Prove scritte di Analisi in più variabili 3 - 2010-11

Prova scritta del 2 febbraio 2011

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = 0, & x \in]0,\pi\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\pi^3}{8}\,x - \dfrac{\pi}{3}\,x^3 + \dfrac{1}{6}\,x^4, & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in [0,\pi], \end{cases}$$

e stabilire la regolarità della soluzione.

Esercizio 2 Si consideri l'operatore $P : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$Pf = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,\widehat{f} \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

(i) Si verifichi che $P^4 = I$, ove I è l'identità su $L^2(\mathbb{R})$, e si provi che i possibili autovalori di P sono $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$ (un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è un *autovalore* per P se esiste una *autofunzione* $f \in L^2(\mathbb{R})$, cioè una funzione non nulla tale che $Pf = \lambda f$).

(ii) Per $k = 0, 1, 2, 3$ si mostri che i numeri λ_k sono davvero autovalori di P, trovando una funzione $f_k(x) = Q_k(x)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$, con Q_k polinomio di grado k, tale che $Pf_k = \lambda_k\, f_k$.

Esercizio 3 Sia ω una r-forma non nulla su $\mathbb{R}^N$ e sia η una s-forma su $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che ω sia chiusa.

(i) Si provi che se anche η è chiusa, allora $\omega \wedge \eta$ è chiusa. È vero il viceversa?

(ii) Si provi che se η è esatta, allora anche $\omega \wedge \eta$ è esatta. È vero il viceversa?

Esercizio 4 Sia ω la 2-forma in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega = -2z\,dx \wedge dy + y\,dx \wedge dz + 3x\,dy \wedge dz.$$

(i) Si provi che ω è esatta e se ne determini una primitiva.

(ii) Si calcoli

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} \omega,$$

ove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1 + z^2, \; 0 \leq z \leq 1\}$$

e $\boldsymbol{\alpha}$ è l'orientazione cui corrisponde il versore normale diretto verso l'asse z.

Risoluzione

Esercizio 1 Cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin kx,$$

per la quale naturalmente le condizioni $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ saranno soddisfatte in modo automatico. Le verifiche sulla convergenza, al solito, saranno fatte a posteriori. Sostituendo nell'equazione differenziale, e supponendo di poter derivare termine a termine, si trova

$$\sum_{k=1}^{\infty} [b_k''(t) + k^2 b_k(t) + b_k(t)] \sin kx = 0,$$

da cui

$$b''(t) + k^2 b_k(t) + b_k(t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Dalla condizione iniziale relativa a $u(x, 0)$ segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \sin kx = \frac{\pi^3}{8}\, x - \frac{\pi}{3}\, x^3 + \frac{1}{6}\, x^4 \quad \forall x \in [0, \pi];$$

quindi $b_k(0)$ sarà il k-simo coefficiente di Fourier del prolungamento dispari della funzione $\frac{\pi^3}{8}\, x - \frac{\pi}{3}\, x^3 + \frac{1}{6}\, x^4$ all'intervallo $[-\pi, \pi]$, vale a dire

$$b_k(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^3}{8}\, x - \frac{\pi}{3}\, x^3 + \frac{1}{6}\, x^4 \right) \sin kt\, dt, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Con noiosi ma facili calcoli si ricava

$$b_k(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{16}{\pi\, k^5} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Infine dalla condizione iniziale relativa a $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ si ricava

$$b_k'(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Pertanto per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la funzione b_k è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} b_k''(t) + k^2 b_k(t) + b_k(t) = 0 \\ b_k(0) = 0, \quad b_k'(0) = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ pari}),$$

oppure

$$\begin{cases} b_k''(t) + k^2 b_k(t) + b_k(t) = 0 \\ b_k(0) = \frac{16}{\pi\, k^5}, \quad b_k'(0) = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ dispari}).$$

Per k pari, trattandosi di un problema omogeneo, la soluzione è $b_k(t) \equiv 0$; per k dispari invece, con facili calcoli, si trova

$$b_k(t) = \frac{16}{\pi\, k^5} \cos \sqrt{k^2+1}\, t.$$

Risulta dunque

$$\begin{cases} b_{2m+1}(t) = \dfrac{16}{\pi(2m+1)^5} \cos \sqrt{(2m+1)^2+1}\, t & \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0, \\ b_{2m}(t) = 0 & \forall m \in \mathbb{N}^+, \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

e pertanto la soluzione può scriversi nella forma

$$u(x,t) = \frac{16}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos \sqrt{(2m+1)^2+1}\, t \, \sin(2m+1)x.$$

Questa funzione è continua su $[0,\pi] \times [0,\infty[$; inoltre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -\frac{16}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \cos \sqrt{(2m+1)^2+1}\, t \, \sin(2m+1)x,$$

e poiché questa serie converge uniformemente, utilizzando l'equazione differenziale si ricava che u è di classe C^2 in $[0,\pi]\times[0,\infty[$ (addirittura sono continue anche le derivate terze di u).

Osservazione La soluzione del problema è unica. Per vedere questo, consideriamo la differenza w fra due soluzioni u e v (che supponiamo di classe C^1) del problema dato: la w risolve lo stesso problema con dati nulli, e in particolare si ha

$$w(0,t)=w(\pi,t)=0 \text{ in } [0,\infty[\,, \qquad w(x,0)=\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=0 \text{ in } [0,\pi],$$

e dunque anche

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0,t)=\frac{\partial w}{\partial t}(\pi,t)=0 \text{ in } [0,\infty[\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x,0)=0 \text{ in } [0,\pi].$$

Fissato $T>0$, integriamo su $[0,\pi]\times[0,T]$ l'equazione differenziale moltiplicata per $\frac{\partial w}{\partial t}$; si ottiene

$$\int_0^\pi\int_0^T\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+w\right]\frac{\partial w}{\partial t}\,dtdx=0,$$

ossia

$$\int_0^\pi\int_0^T\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|w|^2\right]dtdx=0.$$

Ne segue, calcolando gli integrali e tenendo conto delle condizioni agli estremi nulle,

$$0=\int_0^\pi\frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial t}(x,T)\right|^2+\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2+|w(x,T)|^2\right]dx,$$

il che implica $w(x,t)=0$ in $[0,\pi]\times[0,T]$ con T arbitrario: perciò $w\equiv 0$.

Esercizio 2 (i) Si ha, quasi ovunque,

$$(P^2f)(x)=(2\pi)^{-1}\hat{\hat{f}}(x)=f(-x) \qquad \forall f\in L^2(\mathbb{R}),$$

da cui ovviamente segue, ancora quasi ovunque,

$$(P^4f)(x)=[P^2(P^2f)](x)=(P^2f)(-x)=f(x) \qquad \forall f\in L^2(\mathbb{R}).$$

Da questo fatto segue che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore per P e se $f \in L^2(\mathbb{R})$ è una autofunzione relativa a λ, allora da $Pf = \lambda f$ segue $P^2 f = \lambda^2 f$, $P^3 f = \lambda^3 f$ e infine $f = P^4 f = \lambda^4 f$, da cui $\lambda^4 = 1$: ciò implica $\lambda \in \{1, -i, -1, i\}$.

(ii) Cominciamo con il caso $k = 0$, ossia $\lambda = 1$: come si sa, posto $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ si ha

$$Pf = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \widehat{f} = f,$$

quindi $\lambda = 1$ è autovalore con autofunzione $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
Vediamo il caso $k = 1$, ossia $\lambda = -i$: ricordando che

$$\mathcal{F}(xg(x)) = i\,\widehat{g}',$$

si ricava, con $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$,

$$\mathcal{F}(x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}) = i(2\pi)^{\frac{1}{2}} D(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -i(2\pi)^{\frac{1}{2}} x\,e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

da cui

$$P(x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -ix\,e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Ciò mostra che $f_1(x) = x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$ è autofunzione relativa a $\lambda = -1$.
Per il caso $k = 2$, ossia $\lambda = -1$, si ha analogamente

$$\mathcal{F}(x^2 g(x)) = i^2\,\widehat{g}'' = -\widehat{g}'',$$

da cui, ancora con $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$,

$$\mathcal{F}(x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -(2\pi)^{\frac{1}{2}} D^2(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -(2\pi)^{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Dunque

$$P(x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -(x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

e pertanto, essendo $P(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$,

$$\begin{aligned} P\left(\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) &= P\left(x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) - \frac{1}{2}P\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) = \\ &= -(x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x^2} = -\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che $f_2(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}$ è autofunzione relativa a $\lambda_2 = -1$.
Infine per il caso $k = 3$, ossia $\lambda = i$, si ha:

$$\mathcal{F}(x^3 g(x)) = i^3\,\widehat{g}''' = -i\,\widehat{g}''',$$

e con $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ troviamo

$$\mathcal{F}(x^3\, e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -i(2\pi)^{\frac{1}{2}} D^3(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -i(2\pi)^{\frac{1}{2}}(3x - x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2};$$

dunque

$$P(x^3\, e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -i(3x - x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

ed infine, essendo $P(x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}) = -ix\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$,

$$\begin{aligned} P\left(\left(\frac{3}{2}x - x^3\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) &= \frac{3}{2}P(x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}) - P(x^3\, e^{-\frac{1}{2}x^2}) = \\ &= -\frac{3}{2}ix\, e^{-\frac{1}{2}x^2} + i(3x - x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \\ &= i\left(\frac{3}{2}x - x^3\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che $f_3(x) = \left(\frac{3}{2}x - x^3\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}$ è autofunzione relativa a $\lambda_3 = i$.

Esercizio 3 (i) Se ω e η sono forme chiuse, allora

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \eta = 0 + 0 = 0,$$

e dunque $\omega \wedge \eta$ è chiusa. Il viceversa non vale perché se ad esempio in $\mathbb{R}^2$ scegliamo $\omega = dx$ e $\eta = a(x)dx$, allora η non è chiusa (se $a(x)$ è non costante) pur avendosi $d(\omega \wedge \eta) = d\,0 = 0$.

(ii) Se ω è chiusa e η è esatta, si ha $\eta = d\zeta$ per qualche $(s-1)$-forma ζ. Allora

$$\omega \wedge \eta = \omega \wedge d\zeta = (-1)^r d(\omega \wedge \zeta) - (-1)^r d\omega \wedge \zeta = (-1)^r d(\omega \wedge \zeta),$$

dato che $d\omega = 0$. Ne segue $\omega \wedge \eta = d(\omega \wedge (-1)^r \zeta)$, e quindi $\omega \wedge \eta$ è esatta. Viceversa se in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ scegliamo una 1-forma ω chiusa ma non esatta, ad esempio

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy,$$

e prendiamo $\eta = \omega$, allora η non è esatta, pur avendosi $\omega \wedge \eta$ esatta (dato che, ovviamente, $\omega \wedge \eta = \omega \wedge \omega = 0 = d\,0$).

Esercizio 4 (i) La forma ω è chiusa in $\mathbb{R}^3$, essendo

$$d\omega = -2dz \wedge dx \wedge dy + dy \wedge dx \wedge dz + 3dx \wedge dy \wedge dz = 0;$$

poiché $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, essa è esatta. Una primitiva $\eta = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$ deve soddisfare la condizione $d\eta = \omega$, il che si traduce nelle tre relazioni

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = -2z, \quad \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z} = 3x.$$

Una scelta possibile di A, B, C è la seguente:

$$A = 0, \qquad B = -2xz, \qquad C = xy,$$

il che dà luogo alla primitiva

$$\eta = -2xz\,dy + xy\,dz.$$

(ii) La superficie V è di rotazione attorno all'asse z, quindi il versore normale $\boldsymbol{\nu} = *\boldsymbol{\alpha}$ da scegliere è quello orientato verso l'interno. Utilizzando il teorema di Stokes,

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} \omega = \int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} d\eta = \int_{bV^{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}} \eta.$$

Adesso notiamo che bV è costituito dalle due circonferenze

$$\Gamma_0 = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}, \quad \Gamma_1 = \{(x,y,z): x^2+y^2 = 2, z = 1\};$$

inoltre sulla prima di queste la forma η si annulla, mentre sulla seconda essa si riduce a $-2x\,dy$. Infine, l'orientazione $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ coerente con $\boldsymbol{\alpha}$ è quella che percorre Γ_1 in verso antiorario (e Γ_0 in verso orario). Dunque, parametrizzando Γ_1 con

$$x = \sqrt{2}\cos t, \quad y = \sqrt{2}\sin t, \quad z = 1, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

si ottiene

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} \omega = \int_{bV^{\boldsymbol{\alpha}}} \eta = -\int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\,dt = -4\pi.$$

Si poteva anche calcolare direttamente l'integrale di ω: parametrizzando S con $(x,y,z) = \mathbf{G}(t,z)$, ove

$$\mathbf{G}(t,z) = (\sqrt{1+z^2}\,\cos t, \sqrt{1+z^2}\,\sin t, z), \qquad (t,z) \in [0,2\pi] \times [0,1],$$

la matrice $DG(t,z)$ è data da

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{1+z^2}\,\sin t & \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\,\cos t \\ \sqrt{1+z^2}\,\cos t & \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\,\sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi l'orientazione indotta è

$$\mathbf{a}(t,z) = -z\,\mathbf{e}_{12} - \sqrt{1+z^2}\,\sin t\,\mathbf{e}_{13} + \sqrt{1+z^2}\,\cos t\,\mathbf{e}_{23}$$

e dunque

$$*\mathbf{a}(t,z) = \sqrt{1+z^2}\,\cos t\,\mathbf{e}_1 + \sqrt{1+z^2}\,\sin t\,\mathbf{e}_2 - z\,\mathbf{e}_3 :$$

pertanto tale orientazione è opposta a quella richiesta (dato che le prime due componenti puntano in fuori). Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} \omega &= -\int_T \mathbf{G}^{\#}\omega = \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 [2z^2 - (1+z^2)\sin^2 t + 3(1+z^2)\cos^2 t]\,dz dt = \\ &= -\left[\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi + 4\pi\right] = -4\pi.\end{aligned}$$

Prova scritta del 23 febbraio 2011

Esercizio 1 (i) Sia f una funzione 2π-periodica, tale che $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Detti F_N i nuclei di Fejér, si mostri che $\frac{1}{2\pi} f \star F_N \to f$ in $L^1(-\pi,\pi)$ per $N \to \infty$.

(ii) Posto

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

si supponga che $\widehat{f}_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Si provi che allora $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2 (i) Sia $\mathbf{A}$ una isometria lineare di $\mathbb{R}^N$ in sé. Si dimostri che se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ è invariante rispetto ad A, ossia $f(\mathbf{A}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, allora lo stesso vale per la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f.

(ii) Se ne deduca che la trasformata di Fourier di una funzione radiale, cioè dipendente solo da $|\mathbf{x}|_N$, è anch'essa radiale.

Esercizio 3 Si consideri la 2-varietà $V \subset \mathbb{R}^4$ definita da

$$V = \{(x,y,z,u) :\ u = z,\ x^2+y^2+z^2+u^2 = 1\}.$$

Si calcoli l'integrale

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} [(z-u)dx\wedge dy + (y-u)dx\wedge dz + (z-y)dx\wedge du + \\ +(x-u)dy\wedge dz + (x-z)dy\wedge du + (x-y)dz\wedge du],$$

ove $\boldsymbol{\alpha}$ è l'orientazione tale che $\alpha^{12}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) > 0$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Notiamo che le funzioni $\frac{1}{2\pi} f \star F_N$ sono continue e 2π-periodiche. Inoltre

$$\begin{aligned}\left\| f - \frac{1}{2\pi} f\star F_N\right\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(t-s)F_N(s)]ds\right| dt \le \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t-s)|dtds;\end{aligned}$$

adesso, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|s| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t-s)|dt < \varepsilon,$$

grazie alla continuità delle traslazioni in $L^1(-\pi,\pi)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\left\| f - \frac{1}{2\pi} f\star F_N\right\|_1 &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(s)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t-s)|dtds + \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|s|\le\pi} F_n(s)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(t-s)|dtds < \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_N(s)\,ds + \frac{\|F\|_1}{\pi}\int_{\delta\le|s|\le\pi}F_n(s)\,ds \le \\ &\le \varepsilon + \frac{2}{\pi(N+1)}\|f\|_1\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che $f\star\frac{1}{2\pi}F_N \to f$ in $L^1(-\pi,\pi)$.

(ii) Se $\widehat{f}_n = 0$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$, allora

$$\left(\widehat{\frac{1}{2\pi}F_N}\right)_n = \widehat{f}_n(\widehat{F_N})_n = 0 \qquad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Dato che $f \star \frac{1}{2\pi} F_N \in L^2(-\pi,\pi)$, dall'uguaglianza di Bessel segue che risulta $f \star \frac{1}{2\pi} F_N = 0$, e quindi per $N \to \infty$ si ricava $f = 0$ quasi ovunque.

Esercizio 2 (i) Supponiamo che $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sia tale che $f(\mathbf{A}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Allora

$$\widehat{f}(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\rangle_N}\, d\mathbf{x};$$

posto $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ si ha, essendo $\mathbf{A}$ un'isometria lineare e f invariante per $\mathbf{A}$,

$$\widehat{f}(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{A}\mathbf{y}) e^{-i\langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\rangle_N} |\det \mathbf{A}|\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{y}) e^{-i\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}\rangle_N} d\mathbf{y} = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}).$$

(ii) Se f è radiale, allora $f(\mathbf{x}) = h(|\mathbf{x}|_N)$ per un'opportuna funzione $h : [0,\infty[\to \mathbb{C}$; quindi per ogni isometria lineare $\mathbf{A}$ si ha

$$f(\mathbf{A}\mathbf{x}) = h(|\mathbf{A}\mathbf{x}|_N) = h(|\mathbf{x}|_N) = f(\mathbf{x}).$$

Dunque, per (i), anche $\widehat{f}$ verifica $\widehat{f}(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\xi})$ per ogni isometria lineare $\mathbf{A}$. Sia allora $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ e sia $\mathbf{A}$ la rotazione che porta $\boldsymbol{\xi}$ nel vettore di coordinate $(|\boldsymbol{\xi}|_N, 0, ..., 0)$. Allora

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\rangle_N}\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-ix^1|\boldsymbol{\xi}|_N}\, d\mathbf{x}.$$

Si conclude allora che la funzione $g : [0,\infty[\to \mathbb{C}$, definita da

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-ix^1 t}\, d\mathbf{x}, \qquad t \geq 0,$$

verifica $g(|\boldsymbol{\xi}|_N) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$ per quasi ogni $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$, ossia $\widehat{f}$ è radiale.

Esercizio 3 La varietà V è 2-dimensionale ed è data dall'ellissoide, contenuto nell'iperpiano $z = u$ di $\mathbb{R}^4$, di equazione

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1.$$

È chiaro che la superficie è regolare, essndo luogo di zeri della funzione vettoriale $\mathbf{G} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{G}(x,y,z,u) = (z - u, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 1),$$

la cui matrice Jacobiana ha rango massimo: infatti essa è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z & 2u \end{pmatrix},$$

e i suoi 6 minori sono tutti nulli se e solo se $x = y = z = u = 0$, cioè in un punto che non appartiene a V. Possiamo parametrizzare V nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y = \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos\vartheta \\ u = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos\vartheta, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamo la matrice jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,\cos\varphi & -\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta\,\sin\varphi & -\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin\vartheta & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi i minori di $\mathbf{J}$ sono

$$\alpha^{12} = \cos\vartheta\,\sin\vartheta \qquad \alpha^{13} = \alpha^{14} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin^2\vartheta\,\sin\varphi,$$
$$\alpha^{23} = \alpha^{24} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin^2\vartheta\,\cos\varphi, \qquad \alpha^{34} = 0.$$

Notiamo che nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, che corrisponde ai valori $\vartheta = \varphi = \frac{\pi}{4}$, si ha $\alpha^{12} = \frac{1}{2} > 0$, e quindi l'orientazione di V associata alla nostra parametrizzazione è quella richiesta.
Calcoliamo i sei addendi dell'integrale:

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} [(z-u)dx \wedge dy + (y-u)dx \wedge dz + (z-y)dx \wedge du +$$
$$+(x-u)dy \wedge dz + (x-z)dy \wedge du + (x-y)dz \wedge du] = \sum_{j=1}^{6} I_j\,.$$

Si ha chiaramente, essendo $z = u$ in V, $I_1 = 0$.
Poi,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_V (y-u)\,\alpha^{13}\,d\mathbf{v}_2 = \\
&= -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin\vartheta\,\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\vartheta\,\sin\varphi\,d\varphi d\vartheta = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\,\sin^2\varphi\,d\varphi d\vartheta + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin\varphi\,d\varphi d\vartheta = \\
&= -\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3} + 0 = -\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Risulta inoltre $I_3 = -I_2 = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}$, poiché in I_3, rispetto a $-I_2$, si scambiano fra loro le variabili z e u, le quali su V coincidono.
Ancora,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_V (x-u)\alpha^{23}\,d\mathbf{v}_2 = \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin\vartheta\,\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\vartheta\,\cos\varphi\,d\varphi d\vartheta = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\cos\varphi\,d\varphi d\vartheta = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3} + 0 = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,,
\end{aligned}$$

e come prima si ha $I_5 = I_4 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$, essendo $z = u$ su V.
Infine, $I_6 = 0$ perché $\alpha^{34} = 0$.
In conclusione, sommando i 6 contributi si ottiene che l'integrale proposto vale

$$\sum_{j=1}^{6} I_j = 2I_4 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,.$$

Prova scritta del 28 aprile 2011

Esercizio 1 Risolvere il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 & x \in]0,\pi[, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos\dfrac{7}{2}\,x, & x \in [0,\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si considerino le funzioni

$$f(x) = I_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x), \qquad g(x) = x^2, \qquad x \in [-\pi,\pi],$$

prolungate a $\mathbb{R}$ in modo periodico. Si scriva la serie di Fourier della funzione

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)g(s)\,ds$$

Esercizio 3 Posto

$$T \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x,y \in [0,1], \; 0 \leq z \leq \frac{1}{2}[1-(2y-1)^3 \right\},$$

si calcoli l'integrale

$$\int_{+\partial T} \left[4x\left(z - \frac{1}{2}\right) dx \wedge dy - x^2(z-1)^{\frac{1}{3}} dx \wedge dz + xy\,dy \wedge dz \right],$$

ove l'orientazione positiva di ∂T è quella indotta dalla normale esterna a T.

Risoluzione

Esercizio 1 Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, cercando una soluzione della forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sostituendo si trova

$$\begin{cases} X(x)T''(t) - 4X''(x)T(t) + X(x)T(t) = 0, & x \in [0,\pi], \quad t > 0 \\ X(x)T(0) = 0, \quad X(x)T'(0) = \cos\frac{7}{2}\,x, & x \in [0,\pi] \\ X'(0)T(t) = 0, \quad X(\pi)T(0) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

e dividendo per $X(x)T(t)$ si ha l'equazione

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - 4\frac{X''(x)}{X(x)} - 1 = 0,$$

da cui

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} - 1 = \lambda,$$

ove λ è una costante.
Cominciamo a determinare la X: posto $\mu = \frac{\lambda+1}{4}$, X risolve il problema

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0, & x \in]0, \pi[\\ X'(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che se $\mu = 0$ opure $\mu > 0$ l'unica soluzione di questo problema è quella nulla. Invece, quando $\mu < 0$ si hanno soluzioni della forma

$$X(x) = a \cos\sqrt{-\mu}\, x + b \sin\sqrt{-\mu}\, x,$$

e le condizioni agli estremi ci dicono che $b = 0$ e $a \cos\sqrt{-\mu}\,\pi = 0$. Dunque si ha ancora la soluzione nulla, salvo che risulti

$$\sqrt{-\mu}\,\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\mu = \mu_k = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto si ottiene la famiglia di funzioni

$$X_k(x) = a_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Calcoliamo ora le funzioni $T_k(t)$, soluzioni del problema

$$\begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t > 0 \\ T(0) = 0, & T'(0) \neq 0, \end{cases}$$

in corrispondenza dei valori

$$\lambda = \lambda_k = 4\mu_k - 1 = -(4k^2 + 4k + 2), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Si ottiene facilmente la famiglia

$$T_k(t) = b_k \, \sin \sqrt{4k^2+4k+2}\, t, \qquad k \in \mathbb{N},$$

ove b_k è indeterminato ma non nullo.
A questo punto, per soddisfare la condizione $u_t(x,0) = \cos \frac{7}{2}\, x$, occorre considerare la serie (ove si è posto $c_k = a_k b_k$)

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin \sqrt{4k^2+4k+2}\, t \, \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) x.$$

Imponendo tale condizione, è immediato verificare che deve essere

$$c_3 \sqrt{50} = 1, \qquad c_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{3\}.$$

Pertanto la soluzione u cercata è semplicemente

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{50}} \sin \sqrt{50}\, t \, \cos \frac{7}{2}\, x,$$

come del resto si può verificare direttamente.

Esercizio 2 Detti $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i coefficienti di Fourier di f e g rispetto al sistema $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, come si sa i coefficienti di Fourier di $f \star g$ sono dati da

$$(f \star g)_k = f_k g_k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo gli f_k:

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx}\, dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi k i} \left[e^{-ki\frac{\pi}{2}} - e^{ki\frac{\pi}{2}} \right] = -\frac{1}{2\pi k i} [(-i)^k - i^k] = \frac{i^k[1-(-1)^k]}{2\pi k i}. \end{aligned}$$

Calcoliamo i g_k:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, e^{-ikx}\, dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi k i} \left[x^2\, e^{-ikx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k^2} \left[x\, e^{-ikx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, dx = \\ &= -\frac{\pi}{2ki} [e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}] - \frac{1}{k^2} [e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}] = -\frac{1}{k^2} [e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}] = \\ &= \frac{2}{k^2} \cos k\pi = \frac{2(-1)^k}{k^2}\,. \end{aligned}$$

Dunque la serie di Fourier di $f \star g$ è

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{i^k(-1)^k[1-(-1)^k]}{\pi\, i\, k^3}\, e^{-ikx} = -\sum_{h\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^h}{\pi(2h+1)^3}\, e^{-i(2h+1)x},$$

ed è evidente che tale serie converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Conviene utilizzare il teorema di Stokes. Detta $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = *\boldsymbol{\nu}$ l'orientazione di ∂T indotta dalla normale esterna $\boldsymbol{\nu}$ a T, e posto $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_{123}$, come si sa le due orientazioni sono coerenti. Pertanto, posto

$$\omega = 4x\left(z-\frac{1}{2}\right) dx\wedge dy - x^2(z-1)^{\frac{1}{3}}\, dx\wedge dz + xy\, dy\wedge dz,$$

si ha

$$\int_{+\partial T} \omega = \int_{\partial T^{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}} \omega = \int_{T^{\boldsymbol{\alpha}}} d\omega.$$

Calcoliamo l'ultimo membro. Dato che

$$d\omega = 2x\, dz\wedge dx\wedge dy + y\, dx\wedge dy\wedge dz = (4x+y)\, dx\wedge dy\wedge dz,$$

si ha

$$\int_{+\partial T} \omega = \int_{T^{\boldsymbol{\alpha}}} (4x+y)\, dx\wedge dy\wedge dz = \int_T (4x+y)\, dxdydz.$$

Non resta che calcolare questo integrale:

$$\begin{aligned}
\int_T (4x+y)\, dxdxdz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}[1-(2y-1)^3]} (4x+y)\, dzdxdy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 (4x+y)[1-(2y-1)^3]\, dxdy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 [4x+y-4x(2y-1)^3 - y(2y-1)^3]\, dxdy = \\
&= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 (2y-1)^3\, dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y(2y-1)^3\, dy = \\
&= \frac{5}{4} + 0 - \frac{1}{16}[y(2y-1)^4]_0^1 + \frac{1}{16}\int_0^1 (2y-1)^4\, dy = \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{160}[(2y-1)^5]_0^1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{80} = \frac{6}{5}\,.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 23 giugno 2011

Esercizio 1 Determinare la soluzione (formale) del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{in }]0,\pi[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{in } [0,\infty[\\ u(x,0) = x\cos x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{in } [0,\pi]. \end{cases}$$

Esercizio 2 (i) Individuare la funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$x\,e^{-x^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\,\mathrm{sgn}(x-y)\,f(y)\,dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Posto $E = ([0,1]\times[0,1]) \setminus \left(\,]\frac{1}{2},1]\times\,]\frac{1}{2},1]\right)$, sia

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in [0,1], \ (y,z) \in E\}.$$

Si calcoli l'integrale

$$\int_{+\partial P} \left[e^{-z}\,dx\wedge dy + e^{-y}\,dx\wedge dz + e^{-x}\,dy\wedge dz\right],$$

ove l'orientazione positiva di ∂P è quella coerente con l'orientazione positiva di P in $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione

Esercizio 1 Il problema è omogeneo, con condizioni alla frontiera di tipo dispari: ciò suggerisce di cercare uno sviluppo in serie di soli seni, ossia di scrivere la candidata soluzione nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx,$$

con le funzioni u_n da determinare. Utilizzando l'equazione differenziale e supponendo di poter derivare termine a termine, troviamo

$$u_n''(t) + 2u_n'(t) + n^2 u_n(t) = 0 \qquad \text{in } \;]0,\infty[\,;$$

inoltre si hanno le condizioni iniziali

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\, \sin nx = x\, \cos x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0)\, \sin nx = 0,$$

da cui

$$u_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, \cos x\, \sin nx\, dx, \qquad u_n'(0) = 0.$$

Poiché, come si vede facilmente,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, \cos x\, \sin nx\, dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]\, dx = \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2n(-1)^n}{n^2-1} & \text{se } n > 1 \\ \dfrac{(-1)^n}{n+1} & \text{se } n = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

si trovano i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_n''(t) + 2u_n'(t) + n^2 u_n(t) = 0 \quad \text{in } \;]0,\infty[\\ u_n(0) = -\frac{1}{2}, \quad u_n'(0) = 0, \end{cases} \qquad n = 1,$$

$$\begin{cases} u_n''(t) + 2u_n'(t) + n^2 u_n(t) = 0 \quad \text{in } \;]0,\infty[\\ u_n(0) = -\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\,, \quad u_n'(0) = 0, \end{cases} \qquad n > 1.$$

L'equazione algebrica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 + 2\lambda + n^2 = 0$ ed è risolta da $\lambda = -1$ (soluzione doppia) per $n = 1$, e da $\lambda = 1 \pm i\sqrt{n^2-1}$ per $n > 1$. Dunque le soluzioni sono rispettivamente

$$u_1(t) = c_1^1\, e^{-t} + c_2^1\, t\, e^{-t} \qquad \text{se } n = 1,$$
$$u_n(t) = c_1^n\, e^{-t}\, \cos(\sqrt{n^2-1}\, t) + c_2^n\, e^{-t}\, \sin(\sqrt{n^2-1}\, t) \qquad \text{se } n > 1.$$

Le condizioni iniziali ci forniscono

$$c_1^1 = c_2^1 = -\frac{1}{2}; \qquad c_1^n = \sqrt{n^2-1}, \qquad c_2^n = -\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\,.$$

La soluzione del problema è dunque

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-t}\Big[-\frac{1+t}{2}\sin x - \\ &- 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\left[\cos(\sqrt{n^2-1}\,t)+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\sin(\sqrt{n^2-1}\,t)\right]\sin nx\Big]\end{aligned}$$

Si può verificare che la serie converge nel senso di $L^2(-\pi,\pi)$; invece già per le serie di u_x e u_t non è assicurata nemmeno la convergenza puntuale. Dunque la nostra soluzione è soltanto formale.

Esercizio 2 A primo membro compare la funzione $h(x) = x\,e^{-x^2}$, che sta in $L^2(\mathbb{R})$; a secondo membro vi è il prodotto di convoluzione $g \star f$, ove $g(t) = e^{-|t|\mathrm{sgn}(t)}$ è una funzione continua, limitata e nulla all'infinito; ha senso dunque cercare una soluzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ di questa equazione. Se tale f esiste, possiamo applicare ad entrambi i membri la trasformata di Fourier, ottenendo

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{g\star f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi);$$

pertanto

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{h}(\xi)}{\widehat{g}(\xi)}\,,$$

e dobbiamo adesso calcolare il secondo membro. Si ha, utilizzando le proprietà algebriche della trasformata,

$$\widehat{h}(\xi) = \mathcal{F}(x\,e^{-x^2})(\xi) = \frac{1}{-i}D(\mathcal{F}(e^{-x^2}))(\xi) = i\sqrt{\pi}D(e^{-\frac{\xi^2}{4}}) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,i\xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}};$$

inoltre con un calcolo diretto si ricava

$$\widehat{g} = -\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\xi)}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)}\,dx = -\frac{1}{1-i\xi}+\frac{1}{1+i\xi} = -\frac{2i\xi}{1+\xi^2}\,.$$

Pertanto si ottiene

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,(1+\xi^2)\,e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

e poiché questa funzione appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, non ci resta che calcolarne l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}\,(-x) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\mathcal{F}((1+\xi^2)\,e^{-\frac{\xi^2}{4}})(-x) = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(e^{-\frac{\xi^2}{4}})(-x) + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(\xi^2\,e^{-\frac{\xi^2}{4}})(-x) = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(e^{-\frac{\xi^2}{4}})(x) + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\mathcal{F}(\xi^2\,e^{-\frac{\xi^2}{4}})(x). \end{aligned}$$

Dato che

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{\xi^2}{4}})(x) = 2\sqrt{\pi}\,e^{-x^2},$$

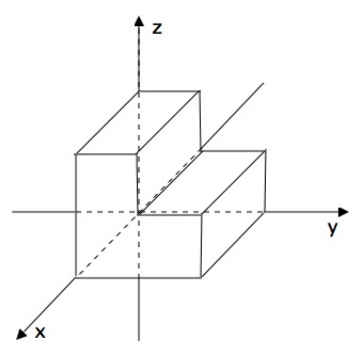
mentre

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{\xi^2}{4}})(x) = -D^2(\mathcal{F}(e^{-\frac{\xi^2}{4}}))(x) = -2\sqrt{\pi}D^2(e^{-x^2}) = 4\sqrt{\pi}(1-2x^2)\,e^{-x^2},$$

otteniamo in conclusione

$$f(x) = \left(\frac{3}{4} - x^2\right)e^{-x^2}.$$

È facile verificare che questa funzione risolve per davvero l'equazione di partenza.



Esercizio 3 Conviene applicare il teorema della divergenza, il che è lecito, avendo il dominio P frontiera di classe C^1 a tratti. Si ha allora, detta ω la 2-forma da integrare,

$$\begin{aligned} &\int_{+\partial P}\left[e^{-z}\,dx\wedge dy + e^{-y}\,dx\wedge dz + e^{-x}\,dy\wedge dz\right] = \int_{+\partial P}\omega = \int_{+P}d\omega = \\ &\quad = \int_{+P}\left[-e^{-z} + e^{-y} - e^{-x}\right]\,dx\wedge dy\wedge dz = \int_P\left[-e^{-z} + e^{-y} - e^{-x}\right]\,dxdydz. \end{aligned}$$

Questo integrale si calcola facilmente spezzando il dominio lungo il piano $z = \frac{1}{2}$:

$$\int_P \left[-e^{-z} + e^{-y} - e^{-x}\right]\, dxdydz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[-e^{-z} + e^{-y} - e^{-x}\right]\, dxdydz +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-e^{-z} + e^{-y} - e^{-x}\right]\, dxdydz =$$

$$= \left[e^{-\frac{1}{2}} - 1\right] - \frac{1}{2}\left[e^{-1} - 1\right] + \frac{1}{2}\left[e^{-1} - 1\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{2}} - 1\right] + \frac{1}{4}\left[e^{-1} - 1\right] = -\frac{3}{4}\left[1 - e^{-1}\right].$$

Prova scritta del 14 luglio 2011

Esercizio 1 Determinare, in forma di serie trigonometrica, la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = tx(\pi - x) \quad \text{in }]0,\pi[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{in } [0,\infty[\\ u(x,0) = \sin x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{in } [0,\pi]. \end{cases}$$

Esercizio 2 Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ e sia ω la 2-forma in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = 2z\, f(x)\, dx \wedge dy + (y + g(y))\, dx \wedge dz - x(f(x) + g(y))\, dy \wedge dz.$$

(i) Determinare le due funzioni f, g in modo che valga

$$d\omega = y^2\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

(ii) Determinare le due funzioni f, g in modo che valga $d\omega = 0$.

Esercizio 3 Indichiamo con (x,y,z,w) le variabili di $\mathbb{R}^4$. Fissati i vettori $\mathbf{u} = (1,2,1,0)$, $\mathbf{v} = (-3,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$, poniamo

$$P = \{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} : s,t \in [0,1]\}.$$

Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{+bP} [yz\,dx + zw\,dy + xw\,dz + xy\,dw],$$

ove l'orientazione positiva di bP è quella coerente con l'orientazione $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|_{4,2}}$ di P.

Risoluzione

Esercizio 1 Il problema non è omogeneo, né a variabili separabili, a causa della forma del secondo membro. Tuttavia le condizioni alla frontiera di tipo dispari ci suggeriscono di cercare la soluzione come una serie trigonometrica di soli seni, ossia di scrivere la candidata soluzione nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\sin nx,$$

con le funzioni u_n da determinare. Anche il secondo membro, $g(t,x) = tx(\pi - x)$, è una funzione che, per t fissato, è prolungabile in modo dispari a $[-\pi,\pi]$ e dunque ha uno sviluppo di soli seni: conviene calcolarlo. Posto

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} tx(\pi - x)\,\sin nx\,dx,$$

si ha con facili calcoli

$$c_n(t) = \frac{2t}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\,\cos nx\,dx = \frac{4t}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{4t}{\pi n^3}[1 - (-1)^n].$$

Con l'espressione scelta per u, le condizioni $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ sono automaticamente soddisfatte; poi, utilizzando l'equazione differenziale e supponendo di poter derivare termine a termine, isolando i singoli coefficienti di Fourier troviamo

$$u_n''(t) - 4n^2\,u_n(t) = c_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{8t}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \forall t \in\,]0,\infty[\,.$$

Infine si hanno le condizioni iniziali

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\,\sin nx = \sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0)\,\sin nx = 0,$$

da cui segue immediatamente

$$u_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1, \end{cases} \qquad u_n'(0) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Pertanto le funzioni u_n risolvono i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_n''t) - 4n^2\, u_n(t) = 0 \quad \text{in }]0, [\\ u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$\begin{cases} u_n''(t) - 4n^2\, u_n(t) = \frac{8t}{\pi n^3} \quad \text{in }]0, [\\ u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è dispari, } n > 1$$

$$\begin{cases} u_1''t) - 4\, u_1(t) = \frac{8t}{\pi} \quad \text{in }]0, [\\ u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{se } n = 1.$$

Dunque, se n è pari si ha $u_n(t) = 0$. Per n dispari, l'equazione algebrica associata all'equazione differenziale omogenea è $\lambda^2 - 4n^2 = 0$, che fornisce subito $\lambda_n = \pm 2n$. Le soluzioni dell'omogenea sono quindi della forma

$$u_n(t) = c_1^n\, e^{2nt} + c_2^n\, e^{-2nt}.$$

Per l'equazione non omogenea possiamo cercare una soluzione particolare nella forma $A_n t + B_n$: sostituendo, è facile ricavare

$$A_n = -\frac{2}{\pi n^5}\,, \qquad B_n = 0.$$

Dunque la soluzione generale, per n dispari, dell'equazione differenziale è

$$u_n(t) = c_1^n e^{2nt} + c_2^n\, e^{-2nt} - \frac{2t}{\pi n^5}\,.$$

Le condizioni iniziali ci forniscono, per n dispari maggiore di 1,

$$c_1^n + c_2^n = 0, \qquad 2n(c_1^n - c_2^n) - \frac{2}{\pi} = 0,$$

e per $n = 1$

$$c_1^1 + c_2^1 = 0, \qquad 2n(c_1^n - c_2^n) - \frac{2}{\pi} = 0,$$

ossia

$$\begin{cases} c_1^n = \dfrac{1}{2\pi n^6}, & c_2^n = -\dfrac{1}{2\pi n^6} & \text{se } n > 1 \text{ è dispari} \\ c_1^1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\pi}\right), & c_2^1 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\pi}\right) & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

La soluzione del problema è dunque

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right) e^{2t} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) e^{-2t} - \frac{2t}{\pi}\right] \sin x + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi(2k+6)^3}\left[e^{2(2k+1)t} - e^{-2(2k+1)t} - \frac{2t}{\pi(2k+5)^5}\right] \sin(2k+1)x. \end{aligned}$$

È immediato verificare che la serie ha senso solo formale, perché essa non converge in nessun senso, visto che il termine generale non è infinitesimo (salvo che per $t = 0$). In questo problema il metodo delle serie di Fourier non funziona.

Esercizio 2 Calcoliamo $d\omega$:

$$d\omega = [2f(x) - (1 + g'(y)) - (f(x) + g(y) + xf'(x))]\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

(i) Per avere $d\omega = y^2\, dx \wedge dy \wedge dz$, basta che sia

$$2f(x) - (1 + g'(y)) - (f(x) + g(y) + xf'(x)) = y^2,$$

ossia

$$f(x) - xf'(x) - 1 - g'(y) - g(y) = y^2.$$

Ciò è certamente garantito se imponiamo ad esempio che

$$\begin{cases} xf'(x) = f(x) - 1 \\ g'(y) = -g(y) - y^2. \end{cases}$$

Si tratta di due equazioni ordinarie del primo ordine, la prima a variabili separabili e la seconda lineare. La prima si scrive come

$$\frac{f'(x)}{f(x) - 1} = \frac{1}{x},$$

ed ha le soluzioni

$$f(x) = 1 + \alpha x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La seconda si scrive come

$$\frac{d}{dy}(e^y\, g(y)) = -e^y\, y^2,$$

ed ha le soluzioni

$$g(y) = \beta\, e^{-y} - y^2 + 2y - 2, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Quindi per risolvere il quesito basta scegliere per esempio $f(x) = 1 + x$, $g(y) = -y^2 + 2y - 2$.

(ii) Per avere $d\omega = 0$, basta che sia

$$2f(x) - (1 + g'(y)) - (f(x) + g(y) + xf'(x)) = 0,$$

ossia

$$f(x) - xf'(x) - 1 - g'(y) - g(y) = 0.$$

Ciò è certamente garantito se imponiamo ad esempio che

$$\begin{cases} xf'(x) = f(x) - 1 \\ g'(y) = -g(y). \end{cases}$$

Quindi per risolvere il quesito è sufficiente scegliere $f(x) = 1 + x$, $g(y) = 0$.

Esercizio 3 Calcoliamo anzitutto il 2-vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$: si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{12} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{13} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{14} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{23} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{24} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{34} = \\ &= 7\,\mathbf{e}_{12} + 4\,\mathbf{e}_{13} + \mathbf{e}_{14} + \mathbf{e}_{23} + 2\,\mathbf{e}_{24} + \mathbf{e}_{34}\,. \end{aligned}$$

Conviene applicare il teorema di Stokes: dalle ipotesi segue che, detta ω la 1-forma da integrare,

$$\int_{+bP} [yz\,dx + zw\,dy + xw\,dz + xy\,dw] = \int_{+bP} \omega = \int_{P^{\mathbf{a}}} d\omega.$$

Poiché

$$\begin{aligned} d\omega &= -z\,dx\wedge dy + (w-y)\,dx\wedge dz + y\,dx\wedge dw - \\ &\quad -w\,dy\wedge dz + (x-z)\,dy\wedge dw - x\,dz\wedge dw = \\ &= -z\,\mathbf{e}^{12} + (w-y)\,\mathbf{e}^{13} + y\,\mathbf{e}^{14} - w\,\mathbf{e}^{23} + (x-z)\,e^{24} - x\,\mathbf{e}^{34}, \end{aligned}$$

otteniamo, per definizione di integrale sulla varietà P,

$$\int_{P^{\mathbf{a}}} d\omega = \int_P \langle d\omega, \mathbf{a}\rangle^*_{4,2}\, d\mathbf{v}_2;$$

dato che P si parametrizza come $(x, y, z, w) = \boldsymbol{\sigma}(s, t)$, ove

$$\boldsymbol{\sigma}(s,t) = \begin{pmatrix} s-3t \\ 2s+t \\ s+t \\ t \end{pmatrix}, \qquad (s,t)\in[0,1]^2,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{P^{\mathbf{a}}} d\omega = &= \int_{[0,1]^2} \langle d\omega(\boldsymbol{\sigma}(s,t)), \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle^*_{4,2}\, dsdt = \\ &= \int_0^1\int_0^1 [-7(s+t) + 4(-2s) + (2s+t) - \\ &\qquad\qquad -t + 2(-4t) - (s-3t)]\, dsdt = \\ &= \int_0^1\int_0^1 [-14\,s - 12\,t]\, dsdt = -13. \end{aligned}$$

Prova scritta del 20 settembre 2011

Esercizio 1 Determinare una $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che risulti

$$f \star g = h,$$

ove

$$g(x) = e^{-|x|}, \qquad h(x) = e^{-x^2}.$$

Si provi che tale f è univocamente determinata.

Esercizio 2 Siano $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Data la 1-forma

$$\omega = (y + u\,v_x)\,dx - (x - u\,v_y)\,dy + (1 + u\,v_z)\,dz,$$

si provi che vale

$$d\omega = 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} u_z = v_z = 0 \\ u_x v_y - u_y v_x = 2, \end{cases}$$

e che in tal caso le tre 1-forme du, dv, ω sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3 Indichiamo con (x, y, z, u) le variabili di $\mathbb{R}^4$. Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_B \frac{z^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + z^2 + u^2}}\, d\mathbf{v}_2\,,$$

ove B è la bottiglia di Klein di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (2 + \cos\vartheta)\cos\varphi \\ y = (2 + \cos\vartheta)\sin\varphi \\ z = \sin\vartheta \cos\frac{\varphi}{2} \\ u = \sin\vartheta \sin\frac{\varphi}{2}\,, \end{cases} \qquad \vartheta, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Risoluzione

Esercizio 1 Se tale f esiste, applicando la trasformata di Fourier ricaviamo

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g} = \widehat{h},$$

e poiché, come si sa dalla teoria fatta nel corso,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}\,, \qquad \widehat{h}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

si trova

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{h}(\xi)}{\widehat{g}(\xi)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 + \xi^2)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\,\widehat{\widehat{f}}\,(-x) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\left[\widehat{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}\right](-x) = \\ &= \frac{1}{2}\, e^{-x^2} - \frac{1}{2}(-2 + 4x^2)\, e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(\frac{3}{2} - 2x^2\right). \end{aligned}$$

D'altronde si vede facilmente che tutti i passaggi sono reversibili, e quindi la funzione f trovata verifica davvero la relazione $f \star g = h$.
La funzione f è unica per costruzione (se esiste, è per forza quella sopra scritta). Una seconda dimostrazione dell'unicità è comunque la seguente: se esistesse un'altra funzione $f_1 \in L^1(R)$ tale che $f_1 \star g = h$, ricaveremmo immediatamente $(f - f_1) \star g = 0$ e, passando alla trasformata di Fourier, $\widehat{f - f_1} \cdot g = 0$; ma dato che $\widehat{g} \neq 0$, si avrebbe $\widehat{f - f_1} = 0$ il che, per l'iniettività della trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$, implicherebbe $f - f_1 = 0$.

Esercizio 2 Supponiamo che sia $d\omega = 0$. Poiché

$$
\begin{aligned}
d\omega \quad = \quad & (1 + u_y\, v_x + u\, v_{xy})dy \wedge dx + (u_z\, v_x + u\, v_{xz})dz \wedge dx - \\
& -(1 - u_x\, v_y - u\, v_{xy})dx \wedge dy + (u_z\, v_y + u\, v_{yz})dz \wedge dy + \\
& +(u_x\, v_z + u\, v_{xz})dx \wedge dz + (u_y\, v_z + u\, v_{yz})dy \wedge dz = \\
= & (-2 + u_x\, v_y - u_y\, v_x)dx \wedge dy - (u_z\, v_x - u_x\, v_z)dy \wedge dz,
\end{aligned}
$$

otteniamo

$$
\begin{cases}
u_x\, v_y - u_y\, v_x = 2 \\
u_z\, v_x - u_x\, v_z = 0 \\
u_z\, v_y - u_y\, v_z = 0.
\end{cases}
$$

La prima relazione è una delle tre cercate. Le ultime due equazioni si possono scrivere nella forma

$$
\begin{pmatrix} v_x & -u_x \\ v_y & -u_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

e siccome la prima equazione esprime il fatto che i due vettori colonna della matrice sono linearmente indipendenti, questo sistema ha solo la soluzione nulla: pertanto $u_z = v_z = 0$. Si ha inoltre, in questo caso,

$$
du = u_x\, dx + u_y\, dy + 0\, dz, \qquad dv = v_x\, dx + v_y\, dy + 0\, dz,
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
du \wedge dv \wedge \omega \quad &= \quad [(u_x\, v_y - u_y\, v_x)dx \wedge dy] \wedge \omega = \\
&= \quad (u_x\, v_y - u_y\, v_x)(1 + u\, v_z)dx \wedge dy \wedge dz = 2\, dx \wedge dy \wedge dz \neq 0,
\end{aligned}
$$

il che prova che le tre 1-forme du, dv e ω sono linearmente indipendenti. Viceversa, se $u_x\, v_y - u_y\, v_x = 2$ e se $u_z = v_z = 0$, allora dall'espressione di $d\omega$

sopra scritta è immediato constatare che $d\omega = 0$.

Esercizio 3 Con qualche calcolo si vede che la matrice Jacobiana associata alla parametrizzazione di B è

$$J(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi & -(2+\cos\vartheta)\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi & -(2+\cos\vartheta)\cos\varphi \\ \cos\vartheta\cos\frac{\varphi}{2} & -\frac{1}{2}\sin\vartheta\sin\frac{\varphi}{2} \\ \cos\vartheta\sin\frac{\varphi}{2} & \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

da cui

$$J(\vartheta, \varphi)^t =$$
$$\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\frac{\varphi}{2} & \cos\vartheta\sin\frac{\varphi}{2} \\ -(2+\cos\vartheta)\sin\varphi & -(2+\cos\vartheta)\cos\varphi & -\frac{1}{2}\sin\vartheta\sin\frac{\varphi}{2} & \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

e infine

$$J(\vartheta, \varphi)^t J(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos\vartheta)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta \end{pmatrix},$$

$$\det J(\vartheta, \varphi)^t J(\vartheta, \varphi) = \sqrt{(2+\cos\vartheta)^2 + \tfrac{1}{4}\sin^2\vartheta}.$$

Quindi

$$\int_B \frac{z^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+z^2+u^2}}\, d\mathbf{v}_2 =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4(2+\cos\vartheta)^2+\sin^2\vartheta}} \sqrt{(2+\cos\vartheta)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta}\, d\vartheta d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\cos^2\frac{\varphi}{2}\, d\vartheta d\varphi = \pi^2.$$