Analisi 3

Prove scritte dal gennaio 2012

Prova scritta del 16 gennaio 2012

Esercizio 1 Risolvere per serie il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3xy = 2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si definisca la funzione

$$F(x,y) = e^{x^2 y} - \frac{x^2}{4} + y^3 + y + x - 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e si consideri l'insieme $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; F(x,y) = 0\}$.

(i) Si verifichi che $(0,0) \in Z$ e si mostri che in un intorno U di tale punto è definita una funzione g, di classe C^∞, tale che per $(x,y) \in U$ si ha $y = g(x) \iff F(x,y) = 0$.

(ii) Si provi che la funzione g ha una estensione a tutto $\mathbb{R}$, tale che per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $y = g(x) \iff F(x,y) = 0$.

(iii) Si tracci un grafico approssimativo di g, provando in particolare che:

- (a) g è convessa e decrescente in un intorno di $(0,0)$,
- (b) $g \le 0$ se e solo se $0 \le x \le 4$;
- (c) g è infinitesima per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 3 Sia $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le z \le 1 + 2x - x^2\}$, e sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che si ottiene ruotando D attorno all'asse z. Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{|xy|z}{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

Esercizio 4 Sia T il sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalla retta $y = 0$, dalla retta $x = \pi$ e dall'arco di cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, \pi]$. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_T xy\, dxdy.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Cerchiamo una soluzione $u(x)$ della forma

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

e andiamo a determinare i coefficienti a_n. Poiché

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k,$$

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k,$$

inserendo u nell'equazione differenziale otteniamo

$$\begin{aligned} 2 &= u'' + 3xu = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + 3 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei monomi di ugual grado, si trova allora:

$$\begin{cases} 2 = 2a_2 \\ 0 = (k+2)(k+1) a_{k+2} + 3a_{k-1} \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Pertanto a_0 e a_1 sono determinati solo dalle condizioni iniziali, che forniscono $a_0 = a_1 = 1$, mentre gli altri coefficienti sono dati da

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_{k+3} = -\dfrac{3a_k}{(k+3)(k+2)} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si ha allora induttivamente

$$a_{3n} = (-1)^n \frac{3^n}{\prod_{h=1}^{n} (3h)(3h-1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_{3n+1} = (-1)^n \frac{3^n}{\prod_{h=1}^{n} (3h+1)(3h)} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_{3n+2} = (-1)^n \frac{3^n}{\prod_{h=1}^{n}(3h+2)(3h+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

In queste formule è sottinteso che per $n = 0$ il prodotto $\prod_{h=1}^{n}$ vale 1. Si noti che la serie che definisce u, come è giusto, converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie alla presenza dei fattori a denominatore, i quali si comportano essenzialmente come un fattoriale.

Esercizio 2 (i) Ovviamente, $F(0,0) = 0$. Inoltre, essendo

$$F_x(x,y) = 2xy\, e^{x^2 y} - \frac{x}{2} + 1, \qquad F_y(x,y) = x^2\, e^{x^2 y} + 3y^2 + 1,$$

si ha $F_x(0,0) = 1$ e $F_y(0,0) = 1$. Quindi il teorema delle funzioni implicite è applicabile in un intorno $U \times V$ di $(0,0)$ ed in particolare esiste una funzione $g : U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, tale che $F(x, g(x)) = 0$ in U. Si ha pertanto

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}, \quad g'(0) = -1.$$

Inoltre, essendo

$$F_{xx}(x,y) = 2y(1 + 2x^2 y)e^{x^2 y} - \frac{1}{2}, \qquad F_{yy}(x,y) = x^4\, e^{x^2 y} + 6y,$$

$$F_{xy}(x,y) = 2x(1 + x^2 y)e^{x^2 y},$$

dalla relazione $\frac{d^2}{dx^2} F(x, g(x)) = 0$ segue

$$F_{xx}(x, g(x)) + 2F_{xy}(x, g(x))g'(x) + F_{yy}(x, g(x))g'(x)^2 + F_y(x, g(x))g''(x) = 0$$

e quindi $g''(0) = \frac{1}{2}$. Per continuità, g è decrescente e convessa in un intorno di 0.

(ii) Fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $y \mapsto F(x,y)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, dato che

$$F_y(x,y) = x^2\, e^{x^2 y} + 3y^2 + 1 \geq 1 \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$ vi è un unico valore $y \in \mathbb{R}$ che verifica $F(x,y) = 0$; indicando tale valore ancora con $g(x)$, otteniamo l'estensione cercata, la quale sarà di classe C^∞, sempre per il teorema delle funzioni implicite.

(iii) Anzitutto, notiamo che

$$F(x,0) = -\frac{x^2}{4} + x > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < x < 4.$$

Ciò significa che per $x \in]0,4[$ il valore $g(x)$ deve essere negativo, perché in $y = 0$ il numero $F(x,y)$ è già positivo. Al contrario, per $x \notin [0,4]$ si ha $F(x,0) < 0$ e quindi $g(x) > 0$.
Osserviamo poi che si ha, per definizione di g,

$$e^{x^2\, g(x)} - \frac{x^2}{4} + g(x)^3 + g(x) + x - 1 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, per $x < 0$ e per $x > 4$ si ha

$$e^{x^2\, g(x)} \le \frac{x^2}{4} + |x| + 1;$$

dunque

$$g(x) \le \frac{1}{x^2} \ln\left(1 + |x| + \frac{x^2}{4}\right) \qquad \forall x \notin [0,4],$$

da cui, per confronto,

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0.$$

Esercizio 3 L'insieme E, ruotato di D, si descrive così:

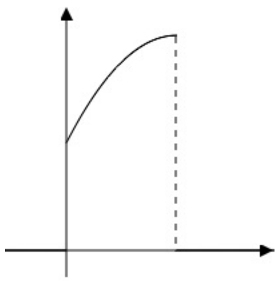
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in D\}.$$

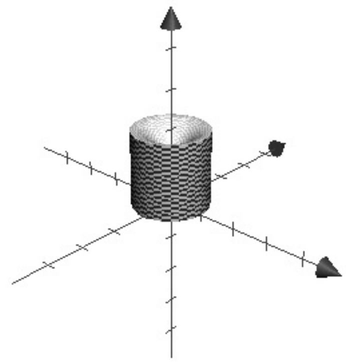
Quindi, utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z,$$

l'insieme E diventa

$$\begin{aligned} E' &= \{(r,\vartheta,z) : \ \vartheta \in [0,2\pi], \ (r,z) \in D\} = \\ &= \{(r,\vartheta,z) : \ \vartheta \in [0,2\pi], \ r \in [0,1], \ z \in [0, 1 + 2r - r^2]\}. \end{aligned}$$

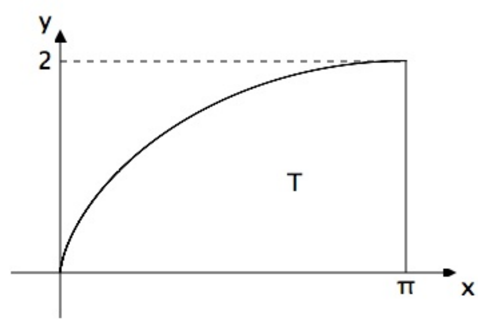




Dunque

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{|xy|z}{x^2+y^2}\,dxdydz &= \int_{E'} \frac{r^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|\,z}{r^2}\,r\,drd\vartheta dz = \\
&= \int_0^{2\pi} |\cos\vartheta\sin\vartheta|d\vartheta \int_0^1 r \int_0^{1+2r-r^2} z\,dzdr = \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 r(1+2r-r^2)^2\,dr = \\
&= 2\int_0^1 r(1+4r+2r^2-4r^3+r^4)\,dr = \\
&= 2\int_0^1 (r+4r^2+2r^3-4r^4+r^5)\,dr = \\
&= 1+\frac{8}{3}+1-\frac{8}{5}+\frac{1}{3} = \frac{17}{5}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 L'insieme T, pur essendo normale rispetto ad entrambi gli assi, non si esplicita facilmente. Conviene quindi utilizzare le formule di Gauss-Green, interpretando l'integrando y^2 come derivata f_x (con $f(x,y) = xy^2$), oppure come derivata g_y (con $g(x,y) = \frac{1}{3}\,y^3$). Si ha allora



$$\int_T y^2\,dxdy = \int_{+\partial T} f\,dy = \int_{-\partial T} g\,dx.$$

La seconda formula è più comoda, perché l'integrazione su ∂T dà luogo a tre integrali, due dei quali, quelli relativi ai due segmenti lungo gli assi, sono nulli: infatti g è nulla sulla retta $y = 0$ e dx è nullo sulla retta $x = \pi$. Si trova allora, indicando con $+\Gamma$ l'arco di cicloide orientato secondo la parametrizzazione data,

$$\begin{aligned}\int_T y^2\,dxdy &= \frac{1}{3}\int_{-\partial T} y^3\,dx = \frac{1}{3}\int_{+\Gamma} y^3\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi (1-\cos t)^4\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\pi (1 - 4\cos t + 6\cos^2 t - 4\cos^3 t + \cos^4 t)\,dt.\end{aligned}$$

Gli integrali relativi a $\cos t$ e $\cos^3 t$ sono nulli, come è immediato verificare. Si ha poi facilmente

$$\frac{1}{3}\int_0^\pi 1\,dt = \frac{\pi}{3}, \qquad \frac{1}{3}\int_0^\pi 6\cos^2 t\,dt = \pi,$$

mentre

$$\frac{1}{3}\int_0^\pi \cos^4 t\,dt = \frac{1}{3}\int_0^\pi (\cos^2 t - \cos^2 t\sin^2 t)\,dt = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{12}\int_0^\pi \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24};$$

in definitiva

$$\int_T y^2\,dxdy = \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{35}{24}\pi.$$

Prova scritta del 1º febbraio 2012

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'''' - 2u''' + 5u'' - 8u' + 4u = 8x - 15, & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1/4, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = -17. \end{cases}$$

Esercizio 2 Posto

$$f_n(x) = \frac{x\,e^{-nx}}{1 + e^{-nx}}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si calcoli per ogni $a \in [-\infty, +\infty[$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Esercizio 3 Si determini l'area della superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \pi + e^{-t} \cos t \\ z = e^{-t} \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, +\infty[.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Per cominciare, risolviamo l'equazione omogenea: l'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0,$$

e cercandone eventuali radici intere fra i divisori del termine noto, si trova subito $\lambda = 1$. Fattorizzando, si vede che

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0,$$

ed è immediato verificare che $\lambda = 1$ annulla anche il polinomio di terzo grado. Fattorizzando ulteriormente arriviamo a

$$(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 4) = 0,$$

e dunque le radici sono $\lambda = 1$ con molteplicità 2, e $\lambda = 2i$, $\lambda = -2i$, entrambe semplici. L'insieme delle soluzioni (reali) dell'equazione omogenea è quindi

$$V_0 = \{c_1 e^x + c_2 x\, e^x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x : \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione dell'equazione non omogenea sotto forma di un polinomio di grado 1 (perché 0 non è radice dell'equazione caratteristica):

$$v(x) = ax + b.$$

Sostituendo si ha

$$-8a + 4ax + 4b = 8x - 15,$$

da cui $a = 2$ e $b = 1/4$. Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea è

$$V_f = \left\{ \{c_1 e^x + c_2 x\, e^x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x + \frac{1}{4} : \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Imponiamo infine le condizioni di Cauchy: poiché

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 e^x + c_2 x\, e^x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x + \tfrac{1}{4}, \\ u'(x) &= c_1 e^x + c_2 (1+x)\, e^x - 2c_3 \sin 2x + 2c_4 \cos 2x + 2, \\ u''(x) &= c_1 e^x + c_2 (2+x)\, e^x - 4c_3 \cos 2x - 4c_4 \sin 2x, \\ u'''(x) &= c_1 e^x + c_2 (3+x)\, e^x + 8c_3 \sin 2x - 8c_4 \cos 2x, \end{aligned}$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{4} = u(0) = c_1 + c_3 + \frac{1}{4} \\ 0 = u'(0) = c_1 + c_2 + 2c_4 + 2 \\ 0 = u''(0) = c_1 + 2c_2 - 4c_3 \\ -17 = u'''(0) = c_1 + 3c - 2 - 8c_4, \end{cases}$$

dal quale si ricava facilmente

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = -5, \qquad c_3 = -2, \qquad c_4 = \frac{1}{2}.$$

Perciò la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$u(x) = 2e^x - 5x\, e^x - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\, \sin 2x + 2x + \frac{1}{4}\,.$$

Esercizio 2 Per $x > 0$ fissato si ha $e^{-nx} \to 0$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\, e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} = 0;$$

per $x \le 0$ fissato si ha invece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\, e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} = x.$$

Pertanto si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Consideriamo allora la generica semiretta $[a, \infty[$: se $a \ge 0$ risulta per $n \ge 1$

$$0 \le f_n(x) = \frac{x\, e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \le x\, e^{-x} \qquad \forall x \ge a,$$

e dato che la funzione xe^{-x} è sommabile in $[a, +\infty[$, si ottiene dal teorema di Lebesgue
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\, dx = 0.$$
Se $-\infty \le a < 0$ si ha invece
$$0 \le -f_n(x) = |f_n(x)| = \frac{|x|\, e^{n|x|}}{1 + e^{n|x|}} \nearrow |x| \quad \text{per} \quad n \to \infty \qquad \forall x \in [a, 0];$$
quindi per il teorema di B. Levi
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^0 [-f_n(x)]\, dx = \int_a^0 |x|\, dx = -\int_a^0 x\, dx = \begin{cases} \frac{a^2}{2} & \text{se } +\infty < a < 0 \\ -\infty & \text{se } a = -\infty, \end{cases}$$
e pertanto
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\, dx = \begin{cases} -\frac{a^2}{2} & \text{se } -\infty < a < 0 \\ -\infty & \text{se } a = -\infty, \end{cases}$$
Tenuto conto di quanto ottenuto, possiamo dire infine che
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a \ge 0 \\ -\frac{a^2}{2} & \text{se } -\infty < a < 0 \\ -\infty & \text{se } a = -\infty. \end{cases}$$

Esercizio 3 Una parametrizzazione della superficie S si ottiene usando le coordinate cilindriche
$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z,$$
ove per r, distanza dall'asse di rotazione, e per z valgono le relazioni
$$r = \pi + e^{-t}\cos t, \qquad z = e^{-t}\sin t;$$
quindi la parametrizzazione di S è
$$\boldsymbol{\sigma}(\vartheta, z): \quad \begin{cases} x = \cos\vartheta\,(\pi + e^{-t}\cos t) \\ y = \sin\vartheta\,(\pi + e^{-t}\cos t) \\ z = e^{-t}\sin t, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad t \in [0, \infty[\,.$$

Risulta, con facili verifiche,

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(\vartheta,t)=\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\,(\pi+e^{-t}\cos t) & -\cos\vartheta\,e^{-t}(\cos t+\sin t)\\ \cos\vartheta\,(\pi+e^{-t}\cos t) & -\sin\vartheta\,e^{-t}(\cos t+\sin t)\\ 0 & e^{-t}(\cos t+\sin t)\end{pmatrix};$$

quindi si ricava subito che

$$E=|\boldsymbol{\sigma}_\vartheta|_3^2=(\pi+e^{-t}\cos t)^2,\quad G=|\boldsymbol{\sigma}_t|_3^2=2\,e^{-2t},\quad F=\langle\boldsymbol{\sigma}_\vartheta,\boldsymbol{\sigma}_t\rangle_3=0.$$

Dunque l'elemento d'area è

$$\sqrt{EG-F^2}=(\pi+e^{-t}\cos t)\sqrt{2}\,e^{-t}$$

e pertanto, dopo facili conti,

$$\begin{aligned} a(S) &= \sqrt{2}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}(\pi+e^{-t}\cos t)\,e^{-t}\,d\vartheta dt=\\ &= 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^\infty(\pi\,e^{-t}+\cos t\,e^{-2t})\,dt=2\sqrt{2}\,\pi^2+\frac{4}{5}\sqrt{2}\,\pi. \end{aligned}$$

Prova scritta del 14 giugno 2012

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y)=2^{2y-x^2}\,3^{3x-y^2},\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Determinare:

(i) il massimo ed il minimo di f sul quadrato $[0,2]\times[0,2]$;

(ii) la retta tangente all'insieme $Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)=1\}$ nel punto $(0,0)$.

Esercizio 2 Si calcolino le coordinate del dell'insieme

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le 3-x^2-y^2\}.$$

Esercizio 3 Si consideri la curva piana Γ descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r=\vartheta^4,\qquad \vartheta\in[0,\pi].$$

Determinare:

(i) la lunghezza della curva Γ;

(ii) l'area della regione delimitata dalla curva Γ e dall'asse x.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione è di classe C^∞. Calcoliamo il suo gradiente:

$$f_x(x,y) = 2^{2y-x^2}\,3^{3x-y^2}(-2(\ln 2)x + 3\ln 3),$$
$$f_y(x,y) = 2^{2y-x^2}\,3^{3x-y^2}(2\ln 2 - 2(\ln 3)y);$$

quindi il gradiente si annulla nel solo punto $\left(\frac{3\ln 3}{2\ln 2}, \frac{\ln 2}{\ln 3}\right)$. Questo punto non appartiene al quadrato $[0,2]\times[0,2]$, in quanto la sua ascissa è maggiore di 2, essendo $3\ln 3 = \ln 27 > \ln 16 = 4\ln 2$. Dunque tale punto non ci interessa. Analizziamo la f sul bordo del quadrato, il quale è composto dai vertici e da quattro segmenti aperti. Sui vertici si ha

$$f(0,0) = 1,\ f(2,0) = 2^{-4}\,3^6 = \frac{729}{16},\ f(0,2) = 2^4\,3^{-4} = \frac{16}{81},\ f(2,2) = 3^2 = 9.$$

Sul segmento $\{(x,0) : x \in]0,1[\}$ si ha $f(x,0) = 2^{-x^2}\,3^{3x}$; la derivata di questa funzione, che è $2^{-x^2}\,3^{3x}(-2(\ln 2)x + 3\ln 3)$, si annulla in $x = \frac{3\ln 3}{2\ln 2}$ ma tale punto è fuori dall'intervallo.
Analogamente, sul segmento $\{(x,2) : x \in]0,1[\}$ si ha $f(x,2) = 2^{4-x^2}\,3^{3x-4}$, con derivata $2^{4-x^2}\,3^{3x-4}(-2(\ln 2)x + 3\ln 3)$ che si annulla in $x = \frac{3\ln 3}{2\ln 2}$, cioè fuori dall'intervallo.
Sul segmento $\{(0,y) : y \in]0,1[\}$ si ha $f(0,y) = 2^{2y}\,3^{-y^2}$; la derivata di questa funzione, che è $2^{2y}\,3^{-y^2}(2\ln 2 - 2(\ln 3)y)$, si annulla in $y = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, dove si ha

$$f\left(0, \frac{\ln 2}{\ln 3}\right) = 2^{2\frac{\ln 2}{\ln 3}}\,3^{-\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^2} = 2^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Infine, analogamente, sul segmento $\{(2,y) : y \in]0,1[\}$ si ha $f(2,y) = 2^{2y-4}\,3^{6-y^2}$, con derivata $2^{2y-4}\,3^{6-y^2}(2\ln 2 - 2(\ln 3)y)$ nulla nel punto $y = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, dove risulta

$$f\left(2, \frac{\ln 2}{\ln 3}\right) = 2^{2\frac{\ln 2}{\ln 3}-4}\,3^{\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^2} = \frac{729}{16}\,2^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Da un confronto fra i sei valori trovati segue facilmente che

$$\min_{[0,2]\times[0,2]} f = \frac{16}{81} \simeq 0.\overline{197530864}, \qquad \max_{[0,2]\times[0,2]} f = \frac{729}{16}\,2^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \simeq 70.556.$$

(ii) Le derivate di f in $(0,0)$ sono

$$f_x(0,0) = 3\ln 3, \qquad f_y(0,0) = 2\ln 2;$$

quindi $\nabla f(0,0) \neq \mathbf{0}$ e pertanto la retta tangente alla curva di livello 1 è

$$3(\ln 3)x + 2(\ln 2)y = 0.$$

Esercizio 2 Il baricentro dell'insieme A ha coordinate

$$\overline{x} = \frac{1}{m_3(A)} \int_A x\,dxdydz,\ \overline{y} = \frac{1}{m_3(A)} \int_A y\,dxdydz,\ \overline{z} = \frac{1}{m_3(A)} \int_A z\,dxdydz.$$

Dato che l'insieme A ha simmetria cilindrica, si ha

$$\overline{x} = 0, \qquad \overline{y} = 0.$$

Resta da calcolare $\overline{z}$. Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z,$$

tramite le quali l'insieme A viene descritto dalla relazioni

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 1 - \sqrt{1-r^2} \leq z \leq 3 - r^2, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Si noti che per $r \in [0,1]$ si ha $1 - \sqrt{1-r^2} \leq 2 \leq 3 - r^2$, quindi non ci sono altre limitazioni per la variabile r. Si ha dunque

$$\begin{aligned} m_3(A) &= \int_A dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{3-r^2} r\,dzdrd\vartheta = \\ &= 2\pi \int_0^1 (2r - r^3 + r\sqrt{1-r^2})dr = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{13\pi}{6}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \int_A z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{3-r^2} rz\,dzdrd\vartheta = \\ &= \pi \int_0^1 r[(3-r^2)^2 - (1-\sqrt{1-r^2})^2]dr = \\ &= \pi \int_0^1 (7r + r^5 - 5r^3 + 2r\sqrt{1-r^2})dr = \\ &= \pi\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{37\pi}{12}. \end{aligned}$$

Pertanto si ha $\overline{z} = \frac{37}{26} \simeq 1.423$.

Esercizio 3 (i) Poiché la curva Γ è espressa in coordinate polari, la sua lunghezza è data da

$$\ell(\Gamma) = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = \int_0^\pi \sqrt{\vartheta^8 + 16\vartheta^6}\, d\vartheta.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\ell(\Gamma) &= \int_0^\pi \vartheta^3\sqrt{\vartheta^2+16}\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} t\sqrt{t+16}\, dt = \\
&= \frac{1}{3}\left[t(t+16)^{3/2}\right]_0^{\pi^2} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi^2} (t+16)^{3/2} dt = \\
&= \left[\frac{1}{3}t(t+16)^{3/2} - \frac{2}{15}(t+16)^{5/2}\right]_0^{\pi^2} = \\
&= \frac{1}{3}\pi^2(\pi^2+16)^{3/2} - \frac{2}{15}(\pi^2+16)^{5/2} + \frac{2}{15}(16)^{5/2} = \\
&= \frac{2048}{15} - \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi^2}{3}\right)(\pi^2+16)^{3/2}.
\end{aligned}$$

(ii) Utilizzeremo la formula dell'area di insiemi piani

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_{+\partial A} (x\, dy - y\, dx).$$

La frontiera T della regione E che ci interessa è costituita da due parti:

$$T_1 = \Gamma, \qquad T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0,\ -\pi^4 \le x \le 0\}.$$

Lungo T_1 si ha $y = 0$ e $dy = 0$, quindi il corrispondente integrale è nullo. Pertanto, essendo lungo T_1

$$x = \vartheta^4 \cos\vartheta, \qquad y = \vartheta^4 \sin\vartheta,$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&m_2(E) = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\vartheta^4\cos\vartheta(4\vartheta^3\sin\vartheta + \vartheta^4\cos\vartheta) - \vartheta^4\sin\vartheta(4\vartheta^3\cos\vartheta - \vartheta^4\sin\vartheta)d\vartheta = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^\pi \vartheta^8(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)d\vartheta = \frac{\pi^9}{18} \simeq 1656.06.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 5 luglio 2012

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + ky = e^{-3x}$$

per ogni scelta del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x, y) = xy^2 + e^{x+y}.$$

(i) Si provi che per ogni $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'equazione $F(x, y) = 0$ è risolta da un unico $x \in \mathbb{R}$, e che pertanto è definita implicitamente una funzione $x = g(y)$, di classe C^∞, tale che $F(g(y), y) = 0$ per ogni $y \neq 0$.

(ii) Si dimostri che $g(y) < 0$ per ogni $y \neq 0$.

(iii) Si calcolino i limiti

$$\lim_{y\to+\infty} g(y), \qquad \lim_{y\to-\infty} g(y), \qquad \lim_{y\to0^+} g(y), \qquad \lim_{y\to0^-} g(y).$$

Esercizio 3 Si determini, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln|x||^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln|x||^{3n}}\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Cominciamo con l'equazione omogenea

$$y - 2y' + ky = 0.$$

Cercando soluzioni di tipo esponenziale si perviene all'equazione algebrica

$$\lambda^2 - 2\lambda + k = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{1-k} & \text{se } k < 1 \\ 1 & \text{se } k = 1 \\ 1 \pm i\sqrt{k-1} & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y(x) = \begin{cases} c_1\, e^{(1+\sqrt{1-k})x} + c_2\, e^{(1-\sqrt{1-k})x} & \text{se } k < 1 \\ c_1\, e^{x} + c_2\, x\, e^{x} & \text{se } k = 1 \\ c_1\, e^{x}\, \cos\sqrt{k-1}x + c_2\, e^{x}\, \sin\sqrt{k-1}x & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il secondo membro è l'esponenziale e^{-3x} che, per un opportuno valore di k, risolve l'equazione omogenea. Ciò accade precisamente quando

$$k < 1, \qquad 1 - \sqrt{1-k} = -3,$$

ossia quando $k = -15$ (e in tal caso la molteplicità della soluzione è 1). Dunque cercheremo una soluzione particolare v della forma

$$v(x) = \begin{cases} A\, e^{-3x} & \text{se } k \neq -15 \\ Ax\, e^{-3x} & \text{se } k = -15. \end{cases}$$

Se $k \neq -15$ si ha

$$v'' - 2v' + kv = 9A\, e^{-3x} + 6A\, e^{-3x} + kA\, e^{-3x} = e^{-3x}$$

se e solo se $(15+k)A = 1$, ossia $A = 1/(15+k)$.
Se $k = -15$ si ha invece

$$v'' - 2v' + kv = (9x-6)A\, e^{-3x} - 2(1-3x)A\, e^{-3x} - 15Ax\, e^{-3x} = e^{-3x}$$

se e solo se $-8A = 1$, ossia $A = -1/8$. In definitiva

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{15+k}\, e^{-3x} & \text{se } k \neq -15 \\ -\frac{x}{8}\, e^{-3x} & \text{se } k = -15, \end{cases}$$

e dunque le soluzioni dell'equazione data sono

$$y(x) = \begin{cases} c_1\, e^{(1+\sqrt{1-k})x} + c_2\, e^{(1-\sqrt{1-k})x} - \frac{x}{8}\, e^{-3x} & \text{se } k = -15 \\ c_1\, e^{(1+\sqrt{1-k})x} + c_2\, e^{(1-\sqrt{1-k})x} + \frac{1}{15+k}\, e^{-3x} & \text{se } 1 < k \neq -15 \\ c_1\, e^{x} + c_2\, x\, e^{x} + \frac{1}{15+k}\, e^{-3x} & \text{se } k = 1 \\ c_1\, e^{x} \cos\sqrt{k-1}x + c_2\, e^{x} \sin\sqrt{k-1}x + \frac{1}{15+k}\, e^{-3x} & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

ove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie.

Esercizio 2 (i) Per ogni $y \neq 0$ la funzione $x \mapsto F(x, y)$ verifica

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = +\infty.$$

Dunque vi è almeno un $x \in \mathbb{R}$ tale che $F(x, y) = 0$. Inoltre si ha

$$F_x(x,y) = y^2 + e^{x+y} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

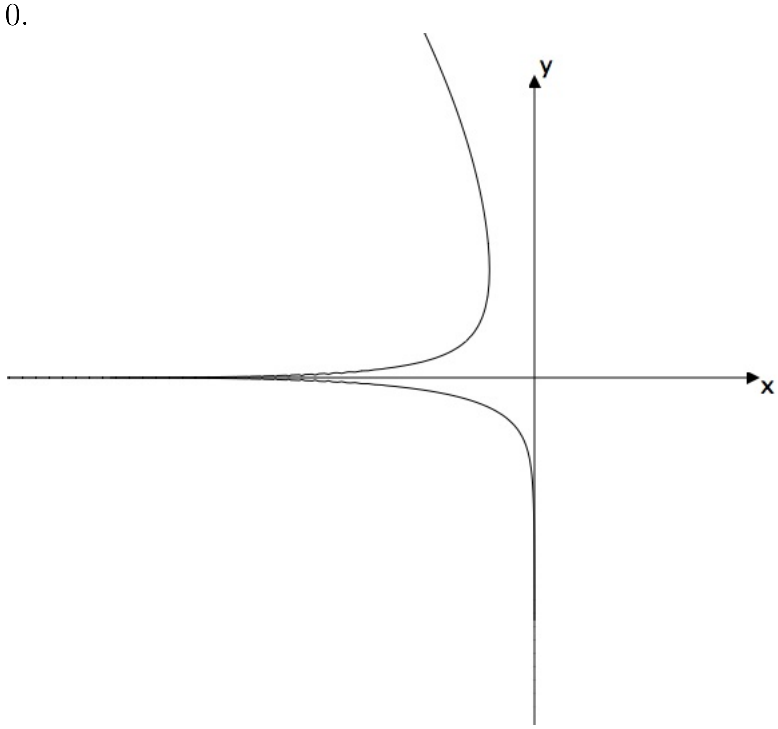
e quindi tale x è unico. Se indichiamo tale punto x con $g(y)$, la funzione g risulta definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, per definizione,

$$F(g(y), y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Applicando il teorema del Dini alla funzione F nel generico punto $(g(y_0), y_0)$ ove $y_0 \neq 0$, si ottiene che la funzione implicita data da tale teorema coincide necessariamente con g, la quale è pertanto di classe C^∞ con

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \qquad \forall y \neq 0.$$

(ii) (ii) Osservando che $x \mapsto F(x, y)$ è crescente e $F(0, y) = e^y > 0$, il valore x in cui $F(x, y) = 0$, ossia $g(y)$, deve essere negativo. Dunque $g(y) < 0$ per ogni $y \neq 0$.



(iii) Dalla relazione $F(g(y), y) = 0$ segue che

$$e^{-g(y)}\, g(y) = -\frac{e^y}{y^2} \qquad \forall y \neq 0;$$

dunque

$$|g(y)\, e^{|g(y)|} = -\frac{e^y}{y^2} \qquad \forall y \neq 0,$$

da cui

$$\lim_{y\to+\infty} |g(y)|\, e^{|g(y)|} = +\infty.$$

Poiché la funzione $t\, e^t$ tende a $+\infty$ se e solo se $t \to +\infty$, si deduce che $|g(y)| \to +\infty$ e quindi

$$\lim_{y\to+\infty} g(y) = -\infty.$$

In modo del tutto analogo, dal fatto che

$$\lim_{y\to 0^+} |g(y)|\, e^{|g(y)|} = +\infty, \qquad \lim_{y\to 0^-} |g(y)|\, e^{|g(y)|} = +\infty,$$

segue che $|g(y)| \to +\infty$ per $y \to 0^\pm$ e pertanto

$$\lim_{y\to 0^+} g(y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to 0^-} g(y) = -\infty.$$

Infine osserviamo che

$$\lim_{y\to-\infty} |g(y)|\, e^{|g(y)|} = 0;$$

poiché la funzione $t\, e^t$ tende a 0 se e solo se $t \to 0$, si deduce che $|g(y)| \to 0$ e quindi

$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = 0.$$

Esercizio 3 Osserviamo anzitutto che l'integrando è pari, quindi il nostro limite diventa

$$\lim_{n\to\infty} 2 \int_0^\infty \frac{|\ln x|^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln x|^{3n}}\, dx.$$

Valutiamo il limite puntuale dell'integrando: si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln x|^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln x|^{3n}} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < e^{-1} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = e^{-1} \\ 0 & \text{se } e^{-1} < x < e \\ 0 & \text{se } x \geq e \end{cases}$$

(infatti per $x > e$ è facile verificare che il massimo del rapporto $\frac{(\ln x)^3}{x^2}$ è raggiunto in $x = e^{3/2}$ e vale $\left(\frac{3}{2e}\right)^3 < 1$). Inoltre l'integrando è dominato: per $n \geq 2$ risulta infatti

$$\frac{|\ln x|^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln x|^{3n}} \leq \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq e^{-1} \\ \frac{1}{1+x^{2n}} \leq \frac{1}{1+x^2} & \text{se } e^{-1} < x < e \\ \left(\frac{(\ln x)^3}{x^2}\right)^n \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} & \text{se } x \geq e. \end{cases}$$

Dunque, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} 2 \int_0^{\infty} \frac{|\ln x|^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln x|^{3n}}\, dx = 2 \int_0^{e^{-1}} 1\, dx = 2e^{-1}.$$

Prova scritta del 12 settembre 2012

Esercizio 1 Consideriamo la funzione

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2xy, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^2,$$

e l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^4 \leq y^2 + z^2\}.$$

(i) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to+\infty \\ (x,y,z)\in A}} f(x, y, z).$$

(ii) Calcolare $\inf_A f$ e $\sup_A f$, precisando se si tratta di minimo e di massimo.

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{n^2x^2y^2 + 2nx + y}{(1 + nx)(1 + ny)}\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy.$$

Esercizio 3 Consideriamo la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = x^2y^2\, dx + y\, \mu(x)e^x\, dy,$$

ove $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.

(i) Si trovino tutte le funzioni μ che rendono esatta in $\mathbb{R}^2$ la forma ω.

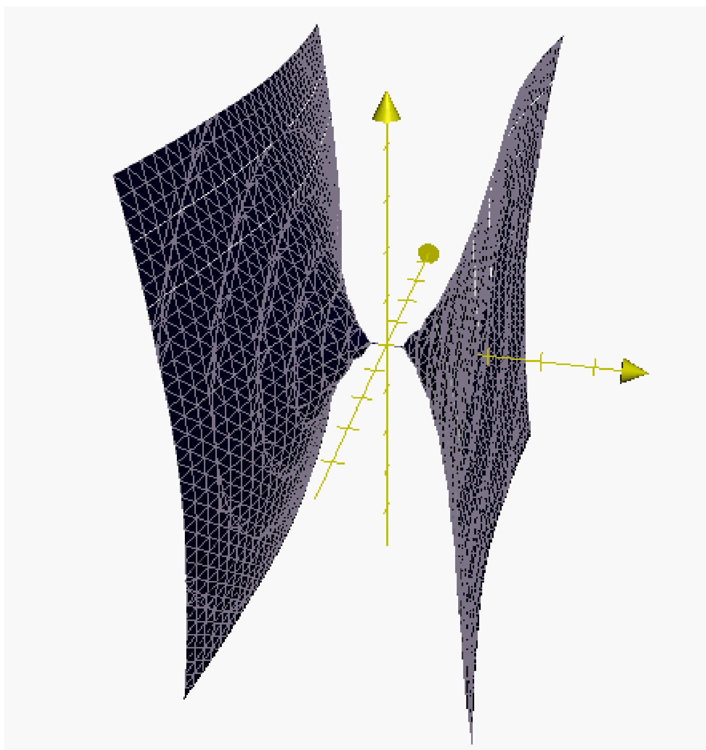
(ii) Scelta μ tale che $\omega(0,1) = 0$, si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial D} \langle \omega, \boldsymbol{\nu} \rangle \, ds,$$

oev $D = [0,1] \times [0,1]$ e $\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale esterno.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La regione A è quella compresa fra le due superfici in figura.



Per vedere se il limite esiste, osserviamo che in A valgono le disuguaglianze

$$|x| \leq (y^2 + z^2)^{1/4}, \qquad |y| \leq (y^2 + z^2)^{1/2},$$

da cui

$$f(x,y,z) \geq y^2 + z^2 - 2|x||y| \geq y^2 + z^2 - 2(y^2 + z^2)^{3/4} \qquad \forall (x,y,z) \in A.$$

Poiché, per $(x, y, z) \in A$ si ha

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{y^2 + z^2} \to +\infty,$$

si ottiene che

$$\exists \lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to +\infty \\ (x,y,z) \in A}} f(x, y, z) = +\infty.$$

(ii) Da (i) segue subito che

$$\sup_A f = +\infty,$$

e che f non ha massimo in A. Dato che $f(x, y, z) \geq y^2 + z^2 - 2(y^2 + z^2)^{3/4}$, la f è limitata inferiormente in A. Cerchiamo i punti stazionari di f in A: si ha

$$f_x(x, y, z) = -2y, \quad f_y(x, y, z) = 2y - 2x, \quad f_z(x, y, z) = 2z;$$

quindi l'unico punto stazionario è $(0, 0, 0)$, che però appartiene alla frontiera di A. Dunque non ci sono punti stazionari interni ad A. Consideriamo allora la frontiera

$$\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 = y^2 + z^2\},$$

ed utilizziamo il metodo dei moltiplicatori. Sia dunque

$$H(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2xy + \lambda(x^4 - y^2 - z^2),$$

e cerchiamone i punti stazionari $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2y + 4x^3\lambda = 0 \\ 2y - 2x - 2y\lambda = 0 \\ 2z - 2z\lambda = 0 \\ x^4 = y^2 + z^2. \end{cases}$$

Se $z \neq 0$, la terza equazione ci dice che $\lambda = 1$, e dalla seconda equazione ricaviamo $x = 0$; la prima ci dà allora $y = 0$, e dalla quarta deduciamo $z = 0$, il che è contraddittorio. Dunque non può essere $z \neq 0$.
Si ha pertanto $z = 0$ e quindi ci riduciamo al sistema

$$\begin{cases} -2y + 4x^3\lambda = 0 \\ 2y - 2x - 2y\lambda = 0 \\ x^4 = y^2. \end{cases}$$

Se $y = 0$, allora la terza equazione ci dice che $x = 0$: abbiamo così ritrovato $(0, 0, 0)$ come punto stazionario vincolato, con λ arbitrario. Se $y \neq 0$, allora dalla terza segue $x \neq 0$, e dalla prima ricaviamo $\lambda = \frac{y}{2x^3}$; sostituendo nella seconda e utilizzando la terza possiamo scrivere $y - x - \frac{x}{2} = 0$, ossia $y = \frac{3x}{2}$. La terza fornisce $x = \pm\frac{3}{2}$ e dunque $y = \pm\frac{9}{4}$. Si ottengono dunque i due punti stazionari vincolati $\pm\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 0\right)$, con $\lambda = \frac{1}{3}$. I valori di f in tali punti sono:

$$f(0,0,0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 0\right) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}, 0\right) = -\frac{27}{16}.$$

Dunque

$$\inf_A f = \min_A f = f\left(\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{4}, 0\right) = -\frac{27}{16}.$$

Esercizio 2 Denotiamo con $g_n(x, y)$ la funzione integranda. Essa ha limite per $n \to \infty$: infatti, poiché

$$\frac{n^2x^2y^2 + 2nx + y}{(1 + nx)(1 + ny)}\, e^{-x^2-y^2} = \frac{n^2\left(x^2y^2 + \frac{2x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)}{n^2\left(x + \frac{1}{n}\right)\left(y + \frac{1}{n}\right)} \to xy \quad \text{per } n \to \infty,$$

si ottiene che

$$\exists \lim_{n\to\infty} g_n(x, y) = xy\, e^{-x^2-y^2}.$$

Inoltre la funzione integranda è dominata: per ogni $n \geq 1$ e per ogni $x, y > 0$ risulta infatti

$$0 \leq g_n(x, y) \leq e^{-x^2-y^2}\left(\frac{n^2x^2y^2}{n^2xy} + \frac{2nx}{1 + nx} + \frac{y}{1 + ny}\right) \leq e^{-x^2-y^2}(xy + 2 + 1).$$

Dato che la funzione $(x, y) \mapsto (xy + 3)e^{-x^2-y^2}$ è sommabile in $[0, \infty[\, \times [0, \infty[\,$, in virtù del teorema di convergenza dominata possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
&\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{n^2x^2y^2 + 2nx + y}{(1 + nx)(1 + ny)}\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty xy\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \left[\int_0^\infty t\, e^{-t^2}\, dt\right]^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Affinché la forma ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$, che è evidentemente un aperto semplicemente connesso, occorre e basta che ω sia chiusa, ossia che

$$\frac{\partial}{\partial y}x^2y^2 = \frac{\partial}{\partial x}y\, \mu(x)e^x;$$

ciò accade se e solo se

$$2x^2y = y(\mu(x) + \mu'(x))e^x,$$

ovvero

$$\mu'(x) + \mu(x) = 2x^2\, e^{-x}.$$

Tutte e sole le soluzioni di questa equazione differenziale sono, come è facile verificare,

$$\mu(x) = c\, e^{-x} + \frac{2}{3}\, x^3\, e^{-x},$$

e la forma ω diviene allora

$$\omega(x,y) = x^2y^2\, dx + y\left(c + \frac{2}{3}\, x^3\right) dy.$$

(ii) Si ha $\omega(0,1) = 0$ se e solo se $c = 0$; quindi

$$\omega(x,y) = x^2y^2\, dx + \frac{2}{3}\, x^3 y\, dy.$$

Per calcolare l'integrale curvilineo proposto ci sono due modi egualmente facili: il calcolo diretto e l'uso del teorema della divergenza.
Per fare il calcolo diretto parametrizziamo ∂D nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1 &: \ x = t,\ y = 0, \quad t \in [0,1]; \quad \boldsymbol{\nu} = (0,-1),\\
\boldsymbol{\gamma}_2 &: \ x = 1,\ y = t, \quad t \in [0,1]; \quad \boldsymbol{\nu} = (1,0),\\
\boldsymbol{\gamma}_3 &: \ x = t,\ y = 1, \quad t \in [0,1]; \quad \boldsymbol{\nu} = (0,1),\\
\boldsymbol{\gamma}_4 &: \ x = 0,\ y = t, \quad t \in [0,1]; \quad \boldsymbol{\nu} = (-1,0).
\end{aligned}$$

Si ha allora

$$\langle \omega, \boldsymbol{\nu}\rangle\, ds = \begin{cases} 0 & \text{su } \boldsymbol{\gamma}_1\\ t^2 & \text{su } \boldsymbol{\gamma}_2\\ \frac{2}{3}\, t^3 & \text{su } \boldsymbol{\gamma}_3\\ 0 & \text{su } \boldsymbol{\gamma}_4\,. \end{cases}$$

Dunque, essendo $ds = dt$ sulle quattro curve,

$$\int_{\partial D} \langle \omega, \boldsymbol{\nu}\rangle\, ds = \int_0^1 t^2\, dt + \frac{2}{3}\int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Volendo usare il teorema della divergenza, si ha analogamente, posto $f(x,y) = x^2y^2$ e $g(x,y) = \frac{2}{3}\,x^3y$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \langle \omega, \boldsymbol{\nu} \rangle \, ds &= \int_D \operatorname{div}(f,g)\, dxdy = \int_D \left(2xy^2 + \frac{2}{3}\,x^3\right) dxdy = \\ &= 2\int_0^1 x\, dx \int_0^1 y^2\, dy + \frac{2}{3}\int_0^1 x^3\, dx \int_0^1 dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Prova scritta del 21 gennaio 2013

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

sull'insieme

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\right\}.$$

Esercizio 2 Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n \frac{nx^3 + \sin ny}{\frac{n}{y^3} + 2 - \cos nx}\, e^{-x^4-y^4} dxdy.$$

Esercizio 3 Posto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2 \le 1\},$$

calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S (3x^2 - 2y^2) d\boldsymbol{\sigma}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞. Cerchiamone i punti stazionari interni a K: si ha

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2x - 2x^3 + 8xy^2 \\ -8y - 2x^2y - 8y^3 \end{pmatrix};$$

dunque i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} 2x(1-x^2+4y^2)=0 \\ 2y(4+x^2-4y^2)=0 \end{cases}$$

e sono pertanto i punti

$$(0,0), \quad (\pm 1,0), \quad (0,\pm 1),$$

ma i punti $(0,\pm 1)$ non sono interni, essendo sulla frontiera di K (li ritroveremo però come punti stazionari vincolati). Negli altri punti si ha

$$f(0,0)=0, \quad f(\pm 1,0)=e^{-1}.$$

Vediamo come si comporta la f sul bordo di K. Come si è preannunciato, vi sono i punti $(0,\pm 1)$ che certamente sono stazionari vincolati, dato che il gradiente di f addirittura vi si annulla. Per cercare gli altri punti stazionari vincolati utilizziamo il metodo dei moltiplicatori e consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(x,y,\lambda)=(x^2-4y^2)e^{-x^2-y^2}+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right):$$

i suoi punti stazionari si ottengono dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(1-x^2+4y^2)e^{-x^2-y^2}+\frac{1}{2}\lambda x=0 \\ 2y(-4-x^2+4y^2)e^{-x^2-y^2}+2\lambda y=0 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$$

Si trovano di nuovo i punti $(0,\pm 1)$, cui corrisponde $\lambda=0$, e in essi $f(0,\pm 1)=-4e^{-1}$. Si trovano poi i punti $(\pm 2,0)$, cui corrisponde $\lambda=12e^{-4}$, e in essi $f(\pm 2,0)=4e^{-4}$. Se infine x e y sono diversi da 0, eliminando λ si ottiene la relazione

$$4(1-x^2+4y^2)=-4-x^2+4y^2,$$

da cui $x^2=\frac{8}{3}+12y^2$ e, ricordando la terza equazione, si ricava facilmente

$$x^2=\frac{10}{3}, \qquad y^2=\frac{1}{6},$$

cui corrisponde $\lambda = \frac{20}{3}\, e^{-7/2}$. Si hanno dunque i punti stazionari vincolati

$$\pm\left(\sqrt{\frac{11}{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \pm\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right),$$

e in lai punti risulta

$$f\left(\pm\left(\sqrt{\frac{11}{3}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\pm\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{10}{3} e^{-15/4}.$$

Pertanto, confrontando i valori trovati, si conclude che

$$\max_K f = e^{-1}, \qquad \min_K f = -4e^{-1}.$$

Esercizio 2 Le funzioni integrande sono

$$f_n(x,y) = \begin{cases} \frac{nx^3 + \sin ny}{\frac{n}{y^3} + 2 - \cos nx}\, e^{-x^4-y^4} & \text{se } \max\{x,y\} \le n \\ 0 & \text{se } \max\{x,y\} \ge n. \end{cases}$$

e quindi sono funzioni continue troncate a 0 fuori del quadrato $[0,n] \times [0,n]$. Dunque sono misurabili, ed essendo non negative sono anche integrabili; inoltre esse convergono puntualmente alla funzione

$$f(x,y) = x^3 y^3 e^{-x^4-y^4}.$$

Le f_n sono dominate nel modo seguente:

$$f_n(x,y) \le \frac{nx^3 + 1}{\frac{n}{y^3}}\, e^{-x^4-y^4} = (x^3+1) y^3 e^{-x^4-y^4},$$

e la funzione all'ultimo membro è certamente sommabile su $[0,\infty[\,\times[0,\infty[$. Pertanto il teorema di Lebesgue ci assicura che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n \frac{nx^3 + \sin ny}{\frac{n}{y^3} + 2 - \cos nx}\, e^{-x^4-y^4} dxdy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^3 y^3 e^{-x^4-y^4} dxdy. = \left[\int_0^\infty t^3 e^{-t^4} dt\right]^2 = \frac{1}{16}\,.$$

Esercizio 3 La superficie S si parametrizza in coordinate cilindriche nel modo seguente:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = r^2, \qquad (r,\vartheta) \in [0,1]\times[0,2\pi].$$

La matrice Jacobiana è

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ 2r & 0 \end{pmatrix},$$

Dunque

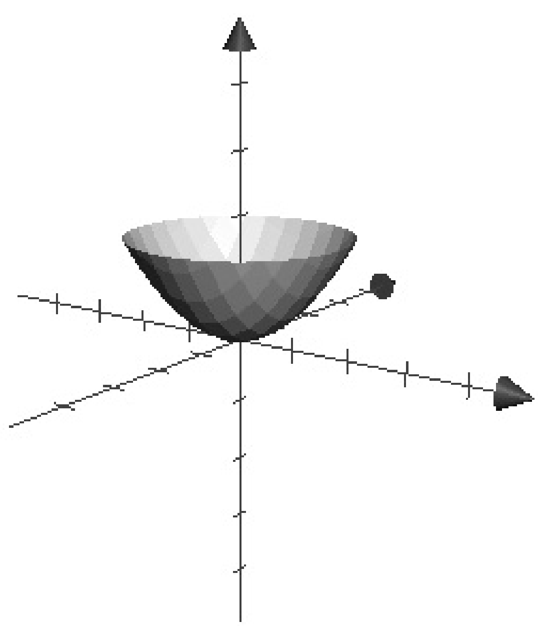
$$E = 1 + 4r^2, \quad G = r^2, \quad F = 0,$$

e pertanto l'integrale proposto vale

$$\begin{aligned} \int_S (3x^2 - 2y^2)d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2(3\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta)\sqrt{(1+4r^2)r^2}\, d\vartheta dr = \\ &= \int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\, dr \int_0^{2\pi} (3\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta)d\vartheta, \end{aligned}$$

e con facili calcoli si ricava

$$\int_S (3x^2 - 2y^2)d\boldsymbol{\sigma} = \pi\left(\frac{2^{3/2}}{3} - \frac{2^{7/2}}{5} - \frac{2}{15}\right).$$



Prova scritta del 13 gennaio 2014

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \exp(e^y - y) \\ y(1) = \ln 2, \end{cases}$$

stabilendo l'intervallo massimale di esistenza e calcolando il limite di $y(x)$ al tendere di x verso i due estremi.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u' = 3u + v + w \\ v' = -u - w \\ w' = v + 2w. \end{cases}$$

Esercizio 3 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 12x + 4y$$

nell'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + (y + 2)^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 4 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x \right) dx.$$

Esercizio 5 Si consideri la curva Γ definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (1 - |t|)(1 + t) \\ y = t(t^2 - 1), \end{cases} \qquad t \in [-1, 1].$$

Si verifichi che Γ è una curva chiusa e si determini l'area della regione A da essa delimitata.

Esercizio 6 Sia Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq y\}.$$

Si calcoli l'integrale

$$\int_\Sigma |x| \, z^2 \, d\boldsymbol{\sigma}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 L'equazione differenziale è a variabili separabili e possiamo riscriverla così:

$$e^{-e^y}\, e^y\, dy = dx.$$

Si ha allora successivamente, posto $u = e^y$:

$$e^{-u}\, du = dx$$

$$-e^{-u} = x + c$$

$$e^y = u = -\ln(-x-c) = \ln\frac{1}{-x-c}$$

$$y = \ln\ln\frac{1}{-x-c}.$$

La condizione $y(1) = \ln 2$ implica

$$\ln 2 = y(1) = \ln\ln\frac{1}{-1-c},$$

da cui, facilmente,

$$c = -1 - e^{-2},$$

e finalmente

$$y(x) = \ln\ln\frac{1}{1+e^{-2}-x}\,.$$

L'intervallo massimale in cui y è definita si ricava imponendo che

$$\frac{1}{1+e^{-2}-x} > 1$$

(affinché abbiano senso i due logaritmi). In particolare deve essere

$$0 < 1 + e^{-2} - x < 1,$$

il che equivale a

$$e^{-2} < x < 1 + e^{-2}.$$

Si ha infine, con facile verifica,

$$\lim_{x\to(1+e^{-2})^-} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to(e^{-2})^+} y(x) = -\infty.$$

Esercizio 2 Il sistema differenziale è omogeneo. La matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e l'equazione $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, sviluppata lungo l'ultima riga, dà

$$0 = -(\lambda - 2) + (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1).$$

Vi sono dunque i due autovalori 1 (semplice) e 2 (doppio).
È facile vedere che un autovettore relativo all'autovalore 1 è $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1)$. Per l'autovalore 2 vi è l'autovettore $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$ e l'autospazio ha dimensione 1. Quindi occorre determinare un vettore-polinomio $\mathbf{p}(t)$ di grado 1 tale che $\mathbf{p}(t)\, e^{2t}$ risolva il sistema. Posto $\mathbf{p}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)$, e sostituendo nel sistema, si ottiene

$$\begin{cases} (b_1 + 2a_1 + 2b_1 t)\, e^{2t} = (3a_1 + 3b_1 t + a_2 + b_2 t + a_3 + b_3 t)\, e^{2t} \\ (b_2 + 2a_2 + 2b_2 t)\, e^{2t} = (-a_1 - b_1 t - a_3 - b_3 t)\, e^{2t} \\ (b_3 + 2a_3 + 2b_3 t)\, e^{2t} = (a_2 + b_2 + 2a_3 + 2b_3 t)\, e^{2t}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} b_1 + 2a_1 = 3a_1 + a_2 + a_3 \\ 2b_1 = 3b_1 + b_2 + b_3 \\ b_2 + 2a_2 = -a_1 - a_3 \\ 2b_2 = -b_1 - b_3 \\ b_3 + 2a_3 = a_2 + 2a_3 \\ 2b_3 = b_2 + 2b_3\,. \end{cases}$$

Questo sistema ha le soluzioni

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = -b_3\,, \qquad a_2 = b_3\,, \qquad a_1 + a_3 = -2b_3$$

e quindi si può scegliere

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = (1, 0, -1), \qquad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (1, -1, 1).$$

Dunque

$$\mathbf{p}(t) = (1 + t, -1, 1 - t),$$

e l'insieme delle soluzioni del sistema è dato dalle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 + t \\ -1 \\ 1 - t \end{pmatrix} e^{2t},$$

al variare di c_1 , c_2 e c_3 in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3 La funzione f è di classe C^∞. Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E: si ha $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \mathbf{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 8x - 12 = 0 \\ 2y + 4 = 0, \end{cases}$$

e questo sistema ha l'unica soluzione $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, che è interna ad E come richiesto. Calcoliamo la matrice Hessiana in tale punto: essa è la matrice diagonale

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono positivi e pertanto $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ è punto di minimo locale per f.
Vediamo cosa succede sul bordo di E. Si tratta di una ellisse centrata in $(0,-2)$, con semiassi paralleli agli assi coordinati e di lunghezza 2 e 1. Possiamo parametrizzare ∂E nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = -2 + \sin\vartheta, \end{cases} \qquad \vartheta \in [-\pi, \pi].$$

La funzione f, ristretta a ∂E, diventa

$$\begin{aligned} g(\vartheta) &= f(2\cos\vartheta, -2+\sin\vartheta) = \\ &= 16\cos^2\vartheta + (-2+\sin\vartheta)^2 - 24\cos\vartheta + 4(-2+\sin\vartheta) = \\ &= 16\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - 4\sin\vartheta + 4 - 24\cos\vartheta - 8 + 4\sin\vartheta = \\ &= 15\cos^2\vartheta - 24\cos\vartheta - 3. \end{aligned}$$

Annulliamo la derivata di g: si ha $g'(\vartheta) = 0$ se e solo se

$$-30\cos\vartheta\sin\vartheta + 24\sin\vartheta = 0,$$

ossia se e solo se $\sin\vartheta = 0$ oppure $\cos\vartheta = \frac{4}{5}$. Si hanno quindi i punti stazionari vincolati seguenti:

$$\begin{aligned} &\text{per} \quad \cos\vartheta = \tfrac{4}{5}: \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{13}{5}\right), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{7}{5}\right); \\ &\text{per} \quad \sin\vartheta = 0: \quad (2,-2), \quad (-2,-2). \end{aligned}$$

Non resta che calcolare i valori di f in tutti i punti trovati: si ha

$$f\left(\tfrac{3}{2},-2\right)=-13,\quad f\left(\tfrac{8}{5},-\tfrac{13}{5}\right)=f\left(\tfrac{8}{5},-\tfrac{7}{5}\right)=-\tfrac{63}{5}=-12.6,$$
$$f(2,-2)=-12,\quad f(-2,-2)=36.$$

Pertanto

$$\max_E f=f(-2,-2)=36,\qquad \min_E f=f\left(\tfrac{3}{2},-2\right)=-13.$$

Osservazione 1 In maniera equivalente, potevamo analizzare la $g(\vartheta)$ cambiando variabile: posto $t=\cos\vartheta$, la funzione da studiare è

$$h(t)=15t^2-24t-3,\qquad t\in[-1,1].$$

Essendo

$$h'(t)=30t-24=0\quad \text{se e solo se}\quad t=\frac{4}{5}\,,$$

occorre considerare il punto $t=\frac{4}{5}$ nonché i due estremi $t=\pm1$: si ricavano

$$\begin{aligned}
&\text{per}\ \ t=\tfrac{4}{5}: && \left(\tfrac{8}{5},-\tfrac{13}{5}\right),\ \ \left(\tfrac{8}{5},-\tfrac{7}{5}\right);\\
&\text{per}\ \ t=-1: && (-2,-2),\\
&\text{per}\ \ t=1: && (2,-2),
\end{aligned}$$

che sono ovviamente i punti già trovati.

Osservazione 2 Naturalmente si poteva usare anche il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: posto

$$L(x,y,\lambda)=4x^2+y^2-12x+4y+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+(y+2)^2-1\right),$$

il gradiente di L si annulla se e solo se

$$\begin{cases} 8x-12+\frac{\lambda x}{2}=0\\ 2y+4+2\lambda(y+2)=0\\ \frac{x^2}{4}+(y+2)^2-1=0. \end{cases}$$

La seconda equazione si riscrive come $2(y+2)(1+\lambda)=0$: quindi è risolta per $y=-2$, che implica (usando la terza equazione) $x=\pm2$, oppure per

$\lambda = -1$: in questo caso, grazie alla prima equazione, si ha $\frac{15}{2}x - 12 = 0$, ossia $x = \frac{8}{5}$ e dunque, dalla terza, $(y+2)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, da cui infine $y = -\frac{13}{5}$ oppure $y = -\frac{7}{5}$. In definitiva si ritrovano i punti

$$(2,-2), \quad (-2,-2), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{13}{5}\right), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{7}{5}\right).$$

Esercizio 4 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione integranda

$$f_n(x) = \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x\right)$$

è continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, quindi è misurabile; essa è anche integrabile essendo evidentemente limitata. Inoltre si ha convergenza puntuale, poiché scrivendo

$$f_n(x) = \frac{n^2\left(-\sin 2x + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{x^2}{n^2}\right)} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x\right)$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\frac{\sin 2x}{2} e^{-\sin x} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

La convergenza è dominata in quanto, come si vede immediatamente,

$$|f_n(x)| \le \frac{\sin 2x + 3}{2} \le 2 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dal teorema di Lebesgue segue allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x\right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, e^{-\sin x} \, dx.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale: ponendo $\sin x = t$ si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, e^{-\sin x} \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \sin x \, e^{-\sin x} \, dx = \\ &= \int_0^1 t \, e^{-t} \, dt = \left[(-t-1)e^{-t}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x\right) dx = 2e^{-1} - 1.$$

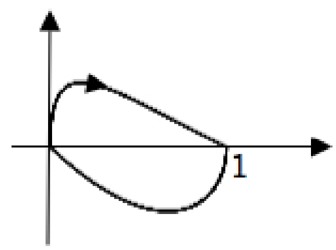
Esercizio 5 La curva Γ è chiusa perché, posto

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \big((1-|t|)(1+t), t(t^2-1)\big),$$

si ha $\boldsymbol{\varphi}(-1) = (0,0) = \boldsymbol{\varphi}(1)$. Inoltre $\boldsymbol{\varphi}$ è di classe C^1 a tratti, dato che $\boldsymbol{\varphi}|_{[-1,0]}$ e $\boldsymbol{\varphi}|_{[0,1]}$ sono curve di classe C^1. Per calcolare l'area della regione A delimitata da Γ conviene utilizzare le formule di Gauss-Green. Non essendoci particolari simmetrie, useremo la formula

$$m_2(A) = \int_{+\Gamma} x\,dy,$$

ove l'orientazione positiva di Γ è quella antioraria. Osserviamo che tale orientazione è opposta a quella delle t crescenti: infatti per $t \in]-1,0[$ si ha $y > 0$ e x crescente da 0 a 1, mentre per $t \in]0,1[$ risulta $y < 0$ e x decrescente da 1 a 0. Avremo dunque, essendo $y' = 3t^2 - 1$,



$$m_2(A) = \int_{+\Gamma} x\,dy = -\int_{-1}^{1} (1-|t|)(1+t)(3t^2-1)\,dt.$$

Dunque

$$\begin{aligned} m_2(A) &= -\int_{-1}^{0} (1+t)^2(3t^2-1)\,dt - \int_0^1 (1-t^2)(3t^2-1)\,dt = \\ &= -\int_{-1}^{0} (3t^4+6t^3+2t^2-2t-1)\,dt - \int_0^1 (-3t^4+4t^2-1)\,dt = \\ &= -\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+1-1\right) - \left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{3}-1\right) = \frac{5}{2}-2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 6 La superficie Σ è una superficie cilindrica tagliata da un piano obliquo. Notando che $0 \le z \le y$ e utilizzando le coordinate cilindriche possiamo parametrizzare Σ nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = z, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0,\pi], \quad 0 \le z \le \sin\vartheta.$$

La matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e dunque $E = 1$, $G = 1$, $F = 0$. Ne segue

$$\int_\Sigma |x|\, z^2\, d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^\pi \int_0^{\sin\vartheta} |\cos\vartheta|\, z^2\, dz d\vartheta = \frac{1}{3}\int_0^\pi |\cos\vartheta|\, \sin^3\vartheta\, d\vartheta$$

ed infine

$$\int_\Sigma |x|\, z^2\, d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{6}\,.$$

Prova scritta del 3 febbraio 2014

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{5x^2 + 4y^2}{4x^2} \\ y(-1) = -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

stabilendo l'intervallo massimale di esistenza I e calcolando il limite di $y(x)$ al tendere di x verso ciascuno dei due estremi di I.

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}}\, dx.$$

Esercizio 3 Sia Γ il sostegno della curva del piano xz di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin t \\ z = 3 - 4\cos^2 t, \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(a) Si calcoli la lunghezza di Γ.

(b) Si determini l'area della superficie che si ottiene ruotando Γ rispetto all'asse z.

Risoluzione

Esercizio 1 Riscriviamo l'equazione data nella forma

$$y' = \frac{5}{4} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Si tratta di una equazione differenziale del primo ordine, non lineare, omogenea. Essa si risolve con la sostituzione

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Si ha:

$$u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{5}{4} + u^2 - u\right),$$

e questa è una equazione differenziale a variabili separabili. Si ha dunque successivamente

$$\frac{du}{\frac{5}{4} + u^2 - u} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{du}{u^2 - u + \frac{1}{4} + 1} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{du}{1 + (u - \frac{1}{2})^2} = \frac{dx}{x}.$$

Quindi, integrando i due membri,

$$\arctan\left(u - \frac{1}{2}\right) = \ln|x| + c,$$

$$u(x) = \frac{1}{2} + \tan(\ln|x| + c),$$

e finalmente

$$y(x) = \frac{x}{2} + x\tan(\ln|x| + c).$$

La condizione iniziale $y(-1) = -\frac{3}{2}$ ci dice che

$$-\frac{3}{2} = y(-1) = -\frac{1}{2} - \tan c,$$

da cui $-\tan c = -1$ e dunque $c = \frac{\pi}{4}$. Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{2} + x\tan\left(\ln|x| + \frac{\pi}{4}\right).$$

Essa è definita nell'intervallo I tale che

$$\ln|x| + \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

ossia

$$\ln|x| \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[,$$

$$-x = |x| \in \left]e^{-\frac{3\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{4}}\right[,$$

$$x \in \left]-e^{\frac{\pi}{4}}, -e^{-\frac{3\pi}{4}}\right[.$$

Risulta, come è immediato verificare,

$$\lim_{x\to(-e^{\frac{\pi}{4}})^+} y(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to(-e^{-\frac{3\pi}{4}})^-} y(x) = +\infty.$$

Esercizio 2 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione integranda è positiva e continua in $[0, \infty[$, e si ha chiaramente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{4}} \qquad \forall x \geq 0.$$

Il numeratore è crescente rispetto a n, ma per il denominatore la crescenza o decrescenza rispetto a n non è chiara. Conviene allora verificare le ipotesi del teorema di Lebesgue. Se consideriamo separatamente l'intervallo limitato $[0, 2]$ e la semiretta $]2, \infty[$, nella quale le potenze a denominatore hanno entrambe base maggiore di 1, otteniamo le stime

$$\frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} \leq 1 \qquad \forall x \in [0, 2], \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} \leq \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x > 2, \quad \forall n \geq 2.$$

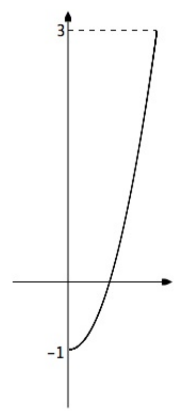
La funzione

$$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in[0,2] \\[2mm] \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}} & \text{se } x>2 \end{cases}$$

è sommabile in $[0,\infty[$, essendo continua, limitata e comportandosi come $x^{-\frac{4}{3}}$ per $x\to\infty$; quindi possiamo concludere, per convergenza dominata, che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1+x^{\frac{n+1}{n}}+\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}}\,dx =$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{4}}\,dx=\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{2})^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2}=2.$$

Esercizio 3 (a) L'insieme Γ è il sostegno della curva



$$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\sin t, 3-4\cos^2 t),\qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

la quale è di classe C^1. Si ha

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=(\cos t, 8\cos t\sin t),\qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

da cui

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\varphi}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t+64\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{1+64\sin^2 t}\,dt=\int_0^1\sqrt{1+64s^2}\,ds.\end{aligned}$$

Ponendo $8s=u$, si ottiene

$$\ell(\boldsymbol{\varphi})=\frac{1}{8}\int_0^8\sqrt{1+u^2}\,du;$$

ricordando che una primitiva di $\sqrt{1+u^2}$ è

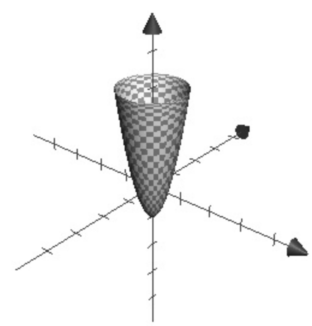
$$\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right),$$

si conclude che

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{16}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^8 = \frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{1}{16}\ln\left(8+\sqrt{65}\right).$$

(b) Denotiamo con Σ il ruotato di Γ, ossia il sostegno della superficie $\boldsymbol{\sigma}(t,\vartheta)$ di componenti

$$\begin{cases} x = \sin t\, \cos\vartheta \\ y = \sin t\, \sin\vartheta \\ z = 3 - 4\cos^2 t. \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$



Si ha

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos t\, \cos\vartheta & -\sin t \sin\vartheta \\ \cos t\, \sin\vartheta & \sin t\, \cos\vartheta \\ 8\cos t\, \sin t & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$E = \cos^2 t\,(1 + 64\sin^2 t), \quad G = \sin^2 t, \quad F = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} a(\Sigma) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t\, \sin^2 t\,(1+64\sin^2 t)}\, d\vartheta dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, \sin t\, \sqrt{1+64\sin^2 t}\, dt = 2\pi \int_0^1 s\,\sqrt{1+64s^2}\, ds = \\ &= \frac{\pi}{32}\int_0^8 u\,\sqrt{1+u^2}\, du = \frac{\pi}{64}\int_0^{64} \sqrt{1+v}\, dv = \frac{\pi}{96}\left[(65)^{\frac{3}{2}} - 1\right]. \end{aligned}$$

Prova scritta del 13 giugno 2014

Esercizio 1 Fissato $R > 0$, si trovino il massimo ed il minimo della funzione

$$\sum_{i=1}^{N} \ln\frac{2}{1+x_i^2}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

sull'insieme $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ |\mathbf{x}|_N = R\}$.

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{4-\frac{1}{n}} e^{\frac{t^2}{n}} \frac{[t(4-t)]^n}{1+[t(4-t)]^n}\, dt.$$

Esercizio 3 Sia Γ la curva definita da

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1, \ y = x\},$$

e si fissi come orientazione positiva su Γ quella determinata dal versore tangente $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ tale che $\tau_1(0,0,1) < 0$. Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{+\Gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds,$$

ove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y - z + \arctan x^2, \ x - z - \sin y^2, \ x + y - e^{z^2}).$$

Risoluzione

Esercizio 1 Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori e consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \ln \frac{2}{1+x_i^2} + \lambda \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - R^2 \right];$$

annullandone il gradiente, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2x_i \left(\frac{1}{1+x_i^2} - \lambda \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, N \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 = R^2. \end{cases}$$

Le prime N equazioni del sistema hanno le soluzioni

$$x_i = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x_i = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}\,,$$

ove $\lambda \in]0,1[$ è il corrispondente moltiplicatore. Quindi un generico punto stazionario vincolato avrà alcune componenti nulle (ma non tutte, avendo norma euclidea uguale a R) ed altre non nulle, uguali al valore sopra indicato. Per $p = 1, \ldots, N$ indichiamo con S_p l'insieme dei punti stazionari vincolati che hanno esattamente p componenti non nulle; l'insieme S_p ha cardinalità $\binom{N}{p}$. Detto λ_p il moltiplicatore relativo ai punti stazionari di S_p, si ha

$$R^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = p\left(\frac{1}{\lambda_p} - 1\right) \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p\,,$$

da cui

$$\lambda_p = \frac{1}{1 + \frac{R^2}{p}}\,, \qquad x_i^2 = \frac{R^2}{p} \quad \forall \mathbf{x} \in S_p\,,$$

ed inoltre

$$g(\mathbf{x}) = (N-p)\ln 2 + p \ln \frac{2}{1 + \frac{R^2}{p}} \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p\,.$$

Dunque g assume $N-1$ valori critici, vale a dire

$$g(\mathbf{x}) = (N-p)\ln 2 + p \ln \frac{2}{1 + \frac{R^2}{p}} \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p, \quad p = 1, \ldots, N.$$

Per determinare, fra tutti i valori critici, il massimo ed il minimo di g, possiamo scrivere per $\mathbf{x} \in S_p$

$$g(\mathbf{x}) = (N-p)\ln 2 + p\ln 2 - p\ln\left(1 + \frac{R^2}{p}\right) = N\ln 2 - \ln\left(1 + \frac{R^2}{p}\right)^p;$$

osservato che $p \mapsto \left(1 + \frac{R^2}{p}\right)^p$ è funzione crescente di p, si conclude che $p \mapsto -p\ln\left(1 + \frac{R^2}{p}\right)$ è decrescente e dunque il valore massimo di g si ottiene per $p = 1$. Quindi

$$\max_S g = \max_{S_1} g = N\ln 2 - \ln(1 + R^2),$$

$$\min_S g = \min_{S_N} g = N\ln 2 - \ln\left(1 + \frac{R^2}{N}\right)^N.$$

Esercizio 2 Possiamo scrivere l'integrale nella forma

$$\int_0^4 \chi_{[0,4-\frac{1}{n}]}(t)\, e^{\frac{t^2}{n}}\, \frac{[t(4-t)]^n}{1 + [t(4-t)]^n}\, dt.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione integranda è misurabile perché continua salvo che in un punto (il punto $4 - \frac{1}{n}$). Calcoliamo il limite puntuale: $e^{\frac{t^2}{n}} \to 1$ per ogni $t \in [0,4]$, mentre $t(4-t)$ è una funzione non negativa che ha massimo in 2, dove vale 4; essa vale 1 nei due punti $2 \pm \sqrt{3}$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} [t(4-t)]^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } 2-\sqrt{3} < t < 2+\sqrt{3}, \\ 0 & \text{se } t \in [0, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, \pi], \\ 1 & \text{se } t = 2 \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

Essendo ovviamente $\chi_{[0,4-\frac{1}{n}]}(t) \to 1$ per $n \to \infty$ per ogni $t \in [0,4]$, si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{t^2}{n}} \frac{[t(4-t)]^n}{1+[t(4-t)]^n} = \begin{cases} 1 & \text{se } 2-\sqrt{3} < t < 2+\sqrt{3}, \\ 0 & \text{se } t \in [0, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, \pi], \\ 1/2 & \text{se } t = 2 \pm \sqrt{3}; \end{cases}$$

quindi c'è convergenza puntuale dell'integrando. Controlliamo se esso è dominato: si ha

$$e^{\frac{t^2}{n}} \frac{[t(4-t)]^n}{1+[t(4-t)]^n} \le e^{16} \cdot \frac{[t(4-t)]^n}{1+[t(4-t)]^n} \le e^{16} \qquad \forall t \in [0,4].$$

Dunque la convergenza è dominata e pertanto possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{4-\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}} \frac{[t(4-t)]^n}{1+[t(4-t)]^n}\, dt = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} 1\, dt = 2\sqrt{3}.$$

Esercizio 3 Possiamo utilizzare due metodi: calcolare direttamente l'integrale curvilineo, oppure utilizzare il teorema di Stokes cercando un'opportuna superficie regolare Σ tale che $b\Sigma = \Gamma$, e calcolando il rotore del campo $\mathbf{F}$.

Primo metodo: poiché

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + z^2 = 1, \ y = x\},$$

possiamo parametrizzare Γ come segue:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \quad z = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Il versore tangente indotto è

$$\boldsymbol{\tau} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin t,\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin t,\; \cos t\right)$$

e nel punto $(0,0,1)$, che corrisponde al parametro $t=\frac{\pi}{2}$, si ha $\tau_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ come richiesto. Inoltre, ovviamente,

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt = 1\,dt.$$

Dobbiamo allora calcolare il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{+\Gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\,ds &= \int_0^{2\pi} \Big[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos t - \sin t + \arctan\frac{\sin^2 t}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin t\right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos t - \sin t - \sin\frac{\sin^2 t}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin t\right) + \\
&\quad + \left(\sqrt{2}\cos t - e^{\frac{\sin^2 t}{2}}\right)\cos t\Big]\,dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-\sin t\cos t + \sqrt{2}\, - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin^2 t}{2}\,\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin\frac{\sin^2 t}{2}\,\sin t - e^{\frac{\sin^2 t}{2}}\,\cos t\Big]\,dt.
\end{aligned}$$

Il primo e gli ultimi tre integrali sono nulli per disparità e per periodicità. Perciò

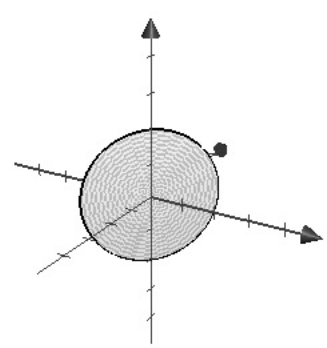
$$\int_{+\Gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\pi\,\sqrt{2}.$$

Secondo metodo: poiché $\Gamma = b\Sigma$, ove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; 2x^2 + z^2 \le 1,\; y = x\},$$

possiamo scrivere, grazie al teorema di Stokes,

$$\int_{+\Gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\,ds = \int_{+\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\,d\boldsymbol{\sigma}.$$



L'orientazione positiva di Σ va scelta in modo coerente con l'orientazione positiva di $b\Sigma$. Parametrizziamo Σ:

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}\,\cos t, \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}\,\cos t, \quad z = r\sin t, \qquad r\in[0,1],\; t\in[0,2\pi].$$

Allora la matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\frac{r}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\frac{r}{\sqrt{2}}\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix};$$

quindi

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

e

$$\sqrt{EG - F^2} = r.$$

L'orientazione indotta da $\mathbf{n}$ è tale che, percorrendo Γ nel verso positivo, ci si ritrova $\mathbf{n}$ a sinistra; quindi le due orientazioni sono coerenti.
Calcoliamo il rotore di $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y - z + \arctan x^2 & x - z - \sin y^2 & x + y - e^{z^2} \end{pmatrix};$$

quindi

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (2, -2, 0).$$

Pertanto

$$\int_{+\Gamma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds = \int_{+\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{2} + \sqrt{2})\, r \, dr dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Prova scritta del 7 luglio 2014

Esercizio 1 Risolvere i problemi di Cauchy

$$\textbf{(i)} \begin{cases} y' = (2 + 3y^2)\cos t \\ \\ y(0) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \end{cases} \qquad \textbf{(ii)} \begin{cases} y' = 2y\cos t + 3y^2\cos^3 t \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(n + x^n)}{1 + nx^2} \, dx.$$

Esercizio 3 Sia

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \ z \in [0, \pi], \ 0 \le x \le 2 - \cos z\}.$$

Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{1}{4 + \cos^2 z} \, dxdydz,$$

ove E è l'insieme ottenuto ruotando D attorno all'asse z.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Si tratta di una equazione a variabili separabili: quindi possiamo scrivere successivamente

$$\frac{dy}{2 + 3y^2} = \cos t \, dt,$$

$$\frac{dy}{2\left(1 + \frac{3}{2}\, y^2\right)} = \cos t \, dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}\, y = \sin t + c,$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \, \tan\left(\sqrt{6}(\sin t + c)\right).$$

La condizione iniziale implica infine

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \, \tan \sqrt{6}\, c,$$

ossia $c = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}$. Pertanto

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \, \tan\left(\sqrt{6} \sin t + \frac{\pi}{4}\right).$$

(ii) Si tratta di una equazione di Bernoulli di parametro $\alpha = 2$. Posto quindi $u = \frac{1}{y}$, si ha

$$u' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{y} \, \cos t - 3\cos^3 t = -2u \, \cos t - 3\cos^3 t.$$

Questa equazione lineare ha per soluzione

$$u(t) = e^{-2\sin t}\left[u(0) - 3\int_0^t e^{2\sin s}\cos^3 s\,ds\right].$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{2\sin s}\cos^3 s\,ds &= \int_0^t e^{2\sin s}(1-\sin^2 s)\cos s\,ds = \\ &= \int_0^{\sin t} e^{2r}(1-r^2)\,dr = \left[e^{2r}\left(\frac{1}{4} - \frac{r^2}{2} + \frac{r}{2}\right)\right]_0^{\sin t} = \\ &= e^{2\sin t}\left(\frac{1}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{\sin t}{2}\right) - \frac{1}{4}\,;\end{aligned}$$

quindi, ricordando che $u(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$, si ricava facilmente che

$$u(t) = \frac{7}{4}\,e^{-2\sin t} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}(\sin^2 t - \sin t),$$

da cui finalmente

$$y(t) = \frac{1}{\frac{7}{4}\,e^{-2\sin t} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}(\sin^2 t - \sin t)}\,.$$

Esercizio 2 La funzione integranda è continua e non negativa, dunque l'integrale ha senso. Analizziamo il limite puntuale dell'integrando. Nell'argomento del logaritmo, per $0 < x < 1$ domina il monomio n, mentre per $x > 1$ domina la potenza x^n: quindi possiamo scrivere

$$\ln(n + x^n) = \begin{cases} \ln n + \ln\left(1 + \frac{x^n}{n}\right) & \text{se } 0 < x < 1, \\ n\ln x + \ln\left(1 + \frac{n}{x^n}\right) & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+x^n)}{1+nx^2} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{x^n}{n}\right)}{1+nx^2} = 0 & \text{se } 0 < x < 1, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln x + \ln\left(1+\frac{n}{x^n}\right)}{1+nx^2} = \frac{\ln x}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Vediamo adesso se l'integrando è dominato: per $x > 1$, essendo $\ln\left(1+\frac{n}{x^n}\right)$ limitata superiormente in $[1,\infty[$, si ha

$$\frac{\ln(n+x^n)}{1+nx^2} \le \frac{n\ln x + A}{1+nx^2} \le \frac{n\ln x + A}{nx^2} \le \frac{\ln x}{x^2} + \frac{A}{x^2},$$

ove A è un'opportuna costante. Se invece $0 < x < 1$ possiamo scrivere, essendo $\ln\left(1+\frac{x^n}{n}\right)$ limitata superiormente in $]0,1]$,

$$\frac{\ln(n+x^n)}{1+nx^2} = \frac{\ln n + A}{(1+nx^2)^{\frac{1}{4}}(1+nx^2)^{\frac{3}{4}}} \le \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}} + A \le \frac{B}{\sqrt{x}} + A,$$

con B ed A costanti opportune. Si conclude che l'integrando è dominato dalla funzione sommabile

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x + A}{x^2} & \text{se } 0 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{B}{\sqrt{x}} + A & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

e pertanto, in virtù del teorema di Lebesgue, integrando per parti si trova

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(n+x^n)}{1+nx^2}\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Esercizio 3 L'insieme D è chiuso in $\mathbb{R}^2$, quindi è misurabile; lo stesso vale per E, il quale può essere descritto come segue:

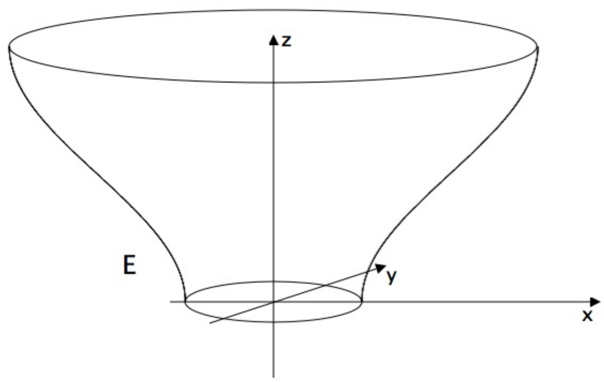
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in D\}.$$

Utilizzando le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\,\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta, \\ z = z, \end{cases}$$

l'integrale da calcolare diventa

$$\int_E \frac{1}{4+\cos^2 z}\,dxdydz = \int_0^\pi \int_0^{2-\cos z} \int_0^{2\pi} \frac{r}{4+\cos^2 z}\,d\vartheta drdz =$$
$$= 2\pi \int_0^\pi \int_0^{2-\cos z} \frac{r}{4+\cos^2 z}\,drdz = \pi \int_0^\pi \frac{(2-\cos z)^2}{4+\cos^2 z}\,dz =$$
$$= \pi \int_0^\pi \frac{4-4\cos z+\cos^2 z}{4+\cos^2 z}\,dz = \pi^2 + 0 = \pi^2.$$



Prova scritta del 10 settembre 2014

Esercizio 1 Si consideri la funzione $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$z(t) = \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, e^{itx}\, dx.$$

(i) Si provi che z è derivabile.

(ii) Si mostri che z risolve un'equazione differenziale lineare omogenea.

(iii) Si determini esplicitamente z.

Esercizio 2 Sia

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+bxy+y^2)}\, dxdy,$$

ove b è un parametro reale. Si stabilisca per quali valori di b risulta $I < \infty$, e in tal caso si calcoli l'integrale.

Esercizio 3 Sia Γ la curva piana espressa in coordinate polari dalle relazioni

$$r = |\vartheta|^3, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi].$$

Si calcoli:

(i) la lunghezza di Γ;

(ii) l'area della regione A delimitata da Γ.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Consideriamo il rapporto incrementale di z in un generico punto $t \in \mathbb{R}$: si ha

$$\frac{z(t+h)-z(t)}{h} = \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, e^{itx}\, \frac{e^{ihx}-1}{h}\, dx.$$

L'integrando chiaramente converge per $h \to 0$ a $i\, x^{1/2}\, e^{-x}\, e^{itx}$; inoltre esso è puntualmente dominato, in quanto

$$\left| x^{-1/2}\, e^{-x}\, e^{itx}\, \frac{e^{ihx}-1}{h} \right| = x^{-1/2}\, e^{-x} \left| \frac{1}{h} \int_0^h ix\, e^{isx}\, ds \right| \le x^{1/2}\, e^{-x},$$

e risulta

$$\int_0^\infty x^{1/2}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty 2t^2\, e^{-t^2}\, dt < \infty.$$

Per il teorema di Lebesgue si conclude che z è derivabile con

$$z'(t) = i \int_0^\infty x^{1/2}\, e^{-x}\, e^{itx}\, dx.$$

(ii) Integriamo per parti la relazione che definisce $z'(t)$: si ha

$$z'(t) = i \left[x^{1/2} \frac{e^{x(-1+it)}}{-1+it} \right]_0^\infty - \frac{i}{2(-1+it)} \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{x(-1+it)}\, dx.$$

Il primo termine è nullo, perché per $x \to \infty$ si ha $e^{x(-1+it)} \to 0$. e per $x = 0$ ovviamente $x^{1/2} = 0$; il secondo termine è esattamente $-\frac{i}{2(-1+it)} z(t)$. Dunque vale l'equazione differenziale ineare omogenea

$$z'(t) = -\frac{i}{2(-1+it)} z(t).$$

(iii) L'equazione ha la soluzione generale

$$z(t) = z(0) e^{-\int_0^t \frac{i}{2(-1+is)}\, ds};$$

Notiamo però che

$$z(0) = \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty 2\, e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi},$$

ed inoltre

$$-\int_0^t \frac{i}{2(-1+is)}\,ds = -\frac{i}{2}\int_0^t \frac{-1-is}{1+s^2}\,ds = \frac{i}{2}\,\arctan t - \frac{1}{4}\ln(1+t^2).$$

Perciò

$$z(t) = \sqrt{\pi}\frac{1}{(1+t^2)^{1/4}}\,e^{i\frac{\arctan t}{2}}.$$

Esercizio 2 L'esponente dell'integrando è una forma quadratica reale e simmetrica, la cui matrice associata A ha autovalori $1 \pm |b|/2$. Se $1-|b|/2<0$, ossia $|b|>2$, si ha

$$x^2+bxy+y^2<0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}<\frac{y}{x}<\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2};$$

detto Ω l'aperto di $\mathbb{R}^2$ definito da tali disuguaglianze, Ω è un doppio settore di misura infinita, nel quale l'integrando è una esponenziale positiva: ne segue che

$$|b|>2 \qquad \Longrightarrow \qquad I=+\infty.$$

Se $b=\pm 2$ l'integrale diventa

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2\pm 2xy+y^2)}\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x\pm y)^2}\,dxdy,$$

e posto, per $\delta>0$,

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x+y|<\delta\},\quad \text{oppure} \quad \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x-y|<\delta\},$$

si ha in entrambi i casi

$$I \geq \int_\Omega e^{-\delta^2}\,dxdy = +\infty$$

dato che $m_2(\Omega)=+\infty$. Perciò $I=+\infty$ per $|b|\geq 2$.
Invece se $|b|<2$ entrambi gli autovalori sono positivi, e quindi esiste $\sigma>0$ tale che

$$x^2+bxy+y^2 \geq \sigma(x^2+y^2) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2;$$

ne segue

$$I \leq \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sigma(x^2+y^2)}dxdy < \infty.$$

Calcoliamo in questo caso l'integrale: una base ortonormale di autovettori relativi agli autovalori $1 \pm b/2$ è data da

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \qquad \text{per } \lambda_1 = 1 + \frac{b}{2},$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \qquad \text{per } \lambda_2 = 1 - \frac{b}{2}.$$

Con il cambiamento di base che manda $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{e}_2$, ossia

$$(x,y) = T(u,v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}} \right),$$

la matrice A viene diagonalizzata: quindi si ha, essendo $J_T = 1$ e $T^{-1} = T$,

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+bxy+y^2)} dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1+\frac{b}{2})u^2-(1-\frac{b}{2})v^2} dudv.$$

Ricordando infine che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ct^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \qquad \forall c > 0,$$

si conclude che se $|b| < 2$ risulta

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1+\frac{b}{2})u^2-(1-\frac{b}{2})v^2} dudv = \int_{\mathbb{R}} e^{-(1+\frac{b}{2})u^2} du \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-\frac{b}{2})v^2} dv = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{b^2}{2}}}.$$

Esercizio 3 (i) La curva Γ è regolare a tratti, perché per $\vartheta = 0$ si ha $r = r' = 0$. Dalle note formule valide per le curve espresse in coordinate polari ricaviamo:

$$\ell(\Gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\vartheta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\vartheta^6 + 9\vartheta^4}\, d\vartheta = 2\int_0^{\pi} \vartheta^2\sqrt{9+\vartheta^2}\, d\vartheta.$$

Per calcolare questo integrale, scriviamo

$$\ell(\Gamma) = 2\int_0^{\pi} \vartheta^2\sqrt{9+\vartheta^2}\, d\vartheta = 2\int_0^{\pi} (9+\vartheta^2)^{3/2}\, d\vartheta - 18\int_0^{\pi} (9+\vartheta^2)^{1/2}\, d\vartheta = I_1 - I_2$$

e calcoliamo separatamente I_1 e I_2. Si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_0^\pi (9+\vartheta^2)^{3/2}\,d\vartheta = 2\left[\vartheta(9+\vartheta^2)^{3/2}\right]_0^\pi - 6\int_0^\pi \vartheta^2(9+\vartheta^2)^{1/2}\,d\vartheta = \\ &= 2\pi(9+\pi^2)^{3/2} - 3\ell(\Gamma); \end{aligned}$$

inoltre

$$\begin{aligned} I_2 &= 18\int_0^\pi (9+\vartheta^2)^{1/2}\,d\vartheta = 18\left[\vartheta(9+\vartheta^2)^{1/2}\right]_0^\pi - 18\int_0^\pi \frac{\vartheta^2}{(9+\vartheta^2)^{1/2}}\,d\vartheta = \\ &= 18\pi(9+\pi^2)^{1/2} - 18\int_0^\pi (9+\vartheta^2)^{1/2}d\vartheta + 162\int_0^\pi \frac{1}{(9+\vartheta^2)^{1/2}}\,d\vartheta = \\ &= 18\pi(9+\pi^2)^{1/2} - I_2 + 162\int_0^{\pi/3} \frac{1}{(1+s^2)^{1/2}}\,ds = \\ &= 18\pi(9+\pi^2)^{1/2} - I_2 + 162\ln\left[\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right], \end{aligned}$$

da cui

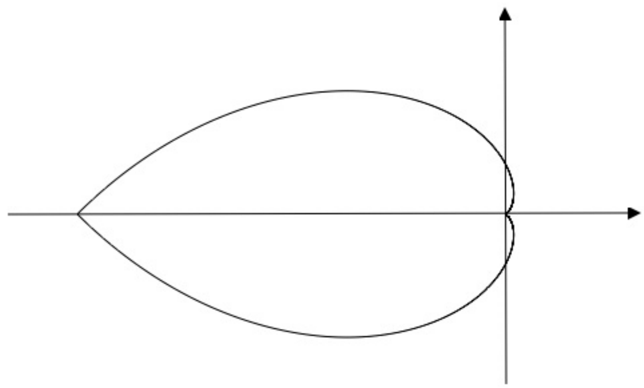
$$I_2 = 9\pi(9+\pi^2)^{1/2} + 81\ln\left[\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right].$$

Mettendo tutto insieme ricaviamo

$$\ell(\Gamma) = I_1 - I_2 = 2\pi(9+\pi^2)^{3/2} - 3\ell(\Gamma) - 9\pi(9+\pi^2)^{1/2} - 81\ln\left[\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right],$$

ovvero

$$\ell(\Gamma) = \frac{\pi}{2}\,(9+\pi^2)^{3/2} - \frac{9\pi}{4}\,(9+\pi^2)^{1/2} - \frac{81}{4}\,\ln\left[\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right].$$



(ii) Utilizzando la ben nota formula per l'area di regioni delimitate da curve espresse in coordinate polari, si ha

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\, d\vartheta = \int_0^{\pi} \vartheta^6\, d\vartheta = \frac{\pi^7}{7}\,.$$

Prova scritta del 12 gennaio 2015

Esercizio 1 Si consideri la funzione $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 + xy - 1 \\ x^2 + yz + 1 \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e si definisca $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}\}$.

(i) Si verifichi che $(0,-1,1) \in Z$ e si provi che esiste un intorno U di $(0,-1,1)$ tale che $Z \cap U$ è immagine di una curva di classe C^∞ della forma

$$x = x, \quad y = h(x), \quad z = k(x), \qquad x \in [-\delta, \delta]$$

con $\delta > 0$ opportuno;

(ii) si determini la retta tangente a Z nel punto $(0,-1,1)$;

(iii) si scrivano i polinomi di Taylor di grado 2 relativi alle funzioni h e k, centrati in 0.

Esercizio 2 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = e^{8(x^2-y^4)}$$

nell'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \le y \le 1\}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_D xy \exp\left(\frac{x^4 + y^4}{xy}\right) dxdy.$$

ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \; y \ge 0, \; x^3 \le 2y, \; y^3 \le 2x\}$.

Esercizio 4 Sia Γ la curva del piano xz di equazioni parametriche

$$x = t^3, \quad z = 3t, \qquad t \in [0, 1],$$

orientata secondo il verso delle t crescenti. Si calcolino:

(i) l'integrale $\int_\Gamma \sqrt{xz + 3}\, ds$,

(ii) l'integrale orientato $\int_{-\Gamma} [e^z\, dx + (x + z^3)\, dz]$,

(iii) l'area della superficie Σ ottenuta ruotando Γ attorno all'asse z.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione $\mathbf{F}$ è di classe C^∞ e si ha ovviamente

$$\mathbf{F}(0, -1, 1) = \mathbf{0}.$$

Calcoliamo la matrice $\mathbf{DF}$:

$$\mathbf{DF}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2x & z & y \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{DF}(0, -1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$, per il teorema del Dini possiamo esplicitare in un intorno U di $(0, -1, 1)$ le variabili y e z in funzione della x; in altre parole, per ogni $(x, y, z) \in U$ vale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0} \quad \iff \quad \begin{cases} x = x \\ y = h(x), \\ z = k(x), \end{cases}$$

con h e k funzioni di classe C^∞, definite in un intorno $[-\delta,\delta]$ di 0, tali che $h(0) = -1$, $k(0) = 1$ e

$$\begin{pmatrix} h'(x) \\ k'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & 2k(x) \\ k(x) & h(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h(x) \\ 2x \end{pmatrix}.$$

(ii) In particolare, dalla formula precedente segue che

$$\begin{pmatrix} x & 2k(x) \\ k(x) & h(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'(x) \\ k'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h(x) \\ 2x \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} xh'(x) + 2k(x)k'(x) = -h(x) \\ k(x)h'(x) + h(x)k'(x) = -2x, \end{cases} \tag{1}$$

da cui, per $x = 0$, segue che $h'(0) = k'(0) = \frac{1}{2}$. Quindi, la retta tangente a Z in $(0,-1,1)$, in forma parametrica, è data da

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + \frac{1}{2}\,t \qquad t \in \mathbb{R}; \\ z = 1 + \frac{1}{2}\,t, \end{cases}$$

equivalentemente, eliminando la t dal sistema precedente, la retta si esprime in forma cartesiana come intersezione dei due piani

$$x - 2y = 2, \qquad x - 2z = -2,$$

oppure, in modo più canonico, mediante l'uguaglianza

$$\mathbf{DF}(0,-1,1) \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

ossia come intersezione dei due piani

$$\begin{cases} -x + 2z = 2 \\ y - z = -2. \end{cases}$$

(iii) Possiamo derivare il sistema (1), ottenendo

$$\begin{cases} h'(x) + xh''(x) + 2k'(x)^2 + 2k(x)k''(x) = -h'(x) \\ k(x)h''(x) + 2h'(x)k'(x) + h(x)k''(x) = -2, \end{cases}$$

e in particolare, per $x = 0$,

$$\begin{cases} 1 + 2k''(0) = -\frac{1}{2} \\ h''(0) + \frac{1}{2} - k''(0) = -2, \end{cases}$$

da cui $h''(0) = -\frac{13}{4}$ e $k''(0) = -\frac{3}{4}$. Pertanto i polinomi di Taylor relativi a h e a k, che denotiamo rispettivamente con p_h e p_k , sono

$$p_h(x) = -1 + \frac{1}{2}\, x - \frac{13}{8}\, x^2, \qquad p_k(x) = 1 + \frac{1}{2}\, x - \frac{3}{8}\, x^2.$$

Esercizio 2 La funzione f è di classe C^∞. Annulliamo il suo gradiente:

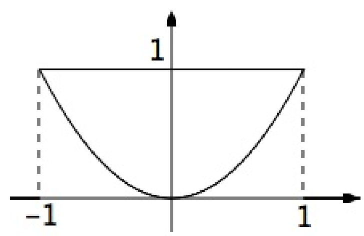
$$\begin{cases} 16x\, e^{8(x^2-y^4)} = 0 \\ -32y\, e^{8(x^2-y^4)} = 0, \end{cases}$$

quindi l'unico punto stazionario di f è l'origine, che però non è interno a K. La frontiera di K è una curva regolare a tratti, formata dalle due curve regolari

$$\Gamma_1 = \{y = x^2,\ -1 \le x \le 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{y = 1,\ -1 \le x \le 1\},$$

le quali si incollano nei vertici $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.



Calcoliamo intanto f nei vertici:

$$f(-1, 1) = 1, \qquad f(1, 1) = 1.$$

Lungo la curva Γ_1 si ha $g_1(x) := f(x, x^2) = e^{8(x^2-x^8)}$; la funzione g_1 ha derivata

$$g_1'(x) = e^{8(x^2-x^8)}(16x - 64x^7),$$

ed essa si annulla per $x = 0$ e per $x = \pm 4^{-1/6} = \pm 2^{-1/3}$. In tali punti si ha

$$g_1(0) = 1, \qquad g_1(\pm 2^{-1/3}) = \exp(2^{\frac{7}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) = \exp 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}.$$

Lungo la curva Γ_2 si ha $g_2(x) := f(x, 1) = e^{8(x^2-1)}$; la funzione g_2 ha derivata

$$g_2'(x) = 16x\, e^{8(x^2-1)},$$

ed essa si annulla per $x = 0$, con $g_2(0) = e^{-8}$.
In conclusione,

$$\max_K f = \max\{1, e^{-8}, e^{3\cdot 2^{1/3}}\} = e^{3\cdot 2^{1/3}} \simeq 43.80567,$$
$$\min_K f = \min\{1, e^{-8}, e^{3\cdot 2^{1/3}}\} = e^{-8} \simeq 0.00033.$$

Si osservi che in questo caso l'uso del metodo dei moltiplicatori di Lagrange è poco pratico, perché andrebbe applicato due volte (una su ciascun vincolo). Comunque: per il vincolo $y = x^2$ si ha

$$L(x, y, \lambda) = e^{8(x^2-y^4)} + \lambda(y - x^2),$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 16x\, e^{8(x^2-y^4)} - 2x\lambda = 0 \\ -32y^3\, e^{8(x^2-y^4)} + \lambda = 0 \\ y = x^2. \end{cases}$$

Se $x = 0$ la prima equazione è risolta e dalla terza segue $y = 0$ (e dalla seconda $\lambda = 0$). Se $x \neq 0$, la prima equazione dà $\lambda = 8e^{8(x^2-y^4)}$, e dalla seconda segue allora $y^3 = 1/4$, ovvero $y = 2^{-2/3}$; la terza equazione ci dice quindi $x = \pm 2^{-1/3}$. Si hanno quindi i punti $(0, 0)$, $(\pm 2^{-1/3}, 2^{-2/3})$, dove

$$f(0, 0) = 1, \qquad f(\pm 2^{-1/3}, 2^{-2/3}) = \exp(2^{7/3} - 2^{1/3}) = e^{3\cdot 2^{1/3}}.$$

Per il vincolo $y = 1$ si trova, ancor più banalmente,

$$L(x, y, \lambda) = e^{8(x^2-y^4)} + \lambda(y - 1),$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 16x\, e^{8(x^2-y^4)} = 0 \\ -32y^3\, e^{8(x^2-y^4)} + \lambda = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Nella prima equazione deve essere $x = 0$, mentre la terza dice che $y = 1$ (e di conseguenza $\lambda = 32e^{-8}$); si ha $f(0, 1) = e^{-8}$. Si conclude esattamente come prima.

Esercizio 3 Scrivendo l'integrale nella forma

$$\int_D xy \exp\left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x}\right) dxdy,$$

e tenuto conto della struttura del dominio D, conviene utilizzare il cambiamento di variabili seguente:

$$u = \frac{x^3}{y}\,, \quad v = \frac{y^3}{x}\,.$$

si noti che

$$(x,y) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{x^3}{y} \le 2, \;\; 0 < \frac{y^3}{x} \le 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u,v) \in]0,2] \times]0,2].$$

Poiché inoltre

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{y} & -\frac{x^3}{y^2} \\ -\frac{y^3}{x^2} & \frac{3y^2}{x} \end{pmatrix} = 8xy,$$

si ha di conseguenza

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \left[\det \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{8xy} = \frac{1}{8\sqrt{uv}}\,.$$

Ne segue che il determinante Jacobiano cancella il monomio xy dell'integrando, e si ottiene

$$\int_D xy \exp\left(\frac{x^4+y^4}{xy}\right)\,dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2 e^{u+v}\,dudv.$$

Un facile calcolo finale ci dice allora che

$$\int_D xy \exp\left(\frac{x^4+y^4}{xy}\right)\,dxdy = \frac{1}{8}(e^2-1)^2.$$

Esercizio 4 (i) Si ha

$$\int_\Gamma \sqrt{xz+3}\,ds = \int_0^1 \sqrt{3t^4+3}\,\sqrt{9t^4+9}\,dt = \sqrt{27}\int_0^1 (1+t^4)\,dt = \frac{18}{5}\sqrt{3}.$$

(ii) Tenuto conto dell'orientazione prescelta, si ha con facili calcoli

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} [e^z\,dx + (x+z^3)\,dz] &= -\int_0^1 [3e^{3t}t^2 + 84t^3]\,dt = \\ &= \frac{2-5e^3}{9} - 21 = -\frac{5}{9}\,e^3 - \frac{187}{9}\,. \end{aligned}$$

(iii) La superficie di rotazione Σ è parametrizzata da

$$x = t^3 \cos\vartheta, \quad y = t^3 \sin\vartheta, \quad z = 3t, \qquad t \in [0,1], \quad \vartheta \in [0, 2\pi];$$

quindi, come si sa,

$$\sqrt{EG - F^2} = t^3\sqrt{9t^4 + 9}.$$

ne segue

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_0^1 3t^3\sqrt{1+t^4}\, dt = \frac{3}{2}\,\pi \int_0^1 \sqrt{1+r}\, dr = \pi(2^{3/2} - 1).$$

Prova scritta del 2 febbraio 2015

Esercizio 1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = 16x^2 + 16y^2 - 48x + 24y$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \geq 1,\ |y| \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 2 Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt[n]{1 + x^{2n}}}\, dx.$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

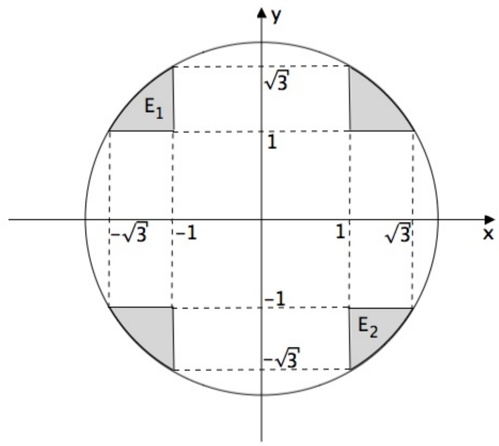
$$\int_D [z + (x-1)\cos((x-1)y)]\, dxdydz,$$

ove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4,\ 0 \leq z \leq 4 - |x-1|\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞, il dominio E è descritto nella figura a fianco ed è formato da quattro parti disgiunte simmetriche. Tenuto conto della forma della funzione f, sia per il minimo che per il massimo basta limitarsi a considerare x e y discordi in segno: infatti per $(x,y) \in E$ si ha



$$f(-|x|,-|y|) \leq f(|x|,-|y|),$$
$$f(|x|,|y|) \leq f(-|x|,|y|)$$

e similmente
$$f(-|x|,-|y|) \leq f(-|x|,|y|),$$
$$f(|x|,|y|) \leq f(|x|,-|y|).$$

Quindi ci limiteremo allo studio del comportamento di f nelle due regioni
$$E_1 = \{x \in E:\ x < 0 < y\}, \quad E_2 = \{x \in E:\ y < 0 < x\}.$$

Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E. In tali punti deve essere
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 32x - 48 = 0 \\ f_y(x,y) = 32y + 24 = 0, \end{cases}$$
e l'unica soluzione di questo sistema è $(x,y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, punto che non appartiene ad E, essendo $y < 1$.

Cerchiamo i punti stazionari vincolati di f sulla frontiera ∂E, che è regolare a tratti ed è composta da sei vertici e dalle sei curve regolari $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6$ così definite:
$$\begin{array}{llll}
\Gamma_1: & x = t, \quad y = 1, & & t \in [-\sqrt{3}, -1]; \\
\Gamma_2: & x = -1, \quad y = t, & & t \in [1, \sqrt{3}]; \\
\Gamma_3: & x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, & & t \in [4\pi/3, 5\pi/3]; \\
\Gamma_4: & x = 1, \quad y = t, & & t \in [-\sqrt{3}, -1]; \\
\Gamma_5: & x = t, \quad y = -1, & & t \in [1, \sqrt{3}]; \\
\Gamma_6: & x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, & & t \in [-\pi/3, -\pi/6]
\end{array}$$

Nei sei vertici si ha, con facile verifica,

$$\begin{aligned}
&f(-\sqrt{3},1) = 88 + 48\sqrt{3} \simeq 171.138, && f(-1,1) = 104,\\
&f(-1,\sqrt{3}) = 114 + 24\sqrt{3} \simeq 155.569, && f(1,-\sqrt{3}) = 16 - 24\sqrt{3} \simeq -25.569,\\
&f(1,-1) = -40, && f(\sqrt{3},-1) = 40 - 48\sqrt{3} \simeq -43.138.
\end{aligned}$$

Poniamo ora $g_i = f|_{\Gamma_i}$, $i = 1,2,3,4,5,6$.

- Su Γ_1 si ha $g_1(t) = f(t,1) = 16t^2 - 48t + 40$, $g_1'(t) = 32t - 48 \le 0$ sempre in $[-\sqrt{3},-1]$.

- Su Γ_2 si ha $g_2(t) = f(-1,t) = 16t^2 + 24t + 64$, $g_2'(t) = 32t + 24 \ge 0$ sempre in $[1,\sqrt{3}]$.

- Su Γ_3 si ha $g_3(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 64 - 96\cos t + 48\sin t$, $g_3'(t) = 96\sin t + 48\cos t = 0$ se e solo se $\tan t = -\frac{1}{2}$, ossia $(\cos t,\sin t) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; il punto corrispondente $(2\cos t, 2\sin t)$ non appartiene ad E perché l'ordinata è $\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$.

- Su Γ_4 si ha $g_4(t) = f(1,t) = 16t^2 + 24t - 32$, $g_4'(t) = 32t + 24 \le 0$ sempre in $[-\sqrt{3},-1]$.

- Su Γ_5 si ha $g_5(t) = f(t,-1) = 16t^2 - 48t - 8$, $g_5'(t) = 32t - 48 \ge 0$ se e solo se $t \ge \frac{3}{2}$; quindi ha importanza il punto $(\frac{3}{2},-1)$ ove si ha $f(\frac{3}{2},-1) = -44$.

- Infine, similmente a Γ_3, su Γ_6 si ha $g_6(t) = g_3(t)$, e $g_6'(t) = 0$ se s solo se $\tan t = -\frac{1}{2}$, ossia $(\cos t,\sin t) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; il punto corrispondente $(2\cos t, 2\sin t)$ non appartiene ad E perché l'ordinata è $-\frac{2}{\sqrt{5}} > -1$.

In definitiva

$$\begin{aligned}
&\max_E f =\\
&\quad = \max\{88 + 48\sqrt{3}, 108, 114 + 24\sqrt{3}, 16 - 24\sqrt{3}, -40, 40 - 48\sqrt{3}, -44\} =\\
&\quad = 88 + 48\sqrt{3} \simeq 171.138,
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}&\min_E f = \\ &\quad = \min\{88+48\sqrt{3}, 108, 114+24\sqrt{3}, 16-24\sqrt{3}, -40, 40-48\sqrt{3}, -44\} = \\ &\quad = -44.\end{aligned}$$

Esercizio 2 La funzione integranda è continua e non negativa, dunque integrabile. Essa converge puntualmente in $\mathbb{R}$ per $n \to \infty$, in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} = f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le |x| \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Inoltre la convergenza è dominata: infatti

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} \le \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n}}}\right\} = f(x).$$

Poiché la funzione f è sommabile su $\mathbb{R}$, in virtù del teorema di Lebesgue possiamo concludere che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx + \int_{|x|>1} \frac{dx}{x^2} = 2+2 = 4.$$

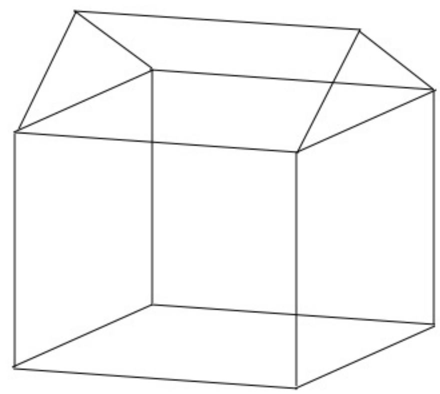
Si osservi che si poteva utilizzare anche il teorema di B. Levi, perché la successione $\{f_n\}$ è crescente: infatti, utilizzando la variabile continua $t \ge 1$ al posto di n, si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{(1+x^{2t})^{1/t}} \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{1}{t}\ln(1+x^{2t}) \le 0;$$

ed in effetti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\ln(1+x^{2t}) &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t\ln x^2}{1+x^{2t}} - \ln(1+x^{2t})\right) = \\ &= \frac{1}{t^2(1+x^{2t})}\left(\ln\frac{x^{2t}}{1+x^{2t}} - x^{2t}\ln(1+x^{2t})\right) \le 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3 La regione D è un insieme limitato e chiuso, ed ha la forma descritta nella figura a fianco. La funzione integranda è continua e dunque sommabile su D. Dal teorema di Fubini-Tonelli segue che l'integrale proposto può essere scritto nel modo seguente:



$$\int_0^2 \left[\int_0^4 \left(\int_0^{4-|x-1|} [z + (x-1)\cos((x-1)y)]\, dz \right) dy \right] dx.$$

Conviene porre $x - 1 = t$, ottenendo così la forma equivalente

$$\int_{-1}^1 \left[\int_0^4 \left(\int_0^{4-|t|} [z + t\cos(ty)]\, dz \right) dy \right] dt.$$

Si osservi adesso che il secondo addendo della funzione integranda è funzione dispari di t, per cui la funzione

$$t \mapsto \int_0^4 \left(\int_0^{4-|t|} [t\cos(ty)]\, dz \right) dy$$

è anch'essa dispari, ed ha pertanto integrale nullo su $[-1, 1]$. Si conclude che l'integrale da calcolare si riduce a

$$\int_{-1}^1 \left[\int_0^4 \left(\int_0^{4-|t|} z\, dz \right) dy \right] dt,$$

e in definitiva si ha, essendo l'integrando indipendente da y:

$$\begin{aligned} &\int_D [z + (x-1)\cos((x-1)y)]\, dxdydz = \\ &\quad = 4 \int_{-1}^1 \left[\int_0^{4-|t|} z\, dz \right] dt = 2 \int_{-1}^1 (4 - |t|)^2\, dt = \\ &\quad = 4 \int_0^1 (4-t)^2\, dt = 4 \int_0^1 (16 - 8t + t^2)\, dt = \frac{148}{3}\,. \end{aligned}$$

Prova scritta del 12 giugno 2015

Esercizio 1 Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'''' + \frac{6}{t}\, y''' + \frac{7}{t^2}\, y'' + \frac{1}{t^3}\, y' - \frac{1}{t^4}\, y = \frac{15}{t^2}\,, \qquad t > 0.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{e^{-x}\, y\, |z|}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz,$$

ove

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 + z^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Esercizio 3 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{x^2} + y + 2z,\ e^{y^2} + 3z + 4x,\ e^{z^2} + 5x + 6y), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Detta C la curva definita dalle relazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x = y,$$

si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3\, ds,$$

ove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a C orientato in modo che $\boldsymbol{\tau}(0,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Risoluzione

Esercizio 1 Si tratta di una equazione differenziale di Eulero. Per risolvere l'omogenea, si cercano soluzioni della forma $y(t) = t^\alpha$. Poiché

$$\begin{aligned} &y'(t) = \alpha\, t^{\alpha-1}, && y''(t) = \alpha(\alpha-1)\, t^{\alpha-2}, \\ &y'''(t) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\, t^{\alpha-3}, && y''''(t) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\, t^{\alpha-4}, \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione si ha

$$t^{\alpha-4}[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + 6\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 7\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1] = 0,$$

ossia

$$\alpha^4 - 6\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha + 6\alpha^3 - 18\alpha^2 + 12\alpha + 7\alpha^2 - 7\alpha + \alpha - 1 = 0,$$

il che si riduce a $\alpha^4 - 1 = 0$. Quindi gli espomnenti α possibili sono $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = i$, $\alpha_4 = -i$; le corrispondenti soluzioni sono

$$u_1(t) = t, \quad u_2(t) = \frac{1}{t}, \quad u_3(t) = t^i = e^{i \ln t}, \quad u_4(t) = t^{-i} = e^{-i \ln t},$$

ma equivalentemente possiamo rimpiazzare u_3 e u_4 con le funzioni

$$v_3(t) = \cos \ln t, \qquad v_4(t) = \sin \ln t.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è dunque

$$V_0 = \left\{ c_1\, t + c_2\, \frac{1}{t} + c_3\, \cos \ln t + c_4\, \sin \ln t,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per risolvere l'equazione omogenea, possiamo cercare una soluzione particolare della forma $v(t) = At^2 + Bt + C$: infatti, moltiplicando l'equazione differenziale per t^4, si trova

$$t^4\, y'''' + 6t^3\, y''' + 7t^2\, y'' + t\, y' - y = 15t^2,$$

ed è naturale cercare come soluzione un polinomio di grado pari al grado del secondo membro.
Sostituiamo allora v nell'equazione: si trova

$$14A\, t^2 + (2At + B)\, t - (At^2 + Bt + C) = 15\, t^2,$$

da cui

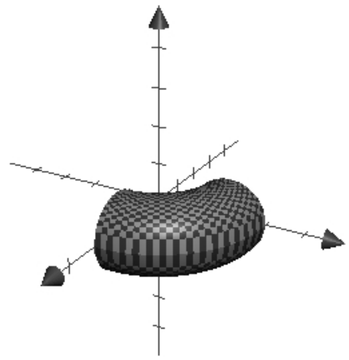
$$A = 1, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Dunque $v(t) = t^2$ e l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale è

$$V = \left\{ c_1\, t + c_2\, \frac{1}{t} + c_3\, \cos \ln t + c_4\, \sin \ln t + t^2,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Esercizio 2 L'insieme E è la parte del toro (pieno) contenuta nella regione dove x e y sono positive. In coordinate cilindriche si ha $(x, y, z) \in E$ se e solo se

$$\begin{cases} x = r\cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = r\sin t, & \frac{1}{2} \le r \le \frac{3}{2} \\ z = z, & |z| \le \sqrt{\frac{1}{4} - (r-1)^2}. \end{cases}$$



Poiché il determinante Jacobiano vale r, l'integrale proposto diventa

$$\begin{aligned} \int_E \frac{e^{-x}\, y\, |z|}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-(r-1)^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-(r-1)^2}} \frac{e^{-r\cos t}\, r\, \sin t\, |z|}{r}\, r\, dzdrdt = \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, e^{-r\cos t}\, \sin t\, dt \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-(r-1)^2}} z\, dzdr = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[1 - e^{-r}\right] \left(\frac{1}{4} - (r-1)^2\right) dr. \end{aligned}$$

Il calcolo di questo integrale è piuttosto noioso ma semplice. Osservato che la funzione $\left(\frac{1}{4} - (r-1)^2\right)$ è nulla negli estremi di integrazione, si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[1 - e^{-r}\right] \left(\frac{1}{4} - (r-1)^2\right) dr = \\ &\quad = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{4} - (r-1)^2\right] dr - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{-r} \left[\frac{1}{4} - (r-1)^2\right] dr = \\ &\quad = \frac{1}{4} - \left[\frac{(r-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[e^{-r}\left(\frac{1}{4} - (r-1)^2\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{-r}(r-1)dr, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[1 - e^{-r}\right] \left(\frac{1}{4} - (r-1)^2\right) dr = \\ &\quad = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \left[2e^{-r}(r-1) + 2e^{-r}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} - 2\left[r\, e^{-r}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} - 3e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Il campo $\mathbf{F}$ è di classe C^∞; la curva C è un cerchio massimo della sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$. Usando le coordinate sferiche

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cos\vartheta,$$

ove $\vartheta \in [0,\pi]$ e $\varphi \in [0,2\pi]$, e imponendo la condizione $x = y$, ossia $\cos\varphi = \sin\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, la curva C si rappresenta come

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \quad z = \cos\vartheta, \qquad \vartheta \in [0,\pi],$$

ovvero come

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \quad z = \cos\vartheta, \qquad \vartheta \in [0,2\pi].$$

Il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ è allora

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, -\sin\vartheta\right),$$

e la sua orientazione coincide con quella prescritta, come si vede calcolando per $\vartheta = 0$. Essendo $ds = d\vartheta$, l'integrale curvilineo vale

$$\begin{aligned}\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds &= \int_0^{2\pi} \left[\left(e^{\frac{\sin^2\vartheta}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta + 2\cos\vartheta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta + \right.\\ &+ \left(e^{\frac{\sin^2\vartheta}{2}} + 3\cos\vartheta + 2\sqrt{2}\sin\vartheta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta + \\ &- \left.\left(e^{\cos^2\vartheta} + \frac{5}{\sqrt{2}}\sin\vartheta + 3\sqrt{2}\sin\vartheta\right)\sin\vartheta\right] d\vartheta,\end{aligned}$$

e il calcolo appare piuttosto lungo e noioso. In realtà, però, in questa formula gli integrali che coinvolgono le esponenziali sono nulli, per disparità o per simmetria rispetto a $\vartheta = \pi$, mentre quelli contenenti il prodotto $\sin\vartheta\cos\vartheta$ sono nulli per disparità. Restano solo quelli che contengono $\sin^2\vartheta$ e $\cos^2\vartheta$, funzioni il cui integrale su $[0,2\pi]$ vale π. Quindi

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\, ds = \pi\left(\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{2}\,\pi.$$

Osservazione Alternativamente, si può utilizzare la formula di Stokes, scegliendo una qualunque superficie Σ cha abbia C come bordo. La scelta più comoda è quella del disco

$$D = \{(x,y) : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ x = y\},$$

che è parametrizzato ad esempio così:

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta, \qquad \vartheta \in [0,2\pi], \quad r \in [0,1].$$

Notiamo che il vettore normale a D è il vettore normale al piano $x = y$, e quindi è $\pm(1,-1,0)$; affinché le orientazioni di $\mathbf{n}$ e di $\boldsymbol{\tau}$ siano coerenti, si vede subito che occorre scegliere $(-1,1,0)$. Il versore normale a D è dunque

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

mentre l'elemento d'area è ovviamente (trattandosi di una regione piana integrata in coordinate polari) $d\boldsymbol{\sigma} = r\,drd\vartheta$.
Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ e^{x^2}+y+2z & e^{y^2}+3z+4x & e^{z^2}+5x+6y \end{pmatrix} = \\ &= (3,-3,3). \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle_3\,ds = \int_\Sigma \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3\,d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(-3-3)}{\sqrt{2}}\,r\,d\vartheta dr = -3\sqrt{2}\,\pi.$$

Prova scritta del 2 luglio 2015

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}\ln(1+nx)}{1+n^2x^3}\,dx.$$

Esercizio 2 Poniamo $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\}$ e

$$\Phi_{\lambda,\mu}(x,y) = (x+\lambda y^3, y-\mu x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Posto
$$F = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda^2 + \frac{9}{4}\mu^2 \leq 1\},$$
si verifichi che per ogni $(\lambda, \mu) \in F$ l'applicazione $\Phi_{\lambda,\mu}$ è un diffeomorfismo definito su B sulla sua immagine
$$E_{\lambda,\mu} = \Phi_{\lambda,\mu}(B) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ \exists (x, y) \in B : \ (u, v) = \Phi_{\lambda,\mu}(x, y)\}.$$

(ii) Per $(\lambda, \mu) \in F$ si calcoli la misura 2-dimensionale dell'insieme $E_{\lambda,\mu}$.

(iii) Si determinino il massimo ed il minimo della funzione $m_2(E_{\lambda,\mu})$ nell'insieme F.

Esercizio 3 Sia Σ la superficie costituita da tutti i segmenti che uniscono l'origine $(0, 0, 0)$ ai punti della curva $\Gamma = \{(\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta, \vartheta) : \vartheta \in [0, \pi]\}$. Si calcoli l'area di Σ.

Risoluzione

Esercizio 1 Per ogni $n \geq 1$ la funzione integranda è continua, positiva e limitata in $[0, 2]$, dunque sommabile. Inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} \ln(1 + nx)}{1 + n^2x^3} = 0 \qquad \forall x \in]0, 2],$$
dato che, con $x > 0$ fissato, $x^{\frac{1}{n}}$ tende a 1 mentre $\ln(1+nx)$ è un infinito (per $n \to \infty$) di ordine strettamente maggiore rispetto a n^2x^3.
Vediamo se la convergenza è dominata. Possiamo scrivere, per ogni $x \in]0, 2]$,
$$1 + n^2x^3 = (1 + n^2x^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + n^2x^3)^{\frac{1}{2}} \geq (n^2x^3)^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}} = nx^{\frac{3}{2}},$$
da cui, essendo $\ln(1 + nx) < nx$,
$$\frac{x^{\frac{1}{n}} \ln(1 + nx)}{1 + n^2x^3} \leq \frac{2^{\frac{1}{n}} nx}{nx^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\,.$$
Dato che la funzione all'ultimo membro è sommabile su $[0, 2]$, possiamo concludere che
$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{x^{\frac{1}{n}} \ln(1 + nx)}{1 + n^2x^3}\, dx = \int_0^2 0 \, dx = 0.$$

Esercizio 2 (i) Fissata una coppia $(\lambda, \mu) \in F$, dobbiamo provare che $\Phi_{\lambda,\mu}$ è iniettiva su B: quindi, che per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ il sistema

$$\begin{cases} x + \lambda y^3 = u \\ y - \mu x = v, \end{cases}$$

ha al più una soluzione $(x, y) \in B$. In effetti, se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B$ sono soluzioni distinte di questo sistema, allora posto $x = x_1 - x_2$ e $y = y_1 - y_2$ si ha, per differenza,

$$\begin{cases} x + \lambda y(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = 0 \\ y - \mu x = 0. \end{cases}$$

Quindi, sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha

$$x[1 + \lambda\mu(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)] = 0;$$

ora, se $x = 0$ si ricava anche $y = 0$, il che dà la tesi; proviamo che l'altro fattore $1 + \lambda\mu(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$ non è nullo. Se fosse nullo, avremmo

$$1 = -\lambda\mu(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \le |\lambda||\mu|(|y_1|^2 + |y_1 y_2| + |y_2|^2);$$

ma, essendo $|y_1| < 1$ e $|y_2| < 1$, otterremmo

$$1 = -\lambda\mu(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) < 3|\lambda||\mu|.$$

D'altronde, dato che $(\lambda, \mu) \in F$ risulta

$$3|\lambda||\mu| = 2|\lambda|\frac{3}{2}|\mu| \le \lambda^2 + \frac{9}{4}\mu^2 = 1,$$

e pertanto si dedurrebbe

$$1 = -\lambda\mu(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \le |\lambda||\mu|(|y_1|^2 + |y_1 y_2| + |y_2|^2) < 3|\lambda||\mu| \le 1 :$$

Questo è assurdo. Ciò mostra che $\Phi_{\lambda,\mu}$ è iniettiva su B, dunque bigettiva sull'immagine, per ogni $(\lambda, \mu) \in F$.
Adesso mostriamo che $\Phi_{\lambda,\mu}^{-1}$ è di classe C^1 su B per ogni $(\lambda, \mu) \in F$. Si ha

$$D\Phi_{\lambda,\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda y^2 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det D\Phi_{\lambda,\mu}(x,y) = 1 + 3\lambda\mu y^2 \geq 1 - 3|\lambda||\mu|y^2 \geq 1 - y^2 > 0,$$

in quanto $y^2 < 1$ in B e $3|\lambda||\mu| \leq 1$. Quindi la matrice $D\Phi_{\lambda,\mu}(x,y)$ è invertibile per ogni $(x,y) \in B$, e dunque

$$\exists [D\Phi^{-1}_{\lambda,\mu}](u,v) = \left[[D\Phi_{\lambda,\mu}(x,y)]^{-1}\right]_{(x,y)=\Phi^{-1}_{\lambda,\mu}(u,v)} \qquad \forall (u,v) \in E_{\lambda,\mu}\,.$$

Quindi $\Phi^{-1}_{\lambda,\mu}$ è di classe C^1 e pertanto $\Phi_{\lambda,\mu}$ è un diffeomorfismo fra B e l'immagine $E_{\lambda,\mu}$.

(ii) Per il teorema di cambiamento di variabili,

$$m_2(E_{\lambda,\mu}) = \int_{E_{\lambda,\mu}} 1\,dudv = \int_B |\det D\Phi_{\lambda,\mu}(x,y)|dxdy = \int_B (1 + 3\lambda\mu y^2)dxdy.$$

Utilizzando le coordinate polari, si ricava facilmente

$$m_2(E_{\lambda,\mu}) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 3\lambda\mu r^2 \sin^2\vartheta) r\,drd\vartheta = \pi + \frac{3\pi}{4}\lambda\mu.$$

(iii) Occorre trovare il massimo e il minimo della funzione $g(\lambda,\mu) = \pi + \frac{3\pi}{4}\lambda\mu$ su F. Chiaramente, l'unico punto stazionario interno a F è l'origine, il quale è punto di sella. Sulla frontiera di F si ha $\lambda = \cos t$, $\mu = \frac{2}{3}\sin t$, $t \in [0,2\pi]$, e quindi

$$g\left(\cos t, \frac{2}{3}\sin t\right) = \pi + \frac{\pi}{2}\cos t \sin t = \pi + \frac{\pi}{4}\sin 2t.$$

Ovviamente, g ha massimo per $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$, dove il seno vale 1, e ha minimo per $t = \frac{3\pi}{4}$ e $t = \frac{7\pi}{4}$, dove il seno vale -1. Si ottiene così

$$\max_{(\lambda,\mu)\in F} m_2(E_{\lambda,\mu}) = \frac{5\pi}{4}\,, \qquad \min_{(\lambda,\mu)\in F} m_2(E_{\lambda,\mu}) = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Esercizio 3 La superficie Σ si descrive così:

$$\Sigma = \sigma([0,1]\times[0,\pi]), \qquad \sigma : \begin{cases} x = t\,\vartheta\,\cos\vartheta \\ y = t\,\vartheta\,\sin\vartheta \\ z = t\,\vartheta, \end{cases} \qquad t \in [0,1],\ \vartheta \in [0,\pi].$$

Dunque si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \vartheta \, \cos\vartheta & t\,(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta) \\ \vartheta \, \sin\vartheta & t\,(\sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta) \\ \vartheta & t \end{pmatrix},$$

da cui

$$E = |\sigma_t|_3^2 = 2\vartheta^2, \qquad G = |\sigma_\vartheta|_3^2 = t^2(\vartheta^2+2), \qquad F = \langle \sigma_t \cdot \sigma_\vartheta \rangle_3 = 2t\vartheta.$$

Perciò l'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{2\vartheta^2 t^2(\vartheta^2+2) - 4t^2\vartheta^2}\, dtd\vartheta = \sqrt{2}\, t\,\vartheta^2\, dtd\vartheta.$$

Perciò

$$a(\Sigma) = \sqrt{2}\int_0^\pi \int_0^1 t\,\vartheta^2\, dtd\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\pi \vartheta^2\, dt = \frac{\pi^3}{3\sqrt{2}}.$$

Prova scritta del 2 settembre 2015

Esercizio 1 Si determinino tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) + z(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) + e^{2t} \\ z'(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) + e^{3t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Trovare, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x\,y^3}{x+4y^3}$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 0 \leq xy \leq 1\}.$$

Esercizio 3 Posto

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 100, \ x^2+y^2 \geq 25\},$$

si calcoli l'integrale triplo

$$\int_E \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Calcoliamo anzitutto gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ dei coefficienti: deve essere

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0,$$

il che (cercando fra i divisori interi del termine noto 5) è vero se $\lambda=5$; infatti $-125+175-55+5=0$. Dividendo con la regola di Ruffini si trova

$$\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda^2-2\lambda+1),$$

e pertanto, oltre a $\lambda_1=5$, vi è l'autovalore doppio $\lambda_2=\lambda_3=1$.
Con calcoli pressocché banali si verifica che un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1=5$ è $\mathbf{v}_1=(1,1,1)$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore doppio $\lambda_2=1$ ha dimensione 2, ed una sua base è costituita dai vettori $\mathbf{v}_2=(2,-1,0)$ e $\mathbf{v}_3=(1,0,-1)$.
Lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo è dato da

$$V_0=\{c_1\mathbf{v}_1e^{5t}+(c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3)e^t,\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\},$$

ossia

$$V_0=\left\{\begin{pmatrix} c_1e^{5t}+(2c_2+c_3)e^t \\ c_1e^{5t}-c_2e^t \\ c_1e^{5t}-c_3e^t \end{pmatrix} :\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

Una soluzione particolare $\mathbf{u}(t)$ del sistema non omogeneo si ottiene considerando la matrice Wronskiana

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} e^{5t} & 2e^t & e^t \\ e^{5t} & -e^t & 0 \\ e^{5t} & 0 & -e^t \end{pmatrix},$$

e cercando $\mathbf{u}(t)$ della forma

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t);$$

come si sa, deve allora aversi

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{W}(t)^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli si ottiene $\det \mathbf{W}(t) = 4e^{7t}$ e di conseguenza

$$\mathbf{W}(t)^{-1} = \frac{1}{4}\, e^{-7t} \begin{pmatrix} e^{2t} & 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{6t} & -2e^{6t} & e^{6t} \\ e^{6t} & 2e^{6t} & -3e^{6t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-5t} & 2e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{-t} & -2e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} & -3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\mathbf{c}'(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-5t} & 2e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{-t} & -2e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} & -3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-4t} + 2e^{-3t} + e^{-2t} \\ 1 - 2e^t + e^{2t} \\ 1 + 2e^t - 3e^{2t} \end{pmatrix},$$

cosicché

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-2t} \\ \frac{t}{4} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{8}e^{2t} \\ \frac{t}{4} + \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{8}e^{2t} \end{pmatrix},$$

ed infine, con qualche semplificazione,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16}e^t + \frac{3t}{4}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{3t} \\ -\frac{1}{16}e^t - \frac{t}{4}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{3t} \\ -\frac{1}{16}e^t - \frac{t}{4}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle soluzioni cercato è in definitiva

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} c_1e^{5t} + \left(2c_2 + c_3 - \frac{1}{16}\right) e^t + \frac{3t}{4}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{3t} \\ c_1e^{5t} - \left(c_2 - \frac{1}{16}\right) e^t - \frac{t}{4}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{3t} \\ c_1e^{5t} - \left(c_3 - \frac{1}{16}\right) e^t - \frac{t}{4}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} \end{pmatrix} :\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 2 La funzione f è non negativa su D. Cerchiamo anzitutto gli eventuali punti stazionari di f interni a D. Si ha, con facili calcoli,

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4y^6}{(x+4y^3)^2}, \frac{3x^2y^2}{(x+4y^3)^2} \right),$$

e il sistema $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ ha in D solo le soluzioni $(x,0)$ con $x > 0$: tutti punti che si trovano sulla frontiera di D. In questi punti comunque, come anche nei punti di frontiera $(0,y)$ con $y > 0$, la f si annulla e pertanto gli uni e gli altri sono tutti punti di minimo assoluto. Si noti che f è prolungabile con continuità nell'origine, assegnandole il valore 0: infatti, essendo $0 \le f(x,y) \le x$,

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in D} f(x,y) = 0.$$

La frontiera di D è costituita dalle due semirette $\{(0,y) : \ y \ge 0\}$ e $\{(x,0) : x \ge 0\}$, in cui come abbiamo appena visto $f = 0$, e dal ramo di iperbole $I = \{(x,y) : \ x > 0,\ y > 0,\ xy = 1\}$. Vediamo cosa accade nei punti di I: consideriamo la Lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x\,y^3}{x+4y^3} + \lambda(xy-1), \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Annullando il gradiente di L si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{4y^6}{(x+4y^3)^2} + \lambda y = 0 \\[2ex] \dfrac{3x^2y^2}{(x+4y^3)^2} + \lambda x = 0 \\[2ex] xy = 1. \end{cases}$$

Ricavando λ si trovano le condizioni

$$\lambda = -\frac{4y^5}{(x+4y^3)^2} = -\frac{3xy^2}{(x+4y^3)^2},$$

da cui $4y^5 = 3xy^2$ e dunque $x = \frac{4}{3}\,y^3$; la condizione $xy = 1$ implica allora

$$1 = xy = \frac{4}{3}\,y^4,$$

e si ha infine l'unico punto

$$x = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}, \quad y = \sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

dove, con calcolo noioso,

$$f\left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right) = \frac{\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)^3}{\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + 4\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)^3} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{8\sqrt{2}}\,.$$

Osserviamo che quando $xy = 1$ risulta

$$0 \le f(x,y) = \frac{xy^3}{x+4y^3} = \frac{y^2}{\frac{1}{y}+4y^3} \le \min\left\{\frac{1}{4y}, y^3\right\};$$

dunque si ha

$$\lim_{y\to\infty,\,(x,y)\in D} f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \lim_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}, y\right) = 0.$$

Pertanto, poiché in I vi è un solo punto stazionario vincolato, esso deve essere necessariamente il punto di massimo assoluto di f in tutto D. In definitiva

$$\min_D f = 0, \qquad \max_D f = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{8\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 3 L'insieme E è costituito dalla sfera piena di centro l'origine e raggio 10, scavata al suo interno e privata dei punti del cilindro di asse z e raggio 5. In coordinate sferiche, E è descritto da

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta, \end{cases}$$

ove $\varphi \in [0, 2\pi]$ mentre (r, ϑ) sono delimitati dalle condizioni $25 \le r^2\sin^2\vartheta$, $r^2 \le 100$: quindi si ha

$$\frac{5}{\sin\vartheta} \le r \le 10$$

con il necessario vincolo $\sin\vartheta \geq \frac{1}{2}$, ossia

$$\frac{5}{\sin\vartheta} \leq r \leq 10, \qquad \frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{5\pi}{6}\,.$$

Si ha allora, non essendovi dipendenza da φ,

$$\begin{aligned}\int_E \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\frac{5}{\sin\vartheta}}^{10} r\sin^2\vartheta\,drd\vartheta = \\ &= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(100 - \frac{25}{\sin^2\vartheta}\right)\sin^2\vartheta\,d\vartheta = 100\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2\vartheta\,d\vartheta - \frac{50}{3}\,\pi^2 = \\ &= 50\pi\Big[\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{50}{3}\,\pi^2 = \frac{50}{3}\,\pi^2 + 25\sqrt{3}\,\pi.\end{aligned}$$

Prova scritta dell'11 gennaio 2016

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + iu' - u = ix + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -i. \end{cases}$$

Esercizio 2 Posto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\right\},$$

si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\arctan\frac{y}{x} & \text{se } (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Si verifichi che f è differenziabile in D e si scriva il gradiente di f nel punto $(0,0)$.

(ii) Si trovino i punti di massimo e di minimo di f in D e si calcolino il valore massimo e il valore minimo di f in D.

Esercizio 3 Sia Σ la superficie definita dall'equazione cartesiana

$$z = \sin(x+y), \qquad |x| + |y| \leq \pi.$$

(i) Si scriva l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(ii) Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma |z|\, d\mathbf{s}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è

$$\lambda^2 + i\lambda - 1 = 0,$$

e le sue soluzioni sono

$$\lambda = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 + 4}}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Perciò le soluzioni dell'equazione omogenea sono tutte le funzioni

$$c_1\, e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)x} + c_2\, e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea che abbia la forma $u(x) = ax + b$. Si ha allora $u'(x) = a$ e $u''(x) = 0$, da cui, sostituendo, $ia - ax - b = ix + 1$. Dunque $a = -i$ e $b = 0$. Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale sono tutte e sole le funzioni della forma

$$c_1\, e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)x} + c_2\, e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)x} - ix, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Imponiamo infine le condizioni iniziali. Si deve avere

$$1 = u(0) = c_1 + c_2, \qquad -i = u'(0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) c_1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) c_2 - i,$$

ossia

$$c_1 + c_2 = 1, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}(c_1 - c_2) - \frac{i}{2}(c_1 + c_2) = 0;$$

pertanto

$$c_1 + c_2 = 1, \qquad \sqrt{3}(c_1 - c_2) = \frac{i}{2},$$

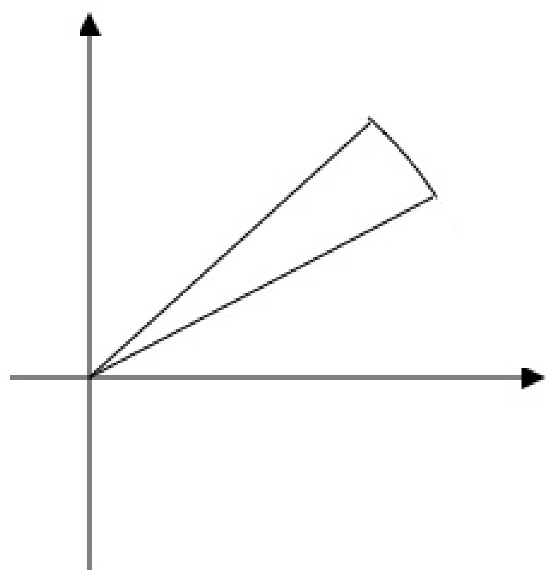
da cui

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}, \qquad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)x} - ix = \\ &= e^{-\frac{i}{2}x}\left(\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) - ix. \end{aligned}$$

Esercizio 2 (i) Il dominio D è rappresentato nella figura sottostante.



Dato che nei punti $(x, y) \in D$ si ha $x = 0$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$, la funzione f è certamente differenziabile in $D \setminus \{(0, 0\}$ perché prodotto di funzioni differenziabili. Per quanto riguarda l'origine, essendo

$$|f(x, y)| \leq |xy| \arctan\frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}\,|xy|,$$

si ha

$$f(x, y) = \mathrm{o}(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad \text{per } \sqrt{x^2 + y^2} \to 0,$$

e dunque f è differenziabile in $(0,0)$ con $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$.

(ii) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(y \arctan \frac{y}{x} - \frac{xy^2}{x^2+y^2},\, x \arctan \frac{y}{x} + \frac{yx^2}{x^2+y^2} \right).$$

Si può osservare che la seconda componente del gradiente è sempre positiva nell'interno di D, quindi f non ha punti stazionari interni a D.
Vediamo cosa succede sul bordo di D. Nel vertice $O = (0,0)$ si ha $f(0,0) = 0$ per definizione. Negli altri due vertici $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ si ha

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8}, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{8\sqrt{3}}.$$

Sul segmento OP_1 si ha

$$f(x,x) = x^2 \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\, x^2$$

e questa funzione è crescente: quindi ha minimo in O e massimo in P_1. Similmente, sul segmento OP_2 si ha

$$f\left(x, \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\, x^2 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\, x^2,$$

e questa funzione è crescente: quindi ha minimo in O e massimo in P_2. Infine sull'arco P_1P_2 si ha, parametrizzando in coordinate polari, $x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$ e dunque $f(x,y) = \vartheta \cos\vartheta \sin\vartheta$, con $\vartheta \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$: dunque, la derivata vale

$$\cos\vartheta \sin\vartheta - \vartheta \sin^2\vartheta \ + \vartheta \cos^2\vartheta;$$

dato che $\frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$, si ha $\cos^2\vartheta \ge \sin^2\vartheta$ e pertanto tale derivata è positiva. Quindi sull'arco P_1P_2 la funzione f è massima in P_1 e minima in P_2. Si conclude che f ha massimo assoluto in P_1 e minimo assoluto in O, ossia

$$\min_D f = f(0,0) = 0, \qquad \max_D f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Esercizio 3 (i) Posto $f(x,y) = \sin(x+y)$, si ha $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; inoltre

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = \cos(x+y),$$

da cui $f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) = f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; dunque l'equazione del piano tangente al grafico di f in $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\pi}{4}\right).$$

(ii) L'elemento d'area è

$$d\mathbf{s} = \sqrt{1 + |\boldsymbol{\nabla} f(x,y)|^2}\, dxdy = \sqrt{1+\cos^2(x+y)}\, dxdy,$$

e pertanto, posto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \le 1\}$, si ha

$$\int_\Sigma |z|\, d\mathbf{s} = \int_E |\sin(x+y)|\sqrt{1+\cos^2(x+y)}\, dxdy.$$

Per calcolare questo integrale conviene cambiare variabili: quando $(x,y) \in E$, le quantità $u = x+y$ e $v = y-x$ si muovono entrambe in $[-\pi,\pi]$. Inoltre

$$\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (x,y) \in E,$$

da cui

$$|J(u,v)| = \left|\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2} \quad \forall (u,v) \in [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi].$$

In definitiva

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin u|\sqrt{1+2\cos^2 u}\, dudv = \pi\int_{-\pi}^{\pi} |\sin u|\sqrt{1+2\cos^2 u}\, du;$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |z|\, d\sigma &= 2\pi\int_0^\pi \sin u\sqrt{1+2\cos^2 u}\, du = 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1+2s^2}\, ds = \\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1+2s^2}\, ds = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+t^2}\, dt.\end{aligned}$$

Poiché una primitiva di $\sqrt{1+t^2}$ è $\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})$, si ottiene

$$\int_\Sigma |z|\, d\sigma = 2\sqrt{2}\pi\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\pi[\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})].$$

Prova scritta del 3 febbraio 2016

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''' - u'' - u' + u = 8x\, e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 **(i)** Provare che la funzione

$$g(s,x) = \frac{e^{-s\sqrt{x}}}{1+x^2}$$

è sommabile su $[0,\infty[\,\times[0,\infty[\,$.

(ii) Definite per $s \geq 0$ le funzioni

$$f_n(s) = \int_0^n g(s,x)\,dx, \quad f(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx,$$

si provi che la successione $\{f_n\}$ converge a f puntualmente in $[0,\infty[\,$, e che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (f - f_n)\,ds = 0.$$

Esercizio 3 Sia D il compatto di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $z = 2$ e dalla superficie Σ generata dalla rotazione del grafico $z = \sqrt{1+x^2} - 1$, ove $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$. Si calcoli l'integrale

$$\int_D \frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz.$$

Risoluzione

Esercizio 1 L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0;$$

si riconosce che $\lambda = 1$ ne è una radice, e si vede facilmente, dividendo il polinomio caratteristico per $\lambda - 1$, che le altre due sono 1 e -1. Quindi abbiamo le radici

$$\lambda_1 = 1 \text{ (doppia)}, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Perciò le soluzioni dell'equazione omogenea sono tutte le funzioni

$$c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x + c_3\, e^{-x}, c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{C}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea che abbia la forma

$$u(x) = x(ax+b)e^{-x},$$

visto che -1 è radice semplice del polnomio caratteristico. Si ha allora, con facili calcoli,

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-x}(ax^2 + bx) \\ u'(x) &= e^{-x}(-ax^2 + 2ax - bx + b) \\ u''(x) &= e^{-x}(ax^2 - 4ax + bx + 2a - 2b) \\ u'''(x) &= e^{-x}(-ax^2 + 6ax - bx - 6a + 3b) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} 8x\, e^{-x} &= e^{-x}(-ax^2 + 6ax - bx - 6a + 3b - ax^2 + 4ax - bx - 2a + 2b + \\ &\quad +ax^2 - 2ax + bx - b + ax^2 + bx) \\ &= e^{-x}(8ax - 8a + 4b), \end{aligned}$$

e dunque deve essere $a = 1$ e $b = 2$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea è dunque dato da tutte le funzioni della forma

$$u(x) = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x + c_3\, e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}.$$

Per imporre le condizioni iniziali cominciamo con lo scrivere

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1\, e^x + c_2\, e^x + c_2\, x\, e^x - c_3\, e^{-x} + (2 - x^2)e^{-x}, \\ u''(x) &= c_1\, e^x + 2c_2\, e^x + c_2\, x\, e^x + c_3\, e^{-x} + (x^2 - 4x - 2)e^{-x}, \\ u'''(x) &= c_1\, e^x + 3c_2\, e^x + c_2\, x\, e^x - c_3\, e^{-x} + (-x^2 + 4x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Allora otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = c_1 + c_3 \\ 1 &= u'(0) = c_1 + c_2 - c_3 + 2 \\ 0 &= u''(0) = c_1 + 2c_2 + c_3 - 2 \end{aligned}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -1 \\ 2c_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

e dunque $c_1 = -c_3$, $c_2 = -1 + 2c_3$, $c_2 = 1$, ossia

$$c_3 = 1, \qquad c_2 = 1, \qquad c_1 = -1.$$

Perciò la soluzione del problema è

$$u(x) = e^x(x-1) + e^{-x}(x^2 + 2x + 1) = e^x(x-1) + e^{-x}(x+1)^2.$$

Esercizio 2 (i) La funzione g è non negativa. Per il teorema di Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{[0,\infty[\,\times[0,\infty[} g(s,x)\,dsdx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^\infty e^{-s\sqrt{x}}\,ds\right)dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\,du < \infty. \end{aligned}$$

(ii) Sia $\chi_{[0,n]}$ la funzione indicatrice di $[0,n]$, ossia

$$\chi_{[0,n]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Risulta ovviamente $0 \le \chi_{[0,n]} \le \chi_{[0,n+1]}$; pertanto per ogni $s \ge 0$ si ha

$$f_n(s) = \int_{\mathbb{R}} g(s,x)\chi_{[0,n]}(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}} g(s,x)\chi_{[0,n+1]}(x)\,dx = f_{n+1}(s).$$

Le funzioni integrande $g(s,x)\chi_{[0,n]}(x)$ sono positive e formano una successione crescente che converge a $g(s,x)\chi_{[0,\infty[}$. Dal teorema di B. Levi ricaviamo allora la convergenza puntuale in $[0,\infty[$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx \qquad \forall s \ge 0.$$

Poniamo adesso $f(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx$, ed osserviamo che la funzione f è sommabile in $[0,\infty[$, in quanto

$$\int_0^\infty f(s)\,ds = \int_{[0,\infty[\,\times[0,\infty[} g(s,x)dsdx < +\infty,$$

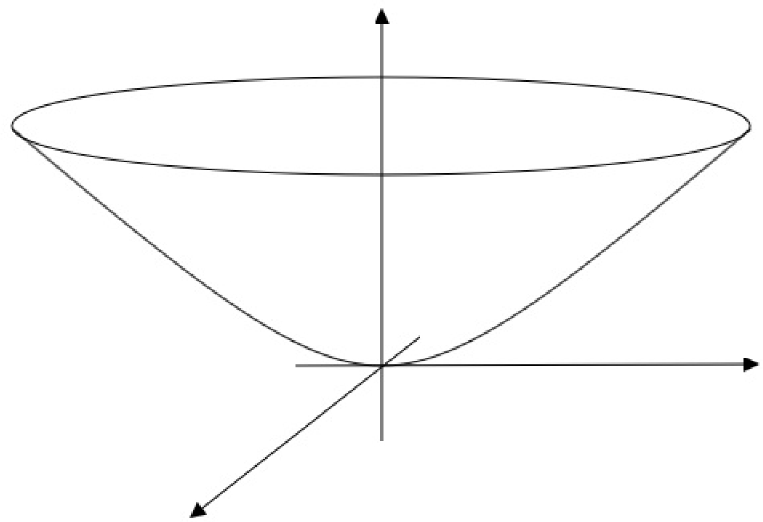
come abbiamo visto in (i). Dato che $f_n \to f$ puntualmente in $[0, \infty[$, e dato che risulta

$$0 \le f(s) - f_n(s) \le 2f(s) \qquad \forall s \ge 0,$$

la convergenza di f_n a f è dominata. Ne segue, per il teoorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (f - f_n)\, ds = 0.$$

Esercizio 3 L'insieme D è descritto nella figura sottostante.



Come è naturale, risulta $\sqrt{1+x^2}-1 = 2$ se e solo se $x = \pm 2\sqrt{2}$. In coordinate cilindriche $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$ l'insieme D è descritto dalle relazioni

$$\sqrt{1+r^2} - 1 \le z \le 2, \quad 0 \le r \le 2\sqrt{2}, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_{\sqrt{1+r^2}-1}^{2} zr\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,dzdrd\vartheta = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\sqrt{2}} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{1+r^2}-1}^{2} dr = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{r}{2}\,\left(4-(\sqrt{1+r^2}-1)^2\right)\,dr = \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^{2\sqrt{2}}(2r-r^3+2r\sqrt{1+r^2})\,dr = \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\left[r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}}+\int_0^8\sqrt{1+t}\,dt\right) = \\
&= \frac{\pi}{8}\,(8-16)+\frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}\,(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \\
&= -\pi+\frac{\pi}{12}(27-1) = -\pi+\frac{13}{6}\,\pi = \frac{7}{6}\,\pi.
\end{aligned}
$$