare categoria di intervalli, per far in modo che questa si prolunghi a tutti gli insiemi del dominio. Questi risultati ci forniranno gli strumenti per analizzare l'unicità o meno di una determinata media. Iniziamo con risultato analogo alle misure, ovvero il passaggio al limite per catene crescenti di insiemi.

Lemma 1.4.1. *Siano* $H, \{H_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$*, tali che* $H_i \cap H_j = \emptyset$ *per* $i \neq j$ *e* $H = \cup_{i=0}^{\infty} H_i$*. Allora* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^\mu(\cup_{i=0}^{n} H_i) = \mathcal{M}^\mu(H)$*.*

Dimostrazione. É sufficiente ricordare che comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che $\mu(H \setminus (\cup_{i=0}^{n} H_i)) < \delta$ per tutti gli $n \geq n_0$. Quindi per il Lemma 1.3.14 si ha che $|\mathcal{M}^\mu(H) - \mathcal{M}^\mu(\cup_{i=0}^{n} H_i)| < \varepsilon$, e questo conclude. □

Proposizione 1.4.2. *Siano* μ, ν *misure di Borel su un intervallo* I*. Supponendo che se presi* $I_k \subset I$ *con* $1 \leq k \leq n$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *intervalli aperti limitati e disgiunti, si abbia* $\mathcal{M}^\mu(\cup_{k=1}^{n} I_k) \leq \mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n} I_k)$*. Allora* $\mathcal{M}^\mu(H) \leq \mathcal{M}^\nu(H)$ *per ogni* $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu) \cap Dom(\mathcal{M}^\nu)$*.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.4.1 posso estendere l'ipotesi fatta anche ad una famiglia numerabile di aperti limitati disgiunti, perchè $\mathcal{M}^\mu$ e $\mathcal{M}^\nu$ passano al limite. Quindi la proposizione risulta vera per gli aperti limitati dato che possono essere ottenuti come unioni numerabili di intervalli aperti limitati. Adesso basta fissare $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di aperti limitati tali che, preso $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu) \cap Dom(\mathcal{M}^\nu)$, si abbia contemporaneamente $\mu((H \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} H_n)) \cup ((\cup_{n=1}^{\infty} H_n) \setminus H)) = 0$ e $\nu((H \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} H_n)) \cup ((\cup_{n=1}^{\infty} H_n) \setminus H)) = 0$. Richiamando quindi il Lemma 1.3.1 si ha $\mathcal{M}^\mu(H) = \mathcal{M}^\mu(\cup_{n=1}^{\infty} H_n) \leq \mathcal{M}^\nu(\cup_{n=1}^{\infty} H_n) = \mathcal{M}^\nu(H)$. □

Restando in tema di relazioni tra medie, introduciamo una condizione sufficiente che sfrutteremo nel secondo capitolo per ottenere risultati interessanti, come ad esempio verificare che le diseguazionate note tra medie ordinarie si conservano anche tra le loro generalizzate.

Proposizione 1.4.3. *Siano* μ, ν *misure di Borel su un intervallo* I *e assumiamo che valgano le seguenti due condizioni:*

(i) Se $J \subset I$ *è un intervallo aperto limitato allora* $\mathcal{M}^\mu(J) \leq \mathcal{M}^\nu(J)$*.*

(ii) Se J, K *sono intervalli aperti limitati tali che* $\sup J \leq \inf K$ *allora* $\frac{\nu(J)}{\mu(J)} \leq \frac{\nu(K)}{\mu(K)}$*.*

Allora $\mathcal{M}^\mu(H) \leq \mathcal{M}^\nu(H)$ *per ogni* $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu) \cap Dom(\mathcal{M}^\nu)$*.*

Dimostrazione. Osserviamo che dalla seconda condizione si può ricavare che presi $I_n \subset I, n \in \mathbb{N}$ intervalli aperti disgiunti e limitati, tali che, a meno di riordinare, $\sup I_k \leq \inf I_n$ per tutti i $0 \leq k \leq n-1$, allora:

$$\frac{\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)}{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)} \leq \frac{\nu(I_n)}{\mu(I_n)}.$$

Infatti per tutti i k come sopra vale $\nu(I_k) \leq \frac{\nu(I_n)}{\mu(I_n)}\mu(I_k)$, da questo usando l'additività di μ si ottiene:

$$\frac{\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)}{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \nu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \mu(I_k)} \leq \frac{\nu(I_n)}{\mu(I_n)} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \mu(I_k)} = \frac{\nu(I_n)}{\mu(I_n)}.$$

Adesso prendendo gli stessi I_k vogliamo mostrare per induzione che vale l'asserzione assunta come ipotesi nella Proposizione 1.4.2, ovvero che $\mathcal{M}^\mu(\cup_{k=1}^{n} I_k) \leq \mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n} I_k)$. Per $n = 1$ vale perchè è la prima delle due ipotesi. Supponiamo quindi che l'assunzione sia vera per $n-1$ e dimostriamolo per n. Usando la Proposizione 1.3.5 si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\mu(\cup_{k=1}^{n} I_k) &= \frac{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mathcal{M}^\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \mu(I_n)\mathcal{M}^\mu(I_n)}{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \mu(I_n)} \leq \\ &\leq \frac{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \mu(I_n)\mathcal{M}^\nu(I_n)}{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \mu(I_n)}.\end{aligned}$$

Per concludere resta solo da provare che vale

$$\begin{aligned}&\frac{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \mu(I_n)\mathcal{M}^\nu(I_n)}{\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \mu(I_n)} \leq \\ &\leq \frac{\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \nu(I_n)\mathcal{M}^\nu(I_n)}{\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) + \nu(I_n)}\end{aligned}$$

e questo,con le dovute semplificazioni, è equivalente a

$$\begin{aligned}&\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\nu(I_n) + \mu(I_n)\mathcal{M}^\nu(I_n)\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) \leq \\ &\quad \nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\mu(I_n) + \nu(I_n)\mathcal{M}^\nu(I_n)\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\end{aligned}$$

da cui

$$0 \leq \left(\mathcal{M}^\nu(I_n) - \mathcal{M}^\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\right)\left(\nu(I_n)\mu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k) - \mu(I_n)\nu(\cup_{k=1}^{n-1} I_k)\right).$$

Però entrambi i fattori sono positivi: il primo per ipotesi induttiva, mentre il secondo per la generalizzazione della seconda ipotesi fatta all'inizio della dimostrazione. □

La seconda condizione del risultato precedente può risultare di non facile verifica in generale, però la si può sostituire, quando si conoscono le densità delle misure μ e ν con una di più facile verifica.

Proposizione 1.4.4. *Siano f, g funzioni derivabili e crescenti. Se anche $\frac{g'(x)}{f'(x)}$ è crescente allora la seconda condizione nella Proposizione 1.4.3 vale per le misure μ_f e μ_g.*

Dimostrazione. Siano $J = (a,b)$ e $K = (c,d)$, $b \leq c$. Dobbiamo quindi mostrare che

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} \leq \frac{g(d)-g(c)}{f(d)-f(c)}.$$

Per il Teorema di Cauchy esistono $\xi \in (a,b)$ e $\eta \in (c,d)$ per cui vale

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}, \qquad \frac{g(d)-g(c)}{f(d)-f(c)} = \frac{g'(\eta)}{f'(\eta)}.$$

Per la monotonia di $\frac{g'(x)}{f'(x)}$ e poichè $\xi \leq \eta$ si ha la tesi.

□

Abbiamo quindi tutti gli strumenti per poter analizzare l'unicità delle nostre medie.

Teorema 1.4.5. *Siano $\mathcal{M}^\mu = \mathcal{M}^\nu$, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ positiva tale che $\nu = c\mu$.*

Dimostrazione. Presi $A, B \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$, $A \cap B = \emptyset$, allora $\mathcal{M}^\mu(A \cup B) = \mathcal{M}^\nu(A \cup B)$. Sviluppando le medie delle unioni come solito fare si ha

$$\frac{\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(B)}{\mu(A)+\mu(B)} = \frac{\nu(A)\mathcal{M}^\nu(A) + \nu(B)\mathcal{M}^\nu(B)}{\nu(A)+\nu(B)}$$

Utilizzando che $\mathcal{M}^\mu(A) = \mathcal{M}^\nu(A)$ e $\mathcal{M}^\mu(B) = \mathcal{M}^\nu(B)$ la relazione diventa

$$\frac{\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A) + \mu(B)\mathcal{M}^\mu(B)}{\mu(A)+\mu(B)} = \frac{\nu(A)\mathcal{M}^\nu(A) + \nu(B)\mathcal{M}^\mu(B)}{\nu(A)+\nu(B)}.$$

Con le dovute semplificazioni è equivalente a

$$\mu(A)\mathcal{M}^\mu(A)\nu(B)+\mu(B)\mathcal{M}^\mu(B)\nu(A) = \nu(A)\mathcal{M}^\nu(A)\mu(B)+\nu(B)\mathcal{M}^\nu(B)\mu(A)$$

e da qui

$$\left(\mathcal{M}^\mu(A) - \mathcal{M}^\mu(B)\right)\left(\mu(A)\nu(B) - \nu(A)\mu(B)\right) = 0.$$

I conti precedenti mostrano che presi A, B disgiunti tali che $\mathcal{M}^\mu(A) \neq \mathcal{M}^\mu(B)$ allora

$$\frac{\nu(A)}{\mu(A)} = \frac{\nu(B)}{\mu(B)}.$$

Prendiamo quindi $I = (0,1)$, $c = \frac{\nu(I)}{\mu(I)}$. Preso un qualsiasi $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ sia J un intervallo tale che $I \cap J = \emptyset$ e $\sup H < \inf J$. Quindi anche $H \cap J = \emptyset$, allora $\mathcal{M}^\mu(J) \neq \mathcal{M}^\mu(I)$ e $\mathcal{M}^\mu(J) \neq \mathcal{M}^\mu(H)$. Con il conto fatto in precedenza si ha che :

$$c = \frac{\nu(I)}{\mu(I)} = \frac{\nu(J)}{\mu(J)} = \frac{\nu(H)}{\mu(H)}.$$

Allora $\nu(H) = c\mu(H)$ per ogni $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ e questo conclude. □

Capitolo 2

La misura generatrice di una media

Dopo aver esteso il concetto di media nel precedente capitolo, è naturale chiedersi se le nuove medie possano essere un'estensione di una specifica media ordinaria $\mathcal{K}$. La domanda quindi alla cui andremo a cercare di trovare una risposta è, presa una media ordinaria $\mathcal{K}$ calcolata tra due numeri, esiste un procedimento per estenderla a qualche sottoinsieme di $\mathbb{R}$? Daremo due risposte differenti a questa domanda: la prima seguendo il filo logico del precedente capitolo e la seconda sarà una tecnica che estende la prima.

2.1 Costruzione di una misura generatrice

L'idea di cosa vogliamo fare può essere suggerita dall'aver osservato che valgono relazioni come

$$\frac{\int\limits_a^b x d\lambda}{\lambda([a,b])} = \frac{a+b}{2}.$$

Quindi la media ottenuta usando la misura di Lebesgue può essere interpretata come una generalizzazione della media Aritmetica. Quello che però sorge spontaneo chiedersi è quali possano essere le condizioni da chiedere a $\mathcal{K}$ per ottenere il risultato voluto.

Teorema 2.1.1. *Sia $\mathcal{K}$ una media ordinaria che è simmetrica. strettamente interna e $\frac{\partial \mathcal{K}(x,y)}{\partial y}$ esista per ogni $(x,y) \in Dom(\mathcal{K})$ e sia continua. Allora esiste una misura μ assolutamente continua rispetto a λ tale che $\mathcal{M}^{\mu}([a,b]) = \mathcal{K}(a,b)$.*

Dimostrazione. Andiamo a cercare una media $\mu = \mu_f$, dove f è una funzione derivabile e crescente. Si ricorda che poichè μ_f è una misura di Lebesgue-

Stieltjes allora $\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a)$ e $f' = \frac{d\mu_f}{d\lambda}$. allora deve valere che

$$\mathcal{K}(a,b) = \frac{\int_a^b x d\mu_f}{\mu_f([a,b])} = \frac{\int_a^b x f'(x) d\lambda}{f(b) - f(a)} = \frac{[xf(x) - F(x)]_a^b}{f(b) - f(a)} =$$
$$= \frac{bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a))}{f(b) - f(a)}.$$

dove F è una primitiva di f. Posso supporre che ci sia un punto $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = F(a) = 0$, inoltre posso anche prendere $a = 1$ a patto di sostuiture con $g(x) = f(x) - f(1)$ e $G(x) = F(x) - F(1) - f(1)x + f(1)$ ed ottenere lo stesso risultato sopra. Allora otteniamo che vale:

$$\mathcal{K}(1,x) = \frac{xf(x) - F(x)}{f(x)} = x - \frac{F(x)}{f(x)}.$$

Ovviamente vale per gli $x \neq 1$. Osserviamo che poichè μ_f è una misura sia f che F sono monotone crescenti. Possiamo scrivere $\frac{F(x)}{f(x)} = x - \mathcal{K}(1,x)$, di conseguenza $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x - \mathcal{K}(1,x)}$. Dove il tutto è ben definito perchè $\mathcal{K}$ è strettamente interna quindi non stiamo dividendo per 0. Otteniamo quindi $(\log(F(x)))' = \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x - \mathcal{K}(1,x)}$.

Siano quindi $\varepsilon > 0$ e $b > 1 + \varepsilon$, allora:

$$\int_{1+\varepsilon}^{b} (\log(F(x)))' dx = \log(F(b)) - \log(F(1+\varepsilon)) = \int_{1+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x - \mathcal{K}(1,x)} dx.$$

L'integrale sulla destra esiste perchè $[1+\varepsilon, b]$ è compatto, la funzione $x - \mathcal{K}(1,x)$ è continua e sempre strettamente positiva perchè la media, per ipotesi, è strettamente interna. Dalla relazione ottenuta è possibile quindi ricavare F, f e f' come segue:

$$F(b) = (1+\varepsilon) e^{\int_{1+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x - \mathcal{K}(1,x)} dx}$$
$$f(b) = \frac{1+\varepsilon}{b - \mathcal{K}(1,b)} e^{\int_{1+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x - \mathcal{K}(1,x)} dx} = \frac{F(b)}{b - \mathcal{K}(1,b)}$$
$$f'(b) = (1+\varepsilon) \frac{f(b)(b - \mathcal{K}(1,b)) - F(b)\left(1 - \frac{\partial \mathcal{K}(1,b)}{\partial b}\right)}{(b - \mathcal{K}(1,b))^2} =$$
$$= (1+\varepsilon) \frac{\frac{\partial \mathcal{K}(1,b)}{\partial b}}{b - \mathcal{K}(1,b)} f(b).$$

Abbiamo quindi ottenuto $f(x)$ e $F(x)$ che forniscono solo $\mathcal{K}(1,x)$. Dobbiamo andare a controllare che effettivamente siano buone per ottenere $\mathcal{K}(a,b)$. Si ha, ricordando che $b > 1$,

$$\frac{\int_a^b x d\mu_f}{\mu_f([a,b])} = \frac{\int_1^b x d\mu_f - \int_1^a x d\mu_f}{f(b) - f(a)} = \frac{\mu_f([1,b])\mathcal{K}(1,b) - \mu_f([1,a])\mathcal{K}(1,a)}{f(b) - f(a)} =$$
$$= \frac{bf(b) - 1f(1) - (F(b) - F(1)) - (af(a) - 1f(1) - (F(a) - F(1)))}{f(b) - f(a)} =$$
$$= \frac{bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a))}{f(b) - f(a)} = \mathcal{K}(a,b).$$

La dimostrazione per i $b < 1$ prosegue nello stesso identico modo. □

Osservazione. Le funzioni F, f e f' trovate hanno tutte il termine costante $1 + \varepsilon$ a moltiplicare, ma come si può notare dall'ultima relazione risulta ininfluente, quindi di qui in avanti le consideremo sempre private di quella costante moltiplicativa. Inoltre anche la valutazione in $1 + \varepsilon$ dell'integrale all'esponente dà origine ad un'altra costante a moltiplicare, quindi nei conti che faremo in seguito quella valutazione sarà omessa per rendere più agevole la scrittura. Questo risultato può essere visto più semplicemente con una semplice conseguenza del Teorema 1.4.5, dove si otteneva infatti che due misure associate ad una stessa media differivano per una costante moltiplicativa.

La dimostrazione precedente ha un grande pregio, quello di essere costruttiva. Quindi ci permette, dopo aver verificato che la nostra media ordinaria rispetti le ipotesi, di trovare effettivamente la μ_f che cerchiamo.

Ci sono inoltre una serie di risultati impliciti nella dimostrazione che andiamo adesso a rimarcare.

Corollario 2.1.2. *Sia $\mathcal{K}$ come nelle ipotesi del teorema. Allora $g(x) = \mathcal{K}(1,x)$ determina tutta $\mathcal{K}(a,b)$*

Dimostrazione. Usando la $f(x)$ costruita nel Teorema 2.1.1, e seguendo la dimostrazione dello stesso si ha:

$$\mathcal{K}(a,b) = \frac{\int_a^b x d\mu_f}{\mu_f([a,b])} = \frac{\int_1^b x d\mu_f - \int_1^a x d\mu_f}{f(b) - f(a)} =$$
$$= \frac{\mu_f([1,b])\mathcal{K}(1,b) - \mu_f([1,a])\mathcal{K}(1,a)}{f(b) - f(a)} =$$
$$= \frac{(f(b) - f(1))\mathcal{K}(1,b) - (f(a) - f(1))\mathcal{K}(1,a)}{f(b) - f(a)}$$

dove anche la $f(x)$ è ottenuta solo attraverso la $g(x)$ utilizzando le formule ricavate nel teorema. □

Corollario 2.1.3. *Sia $f(x)$ una funzione derivabile e crescente, $F(x)$ una sua primitiva, allora*

$$\mathcal{K}(a,b)=\frac{bf(b)-af(a)-(F(b)-F(a))}{f(b)-f(a)}$$

definisce una media ordinaria interna e continua quando $a<b$.

Dimostrazione. Osserviamo che le funzioni $g(x)=xf(x)-F(x)$ e $f(x)$ sono per ipotesi differenziabili su $[a,b]$, allora applicando il Teorema di Cauchy al rapporto $\frac{g(x)}{f(x)}$ esiste uno $\xi\in(a,b)$ tale che

$$\mathcal{K}(a,b)=\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}=\frac{\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=\xi.$$

□

2.2 Esempi e relazioni tra le medie

Presentiamo adesso una serie di esempi su come utilizzare il Teorema 2.1.1 per calcolare le densità delle misure μ_f associate a medie ordinarie. Utilizzero inoltre questi risultati per verificare che alcune delle diseguaglianze note tra le medie si conservano anche dopo averle generalizzate.

Esempio 2.2.1. Sia $\mathcal{K}$ la media Geometrica: $\mathcal{K}(a,b)=\sqrt{ab}$. Allora $F(x)=(\sqrt{x}-1)^2$, $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Dimostrazione. Iniziamo calcolando $\int\frac{1}{x-\mathcal{K}(1,x)}dx=\int\frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$. Applicando la sostituzione $\sqrt{x}=t$ si ottiene $\int\frac{2}{t-1}dt=2\log(t-1)=2\log(\sqrt{x}-1)$. Ricordando che

$$F(b)=e^{\int\limits_{1+\varepsilon}^{b}\frac{1}{x-\mathcal{K}(1,x)}dx}$$

e le osservazioni fatte si ottiene $F(x)=(\sqrt{x}-1)^2$, da cui $f(x)$ e $f'(x)$ possono essere ricavate facilmente. Verifichiamo che effettivamente funzioni:

$$\frac{\int\limits_a^b xf'(x)dx}{f(b)-f(a)}=\frac{\int\limits_a^b\frac{1}{x\sqrt{x}}dx}{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}}=\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

□

Ricordiamo che la media aritmetica era quella generata dalla misura di Lebesgue, quindi con $F(x)=\frac{x^2}{2}-x$, $f(x)=x-1$ e $f'(x)=1$, ed è quella che avevamo definito come $Avg(a,b)$.

Teorema 2.2.2. *Sia μ la misura di Borel associata alla media geometrica. Allora preso $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ vale che $\mathcal{M}^\mu(H) \leq Avg(H)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare il risultato voluto basta utilizzare la Proposizione 1.4.3. Dove la prima delle due condizioni è verificata dalla relazione nota tra la media geometrica e aritmetica ordinarie. Mentre per la seconda condizione possiamo fare appello alla Proposizione 1.4.4, quindi dimostrare che il rapporto $\frac{g'(x)}{f'(x)}$ è crescente con $g(x) = x - 1$ per la media aritmetica e $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ per quella geometrica. Ma il rapporto cosiderato è $2x\sqrt{x}$ quindi ovviamente crescente come richiesto. □

Corollario 2.2.3. *Siano $I_k = (a_k, b_k)$ e $b_h < a_k$ con $1 \leq h < k \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. Vale*

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{b_k} - \sqrt{a_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k}} - \frac{1}{\sqrt{b_k}}} \leq \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n b_k^2 - a_k^2}{\sum_{k=1}^n b_k - a_k}.$$

Dimostrazione. É sufficiente applicare la Proposizione 1.3.5 alla media geometrica e aritmetica valutate sull'unione degli I_k. □

Portiamo un altro esempio relativo alle classiche medie, ovvero la media armonica, e andiamo anche per lei a verificare che conserva la relazione con la media geometrica una volta generalizzata.

Esempio 2.2.4. Sia $\mathcal{K}(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ la media armonica, allora $F(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ e $f'(x) = \frac{2}{x^3}$.

Dimostrazione. Procedendo come al solito, seguendo il teorema andiamo a calcolare

$$\int \frac{1}{x - \mathcal{K}(1,x)} dx = \int \frac{x+1}{x(x-1)} dx = \int \frac{2}{x-1} - \int \frac{1}{x} =$$
$$= 2\log(x-1) - \log(x).$$

Da cui si ricava $F(x) = \frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}$. Derivando si ha $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ e $f'(x) = \frac{2}{x^3}$. □

Teorema 2.2.5. *Siano μ e ν le misure relative alla media geometrica e armonica rispettivamente, allora per ogni $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu) \cap Dom(\mathcal{M}^\nu)$, $\mathcal{M}^\nu(H) \leq \mathcal{M}^\mu(H)$.*

Dimostrazione. Anche in questo caso basta fare ricorso alla Proposizione 1.4.3. Dove la prima delle due condizioni è verificata dalla relazione nota tra la media geometrica e armonica ordinarie. Per la seconda condizione possiamo utilizzare come in precedenza la Proposizione 1.4.4, quindi dimostrare che il rapporto $\frac{h'(x)}{g'(x)}$ è crescente con $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ per la media armonica e $h(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ per quella geometrica. Ma il rapporto cosiderato è $\frac{x\sqrt{x}}{6}$ quindi ovviamente crescente come richiesto. □

2.3 Un metodo alternativo

In questa sezione mostriamo, senza approfondire eccessivamente, che il risultato presentato in quella precedente non è l'unica soluzione per giungere alla generalizzazione di una media attraverso una misura di Borel. Per comprendere quale sia l'idea che ci porterà al risultato finale andiamo a vedere alcuni semplici conti.

Proposizione 2.3.1. *Vale la seguente ugualianza:*

$$\int_a^b \int_c^d \frac{x+y}{2} dxdy = \frac{(b^2-a^2)(d-c)+(d^2-c^2)(b-a)}{4}. \quad \square$$

Corollario 2.3.2. *Segue che:*

$$\frac{\int_a^b \int_c^d \frac{x+y}{2} dxdy}{\lambda([a,b])\lambda([c,d])} = \frac{a+b+c+d}{4}. \quad \square$$

Da quella sopra, intengrado sul quadrato $[a,b] \times [a,b]$ si ottiene l'ugualianza che ci fornisce la media aritmetica tramite un doppio integrale.

Corollario 2.3.3. *La media aritmetica può essere ottenuta nel seguente modo:*

$$\frac{\int_a^b \int_a^b \frac{x+y}{2} dxdy}{(\lambda([a,b]))^2} = \frac{a+b}{2}. \quad \square$$

Il precedente risultato ottunuto per la media aritmetica in modo molto semplice, ci spinge a domandarci se, presa una qualsiasi media ordinaria $\mathcal{K}$, possa trovare una media μ che generalizzi il risultato, ovvero:

$$\frac{\int_a^b \int_a^b \frac{x+2}{2} d(\mu \times \mu)}{\mu \times \mu([a,b] \times [a,b])} = \frac{\int_a^b \int_a^b \frac{x+2}{2} d\mu(x)d\mu(y)}{(\mu([a,b]))^2} = \mathcal{K}(a,b).$$

Passiamo subito a presentare il teorema che risolve la questione.

Teorema 2.3.4. *Sia $\mathcal{K}$ una media ordinaria, simmetrica, strettamente interna, continua e tale che $\frac{\partial \mathcal{K}(x,y)}{\partial y}$ esiste per tutti gli $(x,y) \in Dom(\mathcal{K})$ e li è continua. Allora esiste una misura μ che è assolutamente continua rispetto a λ, tale che*

$$\frac{\int_a^b \int_a^b \frac{x+y}{2} d\mu(x)d\mu(y)}{(\mu([a,b]))^2} = \mathcal{K}(a,b).$$

Dimostrazione. Procediamo esattamente allo stesso indentico modo del Teorema 2.1.1. Cerchiamo quindi una misura $\mu = \mu_f$, dove $f(x)$ è una funzione derivabile e crescente. Otteniamo quindi che $\mu([a,b]) = f(b) - f(a)$ e $f'(x) = \frac{d\mu}{d\lambda}$. Sia inoltre $F(x)$ una primitiva della funzione $f(x)$. Allora:

$$\frac{\int_a^b \int_a^b \frac{x+y}{2} d\mu(x) d\mu(y)}{(\mu([a,b]))^2} = \frac{\int_a^b \int_a^b \frac{x+y}{2} d\mu(x) d\mu(y)}{(f(b)-f(a))^2} =$$

$$= \frac{\int_a^b f'(y)\left[bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a)) + y(f(b) - f(a))\right] dy}{2(f(b)-f(a))^2} =$$

$$\frac{[bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a))](f(b) - f(a))}{2(f(b)-f(a))^2} +$$

$$+ \frac{(f(b) - f(a))[bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a))]}{2(f(b)-f(a))^2} =$$

$$= \frac{[bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a))](f(b) - f(a))}{(f(b)-f(a))^2} =$$

$$= \frac{bf(b) - af(a) - (F(b) - F(a))}{(f(b)-f(a))}.$$

Poichè otteniamo esattamente la stessa formula del Teorema 2.1.1, la stessa misura μ_f funziona per il nostro scopo. $\square$

Capitolo 3

Comportamento all'infinito

In questo capitolo andremo a cercare delle condizioni sufficienti che ci permetteranno di concludere che, analogamente a quanto succede per le loro rispettive medie ordinarie, la media aritmetica e la geometrica hanno lo stesso andamento asintotico.

3.1 Prime osservazioni e condizioni sufficienti

Iniziamo vedendo quale risultato tra le medie ordinarie ci ha spinto verso quest'analisi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(a+x)+(b+x)}{2} - \sqrt{(a+x)(b+x)} = 0.$$

Ovvero per x che tende a $+\infty$, le medie sono asintoticamente equivalenti. In modo del tutto analogo ci si può chiedere sotto quali condizioni una media $\mathcal{M}^\mu$ possa avere un andamento asintoticamente equivalente alla media Avg, cioè la generalizzata della media aritmetica. In sostanza ci stiamo chiedendo quando accade che prendendo $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ sia valido:

$$\lim_{x \to +\infty} |\mathcal{M}^\mu(H+x) - Avg(H)| = 0.$$

Andremo a presentare una condizione sufficiente affinchè ciò accada, ma prima andiamo a definire un paio di oggetti che utilizzeremo per questo scopo. Inoltre andiamo a modificare un'ipotesi di lavoro, infatti per tutto questo capitolo μ denoterà una misura di Borel su $\mathbb{R}^+$.

Definizione 3.1.1. Sia $I \subset \mathbb{R}^+$ un intervallo limitato, definiamo:

$$m_I = \inf \left\{ \frac{\mu(H)}{\lambda(H)} : H \subset I, H \in Dom(\mathcal{M}^\mu) \right\}$$
$$M_I = \sup \left\{ \frac{\mu(H)}{\lambda(H)} : H \subset I, H \in Dom(\mathcal{M}^\mu) \right\}$$

Possiamo adesso enunciare il teorema che ci fornisce le condizioni sufficienti.

Teorema 3.1.2. *Sia μ una misura di Borel definita su $\mathbb{R}^+$ tale che:*

(i) se $I \subset \mathbb{R}^+$ un intervallo limitato allora $0 < m_I \leq M_I < +\infty$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{M_{I+x}}{m_{I+x}} = 1$

(iii) se H è un insieme $\mu-$misurabile allora lo è anche $H + x$ per ogni $x > 0$.

Allora per ogni $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ vale:

$$\lim_{x\to+\infty} |\mathcal{M}^\mu(H + x) - Avg(H + x)| = 0.$$

Dimostrazione. Siano $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ e $x > 0$. Sia, inoltre, $I \subset \mathbb{R}^+$ un intervallo limitato tale che $H \subset I$. Osserviamo intanto che per ogni $x > 0$ si ha che $(H+x) \subset (I+x)$. Inoltre $I+x$ è ancora limitato per ogni $x > 0$ dato che lo è I, quindi grazie alla prima condizione vale $0 < m_{I+x} \leq M_{I+x} < +\infty$. Le osservazioni precedenti ci permettono quindi di concludere che anche $H+x \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$, ovvero che $0 < \mu(H+x) < +\infty$. Inoltre dalla definizione di m_I e M_I si ha ovviamente che vale:

$$0 < m_I \leq \frac{\mu(H)}{\lambda(H)} \leq M_I < +\infty.$$

In particolare $\lambda(H) \leq \frac{\mu(H)}{m_I}$ e $\mu(H) \leq \lambda(H)M_I$.

Consideriamo adesso $\int_{H+x} yd\lambda$. Poichè lavoriamo su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^+$, limitati e a misura non nulla, esisterà una successione $\varphi_n(y)$ monotona di funzioni semplici, positive che approssimano $f(y) = y$. Allora per il teorema di Beppo-Levi si ha:

$$\int_{H+x} yd\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{H+x} \varphi_n(y)d\lambda.$$

Allora esisteranno un $\varepsilon > 0$ e un $\nu \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geq \nu$ vale:

$$\int_{H+x} yd\lambda = \int_{H+x} \varphi_n(y)d\lambda + \varepsilon = \sum_{n=0}^{n} a_k\lambda(E_k) + \varepsilon.$$

Dove gli E_k sono insiemi misurabili che approssimano $H + x$ su cui sono definite le φ_n. Usando le disequazioni trovate sopra si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda(E_k) + \varepsilon \leq \frac{1}{m_{I+x}} \sum_{k=0}^{n} a_k\mu(E_k) + \varepsilon = \frac{1}{m_{I+x}} \int_{H+x} \varphi_n(y)d\mu + \varepsilon.$$

Da cui segue, per arbitrarietà di ε, passando al limite per $n \to +\infty$ e usando ancora Beppo-Levi che:

$$\int_{H+x} y d\lambda \leq \frac{1}{m_{I+x}} \int_{H+x} y d\mu.$$

In modo analogo si dimostra che vale:

$$\int_{H+x} y d\mu \leq M_{I+x} \int_{H+x} y d\lambda.$$

Andando ad utilizzare le relazioni appena ottenute si ha:

$$\frac{m_{I+x}}{M_{I+x}} Avg(H+x) = \frac{m_{I+x} \int_{H+x} x d\lambda}{M_{I+x} \lambda(H+x)} \leq \frac{\int_{H+x} x d\mu}{\mu(H+x)} \leq$$
$$\leq \frac{M_{I+x} \int_{H+x} x d\lambda}{m_{I+x} \lambda(H+x)} = \frac{M_{I+x}}{m_{I+x}} Avg(H+x).$$

Ricordando che $\mathcal{M}^{\mu}(H+x) = \frac{\int_{H+x} x d\mu}{\mu(H+x)}$ abbiamo ottenuto:

$$\frac{m_{I+x}}{M_{I+x}} Avg(H+x) \leq \mathcal{M}^{\mu}(H+x) \leq \frac{M_{I+x}}{m_{I+x}} Avg(H+x).$$

Per cui con $x \to +\infty$ si ha la tesi. □

3.2 La media geometrica generalizzata

Con il teorema appena dimostrato abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare che la generizzata della media geometrica ha un comportamento asintoticamente equivalente alla generlizzata della media aritmetica. Ci resta solo da dimostrare che verifica tutte le ipotesi, per farlo andiamo a dimostrare una serie di lemmi preliminari.

Lemma 3.2.1. *Siano $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili secondo μ tali che $H_n \to H$ nella pseudo-distanza d_μ per $n \to +\infty$. Allora $\mu(H_n) \to \mu(H)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che la pseudo-distanza d_μ era definita come $d_\mu(H_1, H_2) = \mu((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1))$. Quindi per ipotesi abbiamo che preso $\varepsilon > 0$ esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per tutti gli $n \geq \nu$ vale $d_\mu(H_n, H) < \varepsilon$. Ma ricordando che $\mu(H) - \mu(H_n) = \mu(H \setminus H_n)$ per additività di μ, si ottiene:

$$\mu(H) - \mu(H_n) = \mu(H \setminus H_n) \leq \mu((H \setminus H_n) \cup (H_n \setminus H)) = d_\mu(H_n, H) < \varepsilon.$$

e questo conclude. □

Lemma 3.2.2. *Sia μ una misura assolutamete continua rispetto a λ. Siano $H, \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ insiemi limitati e misurabili secondo λ tali che $H_n \to H$ nella pseudo-distanza d_λ. se inoltre $\lambda(H) > 0$, allora $\frac{\mu(H_n)}{\lambda(H_n)} \to \frac{\mu(H)}{\lambda(H)}$.*

Dimostrazione. Per l'assoluta continuità di μ rispetto a λ si ottiene facilmente che $H_n \to H$ nella pseudo-distanza d_μ. Allora usando il Lemma 3.2.1 si ottiene che $\mu(H_n) \to \mu(H)$ e $\lambda(H_n) \to \lambda(H)$, da cui la tesi. □

Lemma 3.2.3. *Sia μ una misura assolutamente continua rispetto a λ e vice versa. Se $I \subset \mathbb{R}^+$ è un intervallo finito, allora:*

$$m_I = \inf\left\{\frac{\mu(K)}{\lambda(K)} : K = \cup_{i=1}^n I_i, I_i \subset I, I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, I_i \in Dom(\mathcal{M}^\mu)\right\}$$
$$M_I = \sup\left\{\frac{\mu(K)}{\lambda(K)} : K = \cup_{i=1}^n I_i, I_i \subset I, I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, I_i \in Dom(\mathcal{M}^\mu)\right\}$$

Dove I_i sono intervalli.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, per ipotesi di assoluta continuà reciproca, si ha che $Dom(\mathcal{M}^\mu) = Dom(\mathcal{M}^\lambda)$. Siano $H \subset I$, $H \in Dom(\mathcal{M}^\mu)$ e $\varepsilon > 0$, allora posso prendere una famiglia numerabile $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di intervalli disgiunti contenuti in I, tali che $H \subset \cup_{k=1}^\infty I_k$ e $\sum_{k=1}^\infty \lambda(I_k) < \lambda(H) + \varepsilon$. Quindi possiamo scegliere un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda(H) - \varepsilon < \sum_{k=1}^n \lambda(I_k) < \lambda(H) + \varepsilon$. Perciò possiamo costruire una successione di insiemi $\{K_i\}$ tale che K_i è un'unione finita di intervalli disgiunti $I_{i,k}$ e tale che $\lambda(K_i) \to \lambda(H)$. A questo punto usando il Lemma 3.2.2 si ottiene che $\frac{\mu(K_i)}{\lambda(K_i)} \to \frac{\mu(H)}{\lambda(H)}$. questo è sufficiente a concludere perchè ogni rapporto del tipo $\frac{\mu(H)}{\lambda(H)}$ nell'insieme utilizzato per definire m_I e M_I può essere ottenuto come limite di rapporti tra $\frac{\mu(K_i)}{\lambda(K_i)}$ e quindi utilizzando le proprietà di inf e sup si ha la tesi. □

Adesso con questi lemmi abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il risultato conclusivo di questa tesi.

Teorema 3.2.4. *La media che generlizza la media geometrica ha un andamento asintoticamente equivalente a Avg*

Dimostrazione. Per dimostarre questo risultato basterà far vedere la misura di Borel associata alla media geometrica soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.2. Iniziamo ricordando che la misura μ_f associata alla media geometrica è quella con $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Sia $I = [c, d]$ con $c \geq 0$ in modo tale che sia contenuto in $\mathbb{R}^+$. Vogliamo andare a calcolare m_{I+x}. Siano $a, b \in I + x$ con $a < b$, allora $\mu_f([a, b]) = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$. Da cui, ricordando che $\lambda([a, b]) = b - a$, otteniamo che $\frac{\mu([a,b])}{\lambda([a,b])} = \frac{1}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$. Poichè vogliamo rendere minima questa quantità, ci accorgiamo che basta far tendere a e b a $d+x$ cioè quando il rapporto tende al valore $\frac{1}{2(d+x)\sqrt{d+x}}$.

Andiamo adesso a dimostrare per induzione che se prendiamo $\{I_k\}_{k=1}^n$, $I_k = [a_k, b_k]$, $I_k \subset I$ e $b_k < a_{k+1}$per $k = 1, \ldots, n-1$, allora:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mu(I_k)}{\sum_{k=1}^n \lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_n)}{\lambda(I_n)}.$$

Prendiamo I_1, I_2 come nelle ipotesi, si ha che:

$$\frac{\mu(I_1)+\mu(I_2)}{\lambda(I_1)+\lambda(I_2)} > \frac{\mu(I_2)}{\lambda(I_2)}$$
$$\mu(I_1)\lambda(I_2) + \mu(I_2)\lambda(I_2) > \mu(I_2)\lambda(I_1) + \mu(I_2)\lambda(I_2)$$
$$\mu(I_1)\lambda(I_2) > \mu(I_2)\lambda(I_1)$$
$$\frac{\mu(I_1)}{\lambda(I_1)} > \frac{\mu(I_2)}{\lambda(I_2)}$$

Poichè le diseguaglianze scritte sono tutte equivalenti basta dimostrare l'ultima per ottenere il risultato voluto. Utilizzando le osservazioni fatte sopra si ha:

$$\frac{\mu(I_1)}{\lambda(I_1)} = \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}(\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1})} \geq \frac{1}{2b_1\sqrt{b_1}} >$$
$$> \frac{1}{2a_2\sqrt{a_2}} \geq \frac{1}{\sqrt{a_2 b_2}(\sqrt{a_2}+\sqrt{b_2})} = \frac{\mu(I_2)}{\lambda(I_2)}$$

Assumiamo adesso che valga $\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_{n-1})}{\lambda(I_{n-1})}$, e andiamo a dimostrare che vale anche per n. Intanto osserviamo che la tesi equivale a

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_n)}{\lambda(I_n)}$$

Infatti:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_n)}{\lambda(I_n)}$$
$$\lambda(I_n)\sum_{k=1}^{n}\mu(I_k) > \mu(I_n)\sum_{k=1}^{n}\lambda(I_k)$$
$$\lambda(I_n)\sum_{k=1}^{n-1}\mu(I_k) + \lambda(I_n)\mu(I_n) > \mu(I_n)\sum_{k=1}^{n-1}\lambda(I_k) + \mu(I_n)\lambda(I_n)$$
$$\lambda(I_n)\sum_{k=1}^{n-1}\mu(I_k) > \mu(I_n)\sum_{k=1}^{n-1}\lambda(I_k)$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_n)}{\lambda(I_n)}$$

Adesso poichè per ipotesi indittiva vale:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_{n-1})}{\lambda(I_{n-1})}.$$

Inoltre per quanto dimostrato nel passo base, vale $\frac{\mu(I_{n-1})}{\lambda(I_{n-1})} > \frac{\mu(I_n)}{\lambda(I_n)}$. Questo è sufficiente per concludere, infatti:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\mu(I_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\lambda(I_k)} > \frac{\mu(I_{n-1})}{\lambda(I_{n-1})} > \frac{\mu(I_n)}{\lambda(I_n)}.$$

Questo conclude la dimostrazione dell'induzione. Osserviamo che la misura μ_f è assolutamente continua rispetto a λ e vice versa. Quindi volendo calcolare m_{I+x}, andando a utilizzare il Lemma 3.2.3 e il risultato appena mostrato per induzione, si ottiene:

$$m_{I+x} = \frac{1}{2(d+x)\sqrt{d+x}}.$$

In modo del tutto analogo si può ottenere:

$$M_{I+x} = \frac{1}{2(c+x)\sqrt{c+x}}.$$

Si osserva che ovviamente vale la condizione $0 < m_{I+x} \leq M_{I+x} < +\infty$ e inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M_{I+x}}{m_{I+x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(d+x)\sqrt{d+x}}{c+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{d}{x}+1\right)\sqrt{\frac{d}{x}+1}}{\left(\frac{c}{x}+1\right)\sqrt{\frac{c}{x}+1}} = 1.$$

L'ultima ipotesi, cioè la misurabilità del traslato, è ovviamente verificara dalla μ_f per le proprietà delle misure di Lebesgue-Stieltjes. Quindi la generalizzata rispetta tutte le ipotesi, allora vale che:

$$\lim_{x\to+\infty}|\mathcal{M}^{\mu_f}(H+x) - Avg(H+x)| = 0.$$

□

Appendice A

Nozioni di teoria della misura

In questa appendice andremo a inserire tutte le nozioni di teoria della misura acquisite in questi anni di studi che sono state utilizzate all'interno della tesi. I risultati in questa parte verranno solo enunciati e brevemente commentati, ma non dimostrati. Saranno assenti anche molti risultati intermedi. Sono stati infatti richiamati solo quelli usati in modo diretto.

A.1 Sigma-algebre e misure di Borel

Iniziamo definendo cosa sia una σ-algebra di parti, dopodichè la utilizzeremo come dominio di definizione per le misure.

Definizione A.1.1. Siano X in insieme e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottonsiemi di X. Diaciamo che $\mathcal{A}$ è una *σ-algebra* se:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$ allora anche $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$ per $n \in \mathbb{N}$ allora $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Esistono esempi molto semplici di σ-algebre, come $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, oppure $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, che sono rispettivamente la più piccola e la più grande tra le σ-algebre di X.

Proposizione A.1.2. *Siano X un insieme e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-algebra di parti, allora:*

(i) Se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B \in \mathcal{A}$

(ii) Se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$

(iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$ per $n \in \mathbb{N}$ allora $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Ovvero è chiusa anche per unioni finite e intersezioni finite e numerabili.

Andiamo a definire adesso cosa sia una misura.

Definizione A.1.3. Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ si dice *misura* se:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ allora $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$

Dove la seconda proprietà prende il nome di *σ-additività.*

Definizione A.1.4. Una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dove X è un insieme, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ è una σ-algebra e μ una misura su $\mathcal{A}$ si definisce *spazio misurato.* Una coppia $(X, \mathcal{A})$ si chiama *spazio misurabile.*

Enunciamo adesso un risultato che racchiude le principali proprietà di una misura.

Teorema A.1.5. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, allora μ gode delle seguenti proprietà:*

(i) ***monotonia****: se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$*

(ii) ***continuità dal basso****: se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ e $A_n \subseteq A_{n+1}$ allora $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*

(iii) ***continuità dall'alto****: se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ e $A_{n+1} \subseteq A_n$ e esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_\nu) < +\infty$ allora $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*

Vogliamo adesso mostrare come sia possibile estendere una qualsiasi famiglia di insiemi ad una σ-algebra. Più nello specifico vogliamo estenderla alla più piccola che contiene tutta la famiglia.

Definizione A.1.6. Siano X un isieme e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si definisce $\sigma(\mathcal{A})$ la *σ-algebra generata* da $\mathcal{A}$:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F} \\ \mathcal{F}\text{è una}\sigma\text{-algebra}}} \mathcal{F}$$

Proposizione A.1.7. *$\sigma(\mathcal{A})$ è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{A}$*

Un esempio di una famiglia di insiemi molto particolare è una topologia, ovvero la famiglia degli aperti.

Definizione A.1.8. Sia (X, τ) uno spazio topologico, allora $\sigma(\tau) =: \mathcal{B}(X)$ la definiamo *σ-algebra di Borel.* Ovvero la più piccola che contiene gli aperti. Una misura μ definita su $\mathcal{B}(X)$ si definisce *misura di Borel.*

A.2 Misura di Lebesgue-Stieltjes

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente continua a sinistra, cioè tale che $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Adesso bisogna seguire lo stesso procedimento che si effettua per definire la misura di Lebesgue, con l'unica differenza di attribuire agli intervalli una lunghezza che dipende da f, in pratica:

$$l_f([a,b[) := f(b) - f(a),$$

dove, per convenzione, intendiamo $f(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Definizione A.2.1. Misura esterna Sia μ_f^* la *misura esterna* definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, nel seguente modo:

$$\mu_f^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} l_f(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, I_n \text{ intervalli aperti a destra}\right\}.$$

Adesso, proseguendo sulla falsa riga di λ^*, cioè la misura esterna di Lebesgue, si ottiene che μ_f^* gode delle seguenti proprità:

1. Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che $A \subset B$, allora
$$\mu_f^*(A) \leq \mu_f^*(B);$$
2. Siano $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di sottoinsiemi numerabile di $\mathbb{R}$, allora
$$\mu_f^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f^*(A_n),$$

ovvero è monotona e numerabilmente subadditiva.

Definizione A.2.2. Sia $E \subset \mathbb{R}$, diremo che è *misurabile secondo* μ_f^* se:

$$\mu_f^*(A) = \mu_f^*(A \cap E) + \mu_f^*(A \cap E^c)\ \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

Definiamo adesso $\mathcal{L}_f$ *l'insieme dei misurabili secondo* μ_f^*,

$$\mathcal{L}_f = \left\{E \subseteq \mathbb{R} : \mu_f^*(A) = \mu_f^*(A \cap E) + \mu_f^*(A \cap E^c), \forall A \subseteq \mathbb{R}\right\}$$

si dimostra, analogamente al caso della misura di Lebesque, che è una σ-algebra che contiene i Boreliani. Abbiamo quindi tutti gli strumenti per definire la *misura di Lebesque-Stieltjes* μ_f come la restrizione di μ_f^* alla σ-algebra $\mathcal{L}_f$.

Proposizione A.2.3. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_f, \mu_f)$ *è uno spazio misurato completo e σ-finito, ed è finito se e solo se la funzione f è limitata su* $\mathbb{R}$.

Osservazione. Notiamo come questa costruzione può essere ripetuta su un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, prendendo una $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, crescente e continia a sinistra, e la corrispondente misura μ_f sarà finita quando $\lim_{x\to b^-} f(x) < +\infty$.

A.3 Funzioni misurabili e integrali

Definizione A.3.1. Siano $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{F})$ due spazi misurabili. Una funzione $f : X \to Y$ si dice *misurabile* se $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ per ogni $E \in \mathcal{F}$

Da qui in avanti considereremo solo funzioni con codominio $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

Proposizione A.3.2. *Siano f, g due funzioni misurabili, allora anche $f+g$, fg, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ lo sono.*

Definizione A.3.3. Siano $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e $E \in \mathcal{A}$ un insieme, allora si definisce *funzione indicatrice* di E:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Una *funzione semplice* $\varphi(x)$ è una combinazione lineare di funzioni indicatrici definite, per semplicità, su insiemi disgiunti:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$$

Per le funzioni semplici a valori positivi è facile definire l'integrale:

Definizione A.3.4. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione semplice, si definisce l'integrale di φ rispetto alla misura μ, sull'insieme $E \in \mathcal{A}$:

$$\int_E \varphi(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k).$$

Questa definizione ci permette di estendere la definizione a tutte le funzioni a valori reali positivi nel seguente modo.

Definizione A.3.5. Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile e $E \in \mathcal{A}$ allora:

$$\int_E f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi(x) d\mu : 0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \varphi \text{ semplici} \right\}$$

Teorema A.3.6 (Beppo-Levi o convergenza monotona)**.** *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili a valori positivi con dominio E, tali che $f_n \leq f_{n+1}$. Sia inoltre $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Allora:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu$$

Bibliografia

[1] Paolo Acquistapace. *Appunti di Analisi funzionale*. Pisa, 2014. URL: http://people.dm.unipi.it/acquistp/anafun.pdf.

[2] Paolo Acquistapace. *Appunti di Analisi matematica 2*. Pisa, 2018. URL: http://people.dm.unipi.it/acquistp/analisi2.pdf.

[3] Attila Losonczi. ≪Means of infinite sets I≫. In: *arXiv prepint* (2018).

[4] Attila Losonczi. ≪Means of infinite sets II≫. In: *arXiv prepint* (2017).

[5] Attila Losonczi. ≪Measures by means, means by measure≫. In: *arXiv prepint* (2017).