Modelli matematici ambientali - prima parte

Prove scritte dal 2015

Prova scritta dell'11 febbraio 2015

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 4xy + x$$

nel triangolo piano di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(\frac{1}{2},1)$.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale doppio

$$\int_D xy\,dxdy,$$

ove D è l'insieme delimitato dalle curve $x^3 = y$, $y + x = 2$, $y = 0$.

Esercizio 3 Determinare l'area della regione piana E delimitata dalla curva di equazione polare $r = \vartheta^4$ e dagli assi $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 4 Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{+\Gamma} [3xy^2\,dx - 2(z+x)\,dy - (z^2 + 2x^2)\,dz],$$

ove $+\Gamma$ è il segmento dello spazio $\mathbb{R}^3$ di primo estremo $(1,0,1)$ e secondo estremo $(2,1,2)$.

Esercizio 5 Determinare l'area della superficie Σ costituita dal grafico della funzione

$$f(x,y) = x^{3/2} + y^{3/2}, \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

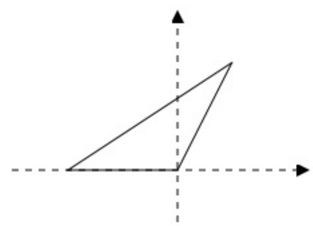
Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2\,e^y \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Cominciamo con la ricerca dei punti stazionari interni al triangolo, se esistono. Si ha

$$f_x(x,y) = 2x - 4y + 1, \quad f_y(x,y) = -6y - 4x,$$



quindi i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -6y - 4x = 0, \end{cases}$$

e si trova l'unica soluzione $(-\frac{3}{14}, \frac{1}{7})$. Dato che a noi interessa trovare il massimo ed il minimo assoluti di f, tralasciamo lo studio della matrice Hessiana, limitandoci a calcolare

$$f\left(-\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right) = -\frac{57}{196} \simeq -0.2908.$$

Vediamo ora cosa succede sul bordo del triangolo. Ci sono i tre vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, nei quali si ha

$$f(0,0) = 0, \quad f(-1,0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{17}{4}.$$

Poi ci sono i tre lati: quello orizzontale

$$\Gamma_1 : \ x = x, \ y = 0, \quad x \in]-1, 0[;$$

e i due obliqui:

$$\begin{aligned} &\Gamma_2 : x = x, \ y = \tfrac{2}{3}(x+1), \quad &x \in \left]-1, \tfrac{1}{2}\right[, \\ &\Gamma_3 : x = x, \ y = 2x, &x \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right[. \end{aligned}$$

Su Γ_1 si ha $f(x,0) = x^2 + x$, quindi $f'(x) = 2x + 1 > 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < 0$. Perciò ci interessa calcolare f nel punto $x = -\frac{1}{2}$, che nel piano corrisponde al punto $(-\frac{1}{2}, 0)$: si ha

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

Su Γ_2 si ha, con qualche conto, $f(x, \frac{2}{3}(x+1)) = -3x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{4}{3}$, quindi $f'(x) = -6x - \frac{13}{3} > 0$ se e solo se $-1 < x < -\frac{13}{18}$. Perciò ci interessa calcolare f nel punto $x = -\frac{13}{18}$, che nel piano corrisponde al punto $(-\frac{13}{18}, \frac{5}{27})$: si ha, con l'uso di una calcolatrice,

$$f\left(-\frac{13}{18}, \frac{5}{27}\right) = \frac{169}{324} - \frac{75}{729} + \frac{260}{486} - \frac{13}{18} = \frac{54675}{236196} \simeq 0.23148.$$

Infine su Γ_3 si ha $f(x, 2x) = -19x^2 + x$, $f'(x) = -38x + 1 > 0$ se e solo se $0 < x < \frac{1}{38}$. Perciò ci interessa calcolare f nel punto $x = \frac{1}{38}$, che nel piano corrisponde al punto $(\frac{1}{38}, \frac{2}{38})$: si ha, ancora con l'uso di una calcolatrice,

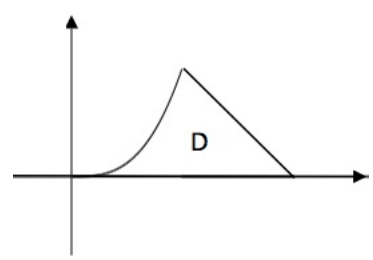
$$f\left(\frac{1}{38}, \frac{2}{38}\right) = \frac{1}{1444} - \frac{12}{1444} - \frac{8}{1444} + \frac{1}{38} = \frac{1}{76} \simeq 0.013579.$$

In conclusione

$$\max f = \max\left\{\frac{57}{196}, 0, -\frac{17}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{54675}{236196}, \frac{1}{76}\right\} = \frac{54675}{236196},$$

$$\min f = \min\left\{\frac{57}{196}, 0, -\frac{17}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{54675}{236196}, \frac{1}{76}\right\} = -\frac{17}{4}.$$

Esercizio 2 L'insieme D è normale rispetto ad entrambi gli assi, ma è più comodo pensarlo normale rispetto all'asse y: tenuto conto del fatto che i due grafici si incontrano in $(1,1)$, possiamo scrivere



$$D = \{(x,y): \ y^{1/3} \leq x \leq 2 - y, \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Si ha allora

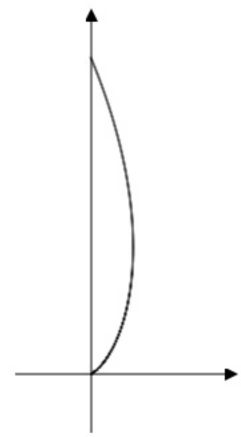
$$\begin{aligned}
\int_D xy\,dxdy &= \int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{2-y} xy\,dxdy = \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^{1/3}}^{2-y} dy = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y(2-y)^2}{2} - \frac{1}{2}\,y^{5/3}\right) dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^3 - 4y^2 + 4y - y^{5/3})\,dy = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{3}{8}y^{8/3}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{48}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 La regione E è illustrata qui a fianco. La curva che la delimita è in forma polare, e in questo caso per l'area $m_2(E)$ vale la formula

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_a^b r(\vartheta)^2\,d\vartheta,$$

ove, nel nostro caso, $r(\vartheta) = \vartheta^4$, $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$. Pertanto

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^8\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\frac{\vartheta^9}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^9}{9\cdot 2^{10}} \simeq 3.234494.$$



Esercizio 4 Il segmento Γ è parametrizzato così:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

ossia

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1+t, \end{cases} \qquad t \in [0,1],$$

e l'orientazione è quella richiesta. L'integrale diventa quindi:

$$\begin{aligned} &\int_{+\Gamma} [3xy^2\,dx - 2(z+x)\,dy - (z^2+2x^2)\,dz] = \\ &\quad = \int_0^1 (3t^2(1+t) - 2(2+2t) - 3(1+t)^2)dt = \int_0^1 (3t^3 - 10t - 7)dt = \\ &\quad = \left[\frac{3}{4}t^4 - 5t^2 - 7t\right]_0^1 = \frac{3}{4} - 5 - 7 = -\frac{45}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 La formula da applicare per l'area, quando la superficie è grafico di una funzione, è la seguente:

$$a(\Sigma) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy,$$

ove, nel nostro caso, $f(x,y) = x^{3/2} + y^{3/2}$ e $D = [0,1] \times [0,1]$. Quindi, essendo

$$f_x(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \qquad f_y(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{y},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} a(\Sigma) &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+y)}\, dxdy = \int_0^1 \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}(x+y) \right)^{3/2} \right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4}(1+y) \right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{4}y \right)^{3/2} \right] dy = \\ &= \frac{64}{1215} \left[\left(1 + \frac{9}{4}(1+y) \right)^{5/2} - \left(1 + \frac{9}{4}y \right)^{5/2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{64}{1215} \left[\left(\frac{11}{2} \right)^{5/2} - 2\left(\frac{13}{4} \right)^{5/2} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Esercizio 6 L'equazione differenziale è a variabili separabili. Si ha

$$\begin{aligned} y' = x^2 e^y \quad &\Longleftrightarrow \quad -e^{-y}\, dy = x^2\, dx \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y} = \frac{x^3}{3} + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(x) = -\ln\left(-\frac{x^3}{3} - c \right). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione $y(1) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 = y(1) = -\ln\left(-\frac{1}{3} - c \right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln\left(-\frac{1}{3} - c \right) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{3} - c = \frac{1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad c = -\frac{1}{3} - \frac{1}{e}\,; \end{aligned}$$

dunque

$$y(x) = -\ln\left(\frac{1 - x^3}{3} + \frac{1}{e} \right).$$

Prova scritta del 4 giugno 2015

Esercizio 1 Si determini il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = x^3 y^2$$

nell'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}$.

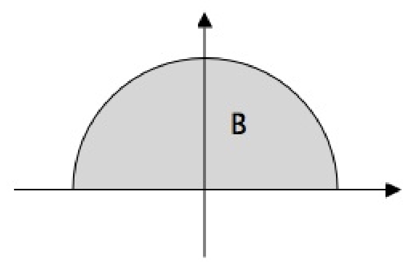
Esercizio 2 Posto $g(x,y) = y\, e^x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli:

(i) l'integrale doppio $\displaystyle\int_T g(x,y)\, dxdy$, ove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 \leq x \leq y\}$;

(ii) l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma g\, ds$, ove Γ è la curva piana di equazioni parametriche

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Risoluzione



Esercizio 1 L'insieme B è disegnato qui a fianco.
La funzione $f(x,y) = x^3y^2$ è continua su B e quindi ha massimo e minimo. Per determinarli, cominciamo a cercare i punti stazionari di f interni a B: si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y,$$

quindi il gradiente di f all'interno di B è nullo in tutti i punti $(0,y)$ con $y \in [0,1[$; questi punti sono tutti punti di sella, poiché la funzione f vi si annulla e d'altra parte essa è positiva in $B \cap \{x > 0\}$ e negativa in $B \cap \{x < 0\}$. Inoltre il gradiente di f è nullo sull'intera parte rettilinea del bordo di B, lungo la quale f è identicamente nulla. I punti di questo segmento sono di minimo relativo per $x > 0$ e di massimo relativo per $x < 0$, mentre, come già osservato, l'origine è punto di sella.
Rimane da analizzare il comportamento di f sulla parte curvilinea del bordo di B. Su tale parte del bordo possiamo rappresentare $f(x,y)$ come

$$g(\vartheta) = f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \cos^3\vartheta \sin^2\vartheta, \qquad \vartheta \in [0,\pi].$$

La funzione g è nulla agli estremi, e

$$g'(\vartheta) = -3\cos^2\vartheta \sin^3\vartheta + 2\cos^4\vartheta \sin\vartheta = \cos^2\vartheta \sin\vartheta(-3\sin^2\vartheta + 2\cos^2\vartheta).$$

Perciò $g'(\vartheta) = 0$ in $]0, \pi[$ se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (il che corrisponde al punto $(0, 1)$ in cui f vale 0), oppure se $-3\sin^2\vartheta + 2\cos^2\vartheta = -3 + 5\cos^2\vartheta = 0$, ossia $\cos^2\vartheta = \frac{3}{5}$ (e dunque $\sin^2\vartheta = \frac{2}{5}$): dato che $\sin\vartheta \geq 0$ in $[0, \pi]$, si tratta dei due punti $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, nei quali f vale rispettivamente

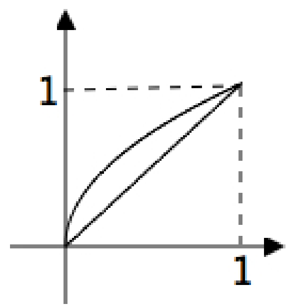
$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -\frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}, \qquad f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}.$$

Confrontando i valori si ottiene evidentemente

$$\min_B f = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -\frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}, \qquad \max_B f = f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}.$$

Esercizio 2 (i) L'insieme T è disegnato qui accanto. Si tratta di un insieme normale rispetto a entrambi gli assi, perché (volendo) possiamo descriverlo anche come

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq y \leq \sqrt{x}\} :$$



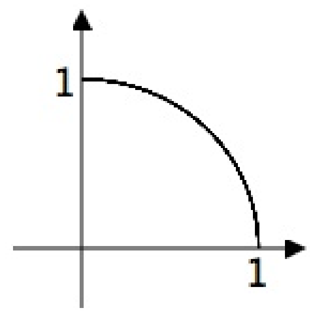
in entrambe le descrizioni si ha in particolare $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. Utilizzando comunque la descrizione originaria di T, si ha

$$\begin{aligned}
\int_T g(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} y\, e^x\, dxdy = \int_0^1 y(e^y - e^{y^2})\, dy = \\
&= \int_0^1 \left(y\, e^y - \frac{1}{2}\frac{d}{dy} e^{y^2}\right) = \left[y\, e^y - \frac{1}{2} e^{y^2}\right]_0^1 - \int_0^1 e^y\, dy = \\
&= \left[y\, e^y - \frac{1}{2} e^{y^2} - e^y\right]_0^1 = \frac{3 - e}{2}.
\end{aligned}$$

(ii) La curva Γ è l'arco di circonferenza unitaria contenuto nel primo quadrante. Esso è parametrizzato da

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto $ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = dt$ e dunque



$$\int_\Gamma g\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, e^{\cos t}\, dt = \left[-e^{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1.$$

Prova scritta del 29 giugno 2015

Esercizio 1 Si determini il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^3$$

nell'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$.

Esercizio 2 Calcolare gli integrali curvilinei

$$(\mathbf{a}) \ \int_\Gamma (y^2\, dx - x^2\, dy), \qquad (\mathbf{b}) \ \int_\Gamma (\sin \pi x - \cos \pi y)\, ds,$$

ove Γ è il segmento con primo estremo $(0, 0)$ e secondo estremo $(1, 2)$.

Risoluzione

Esercizio 1 L'insieme E è il quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. La funzione $f(x, y) = x^4 + y^3$ è continua su E e quindi ha massimo e minimo. Per determinarli, iniziamo col cercare i punti stazionari di f interni ad E: si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2,$$

quindi il gradiente di f all'interno di E è nullo solo nell'origine. Si può osservare che $f(0, 0) = 0$, $f(0, y) > 0$ per $y > 0$ e $f(0, y) < 0$ per $y < 0$: dunque l'origine è un punto di sella.

Rimane da analizzare il comportamento di f sui quattro segmenti che formano il bordo di E. Nei quattro vertici si ha

$$f(-1,-1)=0, \quad f(-1,1)=2, \quad f(1,-1)=0, \quad f(1,1)=2.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(x,y):\ x=-1,\ y\in\,]-1,1[\,\}, \quad I_2=\{(x,y):\ x\in\,]-1,1[\,,\ y=-1,\},\\ I_3 &= \{(x,y):\ x=1,\ y\in\,]-1,1[\,\}, \qquad I_4=\{(x,y):\ x\in\,]-1,1[\,,\ y=1,\}. \end{aligned}$$

La f è pari nella variabile x, e su I_1 e I_3 si ha $f(-1,y)=f(1,y)=1+y^3$; quindi f ha il punto stazionario vincolato $y=0$ che corrisponde al punto $(-1,0)$, in cui $f(-1,0)=1$. Si tratta di un punto di sella perché f assume sia valori >1, sia valori <1 in ogni intorno di $(-1,0)$.
Su I_2 si ha $f(x,-1)=x^4-1$ e quindi la derivata $4x^3$ è nulla in $x=0$: dunque il punto $(0,-1)$ è stazionario vincolato con $f(0,-1)=-1$; si tratta di un punto di minimo vincolato perché f decresce in $\,]-1,0[\,$ e cresce in $]0,1[\,$. Su I_4 si ha $f(x,1)=x^4+1$ e, come prima, il punto $(0,1)$ è stazionario vincolato con $f(0,1)=1$; si tratta ancora di un punto di minimo vincolato perché f decresce in $\,]-1,0[\,$ e cresce in $\,]0,1[\,$.
In definitiva dobbiamo confrontare i valori sui vertici e quelli nei punti stazionari vincolati. Così facendo si ricava facilmente

$$\min_E f = f(0,-1) = -1, \qquad \max_E f = f(-1,1) = f(1,1) = 2.$$

Esercizio 2 (a) La curva Γ è parametrizzata da $x=t$, $y=2t$, con $t\in[0,1]$. Si ha quindi $x'=1$, $y'=2$ e pertanto

$$\int_\Gamma (y^2\,dx - x^2\,dy) = \int_0^1 (4t^2-2t^2)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

(b) Essendo $x'=1$, $y'=2$ si ha $ds=\sqrt{5}\,dt$, e dunque

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\sin\pi x - \cos\pi y)\,ds &= \sqrt{5}\int_0^1 (\sin\pi t - \cos 2\pi t)\,dt = \\ &= \sqrt{5}\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{\pi}. \end{aligned}$$

Prova scritta del 16 luglio 2015

Esercizio 1 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x\ \sin(y^2 - x^2), 2y\ \sin(x^2 - y^2)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si verifichi che $\mathbf{F}$ è conservativo e scriverne il potenziale $f(x,y)$ che verifica la condizione $f(0,0) = 1$.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale triplo

$$\int_T (x^3 + y)\, dxdydz,$$

ove $T = \{(x,y,z) :\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le x \le y \le 1\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 Il campo è conservativo perché è definito su $\mathbb{R}^2$, che è un aperto semplicemente connesso, e perché

$$\frac{\partial}{\partial y} 2x\ \sin(y^2 - x^2) = 4xy\cos(y^2 - x^2) = 4xy\cos(x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x} 2y\ \sin(x^2 - y^2).$$

Per trovarne un potenziale f si può partire dal sistema che f deve risolvere, vale a dire

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x\ \sin(y^2 - x^2) \\ f_y(x,y) = 2y\ \sin(x^2 - y^2), \end{cases}$$

e integrare la prima equazione rispetto a x: si ha

$$f(x,y,z) = \cos(y^2 - x^2) + \varphi(y),$$

ove $\varphi(y)$ è una costante di integrazione: avendo integrato rispetto a x, la costante può dipendere da y. Adesso deriviamo questa equazione rispetto a y: si ha, tenuto conto delle seconda equazione del sistema,

$$2y\ \sin(x^2 - y^2) = f_y(x,y) = -2y\sin(y^2 - x^2) + \varphi'(y).$$

Per la disparità della funzione seno, si ottiene $\varphi'(y) = 0$ e quindi $\varphi = c$ ove c è una costante. Ne segue che i potenziali di F sono tutte e sole le funzioni

$$f(x,y) = \cos(y^2 - x^2) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Il potenziale che vale 1 nel punto $(0,0)$ è esattamente $f(x,y) = \cos(y^2 - x^2)$.

Esercizio 2 L'insieme T è normale rispetto al piano xz e, più precisamente,

$$T = \{(x,y,z) :\ z \in [0,1],\ x \in [0,1],\ y \in [x,1]\}.$$

Dunque, tenuto conto che l'integrando non dipende da z,

$$\begin{aligned}
\int_T (x^3+y)\,dxdydz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_x^1 (x^3+y)dydxdz = \int_0^1 \int_0^x (x^3+y)dydx = \\
&= \int_0^1 \int_x^1 x^3\,dydx + \int_0^1 \int_x^1 y\,dydx = \\
&= \int_0^1 x^3(1-x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{23}{60}\,.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 30 luglio 2015

Esercizio 1 Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (8x+y)e^{-xy}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

Esercizio 2 Posto

$$F(x,y) = (y\,e^{-x^2}, x\,e^{-y^2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

si calcoli l'integrale

$$\int_Q (\mathrm{div}F)(x,y)\,dxdy,$$

ove $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞ e i suoi punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} e^{-xy}[8 - y(8x+y)] = 0 \\ e^{-xy}[1 - x(8x+y)] = 0. \end{cases}$$

Eliminando il fattore non nullo e^{-xy} si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} y(8x+y) = 8 \\ x(8x+y) = 1; \end{cases}$$

in particolare $y \neq 0$ e $x \neq 0$. Essendo $8x + y = \frac{8}{y} = \frac{1}{x}$ si ricava poi $y = 8x$ e infine, facilmente, $x = \pm\frac{1}{4}$. Dalla relazione $y = 8x$ segue che i punti stazionari sono

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{4}, 2\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{4}, -2\right).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana di f. Si ha, con facili calcoli,

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= e^{-xy}(-16y + 8xy^2 + y^3), \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = e^{-xy}(-16x - 2y + 8x^2y + xy^2), \\ f_{yy}(x,y) &= e^{-xy}(-2x + 8x^3 + x^2y), \end{aligned}$$

e quindi

$$H(x_1, y_1) = e^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -16 & -6 \\ -6 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

mentre

$$H(x_2, y_2) = e^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Essendo $e^{\frac{1}{2}} \det H(x_1, y_1) = e^{\frac{1}{2}} \det H(x_2, y_2) = -32 < 0$, entrambi i punti stazionari sono di sella.

Esercizio 2 Si ha

$$\mathrm{div} F(x,y) = -2xy\, e^{-x^2} - 2xy\, e^{-y^2};$$

quindi

$$\int_Q \mathrm{div} F(x,y)\, dxdy = -2 \int_0^1 \int_0^1 xy(e^{-x^2} + e^{-y^2})\, dxdy,$$

e per motivi di simmetria

$$\int_Q \mathrm{div} F(x,y)\, dxdy = -4 \int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx \int_0^1 y\, dy = -(1 - e^{-1}).$$

naturalmente si poteva anche utilizzare il teorema della divergenza:

$$\int_Q \mathrm{div} F(x,y)\,dxdy = \int_{\partial Q} \langle F, n\rangle\,ds,$$

ove ∂Q è l'unione dei quattro segmenti

$$\Gamma_1 = \{(t,0):\ t \in [0,1]\}, \quad \Gamma_2 = \{(1,t):\ t \in [0,1]\},$$
$$\Gamma_3 = \{(t,1):\ t \in [0,1]\}, \quad \Gamma_4 = \{(0,t):\ t \in [0,1]\};$$

i versori normali corrispondenti. diretti verso l'esterno di Q, sono rispettivamente

$$n_1 = (0,-1), \qquad n_2 = (1,0), \qquad n_3 = (0,1), \qquad n_4 = (-1,0).$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial Q} \langle F, n\rangle\,ds = \\
&\quad = -\int_0^1 F_2(t,0)\,dt + \int_0^1 F_1(1,t)\,dt + \int_0^1 F_2(t,1)\,dt - \int_0^1 F_1(0,t)\,dt = \\
&\quad = -\int_0^1 t\,dt + e^{-1}\int_0^1 t\,dt + e^{-1}\int_0^1 t\,dt - \int_0^1 t\,dt = -(1-e^{-1}).
\end{aligned}$$

Prova scritta del 7 settembre 2015

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = xy(x-y)$$

nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le x+y \le 2\}.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'area della superficie Σ costituita dal grafico della funzione

$$z = 1 - x^2 - y^2, \qquad (x,y) \in D,$$

ove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞ su D: D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,0)$. Cerchiamo anzitutto gli eventuali punti stazionari di f interni a D. Si ha, con facili calcoli,

$$\nabla f(x,y) = (2xy - y^2, x^2 - 2xy),$$

e il sistema $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$, ossia

$$\begin{cases} 2xy - y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione in D solo il punto $(x,y) = (0,0)$, il quale però non è interno a D.
La frontiera di D è cosituita dai vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,0)$, nei quali la funzione vale 0, e dai segmenti

$$S_1 = \{(x,0): \ x \in]0,2[\,\}, \quad S_2 = \{(0,y): \ y \in]0,2[\,\},$$

nei quali la f vale 0, e da

$$S_3 = \{(x, 2-x): \ x \in]0,2[\,\},$$

nel quale la f si scrive come

$$f(x, 2-x) = x(2-x)(2x-2) = -2x^3 + 6x^2 - 4x.$$

Questa funzione è nulla agli estremi $x = 0$ e $4x = 2$, e la sua derivata $-6x^2 + 12x - 4$ si annulla nei punti $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dato che

$$f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \qquad f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}},$$

si conclude che

$$\max_D f = f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}},$$
$$\min_D f = f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Esercizio 2 La superficie Σ è parametrizzata da

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - x^2 - y^2, \end{cases} \qquad (x,y) \in D,$$

quindi

$$D\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x & -2y \end{pmatrix},$$

e l'elemento d'area è quindi

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy.$$

L'area di Σ è dunque

$$a(\Sigma) = \int_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy.$$

Utilizziamo le coordinate polari

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta;$$

le limitazioni che definiscono D diventano

$$\cos\vartheta \geq 0, \quad \sin\vartheta \geq 0, \quad r \leq 1,$$

e corrispondono a

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto, essendo l'integrando indipendente da ϑ,

$$a(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, d\vartheta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr;$$

posto $t = r^2$, si ha $dt = 2r\, dr$ e dunque si conclude che

$$a(\Sigma) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{1 + 4t}\, dt = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} \frac{(1 + 4t)^{\frac{3}{2}}}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{24} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

Prova scritta del 23 settembre 2015

Esercizio 1 Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2-4y^2+10x-16y}$$

in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_E (x^2+y^2-xy)\,dxdy,$$

ove

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$: essa è sempre positiva, ma per $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ si ha

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x,y) = \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} e^{-(x^2+4y^2)\left(1-\frac{10x-16y}{x^2+4y^2}\right)} = 0;$$

in particolare

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0,$$

ma non vi è alcun punto in $\mathbb{R}^2$ tale che $f(x,y)=0$, il che significa che f non ha minimo in $\mathbb{R}^2$.

Per quanto riguarda il massimo, esso esiste: infatti, fissato $\varepsilon\in\,]0,1[\,$, esiste $R>0$ tale che

$$f(x,y)\leq\varepsilon \qquad \text{per } \sqrt{x^2+y^2}\geq R;$$

quindi nel compatto $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq R\}$ il massimo di f (che esiste per il teorema di Weierstrass) verifica

$$\max_K f \geq f(0,0) = 1,$$

e poiché sulla frontiera di K risulta $f \leq \varepsilon$, il punto di massimo deve essere interno a K: perciò esso deve essere un punto stazionario di f. Cerchiamo dunque i punti stazionari di f: si ha

$$\nabla f(x,y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (-2x+10)e^{-x^2-4y^2+10x-16y} = 0 \\ (-8y-16)e^{-x^2-4y^2+10x-16y} = 0, \end{cases}$$

ovvero

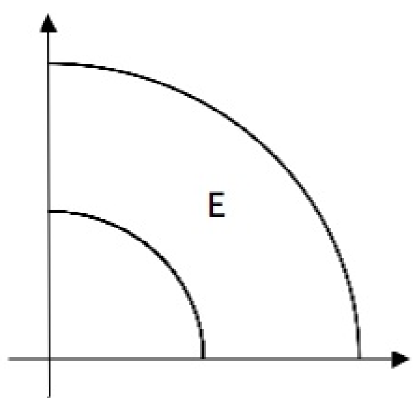
$$\begin{cases} (-2x+10) = 0 \\ (-8y-16) = 0, \end{cases}$$

che è risolto solo da $(x,y) = (5,-2)$. Si conclude che

$$\max_{\mathbb{R}^2} f = \max_K f = f(5,-2) = e^{41}.$$

Esercizio 2 Il dominio di integrazione è un settore di corona circolare che, utilizzando le coordinate polari, si descrive semplicemente come

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \qquad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$



Perciò

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2+y^2-xy)\,dxdy &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - r^2\cos\vartheta\sin\vartheta)\, r\, dr d\vartheta = \\
&= \int_1^2 r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) dr = \\
&= \frac{\pi-1}{2}\int_1^2 r^3 dr = \frac{15(\pi-1)}{8}.
\end{aligned}$$

Prova scritta dell'11 gennaio 2016

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2x + 3y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si verifichi che f è illimitata superiormente nell'insieme

$$D = \{x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \geq 4\}.$$

(ii) Si calcoli il minimo di f in D.

Esercizio 2 Sia Γ la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \vartheta^2, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

orientata nel verso delle ϑ crescenti.

(i) Si determini la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli l'area della regione piana D delimitata dalla curva Γ e dall'intervallo $[0, 4\pi^2]$ dell'asse x.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Basta osservare che, scelto $y = x$, si ha $(x,x) \in D$ per ogni $x \geq 2$ e

$$f(x,x) = 5x \to +\infty \quad \text{per } x \to \infty,$$

e dunque

$$\sup_D f = +\infty.$$

(ii) Il gradiente di f è il vettore costante $(2,3)$, quindi f non ha punti stazionari interni a D (anzi, non ne ha da nessuna parte).
La frontiera di D è formata da tre pezzi: la semiretta $S_1 = \{(x,0) : \ x \geq 4\}$, la semiretta $S_2 = \{(0,y) : \ y \geq 4\}$ ed il segmento $S = \{(x, 4-x) : \ 0 \leq x \leq 4\}$. Questi tre pezzi sono uniti da due vertici, che sono i due punti $P_1 = (4,0)$ e $P_2 = (0,4)$. Senza fare uso di moltiplicatori di Lagrange, si osserva semplicemente che

$$f(P_1) = 8, \qquad f(P_2) = 12,$$

$$f(x,0) = 2x \geq 8 \quad \forall (x,0) \in S_1, \qquad f(0,y) = 3y \geq 12 \quad \forall (0,y) \in S_2,$$
$$f(x, 4-x) = 12 - x \geq 8 \qquad \forall (x, 4-x) \in S.$$

Dunque f ha minimo nel punto P_1, con

$$\min_D f = 8.$$

Esercizio 2 (i) La curva Γ si parametrizza così:

$$x = \vartheta^2 \cos\vartheta, \quad y = \vartheta^2 \sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Quindi

$$x' = 2\vartheta\cos\vartheta - \vartheta^2 \sin\vartheta, \quad y' = 2\vartheta \sin\vartheta + \vartheta^2 \cos\vartheta,$$

e pertanto

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\vartheta = \sqrt{4\vartheta^2 + \vartheta^4}\, d\vartheta = \vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}\, d\vartheta.$$

Ne segue, per definizione di lunghezza,

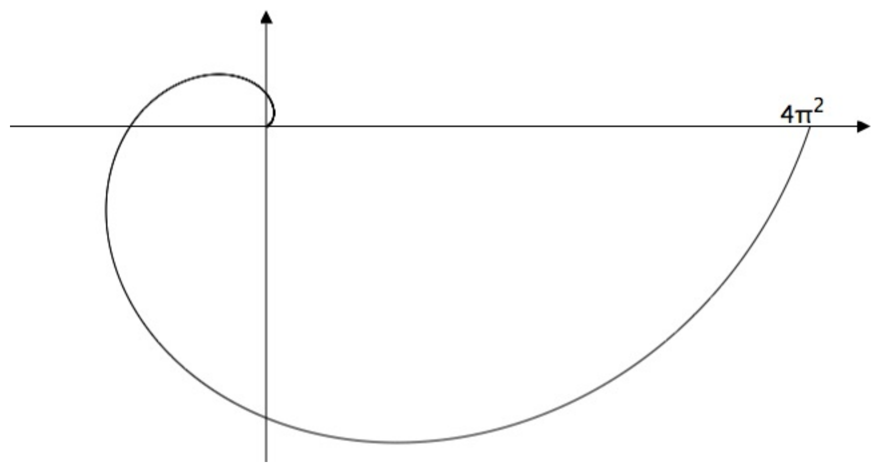
$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{4+t}\, dt = \frac{1}{3}\left[(4+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\pi^2} = \frac{8}{3}\left[(1+\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]. \end{aligned}$$

(ii) L'area della regione D si ottiene dalle formule di Gauss-Green, che forniscono

$$a(D) = \frac{1}{2}\int_{+\Gamma} (x\, dy - y\, dx);$$

nel nostro caso si ha

$$\begin{aligned} &a(D) = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left([\vartheta^2\cos\vartheta][2\vartheta\sin\vartheta + \vartheta^2\cos\vartheta] - [\vartheta^2\sin\vartheta][2\vartheta\cos\vartheta - \vartheta^2\sin\vartheta]\right) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^4\, d\vartheta = \frac{16\pi^5}{5}. \end{aligned}$$



Prova scritta del 1^o febbraio 2016

Esercizio 1 Fra tutti i rettangoli con lati paralleli agli assi cartesiani, inscritti nell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

trovare quello di area massima.

Esercizio 2 Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, y^3, zx)$$

lungo la curva

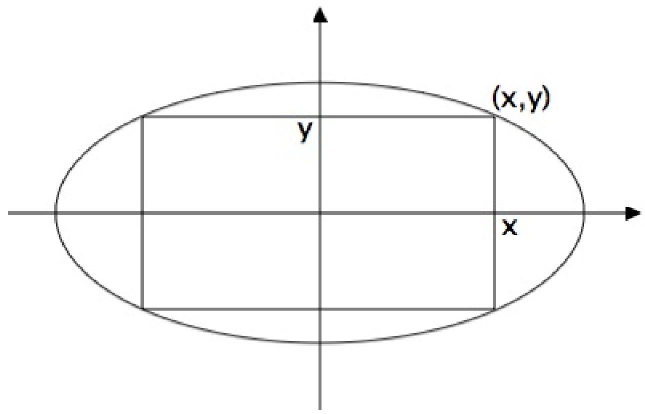
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z = x, \ y > 0\},$$

orientata da $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 1)$.

Risoluzione

Esercizio 1 Si tratta di un problema di massimo vincolato. Infatti, indicati i vertici del generico rettangolo inscritto con (x, y), $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, ove $x > 0$ e $y > 0$, l'area da massimizzare è $4xy$, sotto il vincolo $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, che ci garantisce che i quattro vertici giacciano sull'ellisse. Perciò cerchiamo

$$\max_V 4xy, \qquad V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}.$$



Primo metodo Parametrizziamo l'ellisse V: poiché ci interessano gli x e y positivi, consideriamo solo l'arco di ellisse incluso nel primo quadrante. Dunque

$$x = 2\cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cerchiamo allora

$$\max_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} 8\cos\vartheta\sin\vartheta = \max_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} 4\sin 2\vartheta = \max_{[0,\pi]} 4\sin\tau.$$

Ovviamente, il massimo è raggiunto per $\tau = \frac{\pi}{2}$, ovvero per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, e vale 4. Si ottiene perciò

$$\max_V 4xy = 4,$$

e il punto di massimo è $(x, y) = \left(2\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; il rettangolo di area massima è pertanto

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Secondo metodo Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori, cercando il massimo della funzione

$$L(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right), \quad (x, y, \lambda) \in]0, \infty[\times]0, \infty[\times\mathbb{R}.$$

Annulliamo il suo gradiente:

$$\begin{cases} 4y + \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ 4x + 2\lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni ricaviamo

$$y = -\frac{\lambda x}{8} = \frac{\lambda^2 y}{16}\,,$$

da cui segue $\lambda^2 = 16$ e dunque, essendo $x, y > 0$,

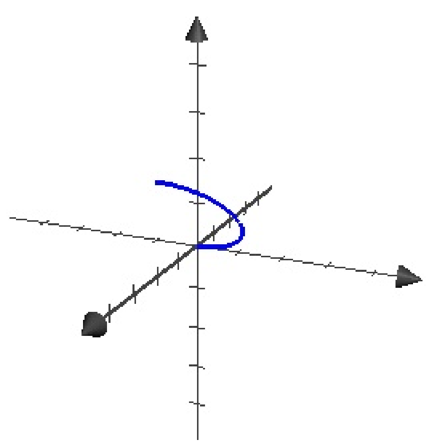
$$\lambda = -4, \qquad y = \frac{x}{2}\,.$$

La terza equazione ci fornisce infine

$$x = \sqrt{2}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \max_V 4xy = 4,$$

ritrovando il risultato ottenuto con il primo metodo.

Esercizio 2 La curva si ottiene intersecando la sfera di centro $(1, 0, 0)$ e raggio 1 con il piano $z = x$: il risultato è una ellisse, e la condizione $y \geq 0$ dimezza l'ellisse.



Scriviamo la parametrizzazione: inserendo $z = x$ nell'equazione della sfera si ottiene

$$(x - 1)^2 + y^2 + x^2 = 1,$$

e ricavando y come radice positiva

$$y = \sqrt{1 - x^2 - (x-1)^2} = \sqrt{2x - 2x^2}.$$

La mezza ellisse Γ si parametrizza allora così:

$$x = x, \quad y = \sqrt{2x - 2x^2}, \quad z = x,$$

e il parametro x si muove fra 0 e 1 (infatti l'origine è il primo estremo della curva, mentre $x = 1$ corrisponde al secondo estremo $(1, 0, 1)$).
Calcoliamo allora il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo Γ: essendo

$$x' = 1, \quad y' = \frac{1 - 2x}{\sqrt{2x - 2x^2}}, \quad z' = 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds &= \int_0^1 \left[x(2x - 2x^2) + (2x - 2x^2)(1 - 2x) + x^2 \right] \, dx = \\
&= \int_0^1 [2x^2 - 2x^3 + 2x - 2x^2 - 4x^2 + 4x^3 + x^2] \, dx = \\
&= \int_0^1 [2x^3 - 3x^2 + 2x] \, dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 15 marzo 2016

Esercizio 1 Si determini un punto $\mathbf{M}$ nel piano $\mathbb{R}^2$ tale che sia minima la somma dei quadrati delle distanze di $\mathbf{M}$ dalle rette di equazioni

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad 2y + 2x - 1 = 0.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_D (xy + yz + zx) \, dxdydz,$$

ove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le x^2\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Posto $\mathbf{M} = (x_M, y_M)$, le distanze di $\mathbf{M}$ dalle tre rette sono, nell'ordine,

$$|x_M|, \qquad |y_M|, \qquad \frac{1}{\sqrt{8}}|2y_M + 2x_M - 1|.$$

Dunque, scrivendo (x, y) in luogo di (x_M, y_M), dobbiamo calcolare il minimo per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{8}(2y + 2x - 1)^2 = \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\,y^2 + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{8}.$$

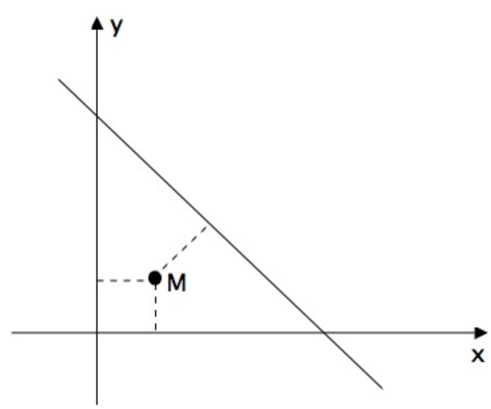
I punti stazionari di f si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ 3y + x - \frac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

e si trova facilmente

$$x = y = \frac{1}{8}.$$

Dunque vi è l'unico punto stazionario $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$, il quale è necessariamente un punto di minimo assoluto per f. Infatti f, essendo una somma di quadrati, è non negativa su $\mathbb{R}^2$ ed anzi non inferiore a $x^2 + y^2$: dunque ha limite $+\infty$ per $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$; inoltre f è continua, dato che è un polinomio. Da questi fatti segue che f assume minimo in qualche punto di $\mathbb{R}^2$, e questo punto deve essere stazionario. L'unica possibilità dunque è che



$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}.$$

Esercizio 2 L'insieme D è normale rispetto al piano xy. Detto Q il quadrato $[0,1] \times [0,1]$, si ha

$$\int_D (xy + yz + zx)\,dxdydz = \int_Q \left[\int_0^{x^2} (xy + yz + zx)\,dz\right] dxdy,$$

e dunque

$$\int_D (xy+yz+zx)\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\int_0^{x^2} (xy+yz+zx)\,dz \right] dy \right) dx.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned}
\int_D (xy+yz+zx)\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[xyz + \frac{(x+y)z^2}{2} \right]_0^{x^2} dy \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[x^3y + \frac{x^5+x^4y}{2} \right] dy \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3y^2}{2} + \frac{x^5y}{2} + \frac{x^4y^2}{4} \right)_0^1 dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{12} + \frac{x^5}{20} \right)_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{31}{120}.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 6 aprile 2016

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{xy} - 2ye^x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto

$$(0,-1,f(0,-1)).$$

(ii) Si verifichi che f non è limitata né superiormente né inferiormente.

(iii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendone la natura.

Esercizio 2 Si consideri la curva piana Γ definita in coordinate polari dall'equazione

$$r = \sqrt{\tan\vartheta}, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}.$$

(i) Si scriva l'equazione della retta perpendicolare a Γ nel punto corrispondente ai valori $r = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

(ii) Si determini l'area della regione E, delimitata da Γ e dalla semiretta di angolo $\frac{\pi}{3}$ rispetto al semiasse delle x positive.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Risulta

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy} - 2ye^x, xe^{xy} - 2e^x), \qquad \nabla f(0,-1) = (1,-2);$$

ne deduciamo che il piano tangente al grafico di f nel punto $(0,-1,f(0,-1))$, ovvero $(0,-1,3)$, ha equazione

$$z = 3 + x - 2(y+1), \qquad \text{ossia} \qquad -x + 2y + z = 1.$$

(ii) Basta osservare che

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \le \inf_{\mathbb{R}} f(0,y) = \inf_{\mathbb{R}}(1-2y) = -\infty,$$
$$\sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \ge \sup_{\mathbb{R}} f(0,y) = \sup_{\mathbb{R}}(1-2y) = +\infty.$$

(iii) Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} ye^{xy} - 2ye^x = 0 \\ xe^{xy} - 2e^x = 0, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La prima equazione è certamente risolta per $y = 0$, nel qual caso la seconda diventa $x = 2e^x$ e non ha soluzioni. Dunque si ha $y \neq 0$, la prima equazione diventa $e^{xy} = 2e^x$ e, sostituendo nella seconda, fornisce $2xe^x = 2e^x$, da cui $x = 1$ e pertanto $e^y = 2e$, vale a dire $y = 1 + \ln 2$. Abbiamo dunque l'unico punto stazionario $(1, 1+\ln 2)$.
Calcoliamo la matrice Hessiana di f:

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} - 2ye^x & e^{xy}(1+xy) - 2e^x \\ e^{xy}(1+xy) - 2e^x & x^2e^{xy} \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e in particolare

$$\mathbf{H}(1, 1+\ln 2) = \begin{pmatrix} 2e(\ln 2)(1+\ln 2) & 2e(1+\ln 2) \\ 2e(1+\ln 2) & 2e \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$\det \mathbf{H}(1, 1+\ln 2) = 4e^2(\ln 2)(1+\ln 2) - 4e^2(1+\ln 2)^2 = -4e^2(1+\ln 2) < 0,$$

il punto $(1, 1+\ln 2)$ è di sella per f.

Esercizio 2 (i) Il generico punto di Γ è

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta = \sqrt{\tan\vartheta}\,\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta = \sqrt{\tan\vartheta}\,\sin\vartheta, \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3};$$

dunque il punto corrispondente ai valori $r = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ è

$$\mathbf{P} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il vettore tangente nel generico punto di Γ è

$$\begin{cases} x' = \frac{1+\tan^2\vartheta}{2\sqrt{\tan\vartheta}}\,\cos\vartheta - \sqrt{\tan\vartheta}\,\sin\vartheta \\ y' = \frac{1+\tan^2\vartheta}{2\sqrt{\tan\vartheta}}\,\sin\vartheta + \sqrt{\tan\vartheta}\,\cos\vartheta, \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{3};$$

Il vettore tangente a Γ in $\mathbf{P}$ è perciò $(0, \sqrt{2})$, quindi è diretto verticalmente. Ne segue che il vettore normale a Γ in $\mathbf{P}$ è orizzontale: quindi la retta normale a Γ in $\mathbf{P}$ è $y = c$, ove c è l'ordinata di $\mathbf{P}$. Pertanto la sua equazione è

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(ii) Per una curva descritta in coordinate polari dall'equazione $r = g(\vartheta)$, $\vartheta \in [a, b]$, con $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$, si sa che il numero

$$\frac{1}{2}\int_a^b g(\vartheta)^2\,d\vartheta$$

fornisce l'area della regione delimitata dalla curva e dagli assi polari $\vartheta = a$ e $\vartheta = b$. Quindi l'area della regione E che ci interessa è data da

$$m_2(E) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\,d\vartheta = \big[-\ln\cos\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2.$$

Prova scritta dell'8 giugno 2016

Esercizio 1 Si trovino il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y) : \; x^2+y^2 \leq 9\}$.

Esercizio 2 Posto

$$D = \{(x,y) : \; x^2+y^2 \leq 1, \; (x-\sqrt{3})^2 + y^2 \geq 4, \; y \geq 0\},$$

si calcoli:

(i) l'integrale

$$\int_D (x-\sqrt{3})y \, dxdy,$$

(ii) la lunghezza di ∂D.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è differenziabile in tutti i punti di E ad eccezione dell'origine: in $(0,0)$ tuttavia la f vale 0 e tale valore è evidentemente un minimo per f: pertanto

$$\min_E f = f(0,0) = 0.$$

Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E: si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

e si vede subito che il sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni.
Quindi il massimo di f si troverà sul bordo di E, che è la circonferenza Γ di

centro l'origine e raggio 3. Su Γ si ha $x = 3\cos\vartheta$, $y = 3\sin\vartheta$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, e quindi

$$f(3\cos\vartheta, 3\sin\vartheta) = 3 + 9\cos^2\vartheta.$$

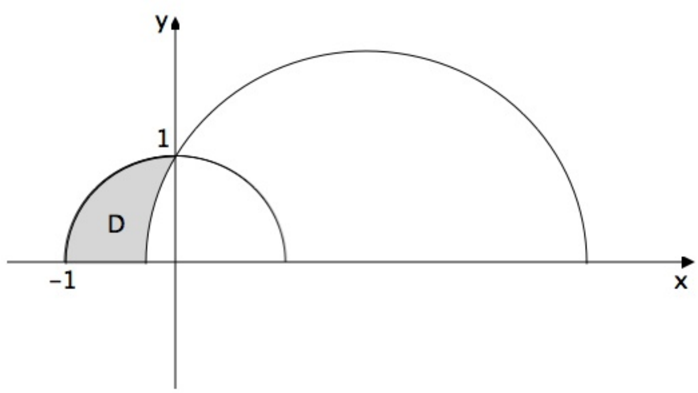
Ne deduciamo immediatamente

$$\max_{\Gamma} f = f(\pm 3, 0) = 12, \qquad \min_{\Gamma} f = f(0, \pm 3) = 3,$$

e pertanto

$$\max_{E} f = f(\pm 3, 0) = 12, \qquad \min_{E} f = f(0, 0) = 0.$$

Esercizio 2 (i) L'insieme D è la parte del semipiano $y \ge 0$ che è interna al disco di centro $(0,0)$ e raggio 1, ed è esterna al disco di centro $(\sqrt{3}, 0)$ e raggio 2.



Si tratta di un insieme normale rispetto all'asse y, e possiamo scrivere

$$D = \{(x, y) : \ 0 \le y \le 1, \ -\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{3} - \sqrt{4 - y^2}\}.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\int_D (x-1)y\,dxdy &= \int_0^1 y\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{3}-\sqrt{4-y^2}} (x-\sqrt{3})\,dx\right] dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left[(x-\sqrt{3})^2\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{3}-\sqrt{4-y^2}} = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left[(4-y^2)-(-\sqrt{1-y^2}-\sqrt{3})^2\right] dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left[(4-y^2)-(1-y^2)-2\sqrt{3}\sqrt{1-y^2}-3\right] dy = \\
&= -\sqrt{3}\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = -\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Il bordo di D è l'unione di due archi di circonferenza e di un segmento. Il segmento ha estremi -1 e $\sqrt{3}-2$, quindi è lungo $\sqrt{3}-1$. L'arco della circonferenza di centro $(0,0)$ è un quarto dell'intera circonferenza unitaria, e quindi è lungo $\frac{\pi}{2}$. Infine, per quanto riguarda l'arco della circonferenza di centro $(\sqrt{3},0)$, osserviamo che tale circonferenza si parametrizza come

$$
x=\sqrt{3}+2\cos\vartheta, \quad y=2\sin\vartheta, \qquad 0\le\vartheta\le 2\pi,
$$

e il tratto che ci interessa va dall'angolo ϑ_1 per il quale

$$
x=\sqrt{3}+2\cos\vartheta_1=0, \qquad y=2\sin\vartheta_1=1,
$$

ossia $\vartheta_1=\frac{5\pi}{6}$, fino all'angolo $\vartheta_2=\pi$. Pertanto tale arco è lungo $2\frac{\pi}{6}$, ossia $\frac{\pi}{3}$. La lunghezza del bordo di E è dunque

$$
\ell(\partial D)=\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-1+\frac{5\pi}{6}\,.
$$

Prova scritta del 6 luglio 2016

Esercizio 1 Si trovino il massimo ed il minimo della funzione

$$
f(x,y)=y^2z^2-x^2
$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z): \ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Esercizio 2 Sia Γ la curva del piano $\mathbb{R}^2$ definita in coordinate polari dalla relazione

$$r = \sin^2 \vartheta, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Si calcoli:

(i) l'area della regione piana D delimitata da Γ;

(ii) l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds,$$

ove

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2, -y^2)$$

e $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a Γ orientato in verso antiorario.

Risoluzione

Esercizio 1 Cerchiamo i punti stazionari di f interni a E: si ha

$$\nabla f(x, y, z) = (-2x, 2yz^2, 2y^2 z),$$

quindi si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ 2yz^2 = 0 \\ 2y^2 z = 0. \end{cases}$$

Si vede subito che deve essere $x = 0$ ed inoltre $y = 0$ oppure $z = 0$. Tenuto conto delle limitazioni per avere un punto interno, ossia $0 \leq |y| < z < 1$, si ottengono i punti stazionari

$$(0, 0, z), \quad 0 < z < 1.$$

In questi punti si ha $f(0, 0, z) = 0$ per ogni $z \in]0, 1[$. Vediamo cosa succede sul bordo. Sul tappo superiore, $T = \{(x, y, z): \ z = 1, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, si ha

$$f(x, y, 1) = y^2 - x^2,$$

e si riconosce subito che

$$\max_T f = f(0, \pm 1, 1) = 1, \qquad \min_T f = f(\pm 1, 0, 1) = -1.$$

Sulla superficie laterale, $S = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 = z < 1\}$, si ha

$$f(x, y, z) = y^2(x^2 + y^2)^2 - x^2,$$

e utilizzando le coordinate polari $x = r \cos\vartheta$, $y = r \sin\vartheta$, occorre trovare massimo e minimo di

$$g(r, \vartheta) = r^6 \sin^2\vartheta - r^2 \cos^2\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \ 0 \le r < 1.$$

Si ha

$$g_r(r, \vartheta) = 6r^5 \sin^2\vartheta - 2r \cos^2\vartheta = 0, \quad g_\vartheta(r, \vartheta) = (2r^6 + 2r^2) \cos\vartheta \sin\vartheta = 0,$$

ovvero

$$\begin{cases} 3r^4 \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta = 0 \\ (r^4 + 1) \cos\vartheta \sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

È immediato riconoscere, dalla prima equazione, che non può essere $\sin\vartheta = 0$. Dalla seconda segue allora $\cos\vartheta = 0$, ossia $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oppure $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, e la prima equazione dà allora $r = 0$. Essendo $z = x^2 + y^2$, si trova il solo punto $(0, 0, 0)$, ove f vale 0.

Osservazione Si noti che il calcolo sulla superficie laterale è in effetti inutile: esaminando direttamente f, si vede infatti che, essendo $x^2 + y^2 \le z \le 1$,

$$f(x, y, z) = y^2 z^2 - x^2 \le y^2 z^2 \le 1, \qquad f(x, y, z) = y^2 z^2 - x^2 \ge -x^2 \ge -1;$$

dunque i valori trovati sul tappo superiore sono necessariamente il massimo ed il minimo di f su tutto E.

Esercizio 2 (i) Per le curve chiuse, descritte in coordinate polari da un'equazione della forma

$$r = g(\vartheta), \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

l'area della regione D delimitata da Γ è data dalla formula

$$a(D) = \int_0^{2\pi} g(\vartheta)^2 \, d\vartheta.$$

Quindi nel nostro caso

$$\begin{aligned} a(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}\,. \end{aligned}$$

(ii) Lungo la curva Γ si ha

$$x = \sin^2\vartheta\cos\vartheta, \quad y = \sin^3\vartheta,$$

da cui

$$x' = 2\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta, \qquad y' = 3\sin^2\vartheta\cos\vartheta.$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = \int_0^{2\pi} \left(x^2\, x' - y^2\, y'\right) d\vartheta = \\ &\quad = \int_0^{2\pi} \left[\sin^4\vartheta\cos^2\vartheta(2\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta) - \sin^6\vartheta(3\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\right] d\vartheta = \\ &\quad = \int_0^{2\pi} (2\sin^5\vartheta\cos^4\vartheta - \sin^7\vartheta\cos^2\vartheta - 3\sin^8\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta = 0, \end{aligned}$$

grazie alla disparità e periodicità degli integrandi; più in dettaglio,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 2\sin^5\vartheta\cos^4\vartheta\, d\vartheta &= 2\int_0^{2\pi} \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^2\cos^4\vartheta\, d\vartheta = \\ &= -\int_0^0 (1-t^2)^2 t^4\, dt = 0, \\ -\int_0^{2\pi} \sin^7\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta &= -\int_0^{2\pi} \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^3\cos^2\vartheta\, d\vartheta = \\ &= \int_0^0 (1-t^2)^3 t^2\, dt = 0, \\ -\int_0^{2\pi} 3\sin^8\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta &= -3\int_0^0 t^8\, dt = 0. \end{aligned}$$

Osservazione Si noti che il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo: quindi si poteva stabilire subito che, essendo Γ una curva chiusa, deve essere

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = 0.$$

Prova scritta del 13 settembre 2016

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 4xy^2 - 8x^2y - x, \qquad (x,y) \in Q,$$

ove

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}.$$

(i) Si trovino i punti stazionari di f interni a Q, stabilendone la natura.

(ii) Si trovino il massimo ed il minimo di f in Q.

Esercizio 2 Sia Γ la curva descritta dalle relazioni

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(i) Si calcoli la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ dal campo vettoriale

$$G(x,y,z) = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, z\right).$$

(iii) Si calcoli l'integrale su Γ della funzione

$$g(x,y,z) = x^2yz.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Calcoliamo il gradiente di F:

$$\nabla f(x,y) = (4y^2 - 16xy - 1, 8xy - 8x^2).$$

Quindi i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4y(y - 4x) = 1 \\ 8x(y - x) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha necessariamente $y \neq 0$; allora, se $x = 0$ da essa ricaviamo $4y^2 = 1$, ossia $y = \pm\frac{1}{2}$; se invece $x \neq 0$, la seconda equazione dà $y = x$, e la prima diventa allora $-3x^2 = 1$, che non ha soluzioni. Dunque i punti stazionari sono

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(0, -\frac{1}{2}\right),$$

e sono entrambi interni a Q. Calcoliamo la matrice Hessiana di F:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -16y & 8y - 16x \\ 8y - 16x & 8x \end{pmatrix}.$$

Perciò

$$H\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

e in entrambi i casi il determinante è negativo: quindi tutti e due i punti sono punti di sella.

(ii) L'insieme Q è un quadrato chiuso. Poiché nessun punto stazionario interno è di massimo o di minimo relativo, la F assumerà massimo e minimo in un punto di ∂Q. Cominciamo a calcolare F nei vertici di Q:

$$F(1,1) = -5, \qquad F(1,-1) = 11, \qquad F(-1,1) = -11, \qquad F(-1,-1) = 5.$$

Analizziamo F lungo i quattro lati.

- Sul lato $\{(x,1) : \ x \in]-1,1[\}$ si ha $F(x,1) = 3x - 8x^2$; la derivata di questa funzione è $3 - 16x$, che è positiva se e solo se $x \leq \frac{3}{16}$. Quindi $\left(\frac{3}{16}, 1\right)$ è un punto di massimo vincolato, in cui risulta $F\left(\frac{3}{16}, 1\right) = \frac{9}{32}$.

- Sul lato $\{(x,-1) : \ x \in]-1,1[\}$ si ha $F(x,-1) = 3x + 8x^2$; la derivata di questa funzione è $3 + 16x$, che è positiva se e solo se $x \geq -\frac{3}{16}$. Quindi $\left(-\frac{3}{16}, 1\right)$ è un punto di minimo vincolato, in cui risulta $F\left(\frac{3}{16}, 1\right) = \frac{9}{32}$.

- Sul lato $\{(1,y) : \ y \in]-1,1[\}$ si ha $F(1,y) = 4y^2 - 8y - 1$; la derivata di questa funzione è $8y - 8$, che è sempre negativa. Quindi non ci sono punti stazionari vincolati in questo segmento.

- Sul lato $\{(-1,y) : \ y \in]-1,1[\}$ si ha $F(-1,y) = -4y^2 - 8y + 1$; la derivata di questa funzione è $-8y - 8$, che è sempre negativa. Quindi non ci sono punti stazionari vincolati in questo segmento.

In conclusione, confrontando i valori trovati, si ha

$$\max_Q F = F(1,-1) = 11, \qquad \min_Q F = F(-1,1) = -11.$$

Esercizio 2 (i) La lunghezza di Γ è data dalla formula

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Essendo

$$x'(t) = -\sin t, \qquad y'(t) = \cos t, \qquad z'(t) = 1,$$

si ottiene

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

(ii) La formula per il lavoro è

$$L = \int_\Gamma \langle G, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds,$$

ove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a Γ, orientato secondo il verso delle t crescenti. Dunque

$$L = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sin t}(-\sin t) + \frac{1}{\cos t}(\cos t) + t \cdot 1 \right) dt = \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2.$$

(iii) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma g\, ds &= \int_0^{2\pi} x^2 yz \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t\, \cos^2 t \sin t\, dt = \\
&= \sqrt{2} \left[-\frac{t}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi} + \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = \\
&= -\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{2\pi} \cos t\,(1 - \sin^2 t)\, dt = -\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + 0 = -\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 19 gennaio 2017

Esercizio 1 (i) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 4y$$

nel punto $(1, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$.

(ii) Determinare il massimo ed il minimo di f nell'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\right\}.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_D (x^3 + y)\, dxdy,$$

ove $D = \{(x, y) : \ |x| \leq 1, \ y \geq 0, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Si ha

$$\nabla f(x, y) = (4x, -2y + 4), \qquad \nabla f\left(1, \frac{1}{2}\right) = (4, 3),$$

mentre

$$f\left(1, \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{4};$$

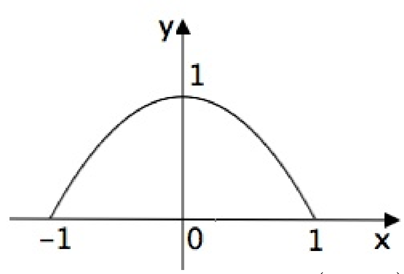
quindi l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$ è

$$z = \frac{15}{4} + 4(x - 1) + 3\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

(ii) Cerchiamo i punti stazionari di f: deve essere

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -2y + 4 = 0, \end{cases}$$

e l'unica soluzione è $(0, 2)$, punto stazionario che non appartiene ad A.



Vediamo cosa succede sulla frontiera di A. Per cominciare, nei vertici $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ si ha

$$f(-1, 0) = f(1, 0) = 2.$$

Sulla parte piatta della frontiera, che è costituita dai punti $(x, 0)$ con $x \in [-1, 1]$, si ha
$$f(x, 0) = x^2$$
quindi f ha minimo in $(0, 0)$ con $f(0, 0) = 0$ e massimo per $x = \pm 1$, dunque nei punti $(\pm 1, 0)$ già esaminati.
Infine sulla parte curvilinea della frontiera, costituita dai punti della parabola di equazione $y = 1 - x^2$, con $-1 \leq x \leq 1$, conviene utilizzare il metodo dei moltiplicatori: poniamo

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - y^2 + 4y + \lambda(y + x^2 - 1),$$

e annulliamo il gradiente di L:

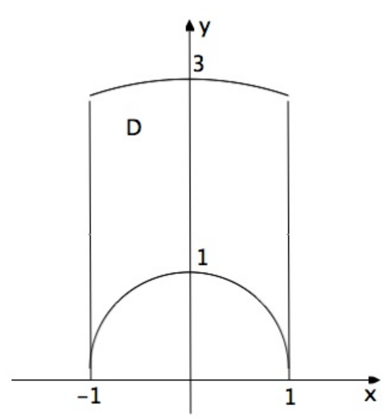
$$\begin{cases} 4x + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 4 + \lambda = 0, \\ y + x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta se $x = 0$ oppure $\lambda = -2$. Nel primo caso, $x = 0$, la terza equazione ci dà $y = 1$: il punto è dunque $(0, 1)$ ed in esso risulta
$$f(0, 1) = 3.$$
Nel secondo caso, $\lambda = -2$, la seconda equazione ci dice che $y = 1$, e la terza che $x = 0$: ritroviamo così il punto $(0, 1)$ già analizzato.
Possiamo perciò concludere che

$$\max_A f = f(0, 1) = 3, \qquad \min_A f = f(0, 0) = 0.$$

Esercizio 2 L'insieme D è la corona circolare, centrata in $(0, 0)$, di raggi 1 e 3, intersecata con la striscia verticale $[-1, 1] \times \mathbb{R}$: quindi D è un insieme normale rispetto all'asse x, che si rappresenta nel modo seguente:

$$D = \{(x, y) : \ -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}.$$



Ne segue

$$\begin{aligned}\int_D (x^3+y)\,dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3+y)\,dxdy = \\ &= \int_{-1}^{1} x^3 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\,dx + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx,\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo, perchè l'integrando è una funzione dispari di x e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0. In ogni caso, volendo fare il calcolo,

$$\int_{-1}^{1} x^3 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\,dx = \int_{-1}^{1} x^3[\sqrt{9-x^2}-\sqrt{1-x^2}]\,dx,$$

e con la sostituzione $t=x^2$, da cui $dt=2x\,dx$, si trova

$$\int_{-1}^{1} x^3 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} t[\sqrt{9-t}-\sqrt{1-t}]\,dt = 0,$$

perché si integra su un intervallo costituito da un solo punto.
Per il secondo integrale si ha

$$\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(9-x^2-1+x^2)\,dx = 8.$$

Si conclude quindi che

$$\int_D (x^3+y)\,dxdy = 0+8=8.$$

Prova scritta del 9 febbraio 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y)=e^{x^2-y}(y-2x), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(i) Verificare che f non è limitata né superiormente, né inferiormente;

(ii) trovare i punti stazionari di f, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, punti di minimo relativo o punti di sella.

Esercizio 2 Sia Γ la curva descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = e^{\sqrt{3}\,\vartheta}, \qquad \vartheta \in [0, \pi].$$

(i) Calcolare la lunghezza di Γ;

(ii) determinare l'area della regione piana A, delimitata dalla curva Γ e dall'asse x.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Osserviamo che per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{y \to -\infty} e^{x^2 - y}(y - 2x) = -\infty,$$

mentre, per ogni fissato $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2 - y}(y - 2x) = +\infty.$$

Ciò mostra che f non è limitata né superiormente, né inferiormente.

(ii) La f è di classe C^∞ e si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\, e^{x^2-y}(y-2x) - 2\, e^{x^2-y} = e^{x^2-y}\Big(2x(y-2x)-2\Big), \\ f_y(x,y) &= -e^{x^2-y}(y-2x) + e^{x^2-y} = e^{x^2-y}(-y+2x+1). \end{aligned}$$

I punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{x^2-y}\Big(2x(y-2x)-2\Big) = 0 \\ e^{x^2-y}(-y+2x+1) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x(y-2x)-2 = 0 \\ -y+2x+1 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $y - 2x = 1$: sostituendo nella prima ricaviamo subito $x = 1$, da cui $y = 3$. Pertanto l'unico punto stazionario è $(1,3)$.
Calcoliamo la matrice Hessiana: si ha

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2x\, e^{x^2-y}\Big(2x(y-2x)-2\Big) + e^{x^2-y}(2y-8x) = \\ &= e^{x^2-y}\Big(4x^2(y-2x) - 12x + 2y\Big), \end{aligned}$$

$$f_{xy}(x,y) = -e^{x^2-y}\Big(2x(y-2x)-2\Big)+e^{x^2-y}(2x) = e^{x^2-y}\Big(-2x(y-2x)+2+2x\Big),$$

$$f_{yy}(x,y) = -e^{x^2-y}(-y+2x+1)+e^{x^2-y}(-1) = e^{x^2-y}(y-2x-2).$$

Quindi la matrice Hessiana di f è

$$\mathbf{H}(x,y) = e^{x^2-y}\begin{pmatrix} 4x^2(y-2x)-12x+2y & -2x(y-2x)+2+2x \\ -2x(y-2x)+2+2x & y-2x-2 \end{pmatrix},$$

e nel punto $(1,3)$ si ottiene

$$\mathbf{H}(1,3) = e^{-2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det\mathbf{H}(1,3) = e^{-4}(2-4) = -2e^{-4} < 0,$$

si conclude che il punto stazionario $(1,3)$ è un punto di sella.

Esercizio 2 (i) La lunghezza di una curva Γ, definita in coordinate polari dall'equazione $r = f(\vartheta)$, $\vartheta \in I$, è data dalla formula

$$\ell(\Gamma) = \int_I \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Quindi nel nostro caso, essendo $f(\vartheta) = e^{\sqrt{3}\,\vartheta}$ e $f'(\vartheta) = \sqrt{3}\, e^{\sqrt{3}\,\vartheta}$, si ha

$$\ell(\Gamma) = 2\int_0^\pi e^{\sqrt{3}\,\vartheta}\, d\vartheta = \frac{2}{\sqrt{3}}(e^{\pi\sqrt{3}}-1).$$

(ii) L'area della regione A, delimitata da una curva Γ, definita in coordinate polari dall'equazione $r = f(\vartheta)$, $\vartheta \in [\alpha,\beta]$, e dagli assi polari $\vartheta = \alpha$ e $\vartheta = \beta$, è data dalla formula

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\vartheta)^2\, d\vartheta.$$

Dunque, nel nostro caso, essendo $f(\vartheta) = e^{\sqrt{3}\,\vartheta}$ e $[\alpha,\beta] = [0,\pi]$, si ha

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{2\sqrt{3}\,\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{4\sqrt{3}}(e^{2\pi\sqrt{3}}-1).$$

Prova scritta del 21 aprile 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si calcoli la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,0), \quad \text{ove} \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(ii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendo se si tratta di punti di massimo relativo, punti di minimo relativo o punti di sella.

(iii) Si determinino, se esistono, il massimo ed il minimo di f in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 Sia Σ la superficie cartesiana descritta dall'equazione

$$z = \frac{x^2}{2} + y^2, \qquad (x,y) \in D,$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4y^2 \leq 8\}$.

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(-1, 1, \frac{3}{2})$.

(ii) Si calcoli l'area di Σ.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è differenziabile, essendo una funzione composta da un'esponenziale e da un polinomio; inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-2x + y + 1)e^{-x^2+xy-y^2+x+2y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x - 2y + 2)e^{-x^2+xy-y^2+x+2y};$$

in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 3,$$

e pertanto si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,0) = \langle \boldsymbol{\nabla} f(1,0), \mathbf{v} \rangle_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle_2 = -2\sqrt{2}.$$

(ii) Annullando il gradiente di f si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

e l'unica soluzione è $(x,y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Per stabilire la natura di questo punto, calcoliamo le derivate seconde di f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \big(-2 + (-2x+y+1)^2\big) e^{-x^2+xy-y^2+x+2y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \big(1 + (-2x+y+1)(x-2y+2)\big) e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \big(-2 + (x-2y+2)^2\big) e^{-x^2+xy-y^2+x+2y},$$

cosicché, osservato che nel punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ risulta

$$-2x + y + 1 = 0, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad e^{-x^2+xy-y^2+x+2y} = e^{\frac{7}{3}},$$

otteniamo che la matrice Hessiana di f nel punto $(1,0)$ è

$$\mathbf{H}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2\, e^{\frac{7}{3}} & e^{\frac{7}{3}} \\ e^{\frac{7}{3}} & -2\, e^{\frac{7}{3}} \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det \mathbf{H}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = 3\, e^{\frac{14}{3}} > 0$, con elementi della diagonale principale negativi, il punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ è punto di massimo relativo e risulta

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = e^{\frac{7}{3}}.$$

(iii) Osservando che

$$xy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{2} \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2},$$

$$x = \frac{x^2}{4} + 1 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \le \frac{x^2}{4} + 1,$$

$$2y = \frac{y^2}{4} + 4 - \left(\frac{y}{2} - 2\right)^2 \le \frac{y^2}{4} + 4,$$

la funzione f si stima nel modo seguente:

$$0 \le f(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y} \le e^{-x^2-y^2+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{4}+1+\frac{y^2}{4}+4} = e^5 e^{-\frac{x^2+y^2}{4}},$$

e ciò implica, per confronto,

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x,y) = 0.$$

Pertanto

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0,$$

ed il minimo di f non esiste (altrimenti ci sarebbe un altro punto stazionario (x_0, y_0) in cui $f(x_0, y_0) = 0$, il che è assurdo). Invece il massimo assoluto di f esiste sicuramente, perché:

- f è limitata superiormente, quindi $\lambda := \sup_{\mathbb{R}^2} f < \infty$;
- f assume valori minori di $\frac{\lambda}{2}$ al di fuori di una opportuna palla chiusa $\overline{B}((0,0), R)$;
- f deve avere massimo assoluto in $\overline{B}((0,0), R)$ per il teorema di Weierstrass;
- tale massimo non può essere assunto sulla frontiers della palla, perché lì, per continuità, la f vale meno di $\frac{\lambda}{2}$;
- dunque il massimo assoluto di f in $\overline{B}((0,0), R)$ è assunto in un punto interno a tale palla, e questo punto è necessariamente un punto stazionario per f;
- essendo $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ l'unico punto stazionario di f, esso deve essere il punto in cui f assume massimo assoluto.

Ne concludiamo che

$$\lambda = \sup_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = e^{\frac{7}{3}}.$$

Esercizio 2 (i) La superficie Σ è cartesiana (è il grafico di $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$ per $(x,y) \in D$). Dunque si parametrizza come

$$x = x, \quad y = y, \quad z = \frac{x^2}{2} + y^2, \qquad (x,y) \in D.$$

Il piano tangente in un generico punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ è dato dall'equazione

$$z = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Dato che $g_x(x, y) = x$ e $g_y(x, y) = 2y$, nel punto $(-1, 1, \frac{3}{2})$ si ha

$$z = \frac{3}{2} - (x + 1) + 2(y - 1),$$

ossia

$$2x - 4y + 2z + 3 = 0.$$

(ii) Poiché la superficie è cartesiana, l'area richiesta è data dalla formula

$$a(\Sigma) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2}\, dxdy = \int_D \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Data la forma di D, conviene utilizzare in questo integrale coordinate ellittiche, ossia

$$x = 2\sqrt{2}\, r\, \cos\vartheta, \quad y = \sqrt{2}\, r\, \sin\vartheta, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

Il determinante di questa trasformazione è

$$\det \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\, \cos\vartheta & -2\sqrt{2}\, r\, \sin\vartheta \\ \sqrt{2}\, \sin\vartheta & \sqrt{2}\, r\, \cos\vartheta \end{pmatrix} = 4r,$$

e dunque si ottiene

$$a(\Sigma) = \int_D \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 8r^2}\, 4r\, drd\vartheta;$$

con la sostituzione $r^2 = t$ si ricava $2r\, dr = dt$ ed infine

$$a(\Sigma) = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 8t}\, dt = \frac{\pi}{3} \Big[(1 + 8t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}(27 - 1) = \frac{26\pi}{3}.$$

Prova scritta del 12 giugno 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 y - 9y, \qquad (x, y) \in D,$$

ove

$$D = \{(x, y)) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x + y \geq 0\}.$$

Si trovino il massimo ed il minimo di f in D.

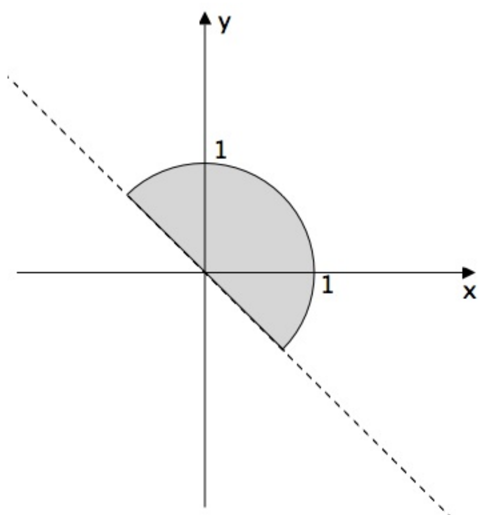
Esercizio 2 Sia Σ la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva Γ del piano xz definita da

$$\Gamma = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x - 1)^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq x \leq 1\}.$$

Si calcoli l'area di Σ.

Risoluzione

Esercizio 1 Il dominio D è rappresentato in figura.



La funzione f è di classe C^∞. Cerchiamo i suoi punti stazionari interni a D annullandone il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy = 0 \\ f_y(x, y) = x^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione dice che $x = \pm 3$, la prima ci dà allora $y = 0$. Abbiamo quindi i due punti stazionari $(3, 0)$ e $(-3, 0)$, i quali però non verificano le condizioni di appartenenza a D perché non si ha $x^2 + y^2 \leq 1$.

Il bordo di D è formato:

- dai due vertici, che sono i punti di intersezione della retta $x+y=0$ con la circonferenza $x^2+y^2=1$,. Tali vertici sono $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e risulta in tali punti

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{17}{\sqrt{2}}, \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{17}{\sqrt{2}};$$

- dal segmento che ha per estremi i punti appena trovati, che è contenuto nella retta $x+y=1$. Su tale segmento si ha

$$f(x,-x) = -x^3+8x, \quad \frac{d}{dx}[f(x,-x)] = -3x^2+8 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}},$$

e queste due ascisse corrispondono a punti esterni al segmento;

- dalla semicirconferenza $x^2+y^2=1$ con $x+y>0$, che si parametrizza come

$$x = \cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \quad -\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{3\pi}{4}\,.$$

Su tale circonferenza risulta

$$f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \cos^2\vartheta\sin\vartheta - 9\sin\vartheta,$$

$$\frac{d}{d\vartheta}[f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)] = -2\cos\vartheta\sin^2\vartheta \; + \cos^3\vartheta - 9\cos\vartheta.$$

e scrivendo $\sin^2\vartheta = 1-\cos^2\vartheta$ si trova facilmente

$$\frac{d}{d\vartheta}[f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)] = (-11+3\cos^2\vartheta)\cos\vartheta.$$

Poiché il fattore $-11+3\cos^2\vartheta$ è sempre negativo (infatti $\cos^2\vartheta < \frac{11}{3}$), si ha per $-\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{3\pi}{4}$

$$\frac{d}{d\vartheta}[f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)] = 0 \qquad \iff \qquad \cos\vartheta = 0 \qquad \iff \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}\,,$$

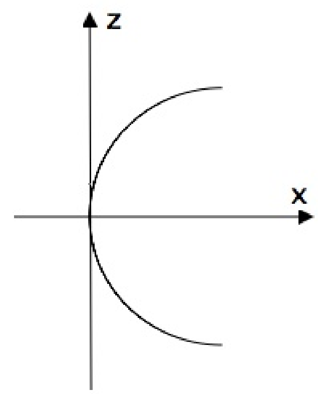
e nel punto corrispondente, che è $(0,1)$, si ha

$$f(0,1) = -9.$$

In conclusione,

$$\max_D f = \max\left\{-\frac{17}{\sqrt{2}}, \frac{17}{\sqrt{2}}, -9\right\} = \frac{17}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\min_D f = \min\left\{-\frac{17}{\sqrt{2}}, \frac{17}{\sqrt{2}}, -9\right\} = -\frac{17}{\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2 Possiamo calcolare l'area di Σ integrando lungo Γ per fette orizzontali: parametrizzando Γ rispetto alla quota z e tenendo conto della condizione $0 \leq x \leq 1$ si ha



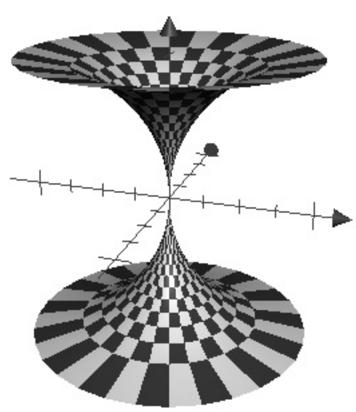
$$\Gamma : \begin{cases} x = 1 - \sqrt{1-z^2} \\ z = z, \end{cases} \qquad -1 \leq z \leq 1,$$

e la fetta orizzontale alla quota z è la circonferenza di raggio $x = 1 - \sqrt{1-z^2}$. Essendo

$$x' = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \quad z' = 1, \quad ds = \sqrt{\frac{z^2}{1-z^2} + 1}\, dz = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz,$$

si trova

$$a(\Sigma) = \int_\Gamma 2\pi x\, ds = \int_{-1}^{1} 2\pi \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = 2\pi\Big[\arcsin z - z\Big]_{-1}^{1} = 2\pi(\pi - 2).$$



Prova scritta dell'11 luglio 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = \sqrt{3}\,y - x, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si trovino il massimo ed il minimo di f sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_E x^3\,dxdy,$$

ove

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq \frac{1}{2}\,, \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Poiché $\nabla f(x,y,z) = (-1,\sqrt{3},0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la funzione f non ha punti stazionari liberi. Dunque il massimo ed il minimo di f su D saranno assunti in punti del bordo di D, cioè in punti di

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Utiliuzzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, andiamo a cercare i punti stazionari di

$$L(x,y,z,\lambda) = \sqrt{3}y - x + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9) :$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda x = 0 \\ \sqrt{3} + 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ la prima e la seconda equazione non hanno soluzione: quindi $\lambda \neq 0$ e pertanto dalla terza equazione segue $z = 0$. Ne deriva $x = \frac{1}{2\lambda}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}$, ossia $y = -\sqrt{3}\,x$, e la quarta equazione ci dà allora $4x^2 = 9$, ossia $x = \pm\frac{3}{2}$ da cui $y = \mp\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Si hanno così i due punti

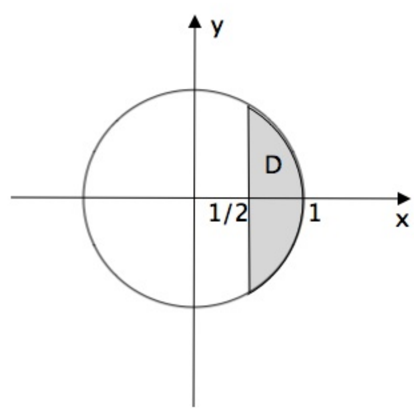
$$\left(\frac{3}{2}\,, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,, 0\right), \qquad \left(-\frac{3}{2}\,, \frac{3\sqrt{3}}{2}\,, 0\right),$$

nei quali

$$f\left(\frac{3}{2}\,, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,, 0\right) = -6 = \min_D f, \qquad f\left(-\frac{3}{2}\,, \frac{3\sqrt{3}}{2}\,, 0\right) = 6 = \max_D f.$$

Esercizio 2 L'insieme E è disegnato in figura. Conviene utilizzare le coordinate polari: risulta

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta, \end{cases}$$



con la limitazione

$$r\cos\vartheta \geq \frac{1}{2},$$

che implica intanto $\cos\vartheta > 0$, ossia $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$; inoltre si ottiene

$$\frac{1}{2\cos\vartheta} \leq r \leq 1$$

e, affinchè l'intervallo per la r non sia vuoto, deve essere

$$-\frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}\,.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\int_E x^3\,dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{2\cos\vartheta}}^{1} r^3\cos^3\vartheta \cdot r\,drd\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3\vartheta \int_{\frac{1}{2\cos\vartheta}}^{1} r^4\,drd\vartheta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3\vartheta \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{160\cos^5\vartheta}\right] d\vartheta = \\
&= \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta - \frac{1}{160}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2\vartheta} d\vartheta = \\
&= \frac{1}{5}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{3}\sin^3\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{160}\Big[\tan\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{8}\right] - \frac{1}{160}[\sqrt{3}+\sqrt{3}] == \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{80} = \\
&= \frac{11\sqrt{3}}{80}\,.
\end{aligned}
$$

Prova scritta del 26 settembre 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = (x-y)z\,e^{z^2-xy}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Si calcolino

$$\inf_{\mathbb{R}^3} f, \qquad \sup_{\mathbb{R}^3} f.$$

(ii) Si determini la derivata direzionale di f nel punto $(1,2,0)$, secondo la direzione $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

(iii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendone la natura.

Esercizio 2 Per $0 \le r \le 1$ sia Γ_r il cono definito dalla relazioni

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad x^2+y^2 \le r^2,$$

e sia Σ_r il tronco di cono dato da

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad r^2 \le x^2+y^2 \le 1.$$

Si determini $r \in]0,1[$ tale che l'area di Γ_r e l'area di Σ_r siano uguali.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Risulta
$$f(\pm 1, 0, z) = \pm z\, e^{z^2},$$
da cui
$$\lim_{z\to+\infty} f(-1,0,z) = -\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty} f(1,0,z) = +\infty :$$
ne segue
$$\inf_{\mathbb{R}^3} f = -\infty, \qquad \sup_{\mathbb{R}^3} f = +\infty.$$

(ii) Risulta
$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= z[1-(x-y)y]e^{z^2-xy} \\ f_y(x,y,z) &= z[1-(x-y)x]e^{z^2-xy} \\ f_z(x,y,z) &= (1+2z^2)(x-y)e^{z^2-xy}, \end{aligned}$$
e dunque
$$\boldsymbol{\nabla} f(1,2,0) = (0,0,-e^{-2}),$$
da cui
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,2,0) = -\frac{e^{-2}}{\sqrt{6}}\,.$$

(iii) Poiché l'esponenziale non è mai nulla, risulta $\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = (0,0,0)$ se e solo se
$$\begin{cases} z[1-(x-y)y] = 0 \\ z[1-(x-y)x] = 0 \\ (1+2z^2)(x-y) = 0; \end{cases}$$
la terza equazione dà $x = y$, e dalle altre due segue $z = 0$. Dunque si hanno gli infiniti punti stazionari $(x,x,0)$, con $x \in \mathbb{R}$. In tutti questi punti f è nulla; si tratta sempre di punti di sella poiché, per ogni $\varepsilon > 0$,
$$f(x+\varepsilon, x, -\varepsilon) = -\varepsilon^2\, e^{\varepsilon^2 - x(x+\varepsilon)} < 0 < \varepsilon^2\, e^{\varepsilon^2-x(x+\varepsilon)} = f(x+\varepsilon, x, \varepsilon).$$

Esercizio 2 Utilizzando le coordinate cilindriche possiamo parametrizzare Γ_r e Σ_r nel modo seguente:
$$\Gamma_r : \begin{cases} x = \rho\,\cos\vartheta \\ y = \rho\,\sin\vartheta \\ z = \rho, \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi;$$

$$\Sigma_r : \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \qquad\qquad r \le \rho \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi; \\ z = \rho, \end{cases}$$

Scriviamo la matrice delle derivate:

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho \cos\vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $E = 2$, $G = \rho^2$, $F = 0$, risulta $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2}\,\rho$; pertanto si ottengono subito le due aree:

$$a(\Gamma_r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{2}\rho \, d\rho d\vartheta = \pi\sqrt{2}\, r^2,$$

$$a(\Sigma_r) = \int_0^{2\pi} \int_r^1 \sqrt{2}\rho \, d\rho d\vartheta = \pi\sqrt{2}\,(1 - r^2).$$

Occorre allora scegliere r in modo che $r^2 = 1 - r^2$, ossia $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Prova scritta del 17 novembre 2017

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = xy + y^2 - y\sqrt{x}$$

nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale doppio

$$\int_E (x^2 + 2y^2), dxdy,$$

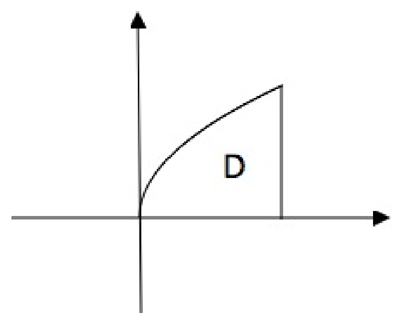
ove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è differenziabile in tutti i punti in cui $x \neq 0$, a causa della presenza della radice. Dunque essa è differenziabile in tutti i punti interni a D. Cominciamo allora a cercare i punti stazionari interni: annullando il gradiente di f si trova il sistema

$$\begin{cases} y\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \\ x + 2y - \sqrt{x} = 0. \end{cases}$$



La prima equazione è risolta da $y = 0$ oppure $2\sqrt{x} = 1$. Nel primo caso, la seconda equazione fornisce $x - \sqrt{x} = 0$, ossia $x = 0$ oppure $x = 1$: ma i punti $(0,0)$ e $(1,0)$ non sono interni a D. Tuttavia, poiché questi due punti sono punti singolari del bordo (nel senso che in tali punti non vi è retta tangente a ∂D), occorre comunque calcolare il valore di f:

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1,0) = 0.$$

Nel secondo caso, si ha $x = \frac{1}{4}$ e dalla seconda equazione segue $y = \frac{1}{8}$. Dunque abbiamo il punto stazionario $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ che è interno a D, e si ha

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{64}\,.$$

Analizziamo la situazione sul bordo. Anzitutto vi è un altro punto singolare, ossia $(1,1)$, nel quale risulta

$$f(1,1) = 1.$$

Il bordo è composto:

- dai tre punti singolari $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ già considerati;
- dal lato di base, in cui $y = 0$ e dunque $f \equiv 0$;
- dal lato verticale, in cui $x = 1$ e dunque $f(1,y) = y^2$, $y \in]0,1[$, con derivata $2y$ che non si annulla mai in $]0,1[$;

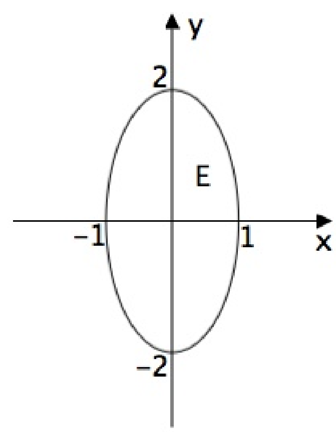
- dalla curva $y = \sqrt{x}$, $x \in]0,1[$, in cui $f(x, \sqrt{x}) = x^{\frac{3}{2}}$, con derivata $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ che non si annulla mai in $]0,1[$.

In conclusione, non ci sono altri punti da considerare. Pertanto, confrontando i valori trovati si conclude che

$$\max_D f = f(1,1) = 1, \qquad \min_D f = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{64}\,.$$

Esercizio 2 L'insieme E è delimitato dall'ellisse, centrata nell'origine, di semiassi $\frac{1}{2}$ e 1. Per integrare su di essa conviene utilizzare coordinate ellittiche: in altre parole, poiché i punti $(2x, y)$ vivono nel disco di centro $(0,0)$ e raggio 1, si deve porre $2x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, ossia

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{2}\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$



Scriviamo la matrice delle derivate di x e y rispetto a r e ϑ:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\vartheta & -\frac{r}{2}\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix};$$

il determinante di questa matrice è $\frac{r}{2}$.
Possiamo adesso calcolare l'integrale: si ha

$$\begin{aligned} \int_E (x^2 + 2y^2)\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{4}\cos^2\vartheta + 2r^2\sin^2\vartheta\right)\frac{r}{2}\,drd\vartheta = \\ &= \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) d\vartheta. \end{aligned}$$

Dato che, come è noto,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta = \pi,$$

si conclude che

$$\int_E (x^2 + 2y^2)\,dxdy = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = \frac{9}{32}\pi.$$

Prova scritta del 9 gennaio 2018

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 4xy^3 + 3x^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Posto $\mathbf{v} = (1,-1)$, si determinino il valore massimo ed il valore minimo di

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 - y^2,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Esercizio 2 Posto

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy + z, yz + x, zx + y), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z = 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right\},$$

orientata secondo la normale $\mathbf{n}$ tale che $n_3 > 0$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞ e si ha

$$g(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \mathbf{v} \rangle_3 = (4y^3 + 6x) - (12xy^2) = 4y^3 + 6x(1 - 2y^2).$$

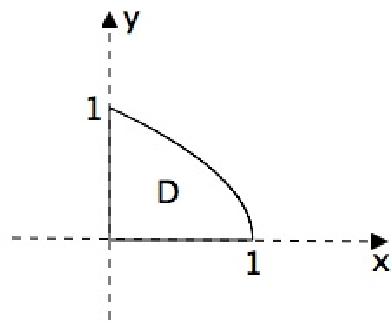
Vediamo se esistono punti stazionari di g interni a D: si ha

$$\nabla g(x,y) = \big(6(1 - 2y^2), 12(y^2 - 2xy)\big),$$

e dunque $\nabla g(x,y) = \mathbf{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 1 - 2y^2 = 0 \\ y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = \pm\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Di questi due punti solo $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ appartiene all'interno di D, essendo



$$0 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e risulta

$$g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}.$$

Vediamo la situazione sul bordo di D. Nei tre vertici si ha

$$g(0,0) = 0, \qquad g(1,0) = 6, \qquad g(0,1) = 4.$$

Sul segmento verticale $x = 0$, $y = y$, $y \in]0,1[$, si ha $g(0,y) = 4y^3$: è una funzione strettamenrte crescente, quindi non ci sono punti stazionari vincolati.
Sul segmento orizzontale $y = 0$, $x = x$, $x \in]0,1[$, si ha $g(x,0) = 6x$: è una funzione strettamenrte crescente, quindi non ci sono punti stazionari vincolati.
Infine, sull'arco di parabola $x = 1 - y^2$, $y = y$, $y \in]0,1[$, si ha

$$g(1-y^2, y) = 4y^3 + 6(1-y^2)(1-2y^2) =: h(y);$$

la derivata è

$$h'(y) = 12y^2 - 12y(1-2y^2) - 24y(1-y^2) = 12y(4y^2 + y - 3).$$

Essa si annulla nei punti

$$y = 0, \qquad y = \frac{-1 \pm 7}{8}.$$

L'unico punto appartenente all'intervallo $]0,1[$ è $y_0 = \frac{3}{4}$, a cui corrisponde il punto stazionario vincolato

$$\left(1 - y_0^2, y_0\right) = \left(\frac{7}{16}, \frac{3}{4}\right)$$

nel quale si ha, con qualche calcolo,

$$g\left(\frac{7}{16}, \frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \frac{27}{64} + 6 \cdot \frac{7}{16} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{9}{16}\right) = \frac{27}{16} - \frac{21}{64} = \frac{87}{64} = 1.359375.$$

Confrontando i valori trovati si ricava

$$\max_D g = g(1,0) = 6, \qquad \min_D g = g(0,0) = 0.$$

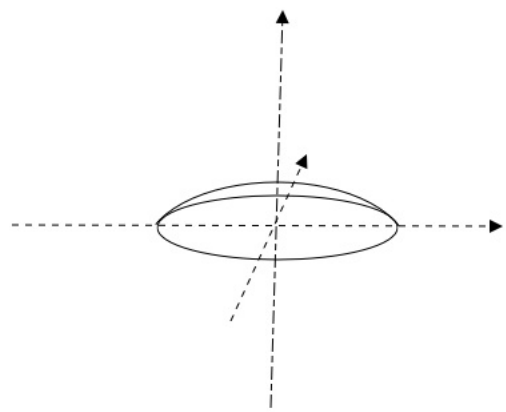
Esercizio 2 Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è di classe C^∞ e si ha

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xy+z & yz+x & zx+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-z \\ 1-x \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma,$$

con $\mathbf{n}$ tale che $n_3 > 0$.
La superficie Σ è cartesiana, con dominio dei parametri



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Dunque Σ è descritta dalle relazioni

$$x = x, \quad y = y, \quad z = 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}, \qquad (x,y) \in D.$$

In particolare la matrice Jacobiana ed il vettore normale sono dati da

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{2}{9}\,x & -\frac{1}{2}\,y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}\,x \\ \frac{1}{2}\,y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo vettore normale ha l'orientazione richiesta. Poiché

$$\langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 = \frac{2}{9}\,x(1-y) + \frac{1}{2}\,y(1-z) + 1 - x,$$

possiamo scrivere

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma = \int_D \left(\frac{2}{9}\,x(1-y) + \frac{1}{2}\,y\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right) + 1 - x \right) dxdy,$$

ed usando le coordinate ellittiche

$$x = 3r\cos\vartheta, \quad y = 2r\sin\vartheta, \quad z = 1 - r^2, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

otteniamo, essendo il determinante della trasformazione uguale a $6r$,

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{2}{9}(3r\cos\vartheta)(1-2r\sin\vartheta) + r^3\sin\vartheta + 1 - 3r\cos\vartheta\right) 6r\,drd\vartheta.$$

In virtù della disparità e 2π-periodicità dell'integrando rispetto a ϑ, tutti i termini, tranne uno, sono nulli: rimane soltanto

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 6r\,drd\vartheta = 6\pi.$$

Osservazione Avremmo potuto anche utilizzare il teorema di Stokes, ossia la formula

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma = \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds,$$

ove $b\Sigma$ è il bordo di Σ, e $\boldsymbol{\tau}$ è il vettore tangente orientato in modo coerente con l'orientazione assegnata a Σ. La curva $b\Sigma$ è l'ellisse del piano $z = 0$ descritta da

$$b\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 0, \; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\},$$

e il verso coerente con l'orientazione di Σ è quello antiorario. Perciò, usando le coordinate ellittiche

$$x = 3\cos\vartheta, \quad y = 2\sin\vartheta, \quad z = 0, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

si ha

$$\boldsymbol{\tau} = (-3\sin\vartheta, 2\cos\vartheta, 0)$$

e dunque, lungo $b\Sigma$,

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 = -18\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 6\cos^2\vartheta + 0 = -18\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 6\cos^2\vartheta.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\sigma &= \int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3 \, ds = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-18\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 6\cos^2\vartheta\right) d\vartheta = \\
&= 0 + 6\pi = 6\pi.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 14 febbraio 2018

Esercizio 1 Si calcoli l'integrale

$$\int_D x^4\, y^2\, dxdy$$

ove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |x| + |y| \ge 1\}.$$

Esercizio 2 Sia Γ la curva descritta in coordinate polari dalla relazione

$$r = \sin^2 \vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le \pi.$$

Si calcoli:

(i) l'integrale curvilineo

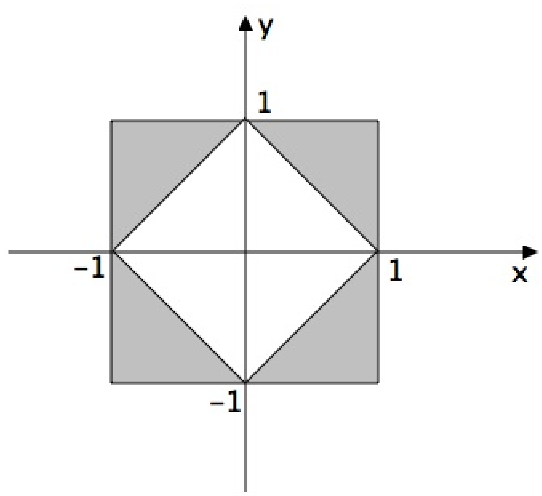
$$\int_\Gamma x\, y^{-2/3}\, ds;$$

(ii) il lavoro compiuto lungo Γ dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

Risoluzione

Esercizio 1 Il dominio D è illustrato in grigio.



Per la simmetria della funzione integranda, l'integrale è pari a 4 volte l'integrale sulla parte triangolare T contenuta nel primo quadrante, descritta da

$$T + \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 1-x \leq y \leq 1\}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int_D x^4\, y^2\, dxdy &= 4\int_0^1 \int_{1-x}^1 x^4\, y^2\, dydx = \frac{4}{3}\int_0^1 x^4 \Big(1-(1-x)^3\Big)\, dx = \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 x^4\,(3x-3x^2+x^3)\, dx = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{7}+\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{42}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (i) Per le curve in coordinate polari $r = g(\vartheta)$ si ha

$$ds = \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2}\, d\vartheta,$$

e dunque nel nostro caso

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{\sin^4\vartheta + 4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \\
&= \sin\vartheta\,\sqrt{\sin^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \sin\vartheta\,\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\, d\vartheta.
\end{aligned}$$

Essendo $x = \cos\vartheta\sin^2\vartheta$ e $y = \sin^3\vartheta$, otteniamo

$$\int_\Gamma x\, y^{-2/3}\, ds = \int_0^\pi \cos\vartheta\sin\vartheta\,\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\, d\vartheta,$$

e con la sostituzione $t = \sin\vartheta$ si arriva a

$$\int_\Gamma x\, y^{-2/3}\, ds = -\int_1^{-1} t\sqrt{1+3t^2}\, dt = \int_{-1}^1 t\sqrt{1+3t^2}\, dt.$$

Osservando che l'integrando è una funzione dispari, si conclude che

$$\int_\Gamma x\, y^{-2/3}\, ds = \int_{-1}^1 t\sqrt{1+3t^2}\, dt = 0.$$

(ii) Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_2\, ds.$$

Essendo

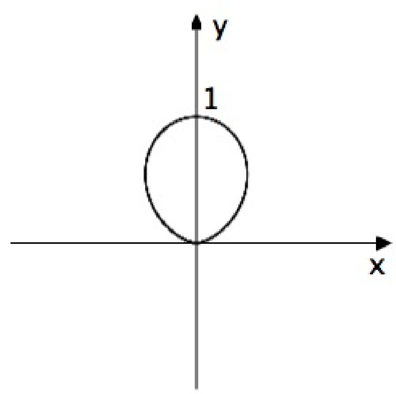
$$x' = -\sin^3\vartheta + 2\sin\vartheta\cos^2\vartheta, \qquad y' = 3\sin^2\vartheta\cos\vartheta,$$

nonché

$$\frac{x}{y} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,, \qquad \frac{y}{x} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_2\, ds &= \int_0^\pi \big(-\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 2\cos^3\vartheta + 3\sin^3\vartheta\big)\, d\vartheta = \\ &= \int_0^\pi \big(-\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\,(1-\sin^2\vartheta) + 3\sin\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)\big)\, d\vartheta = \\ &= \left[-\frac{1}{3}\sin^3\vartheta + 2\sin\vartheta - \frac{2}{3}\sin^3\vartheta - 3\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\right]_0^\pi = 6 - 2 = 4.\end{aligned}$$



Prova scritta del 13 marzo 2018

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 + 2x^2 + 3y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinare il massimo ed il minimo di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale doppio

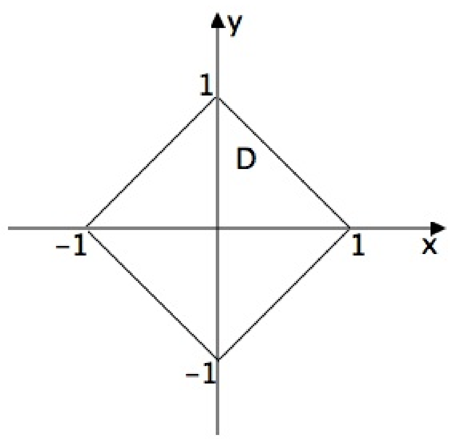
$$\int_C (|x|^3 + |y|^3)\, dxdy$$

ove

$$C = \{(x, y) : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Il dominio della funzione f è rappresentato in figura.



Cerchiamo i punti stazionari interni: si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{4x}{1+2x2+3y^2} = 0 \\ f_y(x,y) = \dfrac{6y}{1+2x^2+3y^2} = 0 \end{cases} \iff \quad x = y = 0.$$

Il punto $(0, 0)$ è interno a D ed è l'unico punto stazionario di f; risulta

$$f(0, 0) = \ln 1 = 0,$$

e siccome la funzione f è sempre non negativa, si conclude che $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto per f in D.
Vediamo cosa succede sul bordo di D. Per ragioni di simmetria legate al fatto che f dipende da x^2 e y^2, è sufficiente considerare la funzione sul segmento di estremi $(1, 0)$ e $(0, 1)$: Nei vertici si ha

$$f(1, 0) = \ln 3, \qquad f(0, 1) = \ln 4,$$

e naturalmente, per simmetria, si ha anche $f(-1,0) = \ln 3$ e $f(0,-1) = \ln 4$.
Nell'interno del segmento, che ha equazione $x + y = 1$, la funzione diventa

$$f(x, 1-x) = \ln(1 + 2x^2 + 3(1-x)^2), \qquad 0 < x < 1,$$

e risulta

$$\frac{d}{dx} f(x, 1-x) = \frac{4x - 6(1-x)}{1 + 2x^2 + 3(1-x)^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{3}{5}\,.$$

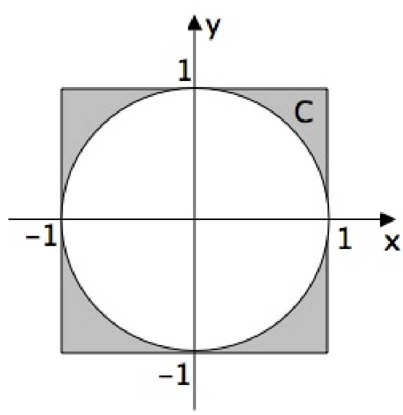
Quindi il punto $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ è punto stazionario vincolato per f, e risulta

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = \ln \frac{11}{5}\,,$$

e naturalmente, per simmetria sono punti stazionari vincolati anche i punti $(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, $(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$, con lo stesso valore di f.
Confrontando i valori trovati, si conclude che

$$\max_D f = f(0,1) = f(0,-1) = \ln 4, \qquad \min_D f = f(0,0) = 1.$$

Esercizio 2 L'insieme di integrazione C è rappresentato in figura.



Esso è la differenza fra il quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ e il disco $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Quindi si ha

$$\int_C (|x|^3 + |y|^3)\, dxdy = \int_Q (|x|^3 + |y|^3)\, dxdy - \int_D (|x|^3 + |y|^3)\, dxdy.$$

Dato che la funzione f è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\int_Q (|x|^3+|y|^3)\,dxdy &= 4\int_0^1\int_0^1 (x^3+y^3)\,dxdy = \\
= \quad & 4\int_0^1\int_0^1 x^3\,dxdy + 4\int_0^1\int_0^1 y^3\,dxdy = 4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 2,
\end{aligned}$$

e similmente

$$\int_D (|x|^3+|y|^3)\,dxdy = 4\int_{D\cap([0,1]\times[0,1])} (x^3+y^3)\,dxdy.$$

Dunque, utilizzando le coordinate polari,

$$\begin{aligned}
\int_D (|x|^3+|y|^3)\,dxdy &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4(\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta)\,d\vartheta dr = \\
&= \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2}[\cos\vartheta\,(1-\sin^2\vartheta)+\sin\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)]\,d\vartheta dr = \\
&= \frac{4}{5}\left[\sin\vartheta-\frac{1}{3}\sin^3\vartheta-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{5}\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right] = \frac{16}{15}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto si conclude che

$$\int_C (|x|^3+|y|^3)\,dxdy = 2-\frac{16}{15} = \frac{14}{15}\,.$$

Prova scritta del 6 aprile 2018

Esercizio 1 Determinare il valore massimo ed il valore minimo della funzione

$$f(x,y,z) = e^{x-10y+3z}$$

nell'insieme

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 1,\ z=5x-2y\}.$$

Esercizio 2 Si consideri la curva piana Γ descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \frac{1}{1+\vartheta}\,, \qquad 0\le\vartheta\le 2\pi.$$

Si calcoli:

(i) l'area della regione D delimitata dalla curva Γ e dal segmento $\left[\frac{1}{1+2\pi}, 1\right]$ dell'asse x;

(ii) l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds.$$

Risoluzione

Esercizio 1 L'insieme E è l'intersezione fra il cilindro verticale pieno, descritto dalla ralazione $x^2+y^2 \leq 1$, ed il piano obliquo di equazione $z = 5x-2y$. L'insieme E è dunque un'ellisse (piena), che si proietta sul piano xy nel disco $x^2 + y^2 \leq 1$.
Operativamente, nei punti di E c'è il vincolo $z = 5x - 2y$ che ci permette di eliminare la z:

$$f(x, y, z) = f(x, y, 5x - 2y) = e^{x-10y+3(5x-2y)} = e^{16(x-y)},$$

mentre il vincolo $x^2 + y^2 \leq 1$ dice che possiamo ridurci a trovare il massimo ed il minimo di

$$g(x, y) = e^{16(x-y)}$$

sul disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Poiché il sistema delle derivate prime

$$\begin{cases} 16\, e^{16(x-y)} = 0 \\ -16\, e^{16(x-y)} = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni, non esistono punti stazionari di g interni a D. I punti della frontiera di D sono della forma $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, e si ha in tali punti

$$\frac{d}{d\vartheta} e^{16(\cos\vartheta - \sin\vartheta)} = 16(-\sin\vartheta - \cos\vartheta)\, e^{16(\cos\vartheta-\sin\vartheta)} = 0$$

se e solo se

$$\cos\vartheta = -\sin\vartheta$$

ovvero se e solo se $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$ oppure $\vartheta = \frac{7}{4}\pi$: dunque la g ha i due punti stazionari vincolati

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

nei quali

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-16\sqrt{2}} = \min_D g, \qquad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{16\sqrt{2}} = \max_D g.$$

Utilizzando nuovamente la relazione $z = 5x - 2y$, si conclude che

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}}\right) = e^{-16\sqrt{2}} = \min_E f,$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right) = e^{16\sqrt{2}} = \max_E f.$$

Esercizio 2 (i) L'area delimitata da una curva della forma $r = g(\vartheta)$, $\vartheta \in [a, b]$, è data dalla formula

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma g(\vartheta)^2\, d\vartheta.$$

Quindi, nel nostro caso,

$$a(E) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\vartheta)^2}\, d\vartheta = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\vartheta}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+2\pi} = \frac{\pi}{1+2\pi}\,.$$

(ii) Per le curve della forma $r = g(\vartheta)$ si ha

$$ds = \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2}\, d\vartheta,$$

e dunque, nel nostro caso,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (x^2+y^2)\, ds &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\vartheta)^2}\sqrt{\frac{1}{(1+\vartheta)^2} + \frac{1}{(1+\vartheta)^4}}\, d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\vartheta)^3}\sqrt{1 + \frac{1}{(1+\vartheta)^2}}\, d\vartheta;\end{aligned}$$

ponendo $t = 1 + \frac{1}{(1+\vartheta)^2}$, da cui $dt = -\frac{2}{(1+\vartheta)^3}\, d\vartheta$, si deduce

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (x^2+y^2)\, ds &= \frac{1}{2}\int_{1+\frac{1}{(1+2\pi)^2}}^{2} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{1+\frac{1}{(1+2\pi)^2}}^{2} = \\ &= \frac{1}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{1}{(1+2\pi)^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].\end{aligned}$$

Prova scritta del 12 giugno 2018

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = e^{-y}(y^2 - 2x^4)$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 \leq y \leq 1 - 2x^2\}.$$

Esercizio 2 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando attorno all'asse z il chiuso E del piano xz, definito da

$$E = \{(x,z) : \; x^2 - 1 \leq z \leq (x-1)^2, \; 0 \leq x \leq 1\}.$$

(i) Si determini il volume di A.

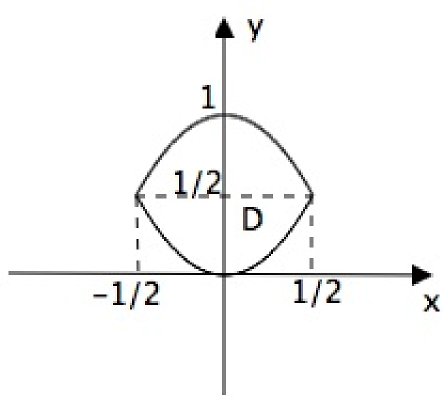
(ii) Si calcolino le coordinate del baricentro di A.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^1 in D. Cerchiamo i punti stazionari di f interni a D annullandone il gradiente: si ha $\nabla f = \mathbf{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} -8x^3 \, e^{-y} = 0 \\ e^{-y}(-y^2 + 2x^4 + 2y) = 0, \end{cases}$$

e questo sistema ha le soluzioni $(0,0)$ e $(0,2)$: la prima è sul bordo di D, quindi la ritroveremo analizzando la situazione sulla frontiera, la seconda è esterna a D e non ci interessa.



Vediamo la situazione sul bordo ∂D: ci sono due punti dove non esiste la retta tangente, e sono i punti ove $2x^2 = 1 - 2x^2$, vale a dire $x = \pm\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. In questi punti si ha

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}\, e^{-\frac{1}{2}}.$$

Sulla parte inferiore del bordo, cioè la curva $y = 2x^2$, $|x| < \frac{1}{2}$, si ha

$$f(x, 2x^2) = 3x^4\, e^{-2x^2}.$$

La derivata di questa funzione è $e^{-2x^2}(-12x^5 + 12x^3)$: essa si annulla per $x = 0$ e per $x = \pm 1$: nel primo caso, si ha $y = 0$ e abbiamo ritrovato l'origine, con

$$f(0, 0) = 0;$$

nel secondo caso, si ha $y = 2$ e i punti $(\pm 1, 2)$ sono fuori di D.
Sulla parte superiore del bordo, cioè la curva $y = 1 - 2x^2$, $|x| < \frac{1}{2}$, si ha

$$f(x, 1 - x^2) = e^{-1+2x^2}(1 - 4x^2 + 2x^4).$$

La derivata di questa funzione è $e^{-1+2x^2}(8x^5 - 8x^3 - 4x)$: essa si annulla per $x = 0$ e per $2x^4 - 2x^2 - 1 = 0$, ossia per $3x^4 - x^2 - 1 = 0$, cioè $x^2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (l'altra radice $x^2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ non va bene perché $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$). Si hanno così i punti $x = 0$ (dunque $y = 1$) e $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ (dunque $y = -\sqrt{3}$, e il punto è fuori di D). Risulta

$$f(0, 1) = e^{-1}.$$

In conclusione, confrontando i valori di f nei punti trovati, ricaviamo che

$$\max_D f = f(0, 1) = e^{-1}, \qquad \min_D f = f(0, 0) = 0.$$

Esercizio 2 Calcoliamo il volume di A: trattandosi di un insieme di rotazione intorno all'asse z, possiamo integrare per circonferenze, usando la ben nota formula

$$m_3(A) = 2\pi \int_E x\, dxdz.$$

Dunque

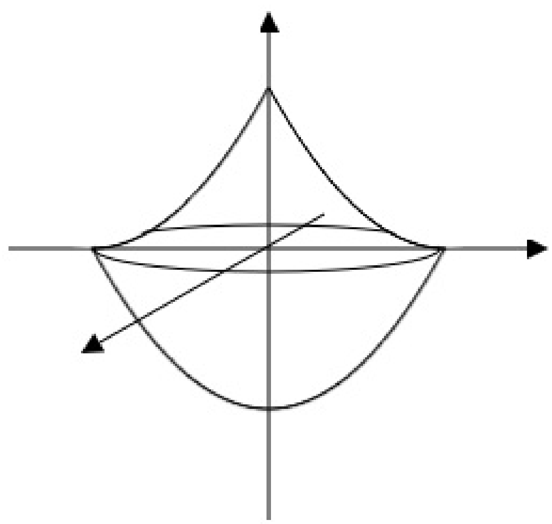
$$\begin{aligned} m_3(A) &= 2\pi \int_0^1 x \int_{x^2-1}^{(x-1)^2} dzdx = 2\pi \int_0^1 x\big((x-1)^2 - x^2 + 1\big)\, dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 x(2 - 2x)\, dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^2)\, dx = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\,\pi. \end{aligned}$$

Calcoliamo il baricentro $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ di A. Per ragioni di simmetria, si ha $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Quanto a $\overline{z}$, si ha

$$\overline{z} = \frac{1}{m_3(A)} \int_A z\, dxdydz;$$

descrivendo A in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = z, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad r^2 - 1 \le z \le (r-1)^2,$$



otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2-1}^{(r-1)^2} zr\, dz d\vartheta dr = 3 \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2-1}^{(r-1)^2} dr = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 r\big((r-1)^4 - (r^2-1)^2\big)\, dr = \frac{3}{2} \int_0^1 (-4r^4 + 6r^3 - 4r^2)\, dr = \\ &= \frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5} + \frac{8}{4} - \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2 - \frac{32}{15}\right) = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

In definitiva, il baricentro di A è il punto $\big(0, 0, -\frac{1}{5}\big)$.

Prova scritta del 4 luglio 2018

Esercizio 1 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione
$$f(x,y) = \frac{1}{6 + x^2 + y^2 - 4x + 2y}\,,$$
stabilendo se si tratta di massimo e di minimo.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale
$$\int_D |x|\, y\, dxdy,$$
ove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; -1 \le x \le 1,\; -1 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è ben definita e strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}^2$ perché si può scrivere nella forma
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{6 + (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1} = \\ &= \frac{1}{1 + (x-2)^2 + (y+1)^2} > 0\,. \end{aligned}$$
Cerchiamo i punti stazionari di f: si ha
$$f_x(x,y) = -\frac{2x-4}{(1 + (x-2)^2 + (y+1)^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = -\frac{2y+2}{(1 + (x-2)^2 + (y+1)^2)^2},$$
e dunque un punto (x,y) è stazionario se e solo se
$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y + 2 = 0, \end{cases}$$
vale a dire $(x,y) = (2,-1)$. Poiché, d'altra parte,
$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = 0,$$

il punto $(2,-1)$ è sicuramente di massimo assoluto, mentre il minimo di f non esiste, con

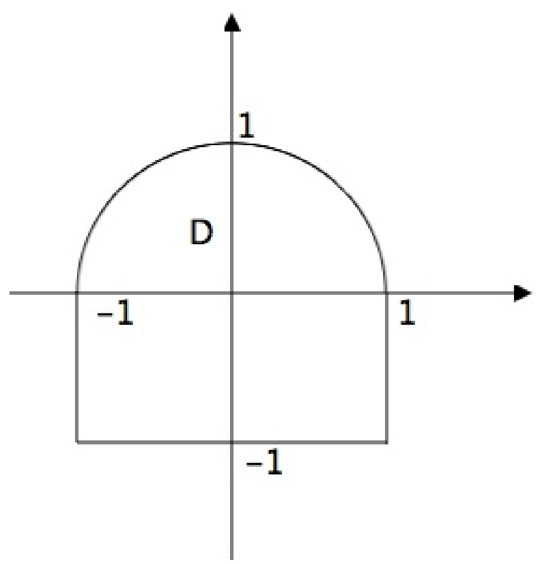
$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = f(2,-1) = 1, \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

Esercizio 2 L'insieme D è disegnato nella figura sottostante. Poiché esso è simmetrico rispetto all'asse y, possiamo scrivere

$$\int_D |x|\, y\, dxdy = 2\int_{D\cap\{x\geq 0\}} x\, y\, dxdy.$$

Essendo

$$D\cap\{x\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\},$$



si ha

$$\begin{aligned}\int_{D\cap\{x\geq 0\}} x\, y\, dxdy &= \int_0^1\int_{-1}^{\sqrt{1-x^2}} x\, y\, dy\, dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1-x^2-1\right] = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\, dx = -\frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D |x|\, y\, dxdy = 2\int_{D\cap\{x\geq 0\}} x\, y\, dxdy = -\frac{1}{4}\,.$$

Prova scritta del 18 settembre 2018

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = xy + \ln(1 + 2x^2 + 8y^2)$$

sull'insieme $E = [0,1] \times [0,1]$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_C zx^2(1 - y^2)\, dxdydz,$$

ove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 4, \ -1 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 4 - |y|\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è ben definita e di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$. Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E: deve essere

$$f_x(x,y) = y + \frac{4x}{1 + 2x^2 + 8y^2} = 0,$$
$$f_y(x,y) = x + \frac{16y}{1 + 2x^2 + 8y^2} = 0.$$

Una soluzione è $(0,0)$, punto stazionario nel quale $f(x,y) = 0$. Poi, la forma del sistema è tale che qualunque sua soluzione (x,y) deve avere entrambe le coordinate diverse da 0 e discordi in segno, e questo impedisce a tale punto di trovarsi in $[0,1] \times [0,1]$. Pertanto non ci sono altri punti stazionari interni ad E.
Vediamo adesso la situazione sulla frontiera del quadrato. I valori di f nei vertici sono

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = \ln 9, \quad f(1,0) = \ln 3, \quad f(1,1) = 1 + l \ln 11.$$

Consideriamo ora i quattro lati, che sono

$$]0,1[\, \times \{0\}, \quad \{1\} \times \,]0,1[\,, \quad]0,1[\, \times \{1\}, \quad \{0\} \times \,]0,1[\,.$$

Nel primo lato si ha

$$f(x,0) = \ln(1+2x^2), \qquad 0 < x < 1;$$

questa è una funzione crescente e quindi non troviamo punti stazionari vincolati.
Nel secondo lato si ha

$$f(1,y) = y + \ln(3+8y^2), \qquad 0 < y < 1;$$

anche qui c'è una funzione crescente e quindi non troviamo punti stazionari vincolati.
Nel terzo lato si ha

$$f(x,1) = x + \ln(9+2x^2), \qquad 0 < x < 1,$$

e pure in questo caso abbiamo una funzione crescente e quindi non troviamo punti stazionari vincolati.
Infine nel quarto lato si ha

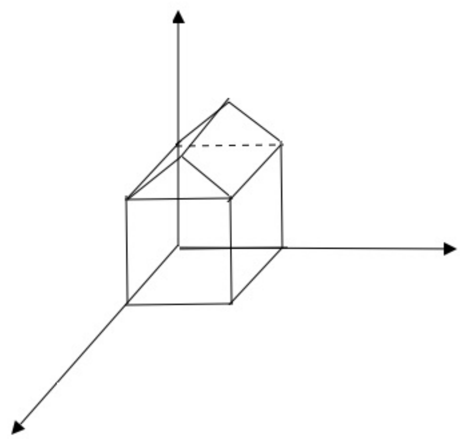
$$f(0,y) = ln(1+8y^2), \qquad 0 < y < 1,$$

e ancora una volta si tratta di una funzione crescente e quindi non troviamo punti stazionari vincolati.
Si conclude che non vi sono punti stazionari vincolati. Confrontando tutti i valori si conclude che

$$\min_E f = f(0,0) = 0,$$

$$\max_E f = f(1,1) = 1 + \ln 11 \equiv 3.397895.$$

Esercizio 2 L'insieme C è descritto nella figura sottostante.



Esso è normale rispetto al piano xy, e quindi l'integrale si calcola nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\int_C zx^2(1-y^2)\,dxdydz &= \int_0^4 x^2 \int_{-1}^1 (1-y^2) \int_0^{4-y^2} z\,dzdydx = \\
&= \frac{64}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-} 1^1(1-y^2)(4-|y|)^2\,dy.
\end{aligned}
$$

Dato che l'integrando è pari in y, e il dominio d'integrazione è simmetrico rispetto al piano $y=0$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_C zx^2(1-y^2)\,dxdydz &= \frac{64}{6}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-y^2)(4-|y|)^2\,dy = \\
&= \frac{64}{6}\cdot 2\int_0^1 (1-y^2)(4-y)^2\,dy = \\
&= \frac{64}{3}\int_0^1 (-y^4+8y^3-15y^2-8y+16)\,dy = \\
&= \frac{64}{3}\left(-\frac{1}{5}+2-5-4+16\right) = \\
&= \frac{64}{3}\cdot\frac{44}{5} = \frac{2816}{15}\,.
\end{aligned}
$$

Prova scritta del 16 novembre 2018

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$$

sull'insieme $E = [-2,2] \times [-1,1]$.

Esercizio 2 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(z\,e^x,\ y\,e^z,\ x\,e^y\big).$$

Data la superficie Σ definita da

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1,\ z = 1 - y^2\},$$

si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $b\Sigma$, orientata in modo da girare in verso antiorario rispetto alla direzione positiva dell'asse z.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è ben definita e di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$. Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E: deve essere

$$f_x(x,y) = 4x - y = 0,$$

$$f_y(x,y) = -x + 2y = 0.$$

L'unica soluzione è $(0,0)$, punto stazionario nel quale $f(0,0) = 0$.
Vediamo adesso la situazione sulla frontiera del rettangolo. I valori di f nei vertici sono

$$f(-2,1) = 11, \quad f(2,1) = 7, \quad f(-2,-1) = 7, \quad f(2,-1) = 11.$$

Consideriamo ora i quattro lati, che sono

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(2,y) :\ -1 < y < 1\}, \quad \Gamma_2 = \{(-2,y) :\ -1 < y < 1\}, \\ \Gamma_3 &== \{(x,1) :\ -2 < x < 2\}, \quad \Gamma_4 = \{(x,-1) :\ -2 < x < 2\},. \end{aligned}$$

Nel primo lato si ha

$$f(2,y) = 8 - 2y + y^2, \qquad -1 < y < 1;$$

la derivata è $-2+2y$, negativa in $]-1,1[$, quindi questa funzione è decrescente e pertanto non troviamo punti stazionari vincolati.
Nel secondo lato si ha

$$f(-2,y) = 8 + 2y + y^2, \qquad -1 < y < 1;$$

la derivata è $2+2y$, positiva in $]-1,1[$, quindi questa funzione è crescente e pertanto non troviamo punti stazionari vincolati.
Nel terzo lato si ha

$$f(x,1) = 2x^2 - x + 1, \qquad -2 < x < -2;$$

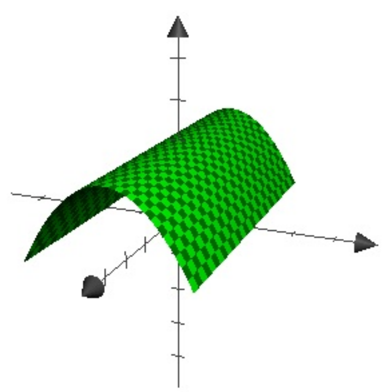
la derivata è $4x-1$, nulla per $x = \frac{1}{4}$: nel punto stazionario vincolato $(\frac{1}{4},1)$ si ha $f(\frac{1}{4},1) = \frac{7}{8}$.
Infine nel quarto lato si ha

$$f(x,-1) = 2x^2 + x + 1, \qquad -2 < x < 2,$$

la derivata è $4x+1$, nulla per $x = -\frac{1}{4}$: nel punto stazionario vincolato $(-\frac{1}{4},1)$ si ha $f(-\frac{1}{4},1) = \frac{11}{8}$.
Confrontando tutti i valori si conclude che

$$\min_E f = f(0,0) = 0, \qquad \max_E f = f(-2,1) = f(2,-1) = 11.$$

Esercizio 2 La superficie Σ è descritta nella figura sottostante.



Il bordo $b\Sigma$ è costituito da quattro curve:

$$\Gamma_1 : \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = y \\ z = 1 - y^2, \end{cases} \qquad y \in [-1,1], \qquad \boldsymbol{\tau} = (0,1,-2y);$$

$$-\Gamma_2: \quad \begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = 0, \end{cases} \qquad x \in [-2,2], \qquad \boldsymbol{\tau} = (1,0,0);$$

$$-\Gamma_3: \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = y \\ z = 1 - y^2, \end{cases} \qquad y \in [-1,1], \qquad \boldsymbol{\tau} = (0,1,-2y);$$

$$\Gamma_4: \quad \begin{cases} x = x \\ y = -1 \\ z = 0, \end{cases} \qquad x \in [-2,2], \qquad \boldsymbol{\tau} = (1,0,0).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds &= \int_{b\Sigma} (z\, e^x \, \tau_1 + y\, e^z \, \tau_2 + x\, e^y \, \tau_3) \, ds = \\
&= \int_{-1}^{1} \Big((1-y^2)e^{-2} \cdot 0 + y\, e^{1-y^2} \cdot 1 + 2e^y(-2y) \Big) \, dy + \int_{-2}^{2} 0 \, dx - \\
&- \int_{-1}^{1} \Big((1-y^2)e^{2} \cdot 0 + y\, e^{1-y^2} \cdot 1 - 2e^y(-2y) \Big) \, dy - \int_{-2}^{2} 0 \, dx = \\
&= 0 + 4 \int_{-1}^{1} y\, e^y \, dy + 0 + 4 \int_{-1}^{1} y\, e^y \, dy = 8 \left[y\, e^y - e^y \right]_{-1}^{1} = 16\, e^{-1}.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 9 gennaio 2019

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x^2 + xy) \sin y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si determini l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, \pi, f(1,\pi))$.

(ii) Si trovino il massimo ed il minimo di f sull'insieme

$$Q = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, ds,$$

ove Γ è la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \frac{1}{\vartheta + 1}, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 4\pi.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è di classe C^∞ e nel punto $(1, \pi)$ risulta $f(1, \pi) = 0$. Per scrivere l'equazione richiesta dobbiamo calcolare il gradiente di f:

$$f_x(x, y) = (2x + y) \sin y, \qquad f_y(x, y) = x \sin y + (x^2 + xy) \cos y;$$

in particolare

$$f_x(1, \pi) = 0, \qquad f_y(1, \pi) = -(1 + \pi).$$

Pertanto l'equazione del piano tangente nel punto $(1, \pi, 0)$ è

$$z = -(1 + \pi)(y - \pi).$$

(ii) I punti stazionari di f interni a Q sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (2x + y) \sin y = 0 \\ x \sin y + (x^2 + xy) \cos y = 0, \end{cases} \qquad (x, y) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Nella prima equazione il fattore $\sin y$ è non nullo; quindi essa si riduce a $y + 2x = 0$, ossia $x = -\frac{y}{2}$. Inserendo questo valore nella seconda equazione, quest'ultima diventa $-\frac{y}{2} \sin y - \frac{y^2}{4} \cos y = 0$ e non ha soluzioni: infatti entrambi i suoi due addendi sono negativi, essendo y, $\sin y$ e $\cos y$ positivi. Dunque non vi sono punti stazionari interni a Q.
Nei quattro vertici si ha

$$f(0, 0) = 0, \quad f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Vediamo cosa succede sui quattro segmenti che formano i lati di Q.

- Lato ovest: si ha $x = 0$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$, da cui $f(0, y) = 0$ e tutti i punti di questo intervallo sono stazionari vincolati.

- Lato sud: si ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $y = 0$, da cui $f(x, 0) = 0$ e tutti i punti di questo intervallo sono stazionari vincolati.

- Lato est: si ha $x = \frac{\pi}{2}$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$, da cui

$$h(y) := f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\, y\right) \sin y;$$

  risulta

$$h'(y) = \frac{\pi}{2} \sin y + \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\, y\right) \cos y > 0,$$

  dunque non ci sono punti stazionari vincolati in questo intervallo.

- Lato nord: si ha $0 < x < \frac{pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$, da cui

$$k(x) := f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = x^2 + \frac{\pi}{2}\, x;$$

  risulta

$$k'(x) = 2x + \frac{\pi}{2} > 0,$$

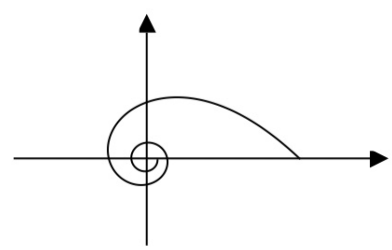
  dunque non ci sono punti stazionari vincolati in questo intervallo.

In definitiva

$$\max_Q f = \frac{\pi^2}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =, \quad \min_Q f = 0 = f(0, y) = f(x, 0) \;\; \forall x, y \in [0, 1].$$

Esercizio 2 La curva Γ è una spirale che si avvolge con due giri intorno all'origine. Essa si descrive così:

$$x = \frac{\cos\vartheta}{\vartheta + 1}, \quad y = \frac{\sin\vartheta}{\vartheta + 1}, \qquad 0 \le \vartheta \le 4\pi.$$



Utilizzando le relazioni $r^2 = \frac{1}{(\vartheta+1)^2}$ e $ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\vartheta$, risulta

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, ds &= \int_0^{4\pi} (\vartheta+1)^3 \sqrt{\frac{1}{(\vartheta+1)^2} + \frac{1}{(\vartheta+1)^4}}\, d\vartheta = \\
&= \int_0^{4\pi} (\vartheta+1)\sqrt{1 + (\vartheta+1)^2}\, d\vartheta = \\
&= \left[\frac{1}{3}\left(1 + (\vartheta+1)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\pi} = \frac{1}{3}\left[\left(1 + (1+4\pi)^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Prova scritta del 4 febbraio 2019

Esercizio 1 (i) Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}(2x-y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Verificare che

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

(iii) Calcolare, se esistono,

$$\max_{\mathbb{R}^2} f, \qquad \min_{\mathbb{R}^2} f.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma \sqrt{5-4z^2}\, d\boldsymbol{\sigma},$$

ove Σ è definita da

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1,\ z = 1-y^2\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. Cerchiamone i punti stazionari: si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-x^2-2y^2}\big(-2x(2x-y)+2\big) \\ f_y(x,y) = e^{-x^2-2y^2}\big(-4y(2x-y)-1\big); \end{cases}$$

dunque

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -2x(2x-y)+2 = 0 \\ -4y(2x-y)-1 = 0. \end{cases}$$

Isoliamo il fattore comune alle 2 equazioni: osservato che né x, né y possono essere nulli, si ha

$$2x - y = \frac{1}{x} = -\frac{1}{4y}.$$

Perciò

$$y = -\frac{x}{4}\,,$$

e di conseguenza

$$2x - y = 2x + \frac{x}{4} = \frac{1}{x}\,,$$

da cui, facilmente

$$x^2 = \frac{4}{9}\,,$$

ovvero

$$x = \pm\frac{2}{3}, \qquad y = -\frac{x}{4} = \mp\frac{1}{6}\,.$$

Si hanno così i due punti stazionari

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right), \qquad \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right),$$

nei quali

$$f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}, \qquad f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}.$$

Poiché non si richiede di stabilire la natura di questi punti stazionari, non occorre calcolare la matrice Hessiana nei due punti.

(ii) Per $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, la f presenta un'esponenziale che tende a 0, moltiplicata per un polinomio di primo grado che invece diverge. Tuttavia, essendo

$$e^{-x^2-2y^2} \le e^{-x^2-y^2}, \qquad 2|x| \le 2\sqrt{x^2+y^2}, \qquad |y| \le \sqrt{x^2+y^2},$$

si ha

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) \le \lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-x^2-y^2}\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right) = \lim_{t\to\infty} 3t\,e^{-t^2} = 0.$$

(iii) La funzione f assume valori sia positivi che negativi: infatti

$$f(0,y) < 0 \quad \text{se } y > 0, \qquad f(0,y) > 0 \quad \text{se } y < 0;$$

dunque f deve avere massimo positivo e minimo negativo, e questi devono essere assunti in due punti stazionari (perché andando all'infinito in qualunque direzione la funzione tende a 0). Gli unici due punti stazionari sono quelli scritti sopra: essendo

$$f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}>0,\qquad f\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}<0,$$

si conclude che

$$\min_{\mathbb{R}^2} f=f\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}},\qquad \max_{\mathbb{R}^2} f=f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 2 La superficie è cartesiana: è il grafico della funzione

$$g(x,y)=1-y^2,\qquad (x,y)\in[-2,2]\times[-1,1].$$

Quindi l'elemento di superficie $d\boldsymbol{\sigma}$ su Σ è dato da

$$d\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{1+|\boldsymbol{\nabla} g(x,y)|^2}\,dxdy=\sqrt{1+4y^2}\,dxdy.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sqrt{5-4z^2}\,d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{5-4(1-y^2)}\sqrt{1+4y^2}\,dxdy=\\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}(1+4y^2)\,dxdy=\\ &= 4\int_{-1}^{1}(1+4y^2)\,dy=\\ &= 8\int_{0}^{1}(1+4y^2)\,dy=\frac{56}{3}\,.\end{aligned}$$

Prova scritta del 29 aprile 2019

Esercizio 1 Si trovino il valore massimo ed il valore minimo della funzione

$$f(x,y)=(x^2+y)e^{-2xy}$$

nel quadrato $Q=[-1,1]\times[-1,1]$.

Esercizio 2 Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F})x,y)=\big(\sin(y-x),\cos(y+x)\big)$$

lungo la curva costituita dai lati del triangolo T di vertici $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, orientata in verso antiorario.

Risoluzione

Esercizio 1 Cerchiamo i punti stazionari interni: deve essere

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-2xy}\big(2x - 2y(x^2+y)\big) = 0 \\ f_y(x,y) = e^{-2xy}\big(1 - 2x(x^2+y)\big) = 0. \end{cases}$$

Non può essere $x = 0$ in virtù della seconda equazione; non può essere $y = 0$ perché dalla prima equazione seguirebbe $x = 0$. Isolando il fattore $x^2 + y$, comune alle due equazioni, si trova

$$x^2 + y = \frac{x}{y} = \frac{1}{2x},$$

da cui $y = 2x^2$ e, dalla seconda equazione del sistema,

$$1 = 2x(x^2 + 2x^2) = 6x^3.$$

Ner segue

$$x = \frac{1}{6^{1/3}}, \quad y = \frac{2}{6^{2/3}}.$$

In tale punto risulta

$$f\left(\frac{1}{6^{1/3}}, \frac{2}{6^{2/3}}\right) = \frac{3}{6^{2/3}}\, e^{-2/3}.$$

Vediamo la situazione sul bordo di Q. Nei quattro vertici si ha

$$f(-1,-1) = 0, \quad f(1,-1) = 0, \quad f(1,1) = 2e^{-2}, \quad f(-1,1) = 2e^2.$$

Rimangono i quattro lati:

$$\Gamma_1 = \{(x,-1) : \ -1 < x < 1\}, \quad \Gamma_2 = \{(1,y) : \ -1 < y < 1\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x,1) : \ -1 < x < 1\}, \quad \Gamma_4 = \{(-1,y) : \ -1 < y < 1\}.$$

Lungo Γ_1 si ha $f(x,-1) = (x^2-1)e^{2x}$, la derivata vale $e^{2x}(2x^2+2x-2)$ e nell'intervallo si annulla solo per $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dove si ha

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1\right) = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, e^{\sqrt{5}-1}.$$

Lungo Γ_2 si ha $f(1,y) = (1+y)e^{-2y}$, la derivata vale $e^{-2y}(-2y-1)$ e nell'intervallo si annulla solo per $y = -\frac{1}{2}$, dove si ha

$$f\left(1, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}.$$

Lungo Γ_3 si ha $f(x,1) = (x^2+1)e^{-2x}$, la derivata vale $e^{-2x}(-2x^2+2x-2)$ e nell'intervallo non si annulla mai. Lungo Γ_4 si ha $f(-1,y) = (1+y)e^{2y}$, la derivata vale $e^{2y}(2y+3)$ e nell'intervallo non si annulla mai. In conclusione,

$$\begin{aligned} \max_Q f &= \max\left\{\frac{3}{6^{2/3}}\,e^{-2/3}, 0, 2e^{-2}, 2e^2, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,e^{\sqrt{5}-1}, -\frac{e}{2}\right\} = \\ &= 2e^2, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \min_Q f &= \min\left\{\frac{3}{6^{2/3}}\,e^{-2/3}, 0, 2e^{-2}, 2e^2, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,e^{\sqrt{5}-1}, -\frac{e}{2}\right\} = \\ &= -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,e^{\sqrt{5}-1} : \end{aligned}$$

infatti

$$\begin{aligned} -\frac{e}{2} > -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,e^{\sqrt{5}-1} \quad &\iff \quad \frac{e}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,e^{\sqrt{5}-1} \quad \iff \\ &\iff \quad e^{2-\sqrt{5}} < \sqrt{5}-1, \end{aligned}$$

e questo è vero, dato che $e^{2-\sqrt{5}} < 1 < \sqrt{5}-1$.

Esercizio 2 Dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+\partial T} \big[\sin(y-x)\,dx + \cos(y+x)\,dy\big],$$

ove $+\partial T$ denota il verso positivo, ossia antiorario, di ∂T. Si tratta di fare l'integrale su ciascuno dei tre lati.
Il primo lato, Γ_1, unisce $(0,0)$ a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e si parametrizza come

$$x = t, \quad y = 0, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e il verso della parametrizzazione è quello giusto.
Il secondo lato, Γ_2, unisce $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e si parametrizza come

$$x = t, \quad y = \frac{\pi}{2} - t, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e il verso della parametrizzazione è quello sbagliato.
Il terzo lato, Γ_3, unisce $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $(0, 0)$ e si parametrizza come

$$x = 0, \quad y = t, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e il verso della parametrizzazione è quello sbagliato.
Pertanto

$$\int_{+\Gamma_1} \left[\sin(y - x)\, dx + \cos(y + x)\, dy\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(-t)\, dt = -1;$$

$$\int_{+\Gamma_2} \left[\sin(y - x)\, dx + \cos(y + x)\, dy\right] = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\, dt = 0;$$

$$\int_{+\Gamma_3} \left[\sin(y - x)\, dx + \cos(y + x)\, dy\right] = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = -1.$$

In definitiva

$$\int_{+\partial T} \left[\sin(y - x)\, dx + \cos(y + x)\, dy\right] = -1 + 0 - 1 = -2.$$

Si poteva anche fare uso del teorema di Gauss-Green, in virtù del quale risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{+\partial T} \left[\sin(y - x)\, dx + \cos(y + x)\, dy\right] = \\
&\quad = \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\cos(y + x) - \frac{\partial}{\partial y}\sin(y - x)\right] dxdy = \\
&\quad = \int_T \left[-\sin(y + x) - \cos(y - x)\right] dxdy = \\
&\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \left[-\sin(y + x) - \cos(y - x)\right] dy\right] dx = \\
&\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(y + x) - \sin(y - x)\right]_0^{\frac{\pi}{2} - x} dx = \\
&\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin(-x)\right] dx = \\
&\quad = -\sin\frac{\pi}{2} + 0 - \cos 0 = -2.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 7 giugno 2019

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Trovare i massimi ed i minimi relativi di f, e determinare

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f, \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'area della superficie Σ ottenuta ruotando il grafico

$$z = 1 - x^2, \qquad 0 \le x \le 1,$$

attorno all'asse z.

Risoluzione

Esercizio 1 Cerchiamo i punti stazionari di f. Risulta

$$f_x(x,y) = 4x^3 - y, \qquad f_y(x,y) = 4y^3 - x,$$

e quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0. \end{cases}$$

Si ha $x = 4y^3 = 4(4x^3)^3 = 256x^9$, da cui $x = 0$ oppure $256x^8 = 1$, che implica $x^8 = 2^{-8}$, ovvero $x = \pm\frac{1}{2}$. Essendo $y = 4x^3$, si ottengono i punti stazionari

$$(0,0), \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana $\mathbf{H}_f$: essendo

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1, \qquad f_{yy}(x,y) = 12y^2,$$

si ha

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f(0,0) = -1 < 0,$$

dunque $(0,0)$ è punto di sella. Poi,

$$\mathbf{H}_f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathbf{H}_f > 0,$$

dunque i punti $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ sono di minimo relativo, con

$$f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}.$$

Calcoliamo l'estremo superiore di f: già lungo la retta $y=0$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0)=\lim_{x\to\infty} x^4=+\infty,$$

da cui

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty.$$

Calcoliamo l'estremo inferiore di f: osserviamo che

$$f(x,y)=x^4+y^4-xy\geq x^4+y^4-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\left(y^2-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16},$$

Dunque

$$f(x,y)\geq -\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=-\frac{1}{8} \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

il che mostra che

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f\geq -\frac{1}{8}.$$

Ma nei due punti di minimo relativo la f vale proprio $-\frac{1}{8}$, e quindi si conclude si tratta di punti di minimo assoluto:

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f=\min_{\mathbb{R}^2} f=f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}.$$

Esercizio 2 La superficie Σ è una superficie di rotazione e si parametrizza come segue:

$$\boldsymbol{\sigma}(r,\vartheta):\begin{cases} x=r\cos\vartheta \\ y=r\sin\vartheta \\ z=1-r^2, \end{cases} \qquad r\in[0,1], \quad \vartheta\in[0,2\pi].$$

Dunque la matrice $\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}$ è

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ -2r & 0 \end{pmatrix},$$

e si ha

$$E = |\boldsymbol{\sigma}_r|_3^2 = 1 + 4r^2, \quad G = |\boldsymbol{\sigma}_\vartheta|_3^2 = r^2, \quad F = \langle \boldsymbol{\sigma}_r, \boldsymbol{\sigma}_\vartheta \rangle_3 = 0.$$

Dunque l'area richiesta è data da

$$a(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{EG - F^2}\, dr d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr d\vartheta,$$

e posto $r^2 = s$ si ha $2r\,dr = ds$ e quindi

$$\begin{aligned} a(\Sigma) &= \pi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr = \pi\int_0^1 \sqrt{1+4s}\, ds = \\ &= \frac{\pi}{6}\left[(1+4s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right). \end{aligned}$$

Prova scritta del 5 luglio 2019

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \ln(2 + x^2y^2 - x^2 - y^2), \qquad (x,y) \in D.$$

ove D è il disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Determinare il massimo ed il minimo di f su D.

Esercizio 2 Si consideri la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sqrt{3}\,t, \qquad t \in]0, 2\pi].$$

(i) Si determini la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, -x^2, z^2)$$

lungo la curva Γ.

Risoluzione

Esercizio 1 Cerchiamo i punti stazionari di f interni a D. Risulta

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^2 - 2x}{2 + x^2y^2 - x^2 - y^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{2yx^2 - 2y}{2 + x^2y^2 - x^2 - y^2},$$

e quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x(y^2 - 1) = 0 \\ 2y(x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$ la prima equazione è risolta e dalla seconda segue subito $y = 0$. Se $x \neq 0$, la prima equazione dà $y = \pm 1$ e dalla seconda segue subito $x^2 = 1$, cioè $x = \pm 1$. Si ottengono così i punti stazionari

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (-1,-1), \quad (1,-1), \quad (-1,1),$$

e di questi solo $(0,0)$ è interno a D, mentre gli altri stanno tutti fuori di D e non ci interessano. Risulta

$$f(0,0) = \ln 2.$$

Analizziamo la situazione sulla frontiera di D, che è descritta dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori, dobbiamo considerare la funzione

$$H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

e annullarne il gradiente: si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{2xy^2 - 2x}{2 + x^2y^2 - x^2 - y^2} + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{2yx^2 - 2y}{2 + x^2y^2 - x^2 - y^2} + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Sostituendo la terza equazione nelle altre due si ricava

$$\begin{cases} 2x\left(\dfrac{y^2 - 1}{1 + x^2y^2} + \lambda\right) = 0 \\ 2y\left(\dfrac{x^2 - 1}{1 + x^2y^2} + \lambda\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Se $x = 0$, la prima equazione è risolta, la terza equazione dà $y = \pm 1$ e la seconda fornisce $\lambda = 1$. Similmente, se $y = 0$, la seconda equazione è risolta, la terza equazione dà $x = \pm 1$ e la prima fornisce $\lambda = 1$. Se invece x e y sono diversi da 0 si ha dalle prime due equazioni

$$\lambda = \frac{y^2 - 1}{1 + x^2 y^2} = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2 y^2},$$

da cui $x^2 = y^2$; la terza equazione ci dice che $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Dunque si hanno i seguenti punti stazionari vincolati:

$$(0,1), \qquad (0,-1), \qquad (1,0), \qquad (-1,0),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In tali punti risulta

$$f(0,1) = f(0,-1) = f(1,0) = f(-1,0) = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\frac{3}{4}.$$

Confrontando tutti i valori trovati, si conclude che

$$\min_D f = 0, \qquad \max_D f = \ln 2.$$

Esercizio 2 Poiché

$$x'(t) = -\sin t, \quad y' = \cos t, \quad z'(t) = \sqrt{3},$$

si ha

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi.$$

Per quanto riguarda il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo Γ, occorre calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds,$$

ove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a Γ, orientato secondo il verso delle t crescenti: dunque

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}\left(-\sin t, \cos t, \sqrt{3}\right).$$

Dato che il fattore $\frac{1}{2}$ è cancellato dal fattore moltiplicativo 2 del ds, si ha semplicemente

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t - \cos^3 t + 3\sqrt{3}\, t^2) \, dt.$$

Osservato che, per disparità dell'integrando,

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 t \, dt = 0,$$

mentre, per periodicità e simmetria dell'integrando,

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t \, dt == \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 t \, dt = 0,$$

otteniamo finalmente

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{3}\, t^2 \, dt = \sqrt{3} \left[t^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{8}{\sqrt{3}} \, \pi^3.$$

Prova scritta del 13 settembre 2019

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 y - xy^2$$

nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Esercizio 2 Si consideri la curva piana $\boldsymbol{\gamma}$ definita da

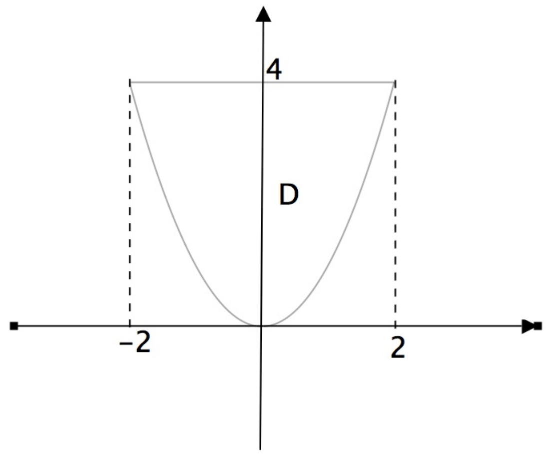
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}(2t-1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} & \text{se } \; \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 - \frac{2}{3}t \end{pmatrix} & \text{se } \; 1 < t \leq \dfrac{3}{2} \, . \end{cases}$$

(i) Si calcoli la lunghezza di $\boldsymbol{\gamma}$;

(ii) Si calcoli l'area della regione piana A delimitata da $\boldsymbol{\gamma}$.

Risoluzione

Esercizio 1 La regione D è descritta nella figura sottostante.



Cerchiamo i punti stazionari interni di f: essendo

$$f_x(x,y) = 4xy - y^2, \qquad f_y(x,y) = 2x^2 - 2xy,$$

tali punti saranno le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4xy - y^2 = 0 \\ 2x^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y(4x - y) = 0 \\ x(2x - 2y) = 0, \end{cases}$$

Dunque $(x,y) = (0,0)$, oppure x e y sono entrambi diversi da 0, ma in tal caso $x = y/4 = y$, il che non fornisce alcuna soluzione.
Nell'unico punto stazionario interno si ha

$$f(0,0) = 0.$$

Consideriamo il bordo di D: intanto vi sono i due punti singolari $(2,4)$ e $-2,4)$, ove non vi è retta tangente: risulta

$$f(2,4) = 0, \qquad f(-2,4) = 64.$$

Lungo il tratto rettilineo del bordo, che è descritto dalla condizione $y = 4$, si ha

$$g(x) := f(x,4) = 8x^2 - 16x, \qquad -2 < x < 2,$$

e siccome $g'(x) = 16x - 16 = 0$ se e solo se $x = 1$, si trova il punto stazionario vincolato $(1,4)$, nel quale
$$f(1,4) = -8.$$
Lungo il tratto curvo del bordo, descritto dalla condizione $y = x^2$, si ha
$$h(x) := f(x,x^2) = 2x^4 - x^5, \qquad -2 < x < 2,$$
ed essendo $h'(x) = 8x^3 - 5x^4 = x^3(8-5x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = 8/5$, si hanno i due punti stazionari vincolati $(0,0)$ e $(8/5, 64/25)$, nei quali risulta
$$f(0,0) = 0, \qquad f\left(\frac{8}{5}, \frac{64}{25}\right) = -\frac{6576}{3225}.$$
Confrontando i valori trovati, si ricava
$$\max_D f = f(-2,4) = 64, \qquad \min_D f = f(1,4) = -8.$$

Esercizio 2 Facciamo preliminarmente alcune osservazioni non richieste dall'esercizio. La curva $\boldsymbol{\gamma}$ è definita sull'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ed è continua, in quanto nell'unico punto dubbio, che è quello di parametro 1, si ha
$$\lim_{t\to 1^-} \boldsymbol{\gamma}(t) = \lim_{t\to 1^-} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}(2t-1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}(1),$$
$$\lim_{t\to 1^+} \boldsymbol{\gamma}(t) = \lim_{t\to 1^+} \begin{pmatrix} 2-t \\ 1-\frac{2}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}(1).$$
Poi, la curva è chiusa poiché
$$\boldsymbol{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{3}{2}\right),$$
ed è regolare a tratti: infatti
$$\exists\, \boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ (2t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[,$$
$$\exists\, \boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \left]1, \frac{3}{2}\right];$$

inoltre per $t \to 1$ risulta

$$\lim_{t\to 1^-} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t\to 1^-} \begin{pmatrix} 1 \\ (2t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

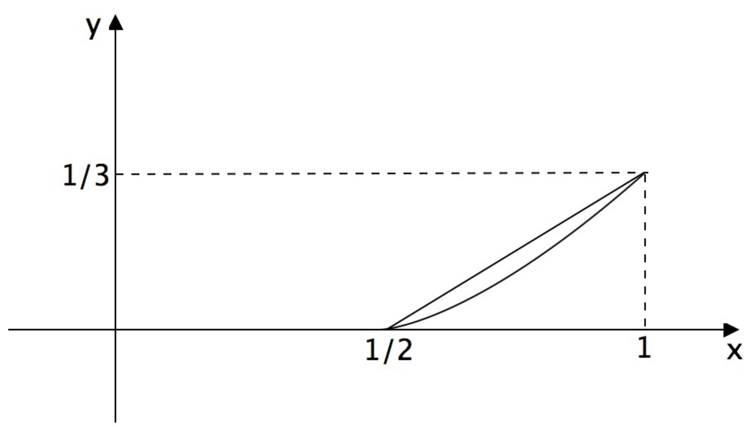
$$\lim_{t\to 1^+} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t\to 1^+} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

cosicché $\boldsymbol{\gamma}'(1)$ non esiste.
Similmente, nel punto $(1/2, 0) = \boldsymbol{\gamma}(\frac{1}{2}) = \boldsymbol{\gamma}(\frac{3}{2})$ si ha

$$\lim_{t\to \frac{1}{2}^+} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t\to \frac{1}{2}^+} \begin{pmatrix} 1 \\ (2t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t\to \frac{3}{2}^-} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t\to \frac{3}{2}^-} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

cosicché in tale punto non vi è retta tangente.
La curva $\boldsymbol{\gamma}$ è descritta nella figura sottostante.



(i) La lunghezza di $\boldsymbol{\gamma}$ è data dall'integrale

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\gamma}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\boldsymbol{\gamma}'(t)|_2 \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + (2t-1)} \, dt + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{4}{9}} \, dt = \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \, t^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{1}{2} \, \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{4\sqrt{2} - 2 + \sqrt{13}}{6} \, . \end{aligned}$$

(ii) L'area della regione chiusa A la cui frontiera è $\boldsymbol{\gamma}$ può essere calcolata in diversi modi. Se utilizziamo le formule di Gauss-Green con $f(x,y)=y$, si ha

$$m_2(A) = \int_{-\partial A} y\,dx = -\int_{+\partial A} y\,dx,$$

e l'orientazione positiva di ∂A coincide con l'orientazione positiva di $\boldsymbol{\gamma}$. Ne segue, essendo $dx = dt$ in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e $dx = -dt$ in $\left[1, \frac{3}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} m_2(A) &= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3}(2t-1)^{\frac{3}{2}}\,dt + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3}t\right) dt = \\ &= -\frac{1}{15}\left[(2t-1)^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left[t^2\right]_{1}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{15} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{60}\,. \end{aligned}$$

Un modo più semplice consiste nell'osservare la figura e notare che A è la regione delimitata da due funzioni della x, con $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$: al di sotto vi è la funzione $a(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}$, mentre al di sopra vi è la funzione rettilinea $b(x)$ che unisce i punti $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, e che è data dall'equazione $3y - x + 1 = 0$, ossia $b(x) = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}$. Si ha dunque, semplicemente,

$$\begin{aligned} m_2(A) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (b(x) - a(x))\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{3}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{15}(2x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}\,. \end{aligned}$$

Prova scritta dell'8 gennaio 2020

Esercizio 1 Si consideri la curva piana $\boldsymbol{\gamma}$ definita da

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}(2t-1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} & \text{se } \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 - \frac{2}{3}t \end{pmatrix} & \text{se } 1 < t \le \dfrac{3}{2}\,. \end{cases}$$

Si calcoli la lunghezza di $\boldsymbol{\gamma}$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale triplo

$$\int_E e^{x-y}\,dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1-x\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Facciamo preliminarmente alcune osservazioni non richieste dall'esercizio. La curva $\boldsymbol{\gamma}$ è definita sull'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ed è continua, in quanto nell'unico punto dubbio, che è quello di parametro 1, si ha

$$\lim_{t\to 1^-} \boldsymbol{\gamma}(t) = \lim_{t\to 1^-} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}(2t-1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}(1),$$

$$\lim_{t\to 1^+} \boldsymbol{\gamma}(t) = \lim_{t\to 1^+} \begin{pmatrix} 2-t \\ 1-\frac{2}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}(1).$$

Poi, la curva è chiusa poiché

$$\boldsymbol{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{3}{2}\right),$$

ed è regolare a tratti: infatti

$$\exists\, \boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ (2t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\,,$$

$$\exists\, \boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \left]1, \frac{3}{2}\right];$$

inoltre per $t \to 1$ risulta

$$\lim_{t\to 1^-} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t\to 1^-} \begin{pmatrix} 1 \\ (2t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

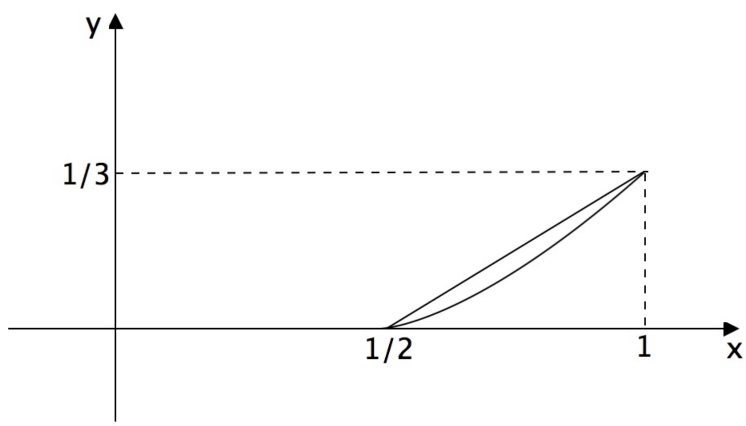
$$\lim_{t\to 1^+} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t\to 1^+} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

cosicché $\boldsymbol{\gamma}'(1)$ non esiste e in tale punto non vi è retta tangente.
Similmente, nel punto $(1/2, 0) = \boldsymbol{\gamma}(\frac{1}{2}) = \boldsymbol{\gamma}(\frac{3}{2})$ si ha

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}^+} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t \to \frac{1}{2}^+} \begin{pmatrix} 1 \\ (2t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t \to \frac{3}{2}^-} \boldsymbol{\gamma}'(t) = \lim_{t \to \frac{3}{2}^-} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

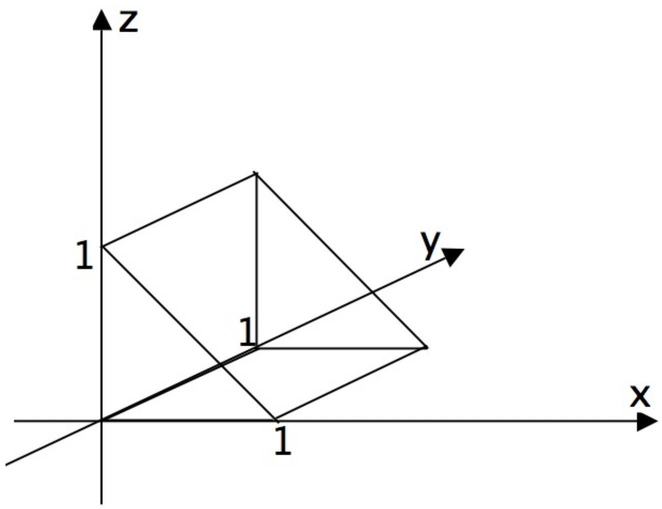
cosicché in tale punto non vi è retta tangente.
La curva $\boldsymbol{\gamma}$ è descritta nella figura sottostante.



(i) La lunghezza di $\boldsymbol{\gamma}$ è data dall'integrale

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\gamma}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\boldsymbol{\gamma}'(t)|_2 \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + (2t-1)} \, dt + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{4}{9}} \, dt = \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \, t^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{4\sqrt{2} - 2 + \sqrt{13}}{6} \, . \end{aligned}$$

Esercizio 2 L'insieme E è descritto nella figura sottostante.



L'integrale si calcola in modo standard:

$$\begin{aligned}
\int_E e^{x-y}\,dxdydz &= \int_0^1\int_0^1\int_0^{1-x} e^{x-y}\,dzdydx = \\
&= \int_0^1\int_0^1 (1-x)\,e^{x-y}\,dydx = \\
&= \int_0^1 (1-x)\,e^{x}\int_0^1 e^{-y}\,dy\,dx = \\
&= \int_0^1 (1-x)\,e^{x}\,dx\,(1-e^{-1}) = \\
&= \left[e^x - x\,e^x + e^x\right]_0^1 (1-e^{-1}) = \\
&= (e-e+e-1-1)(1-e^{-1}) = (e-2)(1-e^{-1}).
\end{aligned}$$

Prova scritta del 10 febbraio 2020

Esercizio 1 Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = y^2 + y\,e^{-x^2}$$

nel rettangolo R di vertici $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ e $(-2,1)$.

Esercizio 2 Data la curva piana $\boldsymbol{\gamma}$ definita in coordinate polari dalla relazione

$$r = \vartheta(2\pi - \vartheta), \qquad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

si determini:

(i) l'equazione della retta tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ nel punto $\left(0, \frac{3\pi^2}{4}\right)$;

(ii) l'area della regione piana delimitata da $\boldsymbol{\gamma}$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞ ed è pari rispetto alla variablie x. Cerchiamone i punti stazionari interni al rettangolo R: deve essere

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2xy\, e^{-x^2} = 0 \\ f_y(x,y) = 2y + e^{-x^2} = 0, \end{cases}$$

e ciò implica $y \neq 0$, da cui $x = 0$ e di conseguenza $y = -\frac{1}{2}$. Nel punto $(0, -\frac{1}{2})$ si ha

$$f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Vediamo cosa succede sulla frontiera del rettangolo. Nei vertici risulta

$$f(-2,-1) = f(2,-1) = 1 - e^{-4}, \qquad f(2,1) = f(-2,1) = 1 + e^{-4}.$$

Lungo i quattro lati si ha:

- Nel lato orizzontale in basso, in cui $y = -1$, si ha

  $$f(x,-1) = 1 - e^{-x^2},$$

  e la derivata si annulla in $x = 0$, con

  $$f(0,-1) = 0.$$

- Nel lato orizzontale in alto, in cui $y = 1$, si ha

  $$f(x,1) = 1 + e^{-x^2}$$

  e la derivata si annulla in $x = 0$, con

  $$f(0,1) = 2.$$

- Nei due lati verticali, in cui $x = \pm 2$, si ha

$$f(\pm 2, y) = y^2 - y\, e^{-4}$$

e la derivata si annulla in $y = -\frac{1}{2}\, e^{-4}$, con

$$f\left(\pm 2, -\frac{1}{2}\, e^{-4}\right) = -\frac{1}{4}\, e^{-8}.$$

Da un confronto di tutti i valori trovati si conclude che

$$\min_R f = -\frac{1}{4}, \qquad \max_R f = 2.$$

Esercizio 2 (i) La curva $\boldsymbol{\gamma}$ è descritta da

$$x(\vartheta) = \vartheta(2\pi - \vartheta)\cos\vartheta, \quad y(\vartheta) = \vartheta(2\pi - \vartheta)\sin\vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Dunque

$$\begin{cases} x'(\vartheta) = (2\pi - 2\vartheta)\cos\vartheta - \vartheta(2\pi - \vartheta)\sin\vartheta, \\ y'(\vartheta) = (2\pi - 2\vartheta)\sin\vartheta + \vartheta(2\pi - \vartheta)\cos\vartheta. \end{cases}$$

Notiamo adesso che il punto $\left(0, \frac{3\pi^2}{4}\right)$, avendo ascissa nulla ed ordinata positiva, corrisponde al valore $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ del parametro; dunque

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{4},$$

e quindi

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi^2}{4}, \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$$

di conseguenza, l'equazione della retta tangente,a $\boldsymbol{\gamma}$ nel punto $\left(0, -\frac{3\pi^2}{4}\right)$, in forma parametrica, è

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi^2}{4}\, t, \\ y = \frac{3\pi^2}{4} + \pi t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana della retta si ottiene eliminando t:

$$y = \frac{3\pi^2}{4} - \frac{4}{3\pi}\, x.$$

(ii) L'area della regione delimitata da $\boldsymbol{\gamma}$ è data dalla formula

$$a = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\vartheta)^2\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^2(2\pi - \vartheta)^2\, d\vartheta.$$

Dunque

$$a = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[4\pi^2\vartheta^2 - 4\pi\vartheta^3 + \vartheta^4\right]\, d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\,\pi^2\vartheta^3 - \pi\vartheta^4 + \frac{1}{5}\,\vartheta^5\right]_0^{2\pi},$$

e dopo qualche calcolo si ottiene

$$a = \frac{8}{15}\,.$$