Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Equazioni differenziali di Sturm-Liouville

Candidata:
Gloria Sbrana

Relatore:
Prof. Paolo Acquistapace

Anno Accademico 2012/2013

a Alessio

Indice

Introduzione **ii**

1 Operatori tra spazi di Banach **1**
1.1 Operatori lineari 1
1.2 Operatori aggiunti 4
1.3 Teoria spettrale 4
1.4 Operatori compatti 8
1.4.1 Teoria spettrale degli operatori compatti 10

2 Operatori tra spazi di Hilbert **17**
2.1 Sistemi ortonormali 17
2.2 Operatori autoaggiunti 20
2.3 Il teorema spettrale 22

3 Problemi ai limiti di Sturm-Liouville **28**
3.1 L'operatore differenziale 28
3.2 Operatori integrali 33
3.3 L'operatore inverso 40
3.4 Rappresentazione delle soluzioni 44

Bibliografia **48**

Introduzione

Lo scopo dell'elaborato è dare una rappresentazione delle soluzioni del classico *problema di Sturm-Liouville*, ossia lo studio di certe equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, soggette a particolari condizioni al contorno.
Dato un *operatore di Sturm-Liouville* L della forma $Lu = -(pu')' + qu$, con $p \in C^1[a,b], q \in C[a,b]$ e $p > 0$ in $[a,b]$, ci proponiamo di risolvere l'equazione $Lu = f$ con $u \in \mathfrak{D}$, dove

$$\mathfrak{D} = \{u \in C^1[a,b] : \exists(-pu')' \in L^2(a,b),\ B_1u = B_2u = 0\},$$

è il dominio di L e

$$B_1u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a), \qquad B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b),$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ costanti reali tali che $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, |\alpha_2| + |\beta_2| > 0$ sono le condizioni al contorno.
L'importanza di questo tipo di problema differenziale deriva da vari fatti, dei quali due particolarmente significativi. Anzitutto, qualunque equazione differenziale ordinaria del secondo ordine può essere espressa, con un opportuno artificio, sotto forma di *equazione di Sturm-Liouville*; si tratta dunque di problemi della massima generalità che comprendono in sé molti tipi di equazioni utili in fisica matematica come le equazioni di Bessel, di Legendre, ed altre. Il secondo fatto, conseguenza del primo, è che le proprietà spettrali dell'operatore di Sturm-Liouville e la sviluppabilità in opportune serie di Fourier delle soluzioni costituiscono le basi del metodo di separazione delle variabili, che permette di risolvere un buon numero di problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali.
Più precisamente, l'operatore che rappresenta le soluzioni del problema di Sturm-Liouville è un operatore integrale compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $L^2(a,b)$, e le sue autofunzioni formano una base ortonormale per $L^2(a,b)$; le soluzioni del problema ai limiti si rappresentano come somma delle loro serie di Fourier rispetto a tale base.
Il problema è descritto in dettaglio nel terzo e ultimo capitolo, dove si discute in prima generalità la questione della risolubilità, utilizzando il teorema

spettrale e il teorema dell'alternativa di Fredholm.
Per giungere a questo risultato occorrono alcuni prerequisiti di analisi funzionale: nel primo capitolo vengono introdotte le definizioni e alcune importanti proprietà degli operatori compatti tra spazi normati, in particolare tra spazi di Banach; nello specifico si analizzano in dettaglio le loro proprietà spettrali.
Nel secondo capitolo sono state analizzate le proprietà degli operatori compatti tra spazi di Hilbert e sono stati introdotti gli operatori autoaggiunti, con relative proprietà: la teoria spettrale in questo caso è completa, e generalizza direttamente quello che è vero negli spazi euclidei per matrici reali e simmetriche: un operatore compatto e autoaggiunto in uno spazio di Hilbert possiede una base ortonormale composta solo da autovettori, corrispondenti ad autovalori reali; inoltre vale il teorema spettrale, tramite il quale ogni elemento dell'immagine dell'operatore è somma di una serie di Fourier rispetto alla base ortonormale di autovettori.

Capitolo 1

Operatori tra spazi di Banach

Dedicheremo questo capitolo a introdurre le applicazioni lineari, dette *operatori*, tra due spazi normati; vedremo le loro proprietà soprattutto nel caso in cui gli spazi siano, in particolare, *spazi di Banach*.

1.1 Operatori lineari

Definizione 1.1.1. Siano E e F due spazi normati reali (complessi).
Un'applicazione $T : E \to F$ è chiamata **operatore lineare** se verifica: $T(\alpha e + \beta e') = \alpha T(e) + \beta T(e')$ per ogni $e, e' \in E$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

Osservazione 1.1.2. La scrittura usata per indicare $T(e)$ sarà Te.

Definizione 1.1.3. Un operatore lineare $T : E \to F$ è detto **limitato** se esiste M positivo tale che $\|Te\|_F \leq M\|e\|_E$ per ogni $e \in E$.
L'insieme degli operatori lineari limitati da E a F è uno spazio vettoriale e viene indicato con $\mathcal{L}(E, F)$.

Vediamo ora come, sugli spazi normati, la limitatezza di un operatore lineare equivale alla continuità.

Proposizione 1.1.4. *Se E e F sono spazi normati e $T : E \to F$ è un operatore lineare, i seguenti fatti sono equivalenti:*
(i) *T è limitato;*
(ii) *esiste $e_0 \in E$ tale che T è continuo nel punto e_0;*
(iii) *T è lipschitziano: esiste $K \geq 0$ tale che $\|Te - Te'\|_F \leq K\|e - e'\|_E$ per ogni $e, e' \in E$.*

Dimostrazione. Che **(iii)** $\Rightarrow$ **(ii)** è ovvio, mostriamo quindi le altre implicazioni.

(i) ⇒ (iii) Per ipotesi, essendo T limitato, esiste M positivo tale che $\|Te\|_F \le M\|e\|_E$ per ogni $e \in E$.
Per linearità dunque:

$$\|Te - Te'\|_F = \|T(e - e')\|_F \le M\|e - e'\|_E \quad \forall e, e' \in E.$$

(ii) ⇒ (i) Per l'ipotesi di continuità per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|e - e_0\|_E \le \delta \Rightarrow \|Te - Te_0\|_F \le \varepsilon;$$

se $E = \{0\}$ per linearità $T = 0$ e la tesi è quindi ovvia.
Sia dunque $e \in E \setminus \{0\}$. Ponendo $w = \frac{\delta e}{\|e\|_E}$ si ha:

$$\frac{\delta}{\|e\|_E} Te = Tw = T(w + e_0) - Te_0,$$

dato che $\|(w + e_0) - e_0\|_E = \|w\|_E = \delta$ allora $\|Tw\|_F \le \varepsilon$. Quindi

$$\|Te\|_F = \frac{\|e\|_E}{\delta}\|Tw\|_F \le \frac{\varepsilon}{\delta}\|e\|_E \quad \forall e \in E \setminus \{0\}.$$

T è dunque limitato perché la disuguaglianza è ovvia per $e = 0$. □

Osservazione 1.1.5. Con la norma:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{e \neq 0} \frac{\|Te\|_F}{\|e\|_E} = \sup_{\|e\|_E = 1} \|Te\|_F$$

$\mathcal{L}(E, F)$ è uno spazio normato. Quando $F = E$ scriviamo $\mathcal{L}(E)$ anziché $\mathcal{L}(E, E)$.

Osservazione 1.1.6. Siano E e F due spazi normati e sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$, allora se $x_n \to x$ in E si ha $Tx_n \to Tx$ in F.

Ricordiamo la definizione di *spazio di Banach*:

Definizione 1.1.7. Uno spazio normato $(E, \| \ \|)$ è detto **spazio di Banach** se è completo rispetto alla distanza indotta: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Teorema 1.1.8. *Siano E e F due spazi normati; allora $\mathcal{L}(E, F)$ è uno spazio di Banach se lo è F.*

Dimostrazione. Si prenda $\{T_n\}$ successione di Cauchy in $\mathcal{L}(E, F)$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$ per ogni $n, m \ge \nu$; dunque:

$$\|T_n e - T_m e\|_F < \varepsilon\|e\|_E \quad \forall e \in E \quad \forall n, m \ge \nu.$$

Ne segue che per ogni $e \in E$ la successione $\{T_n e\}$ è di Cauchy in F; essendo F uno spazio di Banach, la successione avrà un limite, che chiamiamo $T(e)$. Osserviamo che T così definita appartiene a $\mathcal{L}(E,F)$, è infatti lineare ed è un operatore limitato perché per ogni $e \in E$

$$\|Te\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n e\|_F \leq \liminf_{n\to\infty}[\|T_n - T_\nu\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|e\|_E + \|T_\nu e\|_F] \leq$$

$$\leq [\varepsilon + \|T_\nu\|_{\mathcal{L}(E,F)}]\|e\|_E.$$

Ci rimane da verificare che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(E,F)$; si ha infatti che per $e \in E$ con $\|e\|_E = 1$

$$\|T_n e - Te\|_F = \lim_{m\to\infty} \|T_n e - T_m e\|_F \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geqslant \nu,$$

e quindi: $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|e\|_E=1} \|T_n e - Te\|_F \leq \varepsilon$ per ogni $n \geqslant \nu$. $\square$

Osservazione 1.1.9. Segue dalla definizione che dati due operatori lineari $T, T' \in \mathcal{L}(E)$ vale: $\|TT'\| \leq \|T\|\|T'\|$.
Un'algebra normata e completa in cui la precedente disuguaglianza è soddisfatta è chiamata *algebra di Banach*.

Non tutti gli operatori lineari fra spazi di Banach sono limitati. La situazione tipica, dati E e F spazi di Banach, è quella di un operatore lineare T, definito su un sottospazio $D(T) \subseteq E$ (*dominio* di T), a valori in F, il quale è chiuso, ossia il grafico di T è chiuso come sottoinsieme di $E \times F$. Ciò equivale a dire che se $\{x_n\} \subseteq D(T)$, $x_n \to x$ in E, $Tx_n \to y$ in F allora $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Esempio 1.1.10. Siano $E = F = C[a,b]$, con $\|f\|_E = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| = \|f\|_\infty$ per ogni $f \in E$. Poniamo:

$$\begin{cases} Tf = f' \\ D(T) = C^1[a,b] \end{cases}$$

E' chiaro che $T : D(T) \subseteq E \to E$ è ben definito. L'operatore T non è limitato: non può esistere alcuna $M > 0$ tale che

$$\|f'\|_\infty \leq M\|f\|_\infty \quad \forall f \in E.$$

Infatti, scegliendo $f(t) = (t-a)^n$, si ha

$$\|f'\|_\infty = n(b-a)^{n-1}, \quad \|f\|_\infty = (b-a)^n,$$

e dovrebbe risultare $n \leq M(b-a)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che è assurdo. Tuttavia, T è chiuso: infatti se $\{f_n\} \subseteq D(T)$, $f_n \to f$ in $C[a,b]$ e $f_n' \to g$ in $C[a,b]$, è noto che risulta $f \in C^1[a,b]$ e $f' = g$.

1.2 Operatori aggiunti

Definizione 1.2.1. Sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$, L'operatore **aggiunto** di T si indica con $T^* \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$, è lineare ed è caratterizzato dalla seguente relazione:

$$(T^*\Phi)(x) = \Phi(Tx) \quad \forall x \in E, \quad \forall \Phi \in F^*.$$

Vediamo, senza dimostrarle, alcune facili proprietà dell'operatore aggiunto.

Proposizione 1.2.2. *Siano E e F spazi normati. Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$, allora $T^* \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ e*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*.E^*)}.$$

Proposizione 1.2.3. *Siano E, F e G spazi normati. Valgono le seguenti proprietà:*
(i) *Se $T,S \in \mathcal{L}(E,F)$, allora $(T+S)^* = T^* + S^*$.*
(ii) *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(E,F)$, allora $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.*
(iii) *Se $T \in \mathcal{L}(F,G)$ e $S \in \mathcal{L}(E,F)$, allora $(TS)^* = S^*T^* \in \mathcal{L}(G^*,E^*)$.*
(iv) *Se $T \in \mathcal{L}(E)$, allora $T^{**} = T$;*
(v) *Se $T \in \mathcal{L}(E)$ ed esiste $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, allora esiste anche $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*)$, e vale: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

1.3 Teoria spettrale

Lo scopo di questo paragrafo è quello di introdurre e studiare la struttura dell'insieme dei valori $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che l'operatore $\lambda I - T$, con $T : D(T) \subseteq E \to E$ operatore lineare chiuso e con E spazio di Banach, sia invertibile con inverso continuo.

Definizione 1.3.1. Sia E uno spazio di Banach e sia data l'equazione $Tx = \lambda x + y$; se per ogni $y \in E$ esiste un'unica soluzione per x allora il punto λ è detto **regolare** per T. L'insieme $\rho(T)$ dei λ regolari è detto **insieme risolvente** di T.
Se $Tx = \lambda x + y$ non ammette un'unica soluzione, λ non è regolare; l'insieme dei λ non regolari per T viene indicato con $\sigma(T)$ ed è chiamato **spettro** di T.

Osservazione 1.3.2. Un numero complesso λ è regolare per T se e soltanto se $\lambda I - T : D(T) \to E$ è un operatore iniettivo con inverso $(\lambda I - T)^{-1} : E \to D(T)$ continuo. Sia infatti λ un punto regolare per T: per definizione $\lambda I - T : D(T) \to E$ è bigettivo, quindi l'inverso $(\lambda I - T)^{-1}$ è ben definito

da E in E. Esso è anche chiuso, perche se $\{y_n\} \subseteq E$, $y_n \to y$ in E e $x_n := (\lambda I - T)^{-1} y_n \to x$ in E, allora risulta: $x_n \in D(T)$, $x_n \to x$ in E, $(\lambda I - T)x_n = y_n \to y$ in E. Dunque $(\lambda I - T)^{-1} y = x$, ossia $(\lambda I - T)^{-1}$ è chiuso. Ma ogni operatore lineare chiuso, con dominio tutto lo spazio, è continuo in virtù del *teorema del grafico chiuso* (corollario 1.3.11). Ne segue la tesi.
L'operatore $(\lambda I - T)^{-1}$ si chiama **operatore risolvente** di T;

Osservazione 1.3.3. Un numero complesso è regolare per T se e soltanto se $(\lambda I - T) : D(T) \to E$ è iniettivo con immagine $R(\lambda I - T)$ densa in E e inverso $(\lambda I - T)^{-1} : R(\lambda I - T) \to E$ continuo. Per provare questo fatto basta mostrare che se $(\lambda I - T)$ è iniettivo con immagine densa, allora è anche surgettivo. Sia infatti $y \in E$; per densità, esiste $\{y_n\} \subseteq R(\lambda I - T)$ tale che $y_n \to y$ in E. Poniamo $x_n = (\lambda I - T)^{-1} y_n$; x_n è ben definito, $x_n \in D(T)$ e per la continuità di $(\lambda I - T)^{-1}$, $\{x_n\}$ è di Cauchy in E, esiste quindi $x \in E$ tale che $x_n \to x$ in E. Ma siccome $(\lambda I - T)$ è chiuso, deduciamo $x \in D(T)$ e $(\lambda I - T)x = y$, cioè $y \in R(\lambda I - T)$.

Esempio 1.3.4. Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un'applicazione lineare, in questo caso l'equazione $\lambda x - Tx = 0$ ha $x = 0$ come unica soluzione se e soltanto se λ non è un autovalore di T, per cui lo spettro $\sigma(T)$ è proprio l'insieme degli autovalori di T, e i vettori non nulli $x \in E$ tali che $\lambda x - Tx = 0$ sono gli autovettori di T relativi all'autovalore λ.

Dimostriamo ora un risultato generale che ci permetterà di studiare una importante proprietà del *raggio spettrale*, grandezza fondamentale della teoria spettrale.

Proposizione 1.3.5. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$. Allora esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n}.$$

Dimostrazione. Sia $r := \liminf \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n}$. E' chiaro che $0 \leqslant r \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$. Siano $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}^+$ tali che

$$r - \varepsilon < \|T^m\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/m} < r + \varepsilon.$$

Per ogni $n > m$ scegliamo $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $km < n \leqslant (k+1)m$; allora:

$$\begin{aligned}\|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n} &= \|T^{km}T^{n-km}\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n} \leqslant \|T^{km}\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n} \|T\|_{\mathcal{L}(E)}^{(n-km)/n} \leqslant \\ &\leqslant \|T^m\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/m}]^{mk/n} \|T\|_{\mathcal{L}(E)}^{(n-km)/n} < (r+\varepsilon)^{mk/n} \|T\|_{\mathcal{L}(E)}^{(n-km)/n}.\end{aligned}$$

Dato che $\frac{1}{n} \leqslant \frac{n-km}{n} \leqslant \frac{m}{n}$, si ha che $\|T\|_{\mathcal{L}(E)}^{(n-km)/n}$ tende a 1 per n che tende a ∞; e poiché $1 - \frac{m}{n} \leqslant \frac{km}{n} < 1$, si ha anche che $(r+\varepsilon)^{mk/n}$ tende a $r+\varepsilon$ per n che tende a ∞. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n} \leqslant r + \varepsilon = \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n} + \varepsilon.$$

$\square$

Definizione 1.3.6. Sia $T \in \mathcal{L}(E)$. Il **raggio spettrale** di T, che indichiamo con $r(T)$ è

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Proposizione 1.3.7. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$; il raggio spettrale di T verifica:*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \|T\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/n}$$

Se $|\lambda| > \sigma$ esiste $\delta > 0$ tale che $|\lambda| > \sigma + \delta$; per n sufficientemente grande si avrà $|\lambda|^n > (\sigma+\delta)^n > \|T^n\|_{\mathcal{L}(E)}$. Si verifica quindi che l'operatore

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{nk}}{\lambda^{n(k+1)}}$$

è ben definito come elemento di $\mathcal{L}(E)$, e soddisfa

$$S(\lambda^n I - T^n) = (\lambda^n I - T^n)S = I$$

e cioè $S = (\lambda^n - T^n)^{-1}$. Ne segue, posto

$$U = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h T^{n-1-h},$$

che $U \in \mathcal{L}(E)$, $US = SU$ e che $US(\lambda I - T) = (\lambda I - T)US = I$, ossia $US = (\lambda I - T)^{-1}$; inoltre

$$US = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h T^{n-1-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{nk}}{\lambda^{n(k+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n-1} \frac{T^{nk+n-1-h}}{\lambda^{nk+n-h}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{T^{nk+p}}{\lambda^{nk+p+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^m}{\lambda^{m+1}}.$$

Quindi, se $|\lambda| > \sigma$, $\lambda \in \rho(T)$ e $(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^m}{\lambda^{m+1}}$. In particolare $\sigma \geq r(T)$. Proviamo l'altra disuguaglianza: sia $|\lambda| > r(T)$, allora, per definizione, $\lambda \in \rho(T)$ e la funzione $(\lambda I - T)^{-1}$ è olomorfa in $\rho(T)$. Essa ha dunque uno sviluppo di Laurent che converge in $\mathcal{L}(E)$ per ogni $\lambda \in \rho(T)$. Per unicità:

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^m}{\lambda^{m+1}} \quad \forall \lambda \in \rho(T).$$

Quindi $\lim_{m\to\infty} \|T^m\|_{\mathcal{L}(E)} |\lambda|^{-m-1} = 0$ per ogni $|\lambda| > r(T)$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo λ tale che $|\lambda| = r(T) + \varepsilon$, allora, per m grande si ha:

$$\|T^m\|_{\mathcal{L}(E)} < |\lambda|^{m+1} = (\varepsilon + r(T))^{m+1}$$

e dunque:

$$\sigma = \lim_{m\to\infty} \|T^m\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/m} \leq \varepsilon + r(T) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

□

Osservazione 1.3.8. Come diretta conseguenza della proposizione 1.3.7 abbiamo che, dato $T \in \mathcal{L}(E)$, se $|\lambda| > r(T)$ l'equazione $Tx = \lambda x + y$ è sempre univocamente risolubile.

Prima di andare avanti con lo sviluppo della teoria spettrale enunciamo alcuni risultati preliminari:

Teorema 1.3.9. *L'insieme degli operatori di $\mathcal{L}(E)$ che hanno inverso limitato è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Supponiamo che T abbia un inverso limitato. Cerchiamo δ tale che $\|S - T\|_E < \delta$ implica che S ha un inverso limitato. Scriviamo

$$S = T - (T - S) = T(I - T^{-1}(T - S)).$$

Poniamo $\delta = \frac{1}{\|T^{-1}\|_E}$: $\|S - T\|_E < \delta$ implica $\|T^{-1}(T - S)\|_E < 1$, quindi la serie formale di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T^{-1}(T - S)]^n$$

converge in $\mathcal{L}(E)$ e definisce un'operatore U che inverte $I - T^{-1}(T - S)$; quindi S ha un inverso limitato. □

Enunciamo ora un teorema fondamentale, chiamato *teorema della mappa aperta* (cfr [3]), grazie al quale risulterà che in uno spazio di Banach ogni trasformazione limitata invertibile possiede automaticamente un'inversa limitata.

Teorema 1.3.10 (Teorema della mappa aperta)**.** *Siano E e F due spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operatore surgettivo. Allora T è un'applicazione aperta, cioè per ogni aperto $\Gamma \subseteq E$ l'insieme $T(\Gamma)$ è aperto in F.*

Corollario 1.3.11 (Teorema del grafico chiuso)**.** Siano E e F spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare chiuso. Allora $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Dimostrazione. Sia $G_T = \{(x, Tx) : x \in E\}$; per ipotesi G_T è un sottospazio chiuso in $E \times F$, quindi è uno spazio di Banach. La mappa

$$\Gamma : G_T \longrightarrow E$$

$$(x, Tx) \to x$$

è lineare e bigettiva. Dunque è aperta, ossia Γ^{-1} è continua. Perciò esiste $c > 0$ tale che $\|x\| + \|Tx\| \leq c\|x\|$, da cui segue che T è continuo. □

Corollario 1.3.12. Siano E e F spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(E)$. Se T è iniettivo e surgettivo allora è un isomorfismo e quindi $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Dimostrazione. T^{-1} è sicuramente lineare e, per il teorema precedente, è un'applicazione aperta; dunque la controimmagine di un'aperto mediante T^{-1} è aperta. Quindi, essendo continua, $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. □

Osservazione 1.3.13. A maggior ragione se un operatore $T \in \mathcal{L}(E)$ è iniettivo e surgettivo T^{-1} è continuo.

Vediamo adesso un'ultima proprietà che fa da corollario al teorema della mappa aperta:

Proposizione 1.3.14. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$, allora lo spettro $\sigma(T)$ è chiuso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\lambda \in \rho(T)$; $T - \lambda I$ è iniettivo e surgettivo e quindi, per il corollario 1.3.12, ha un inverso limitato. Dato che l'insieme degli operatori che possiedono un inverso limitato è un insieme aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $|\lambda - \mu| < \delta$ implica che $T - \mu I$ ha un inverso limitato, quindi anche $\mu \in \rho(T)$, e dunque l'insieme risolvente, $\rho(T)$, è aperto e lo spettro è chiuso. □

1.4 Operatori compatti

Introduciamo ora una classe di operatori, detti *operatori compatti*, che hanno buone proprietà spettrali anche negli spazi di dimensione infinita, e che ci permetteranno, nei prossimi capitoli, di studiare alcune applicazioni della teoria delle equazioni integrali.

Definizione 1.4.1. Siano E e F spazi normati.
Un operatore lineare $T : E \to F$ è detto **compatto** o **completamente continuo** se l'immagine tramite T di un insieme limitato di E è un insieme relativamente compatto (cioè a chiusura compatta) di F.

Osservazione 1.4.2. Segue dalla definizione che gli operatori compatti sono continui e che, se $\dim(F) = \infty$, non vale il viceversa, infatti $I : F \to F$ non è compatto.
Inoltre in uno spazio euclideo n-dimensionale ogni trasformazione lineare è compatta.

Proposizione 1.4.3. *Sia E uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(E)$. Allora l'operatore T è compatto se e soltanto se ogni successione limitata $\{x_n\} \in E$ possiede una sottosuccessione $\{x_{n'}\}$ tale che $\{Tx_{n'}\}$ è convergente.*

Dimostrazione. Sia T compatto e sia $\{x_n\} \in E$ limitata, allora $\{Tx_n\}$ è relativamente compatto; dato che uno spazio di Banach è in particolare uno spazio metrico, la compattezza equivale alla compattezza per successioni; quindi $\{Tx_n\}$ possiede una sottosuccessione $\{Tx_{n'}\}$ convergente.
Viceversa supponiamo per assurdo che l'immagine tramite T di un insieme limitato di E non sia relativamente compatta; allora esiste $\{Tx_n\} \subseteq T(E)$ che non ha sottosuccessioni convergenti, ma ogni successione limitata $\{x_n\} \in E$ possiede una sottosuccessione $\{x_{n'}\}$ tale che $\{Tx_{n'}\}$ è convergente. Poiché $\{Tx_{n'}\} \subseteq \{Tx_n\}$ ciò è assurdo. $\square$

Osservazione 1.4.4. Siano E, F e G spazi normati, siano $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$; se almeno una tra gli operatori T e S è compatto, allora $S \circ T$ è compatto.

Vediamo ora alcune delle proprietà principali degli operatori compatti tra spazi normati.

Proposizione 1.4.5. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$, con E spazio normato, tale che la sua immagine $R(T)$ sia di dimensione finita; allora T è compatto.*

Teorema 1.4.6. *Sia E uno spazio normato e F uno spazio di Banach. Sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di operatori compatti da E a F tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(E, F)$ (equivalentemente $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$), allora T è un operatore compatto.*
In particolare, se E è uno spazio di Banach, il sottospazio degli operatori compatti è chiuso in $\mathcal{L}(E)$.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subseteq E$ tale che $\|x_n\|_E \le K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: dobbiamo dunque provare che $\{Tx_n\}$ ha una sottosuccessione convergente in F.

T_1 è compatto, esistono quindi un elemento $y_1 \in F$ e una sottosuccessione $\{x_n^{(1)}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $T_1 x_n^{(1)} \to y_1$ in F per $n \to \infty$;
Iterando il procedimento, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, essendo T_k compatto esistono un elemento $y_k \in F$ e una sottosuccessione $\{x_n^{(k)}\} \subseteq \{x_n^{(k-1)}\}$ tale che $T_i x_n^{(k)} \to y_i$ in F per $n \to \infty$ $i = 1, 2, ..., k$.
Consideriamo la successione $\{x_n^{(n)}\}$, che è anch'essa una sottosuccessione di $\{x_n\}$, per la quale vale $T_i x_n^{(n)} \to y_i$ in F per $n \to \infty$ qualunque sia $i \in \mathbb{N}^+$.
Fissato ε esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|T - T_k\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$; dato che $T_{k_\varepsilon} x_n^{(n)} \to y_{k_\varepsilon}$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che: $\|T_{k_\varepsilon}(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\|_F < \varepsilon$ per ogni $n, m \geqslant \nu_\varepsilon$. Quindi per ogni $n, m \geqslant \nu_\varepsilon$:

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\|_F = \|Tx_n^{(n)} - T_{k\varepsilon} x_n^{(n)}\|_F + \|T_{k_\varepsilon}(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\|_F +$$

$$+ \|T_{k_\varepsilon} x_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\|_F < 2\varepsilon K + \varepsilon.$$

Abbiamo perciò che la successione $\{Tx_n^{(n)}\}$ è di Cauchy in F; essendo poi F completo, essa sarà convergente in F. $\square$

Come immediata conseguenza del precedente teorema abbiamo il seguente:

Corollario 1.4.7. Sia E uno spazio normato e F uno spazio di Banach. Gli operatori che sono limiti in $\mathcal{L}(E, F)$ di successioni di operatori ad immagine finito-dimensionale sono compatti.

Osservazione 1.4.8. Il viceversa è in generale falso.

1.4.1 Teoria spettrale degli operatori compatti

Cominciamo col dire che se abbiamo una trasformazione lineare T da uno spazio euclideo n-dimensionale in se stesso ci sono al più n autovalori distinti λ, ed essi sono i λ tali che $T - \lambda I$ è non invertibile. Un $x \neq 0$ tale che $Tx = \lambda x$ si dice *autovettore* di T relativo all'autovalore λ, e chiamiamo inoltre *autospazio* di λ l'insieme : $\{x : Tx = \lambda x\}$ (cioè lo spazio generato dagli autovettori relativi allo stesso autovalore).

Introduciamo la nozione di spazio *duale*:

Definizione 1.4.9. Sia E uno spazio normato. Il suo **duale** è lo spazio $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (o $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ se E è complesso) che si denota con E^*. Gli elementi di E^* si chiamano **funzionali** lineari (continui) su E.

Osservazione 1.4.10. Dato che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono spazi completi E^* è uno spazio di Banach per ogni spazio normato E.

Per poter dimostrare un risultato che metterà in relazione compattezza e dualità enunciamo le seguenti:

Definizione 1.4.11. Un sottoinsieme K di uno spazio normato E è **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita $\{x_1, ..., x_N\}$ di punti di K tali che $K \subseteq \cup_{j=1}^N B(x_j, \varepsilon)$, dove $B(x_j, \varepsilon) = \{x \in E : \|x - x_j\|_E < \varepsilon\}$.

Osservazione 1.4.12. I sottoinsiemi compatti di uno spazio normato E sono totalmente limitati.

E' importante la seguente

Proposizione 1.4.13. *Se E è uno spazio di Banach e $Y \subseteq E$ è un insieme totalmente limitato, allora Y è relativamente compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{x_h\} \subseteq Y$, proviamo che $\{x_h\}$ possiede una sottosuccessione convergente: ciò implicherà la tesi. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, la totale limitatezza di Y implica che esistono $y_1^{(n)}, ..., y_{m_n}^{(n)} \in Y$ tali che $Y \subseteq \cup_{j=1}^{m_n} B(y_j^{(n)}, \frac{1}{2n})$. Quindi, scelto $n = 1$, almeno una tra le palle $B(y_j^{(1)}, \frac{1}{2})$ conterrà infiniti x_h, ossia esiste $\{x_h^{(1)}\} \subseteq \{x_h\}$ tale che $\|x_h^{(1)} - x_k^{(1)}\|_E < 1$. Iterando, per ogni n esiste $\{x_h^{(n)}\} \subseteq \{x_h^{(n-1)}\}$ tale che $\|x_h^{(n)} - x_k^{(n)}\|_E < \frac{1}{n}$. Ne segue che per la sottosuccessione diagonale $\{x_n^{(n)}\}$ vale $\|x_n^{(n)} - x_m^{(m)}\|_E < \frac{1}{m}$ per ogni $n > m$. Quindi $\{x_n^{(n)}\}$ è di Cauchy in E, e dunque converge. $\square$

Proposizione 1.4.14. *Siano E e F spazi normati e sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se T è compatto, allora T^* è compatto; viceversa, se T^* è compatto e F è uno spazio di Banach, allora T è compatto.*

Dimostrazione. Sia T compatto. Per provare che T^* è compatto dobbiamo dimostrare che se W è un sottoinsieme limitato di F^* allora $T^*(W)$ è totalmente limitato in E^*: dato che E^* è completo, ne seguirà, per la proposizione 1.4.13, che $T^*(W)$ è relativamente compatto in E^*, e dunque la tesi.
Sia $\varepsilon > 0$: posto $S = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$, essendo T compatto l'insieme $T(S)$ è totalmente limitato in F. Quindi esistono $x_1, ..., x_n \in S$ tali che

$$\min_{1 \le i \le n} \|Tx - Tx_i\|_F < \varepsilon \quad \forall x \in S.$$

Definiamo l'operatore $G : F^* \to \mathbb{C}^n$ ponendo $Gf = (f(Tx_1), ..., .f(Tx_n))$ per ogni $f \in F^*$. Allora

$$|Gf|_n^2 = \sum_{i=1}^n |f(Tx_i)|^2 \le n\|f\|_{F^*}^2 \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}^2,$$

di modo che $G \in \mathcal{L}(F^*, \mathbb{C}^n)$. Dato che G ha immagine finito-dimensionale, l'insieme $G(W)$ è totalmente limitato in $\mathbb{C}^n$: quindi esistono $f_1, ..., f_m \in W$ tali che

$$\min_{1\leq j\leq m} |Gf_j - Gf|_n < \varepsilon \quad \forall f \in W.$$

Quindi, fissato $f \in W$, è possibile scegliere un indice j_0 tra 1 e m (dipendente da f) tale che

$$|f(Tx_i) - f_{j_0}(Tx_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, ..., n.$$

Valutiamo adesso la quantità

$$\|T^* f_{j_0} - T^* f\|_{E^*} = \sup_{x\in S} |f_{j_0}(Tx) - f(Tx)|.$$

Per ogni fissato $x \in S$, sia i_0 l'indice tra 1 e n (dipendente da x) tale che $\|Tx - Tx_{i_0}\|_F < \varepsilon$; si ha

$$|f_{j_0}(Tx) - f(Tx)| \leq$$

$$\leq |f_{j_0}(Tx) - f_{j_0}(Tx_{i_0})| + |f_{j_0}(Tx_{i_0}) - f(Tx_{i_0})| + |f(Tx_{i_0}) - f(Tx)| \leq$$

$$\leq (\|f_{j_0}\|_{F^*} + \|f\|_{F^*})\varepsilon + \varepsilon \leq \left(1 + 2\sup_{f\in W} \|f\|_{F^*}\right)\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $x \in S$, segue che

$$\min_{1\leq j\leq m} \|T^* f_j - T^* f\|_{E^*} \leq \|T^* f_{j_0} - T^* f\| \leq \left(1 + 2\sup_{f\in W} \|f\|_{F^*}\right)\varepsilon \quad \forall f \in W.$$

Ciò prova che $T^*(W)$ è totalmente limitato in E^*.
La prova dell'implicazione opposta è analoga.

$\square$

Proposizione 1.4.15. *Sia E uno spazio normato finito-dimensionale con $\dim E = d$, allora E è uno spazio di Banach isomorfo a $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Sia $\{u_1, ..., u_d\}$ una base di E e sia E^* il duale di E. Per $i = 1, ..., d$ sia $\varphi_i \in E^*$ definito da $\varphi_i(u_j) = \delta_{ij}$.
Allora per ogni $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^d a_j u_j$, si ha $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^d a_j \delta_{ij} = a_i$.
Ciò premesso, poniamo $I(a_1, ..., a_d) = \sum_{i=1}^d a_i u_i$. I è un'applicazione lineare surgettiva e iniettiva da $\mathbb{R}^d$ ad E. Se mettiamo su $\mathbb{R}^d$ la norma $\sum_{i=1}^d |a_i|$, si ha

$$\|I(a_1, ...a_d)\|_E = \left\|\sum_{i=1}^d a_i u_i\right\|_E \leq \sum_{i=1}^d |a_i| \left(\max_{1\leq j\leq d} \|u_j\|_E\right),$$

e d'altra parte se $x = I(a_1, ..., a_d)$, si ha

$$\sum_{i=1}^{d} |a_i| = \sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{d} \|\varphi_i\|_{E^*} \|x\|_E = \left(\sum_{i=1}^{d} \|\varphi_i\|_{E^*} \right) \|I(a_1, ..., a_d)\|_E.$$

Ciò prova che $I : \mathbb{R}^d \to E$ è un isomorfismo.
In particolare, se $\{x_n\} \subseteq E$ è di Cauchy in E, e se $x_n = \sum_{i=1}^{d} a_i^n u_i$, allora $\{a_i^n\} \subseteq \mathbb{R}$ è di Cauchy, quindi esiste $a_i \in \mathbb{R}$ tale che $a_i^n \to a_i$ per $i = 1, ..., d$, e dunque $(a_1^n, ..., a_d^n) \to (a_1, ..., a_d)$ in $\mathbb{R}^d$. Ne segue che $x_n = \sum_{i=1}^{d} a_i^n u_i \to \sum_{i=1}^{d} a_i u_i$ in E, perciò E è completo. □

Proposizione 1.4.16. *Sia F un sottospazio chiuso proprio di uno spazio normato E. Dato $\delta > 0$, esiste un $x \in E$ tale che $\|x\|_E = 1$ e $d(x, F) \geqslant 1-\delta$.*

Dimostrazione. Scegliamo un qualunque $y \notin F$, allora $d = d(y, F) > 0$ poiché F è chiuso.
Esiste $z \in F$ tale che $d \leq \|z - y\|_E \leq \frac{d}{1-\delta}$. Poniamo:

$$x = \frac{z - y}{\|z - y\|_E};$$

notiamo che se $u \in F$,

$$\|x - u\|_E = \left\| \frac{z - y}{\|z - y\|_E} - u \right\|_E = \|z - y\|_E^{-1} \|z - y - \|z - y\|_E u\|_E$$

con $z - \|z - y\|_E u \in F$, quindi:

$$\|x - u\|_E \geq \frac{d}{\|z - y\|_E} \geq 1 - \delta.$$

□

Proposizione 1.4.17. *Sia T un operatore compatto e sia $\lambda \neq 0$; allora l'immagine $R(T - \lambda I)$ è chiusa.*

Dimostrazione. Sia $\{(T - \lambda I)z_n\}$ una successione convergente e sia $M > 0$ tale che $\|z_n\| \leq M$. Esiste una sottosuccessione $\{z_{n'}\}$ tale che $\{Tz_{n'}\}$ sia convergente, dunque anche $\{(T - \lambda I)z_{n'}\}$ è convergente. Pertanto $\{T - (T - \lambda I)\}z_{n'} = \lambda z_{n'}$ converge e, dato che $\lambda \neq 0$, $\{z_{n'}\}$ converge. Assumiamo dunque che $\{(T - \lambda I)x_n\}$ converga a un certo elemento y, dobbiamo far vedere che $y \in R(T - \lambda I)$. Se $\|x_n\| \leq M$ per l'osservazione precedente esiste $\{x_{n'}\}$ convergente a un certo x, quindi:

$$(T - \lambda I)x_{n'} \to (T - \lambda I)x = y.$$

Rimane tuttavia la possibilità che $\{x_n\}$ sia illimitata. Per trattare questo caso definiamo:

$$E_\lambda = \{u \in E : Tu = \lambda u\},$$

E_λ è il nucleo dell'operatore $(T - \lambda I)$ ed è chiuso perché T è continuo. Osserviamo che se, per infiniti indici, $x_n \in E_\lambda$, allora $Tx_n - \lambda x_n \to 0 \in R(T - \lambda I)$. Supponiamo invece che, definitivamente, $x_n \notin E_\lambda$ e sia F_n lo spazio generato da x_n e da E_λ; E_λ è un sottospazio chiuso proprio di F_n dunque, per la proposizione 1.4.16, esiste $z_n \in F_n$ tale che $\|z_n\| = 1$ e $d(z_n, E_\lambda) \geq \frac{1}{2}$. Se scriviamo $z_n = a_n x_n + u_n$, con $u_n \in E_\lambda$, nessuna sottosuccessione di $\{a_n\}$ converge a 0; infatti se esistesse $a_{n'}$ tale che $a_{n'} \to 0$ avremmo:

$$(T - \lambda I)z_{n'} = (T - \lambda I)(a_{n'} x_{n'}) = a_{n'}(T - \lambda I)x_{n'} \to 0,$$

perché per ipotesi $(T - \lambda I)x_n$ è convergente. Usando questa osservazione e il fatto che esiste $\{z_{n''}\} \subset \{z_n\}$ per la quale $Tz_{n''}$ converge, avremmo $z_{n''} \to z$ per qualche z; dunque $(T - \lambda I)z = 0$, da cui $z \in E_\lambda$. Questo è assurdo perché $d(z_n, E_\lambda) \geq \frac{1}{2}$ per ogni n. Di conseguenza possiamo concludere che $\{a_n^{-1}\}$ è limitata e che quindi:

$$(T - \lambda I)(a_{n'}^{-1} z_{n'}) = (T - \lambda I)x_{n'} \to y,$$

con $\{a_n^{-1} z_{n'}\}$ uniformemente limitata: possiamo quindi ridurci al primo caso considerato. $\square$

Proposizione 1.4.18. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$ compatto, allora non possono valere simultaneamente i seguenti fatti:*
(i) *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sono vettori linearmente indipendenti;*
(ii) *$Tx_n = \lambda_n x_n$;*
(iii) *$\lambda_n \to \lambda \neq 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che valgano tutte e tre le condizioni. Sia E_n lo spazio generato da $x_1, ..., x_n$. E_n è chiuso ed è un sottospazio proprio di E_{n+1}; per la proposizione 1.4.16 esiste $y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^n x_j \in E_n$ con $\|y_n\|_E = 1$ e $d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Per $m < n$ abbiamo $Ty_n - Ty_m = (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m + \lambda_n y_n$, con

$$\begin{aligned} z_{nm} = (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m &= (\sum_{j=1}^{n} c_j^n Tx_j - \lambda_n \sum_{i=1}^{n} c_j^n x_j) - Ty_m = \\ &= (\sum_{j=1}^{n} c_j^n \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j^n \lambda_n x_j) - \sum_{j=1}^{m} c_j^m Tx_j = \\ &= (\sum_{j=1}^{n-1} c_j^n \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1} c_j^n \lambda_n x_j) - \sum_{j=1}^{m} c_j^m \lambda_j x_j, \end{aligned}$$

che quindi appartiene a E_{n-1}. Per n abbastanza grande si avrà:

$$\|Ty_n - Ty_m\|_E = \|\lambda_n y_n + z_{nm}\|_E = |\lambda_n| \left\| y_n + \frac{z_{nm}}{\lambda_n} \right\|_E \geq$$

$$\geq |\lambda_n| d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{|\lambda_n|}{2} \geq \frac{|\lambda|}{4}.$$

Da questo segue che $\{Ty_n\}$ non può avere una sottosuccessione convergente, in contraddizione col fatto che T sia compatto. □

Corollario 1.4.19. Sia $T \in \mathcal{L}(E)$ compatto con $S = T - \lambda I$ e $\lambda \neq 0$, allora il nucleo di S (e quindi l'autospazio di T relativo a λ) ha dimensione finita.

Teorema 1.4.20. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$ compatto, allora lo spettro $\sigma(T)$ è una sequenza di punti, diversi da* 0*, che hanno come unico limite possibile il punto* 0*; nel qual caso anche* $0 \in \sigma(T)$*. I punti della successione sono autovalori di molteplicità finita.*

Dimostrazione. Innanzitutto facciamo vedere che se $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, allora λ è un autovalore. Mostreremo quindi che se $\lambda \neq 0$ non è un autovalore allora $T - \lambda I$ è invertibile.
Sia $E_n = R(T - \lambda I)^n$, proviamo che E_n è chiuso: poiché

$$(T - \lambda I)^n = \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} T^h (-1)^{n-h} \lambda^{n-h} + (-1)^n \lambda^n I =$$

$$= (-1)^{n-1} \left(\sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} T^h (-1)^{h-1} \lambda^{n-h} - \lambda^n I \right) = (-1)^{n-1}(G - \lambda^n I),$$

dove G è un operatore compatto, dato che somma e prodotto di operatori compatti sono operatori compatti. Dunque $E_n = R(G - \lambda^n I)$ è chiuso per la proposizione 1.4.17. Vale inoltre: $E_0 \supset E_1 \supset E_2 ....$ Osserviamo che esiste un intero n tale che $E_n = E_{n+1}$, perchè se così non fosse potremmo trovare, per ogni n, un $x_n \in E_n$ tale che $d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ e $\|x_n\|_E = 1$. Avremmo quindi che per $m > n$

$$Tx_n - Tx_m = (T - \lambda I)x_n - (T - \lambda I)x_m - \lambda x_m + \lambda x_n = y + \lambda x_n$$

con $y \in E_{n+1}$. Ma allora $\|Tx_n - Tx_m\|_E \geq d(\lambda x_n, E_{n+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2}$, il che contraddice la compattezza dell'operatore T. Quindi vale definitivamente $E_n = E_{n+1}$, e questo implica che $E_{n-1} = E_n$. Infatti, sia $x \in E_{n-1}$; esiste $y \in E$ tale che: $x = (T - \lambda I)^{n-1} y$, e dunque :

$$(T - \lambda I)x = (T - \lambda I)^n y \in E_n = E_{n+1}.$$

Esiste quindi z tale che $(T - \lambda I)x = (T - \lambda I)^{n+1}z$; ma $(T - \lambda I)$ è iniettivo perché λ non è un autovalore di T; quindi $x = (T-\lambda I)^n z \in E_n$, da cui $E_{n-1} = E_n$. Proseguendo in questo modo otteniamo che $E_1 = E_0$ e che infine $R(T - \lambda I) = E$, ossia $T - \lambda I$ è anche surgettivo come volevamo dimostrare. □

In conclusione siamo arrivati a dire che ogni elemento non nullo di $\sigma(T)$ è un autovalore; per la proposizione 1.4.18, ognuno di essi ha molteplicità finita; e 0 è l'unico punto limite possibile degli autovalori di T.

Corollario 1.4.21. Se T è compatto e $T - \lambda I$ è iniettivo, allora $T - \lambda I$ è anche surgettivo.

Proposizione 1.4.22. *Sia E uno spazio normato e sia $T \in \mathcal{L}(E)$ compatto e iniettivo. Allora $0 \in \rho(T)$ se e solo se E ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Se E ha dimensione finita ogni operatore lineare da E in E è continuo e compatto, quindi l'iniettività assicura la surgettività e la continuità dell'operatore inverso, per cui 0 sta nell'insieme risolvente $\rho(T)$. Viceversa se $0 \in \rho(T)$ allora T è anche surgettivo e $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, per cui, dato che la composizione di due operatori compatti è un operatore compatto, $I = T^{-1}T$ è compatto e quindi E ha dimensione finita. □

Corollario 1.4.23. Se E è uno spazio normato di dimensione infinita e $T \in \mathcal{L}(E)$ è un operatore compatto, allora 0 appartiene allo spettro $\sigma(T)$.

Capitolo 2

Operatori tra spazi di Hilbert

Lo scopo di questo capitolo è quello di studiare le proprietà degli operatori compatti da uno spazio di Hilbert in sé, e di introdurre un'altra classe di operatori, detti *autoaggiunti*, tramite i quali potremo studiare il *teorema spettrale* negli spazi di Hilbert.

2.1 Sistemi ortonormali

Ricordiamo la definizione di *spazio di Hilbert* e di *spazio separabile*:

Definizione 2.1.1. Uno **spazio di Hilbert** è uno spazio di Banach in cui la norma è indotta da un prodotto scalare.

Definizione 2.1.2. Uno spazio topologico E si dice **separabile** se esiste un sottoinsieme D numerabile e denso in E.

In questo paragrafo cercheremo di scrivere ogni elemento di uno spazio di Hilbert come combinazione lineare di elementi di una base fissata.

Definizione 2.1.3. Una famiglia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di elementi di uno spazio di Hilbert H si chiama **sistema ortonormale** se:

$$(x_\alpha, x_\beta)_H = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in A.$$

$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è detto **completo** se $(x, x_\alpha)_H = 0$ per ogni α implica che $x = 0$. Una **base ortonormale** è un sistema ortonormale completo.

Esempio 2.1.4. (1) $\{e_1, ..., e_N\}$ è una base ortonormale per $\mathbb{R}^N$.
(2) Il sistema trigonometrico

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx; n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

è una base ortonormale per $L^2(-\pi,\pi)$.

Un'applicazione del Lemma di Zorn ci permette di dimostrare la seguente:

Proposizione 2.1.5. *Ogni spazio di Hilbert $H \neq \{0\}$ ha una base ortonormale.*

Proposizione 2.1.6. *In uno spazio di Hilbert separabile una base ortonormale $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. $\|x_\alpha - x_\beta\| = \sqrt{2}$ per ogni $\alpha \neq \beta$, dunque le palle $B(x_\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sono tutte disgiunte. Sia D un insieme numerabile denso in H, allora A è numerabile perché ogni palla $B(x_\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}})$ contiene un elemento di D. □

Dimostriamo ora un importante risultato:

Proposizione 2.1.7 (disuguaglianza di Bessel)**.** *Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert H. Allora:*
(i) *per ogni $x \in H$ l'insieme $E_x = \{\alpha \in A : (x, x_\alpha)_H \neq 0\}$ è al più numerabile;*
(ii) *risulta:*

$$\sum_{\alpha\in E_x} |(x, x_\alpha)_H|^2 \leqslant \|x\|_H^2.$$

Dimostrazione. **(i)** Sia $E_{x,p} = \{\alpha \in A : |(x, x_\alpha)_H| > \frac{1}{p}\}$, si ha allora che $E_x = \cup_{p\in\mathbb{N}^+} E_{x,p}$. $E_{x,p}$ ha cardinalità finita; se così non fosse, scegliendo $x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_N} \in E_{x,p}$ con N sufficientemente grande si arriva ad un assurdo; infatti:

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{N} (x, x_{\alpha_k})_H x_{\alpha_k} \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} |(x, x_{\alpha_k})_H|^2 - 2\sum_{k=1}^{N} |(x, x_{\alpha_k})_H|^2 =$$

$$= \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N} |(x, x_{\alpha_k})_H|^2.$$

Poiché gli α_k appartengono a $E_{x,p}$ si ha:

$$\frac{N}{p^2} \leq \sum_{k=1}^{N} |(x, x_{\alpha_k})_H|^2 \leq \|x\|_H^2$$

con N arbitrario, ma questo è impossibile.
(ii) Sia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} = E_x$. Per quanto visto, per ogni $N \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{N} |(x, x_{\alpha_k})_H|^2 \leq \|x\|_H^2;$$

per $N \to \infty$ si ottiene la tesi. □

Come abbiamo visto, dato un sistema ortonormale $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ su uno spazio di Hilbert H non separabile, l'insieme degli indici α tali che $(x,x_\alpha)_H \neq 0$ è al più numerabile; di conseguenza per ogni $x \in H$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty}(x,x_{\alpha_i})_H x_{\alpha_i}$ converge. Infatti dalla disuguaglianza di Bessel si ha che:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}(x,x_{\alpha_n})_H x_{\alpha_n} - \sum_{n=0}^{M}(x,x_{\alpha_n})_H x_{\alpha_n}\right\|_H^2 = \sum_{n=M+1}^{N}|(x,x_{\alpha_n})_H|^2 < \epsilon$$

per $N > M > M_\epsilon$, ed essendo $\{\sum_{n=0}^{N}(x,x_{\alpha_n})_H x_{\alpha_n}\}$ una successione di Cauchy, essa converge in H.

Definizione 2.1.8. Sia H uno spazio di Hilbert, sia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale completo in H e sia $x \in H$. Detti α_n gli indici tali che $(x,x_{\alpha_n})_H \neq 0$, i numeri $(x,x_{\alpha_n})_H$ si dicono **coefficienti di Fourier** di x, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(x,x_{\alpha_n})_H x_{\alpha_n}$ si dice **serie di Fourier** di x.

Teorema 2.1.9. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in E_x}$ un sistema ortonormale. Sono fatti equivalenti:*
(i) *$\{x_\alpha\}$ è completo;*
(ii) *$\{x_\alpha\}^\perp = 0$;*
(iii) *vale l'identità di Bessel:*

$$\sum_{\alpha\in E_x}|(x,x_\alpha)_H|^2 = \|x\|_H^2 \quad \forall x \in H;$$

(iv) *vale l'identità di Parseval:*

$$(x,y)_H = \sum_{\alpha\in E_x\cap E_y}(x,x_\alpha)_H\overline{(y,x_\alpha)_H} \quad \forall x,y \in H;$$

(v) *per ogni $x \in H$ la serie di Fourier di x, $\sum_{\alpha\in E_x}(x,x_\alpha)_H x_\alpha$, converge in H e la sua somma è x.*

Dimostrazione. **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** è un'ovvia conseguenza della definizione di sistema ortonormale completo.
(v) $\Rightarrow$ **(ii)** Se $x \perp \{x_\alpha\}$, allora:

$$x = \sum_{\alpha\in E_x}(x,x_\alpha)_H x_\alpha = \sum_{\alpha\in E_x} 0\cdot x_\alpha = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ **(v)** Che la serie di Fourier di x converga in H abbiamo visto essere una conseguenza della disuguaglianza di Bessel, dobbiamo provare che la sua somma è x. Supponiamo quindi che la serie converga ad un elemento z. Per ogni arbitrario $\beta \in E_x$ e per la continuità del prodotto scalare si ha:

$$(z,x_\beta)_H = \left(\sum_{\alpha\in E_x}(x,x_\alpha)_H x_\alpha, x_\beta\right)_H = \sum_{\alpha\in E_x}(x,x_\alpha)_H(x_\alpha,x_\beta)_H = (x,x_\beta)_H$$

per cui $z - x \in \{x_\alpha\}^\perp$, e quindi $z = x$.
(iii) $\Leftrightarrow$ **(v)** è conseguenza della seguente uguaglianza: per ogni $x \in H$, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $\alpha_1, ..., \alpha_N \in E_x$

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x, x_{\alpha_n})_H x_{\alpha_n} \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x, x_{\alpha_n})_H|^2.$$

(iv) $\Rightarrow$ **(iii)** L'identità di Bessel si ottiene da quella di Parseval ponendo $x = y$.
(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** Sapendo che vale:

$$\|x + y\|_H^2 = \|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 + 2Re(x, y)_H$$

e anche:

$$\|x + y\|_H^2 = \sum_{\alpha \in E_x \cup E_y} |(x, x_\alpha)_H + (y, x_\alpha)_H|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha \in E_x} |(x, x_\alpha)_H|^2 + \sum_{\alpha \in E_y} |(y, x_\alpha)_H|^2 + 2Re \sum_{\alpha \in E_x \cap E_y} (x, x_\alpha)_H \overline{(y, x_\alpha)_H},$$

si ricava $Re(x, y)_H = Re\left(\sum_{\alpha \in E_x \cap E_y} (x, x_\alpha)_H \overline{(y, x_\alpha)_H}\right)$. Per la parte immaginaria si opera in maniera analoga considerando $x + iy$. $\square$

Completiamo questa sezione enunciando il noto *teorema di rappresentazione di Riesz.*

Teorema 2.1.10 (teorema di Riesz)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia H^* il suo spazio duale, allora per ogni $\varphi \in H^*$ esiste un unico $z \in H$ tale che:*
(i) $\varphi x = (x, z)_H$ *per ogni* $x \in H$*,*
(ii) $\|z\|_H = \|\varphi\|_{H^*}$.

Osservazione 2.1.11. L'applicazione $j : H^* \to H$, definita da $j(\varphi) = z$, è un isomorfismo isometrico tra H^* e H; j è in particolare surgettiva perché, dato $z \in H$, si ha $j(\varphi) = z$ con $\varphi x = (x, z)_H$.

2.2 Operatori autoaggiunti

Nella definizione 1.2.1 abbiamo introdotto la nozione di *operatore aggiunto.* Nel caso di uno spazio di Hilbert questa nozione va precisata. Poiché H e H^* sono isomorfi, spesso tali spazi vengono identificati confondendo l'elemento $z \in H$ con il funzionale $x \to (x, z)_H$ di H^*. Ciò semplifica molti discorsi, ma comporta una modifica nella definizione dell'aggiunto di un operatore

$T \in \mathcal{L}(H)$. Sia $j : H^* \to H$ l'isomorfismo canonico fornito dal teorema 2.1.10 (teorema di rappresentazione di Riesz), vale:

$$\varphi x = (x, j(\varphi))_H \quad \forall x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*.$$

Se $T \in \mathcal{L}(H)$, si ha $T^* \in \mathcal{L}(H^*)$ e

$$(x, j(T^*\varphi))_H = (T^*\varphi)x = \varphi(Tx) = (Tx, j(\varphi))_H \quad \forall x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*,$$

ossia, posto $y = j(\varphi)$,

$$(x, jT^*j^{-1}y)_H = (Tx, y)_H \quad \forall x, y \in H.$$

Ciò premesso, nel caso di operatori $T \in \mathcal{L}(H)$, è consuetudine identificare l'operatore aggiunto $T^* \in \mathcal{L}(H^*)$ con l'operatore $jT^*J^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Pertanto:

Definizione 2.2.1. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$. L'**operatore aggiunto** di T si indica con $T^* \in \mathcal{L}(H)$, ed è caratterizzato dalla relazione:

$$(Tx, y)_H = (x, T^*y)_H \quad \forall x, y \in H.$$

Osservazione 2.2.2. Con l'identificazione sopra descritta, le proprietà dell'operatore aggiunto in uno spazio di Hilbert sono le stesse espresse nella proposizione 1.2.3; l'unica importante differenza è che, quando lo spazio di Hilbert è complesso, l'applicazione da $\mathcal{L}(H)$ in sé definita dalla mappa $T \to T^*$ è *antilineare*, poiché:

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Definizione 2.2.3. $T \in \mathcal{L}(H)$ è detto **autoaggiunto** (o **hermitiano**) se $T = T^*$, cioè se verifica:

$$(Tx, y)_H = (x, Ty)_H \quad \forall x, y \in H.$$

Esempio 2.2.4. Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ un operatore lineare.
Se T si rappresenta con una matrice $\{a_{ij}\}$ $m \times n$ rispetto alla base canonica, l'aggiunto T^* si rappresenta con la matrice trasposta coniugata $\{\overline{a_{ji}}\}$; in particolare $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è autoaggiunto se e solo se la matrice $\{a_{ij}\}$ è reale e simmetrica, quindi gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali.

2.3 Il teorema spettrale

Il nostro obiettivo è quello di dimostrare che in uno spazio di Hilbert H esiste una base ortonormale composta solo da autovettori di un operatore compatto e autoaggiunto T in $\mathcal{L}(H)$.

Ci servirà la nozione di convergenza debole:

Definizione 2.3.1. Sia E uno spazio normato e sia $\{x_n\} \subset E$. Diciamo che $\{x_n\}$ *converge debolmente* ad un elemento $x \in E$ se vale $Fx_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$ per ogni funzionale $F \in E^*$. In tal caso si scrive $x_n \rightharpoonup x$.

Osservazione 2.3.2. Si vede facilmente, come conseguenza della disuguaglianza di Bessel, che se $\{x_n\}$ è una base ortonormale per uno spazio di Hilbert H, allora $x_n \rightharpoonup 0$.

Proposizione 2.3.3. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Allora T è compatto se e soltanto se per ogni $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H risulta $Tx_n \to Tx$ in H.*

Come diretta conseguenza enunciamo la seguente:

Proposizione 2.3.4. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Allora T è compatto se e soltanto se per ogni $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H risulta $(Tx_n, x_n)_H \to (Tx, x)_H$.*

Analizziamo adesso la struttura dello spettro degli operatori compatti e autoaggiunti in uno spazio di Hilbert.

Lemma 2.3.5. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora:*
(i) *gli autovalori di T sono reali;*
(ii) *autovettori relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.*

Dimostrazione. **(i)** Se $Tx = \lambda x$ con $x \neq 0$, allora

$$\lambda \|x\|_H^2 = (Tx, x)_H = (x, Tx)_H = \overline{\lambda} \|x\|_H^2,$$

e quindi $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) Se $Tx = \lambda x$ e $Tx' = \lambda' x'$ con x,$x' \neq 0$ e $\lambda \neq \lambda'$, allora

$$\lambda (x, x')_H = (Tx, x')_H = (x, Tx')_H = \overline{\lambda'} (x, x')_H = \lambda' (x, x')_H,$$

per cui x e x' sono ortogonali. □

Lemma 2.3.6. *Sia T un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H, allora almeno uno tra i due numeri $\pm\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ è un autovalore di T.*

Dimostrazione. Se $T = 0$ allora ogni $x \neq 0$ è autovettore relativo all'autovalore 0. Supponiamo $T \neq 0$ e scegliamo $\{x_n\}$ tale che $\|x_n\|_H = 1$ e $\|Tx_n\|_H \to \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq (T^2x_n - \|Tx_n\|_H^2 x_n, T^2x_n - \|Tx_n\|_H^2 x_n)_H = \\ &= \|T^2x_n\|_H^2 - 2\|Tx_n\|_H^4 + \|Tx_n\|_H^4 \leq \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|Tx_n\|_H^2 - \|Tx_n\|_H^4 \to 0; \end{aligned}$$

quindi:

$$T^2x_n - \|Tx_n\|_H^2 x_n \to 0,$$

di conseguenza

$$T^2x_n - \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 x_n \to 0.$$

Essendo T^2 compatto, esiste $\{x_{n'}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $T^2x_{n'}$ converge.
Poiché $T^2x_{n'} - \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 x_{n'} \to 0$ possiamo concludere, essendo $T \neq 0$, che $x_{n'}$ è convergente per qualche $x \in H$ con $\|x\|_H = 1$. Ma,

$$T^2x - \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 x = \lim(T^2x_{n'} - \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 x_{n'}) = 0,$$

abbiamo quindi:

$$(T + \|T\|_{\mathcal{L}(H)} I)(T - \|T\|_{\mathcal{L}(H)} I)x = 0.$$

Se $(T - \|T\|_{\mathcal{L}(H)} I)x = 0$, x è un autovettore di T relativo all'autovalore $\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$; altrimenti $(T - \|T\|_{\mathcal{L}(H)} I)x$ è un autovettore di T relativo all'autovalore $-\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$. □

Introduciamo ora il teorema che sta alla base di questo capitolo:

Teorema 2.3.7 (teorema spettrale)**.** *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H.*
(i) *Se l'immagine dell'operatore T ha dimensione finita n, allora T possiede n autovalori reali $\lambda_1, ..., \lambda_n$ diversi da 0 (non necessariamente distinti), più l'autovalore 0 quando $\dim H > n$, ed esiste un sistema ortonormale $\{x_1, ..., x_n\}$ di autovettori relativi ai λ_i, tale che*

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, x_i)_H x_i \quad \forall x \in H;$$

vale inoltre:

$$\sigma(T) = \begin{cases} \{\lambda_i\}_{1\le i\le n} & \textit{se } \dim H = n \ , \\ \{\lambda_i\}_{1\le i\le n} \cup \{0\} & \textit{se } \dim H > n \ . \end{cases}$$

(ii) *Se l'immagine di T ha dimensione infinita, allora T possiede un'infinità numerabile di autovalori reali $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$, diversi da 0 (non tutti necessariamente distinti), tali che $|\lambda_i| \ge |\lambda_{i+1}|$ per ogni $i \in \mathbb{N}^+$ e $\lambda_i \to 0$ per $i \to \infty$, ed esiste un sistema ortonormale $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ di autovettori relativi ai λ_i, tale che*

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, x_i)_H x_i \quad \forall x \in H;$$

vale inoltre:

$$\sigma(T) = \{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \cup \{0\}.$$

In particolare, ogni autovalore di T ha molteplicità finita e il sistema ortonormale $\{x_i\}$ è completo in H (cioè è una base ortonormale di H) se e solo se 0 non è autovalore di T.

Dimostrazione. Per $T = 0$ si ha che $n = 0$ e l'unico autovalore di T è 0, quindi gli enunciati sono banalmente veri. Sia $T \neq 0$. Come giustificato dal lemma 2.3.6 sia dunque $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un autovalore di T con $|\lambda_1| = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ e sia x_1 un corrispondente autovettore di norma unitaria. Chiamiamo M_1 il sottospazio generato da x_1 e notiamo che il sottospazio $M_1^\perp$ è invariante per T perché:

$$y \in M_1^\perp \Rightarrow (Ty, x_1)_H = (y, Tx_1)_H = \lambda_1 (y, x_1)_H = 0 \Rightarrow Ty \in M_1^\perp.$$

Si ha allora che la restrizione $T|_{M_1^\perp}$ è un operatore compatto e autoggiunto nello spazio di Hilbert $M_1^\perp$. Sempre grazie al lemma 2.3.6 esiste un autovalore $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_2| = \|T\|_{\mathcal{L}(M_1^\perp)} \le |\lambda_1|$ e un suo corrispondente autovettore x_2 di norma unitaria. Sia M_2 il sottospazio generato da M_1 e x_2; $M_2^\perp$ è ancora invariante per T, e quindi la restrizione $T|_{M_2^\perp}$ è un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $M_2^\perp$. Iterando in questo modo il procedimento si hanno due possibilità:

1. Se la dimensione dell'immagine di T è finita, allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $T|_{M_n^\perp} = 0$; se $\dim H = n$ questo significa che $M_n^\perp = \{0\}$, se invece $\dim H > n$ allora $M_n^\perp = \ker T$, cioè tale sottospazio è generato da autovettori relativi all'autovalore 0;

2. Se la dimensione dell'immagine di T è infinita, allora esiste una successione $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}$ tale che λ_i è autovettore non nullo di T e $|\lambda_i| \ge |\lambda_{i+1}|$ per

ogni $i \in \mathbb{N}^+$. Inoltre $\lambda_i \to 0$ per $i \to \infty$, infatti i corrispondenti autovettori x_i formano un sistema ortonormale e quindi, in virtù dell'osservazione 2.3.2, convergono debolmente a 0 in H; dato che T è compatto, $\|Tx_i\| = |\lambda_i| \to 0$, grazie alla proposizione 2.3.3.

Da quanto detto segue in particolare che ogni autovalore ha molteplicità finita. Proviamo ora che vale la formula di rappresentazione; per quanto riguarda il caso 1 la verifica è banale:

$$Tx = \sum_{i=1}^{n}(Tx, x_i)_H x_i = \sum_{i=1}^{n}(x, Tx_i)_H x_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x, x_i)_H x_i \quad \forall x \in H.$$

Per la verifica nel caso 2 prendiamo $x \in H$ e poniamo $y_i = x - \sum_{j=1}^{i}(x, x_j)_H x_j$. Dato che $y_i \in M_i^{\perp}$ si avrà $\|Ty_i\|_H \leq |\lambda_{i+1}|\|y_i\|_H$; essendo:

$$\|y_i\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{j=1}^{i}|(x, x_j)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 \quad \forall i \in \mathbb{N}^+,$$

si ha $\|Ty_i\|_H \leq |\lambda_{i+1}|\|x\|_H \to 0$ per $i \to \infty$. Osservando che

$$Ty_i = Tx - \sum_{j=1}^{i}(x, x_j)_H Tx_j = Tx - \sum_{j=1}^{i}\lambda_j(x, x_j)_H x_j,$$

si ottiene per $i \to \infty$

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x, x_i)_H x_i \quad \forall x \in H.$$

Adesso facciamo vedere che T non ha altri autovalori $\lambda \neq 0$ distinti dai λ_i; infatti, se x_0 fosse un autovettore di norma unitaria relativo a λ, per il lemma 2.3.5 avremmo che:

$$\lambda x_0 = Tx_0 = \sum_i \lambda_i(x_0, x_i)_H x_i = 0,$$

e cioè $x_0 = 0$ che è assurdo.
Prendiamo ora $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ distinto dai λ_i e facciamo vedere che $\lambda \in \rho(T)$. Non è escluso che 0 sia autovalore di T: visto che T è autoaggiunto risulta che la chiusura dell'immagine di T è l'ortogonale di $\ker T$. Sia $y \in H$; l'equazione $\lambda x - Tx = y$ si scrive nel modo seguente:

$$\sum_i(\lambda - \lambda_i)(x, x_i)_H x_i + \lambda P_{\ker T}x = \sum_i(y, x_i)_H x_i + P_{\ker T}y.$$

da cui segue:

$$(\lambda - \lambda_i)(x, x_i)_H = (y, x_i)_H \quad \forall i,$$
$$\lambda P_{\ker T} x = P_{\ker T} y.$$

Dunque l'equazione $\lambda x - Tx = y$ ha come unica soluzione:

$$x = \sum_i \frac{(y, x_i)_H}{\lambda - \lambda_i} x_i + \frac{1}{\lambda} P_{\ker T} y;$$

posto $d = \min_i |\lambda - \lambda_i|$, vale $d > 0$ e

$$\|x\|_H^2 = \sum_i \frac{|(y, x_i)_H|^2}{|\lambda - \lambda_i|^2} + \frac{\|P_{\ker T} y\|_H^2}{|\lambda|^2} \leq \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \|y\|_H^2;$$

quindi $\lambda \in \rho(T)$. Si ha dunque la tesi in virtù del corollario 1.4.23. □

Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H, siano $\{\lambda_i\}$ gli autovalori di T e $\{x_i\}$ la corrispondente base ortonormale di autovettori. Fissato $y \in H$ vogliamo risolvere l'equazione $Tx - \lambda_{i_0} x = y$, dove λ_{i_0} è un autovalore di T. Sussiste la seguente alternativa, nota nella letteratura matematica come *alternativa di Fredholm*:

Teorema 2.3.8. *Nelle ipotesi precedenti vale:*
(i) *se $\lambda_{i_0} \neq 0$, allora l'equazione data ha le infinite soluzioni:*

$$x = \sum_{\lambda_i \neq \lambda_{i_0}}^{\infty} \frac{(y, x_i)_H}{\lambda_i - \lambda_{i_0}} x_i + \xi, \quad \xi \in \ker(T - \lambda_{i_0} I), \tag{2.1}$$

se e solo se $y \in (\ker(T - \lambda_{i_0} I))^\perp$.
(ii) *Se $\lambda_{i_0} = 0$, allora l'equazione data ha le infinite soluzioni:*

$$x = \sum_{\lambda_i \neq 0}^{\infty} \frac{(y, x_i)_H}{\lambda_i} x_i + \xi, \quad \xi \in \ker T,$$

se e solo se $y \in (\ker T)^\perp$ verifica $\sum_{\lambda_i \neq 0}^{\infty} \frac{|(y, x_i)_H|^2}{\lambda_i^2} < \infty$.
(iii) *Se $\lambda_{i_0} \in \mathbb{R}$ e se $y \notin (\ker(T - \lambda_{i_0} I))^\perp$, allora l'equazione data non ha soluzioni.*

Dimostrazione. **(i)** Sia $\lambda_{i_0} \neq 0$ e sia $\{x_{ij}\}_{j=1,\ldots,m} \subseteq \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base di $\ker(T - \lambda_{i_0} I)$. Allora essendo $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, x_i)_H x_i$, l'equazione $Tx - \lambda_{i_0} x = y$ si scrive:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, x_i)_H x_i - \lambda_{i_0} \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i)_H x_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_{i_0})(x, x_i)_H x_i = \sum_{i=1}^{\infty} (y, x_i)_H x_i.$$

Dunque:

$$(\lambda_i - \lambda_{i_0})(x, x_i)_H = (y, x_i)_H \quad \forall i \in \mathbb{N}^+, \tag{2.2}$$

e in particolare deve essere $(y, x_i) = 0$ per $i = i_1, ..., i_m$, mentre per $\lambda_i \neq \lambda_{i_0}$:

$$(x, x_i)_H = \frac{(y, x_i)_H}{\lambda_i - \lambda_{i_0}}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione $Tx - \lambda_{i_0} x = y$ sono tutti e soli i vettori della forma (2.1).

(ii) Se $\lambda_{i_0} = 0$, vale quanto detto, ma affinché $x = \sum_{\lambda_i \neq 0}^{\infty} \frac{(x,x_i)_H}{\lambda_i} x_i \in H$ è ovviamente necessario che $\sum_{\lambda_i \neq 0}^{\infty} \frac{|(x,x_i)|^2}{\lambda_i^2} < \infty$.

(iii) è ovvia conseguenza di (2.2). □

Osserviamo infine che la rappresentazione fornita dal teorema spettrale caratterizza gli operatori compatti e autoaggiunti, come mostra la seguente:

Proposizione 2.3.9. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ definito da:*

$$Tx = \sum_i \lambda_i (x, x_i)_H x_i \quad \forall x \in H,$$

dove la somma può essere sia finita che infinita, $\{\lambda_i\}$ è una famiglia di numeri reali tali che $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$ con $\lambda_i \to 0$ e $\{x_i\}$ è un sistema ortonormale in H al più numerabile. Allora T è un operatore compatto e autoaggiunto, i λ_i sono i suoi autovalori non nulli e gli x_i i corrispondenti autovettori.

Dimostrazione. T è autoaggiunto perchè vale $(Tx, y)_H = (x, Ty)_H$ per ogni $x, y \in H$.

Dimostriamo che T è anche compatto: prendiamo $\{y_n\} \subseteq H$ successione tale che $y_n \rightharpoonup y \in H$; allora vale:

$$T(y_n - y) = \sum_i \lambda_i (y_n - y, x_i)_H x_i.$$

Dato che $\lambda_i \to 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che $|\lambda_i| < \varepsilon$ per ogni $i > \nu$. Vale inoltre che $\lim_{n\to\infty}(y_n - y, x_i)_H = 0$ per $i = 1, ..., \nu$; dunque dalla disuguaglianza di Bessel (proposizione 2.1.7) e dall'ortonormalità degli $\{x_i\}$ si ottiene:

$$\limsup_{n\to\infty} \|T(y_n - y)\|_H^2 \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} |\lambda_i|^2 (y_n - y, x_i)_H|^2 +$$

$$+ \limsup \sum_{i>\nu} \varepsilon^2 |(y_n - y, x_i)_H|^2 \leq 0 + \varepsilon^2 \sup_n \|y_n - y\|_H^2,$$

grazie all'arbitrarietà di ε abbiamo che $Ty_n \to Ty$. In virtù della proposizione 2.3.3 si ha la tesi. □

Capitolo 3

Problemi ai limiti di Sturm-Liouville

Lo scopo di questo capitolo è quello di applicare la teoria spettrale degli operatori per dare una rappresentazione delle soluzioni di un particolare problema detto *problema di Sturm-Liouville*, ossia lo studio di equazioni differenziali ordinarie con certe condizioni al contorno.

3.1 L'operatore differenziale

Sia M un operatore differenziale del secondo ordine su $[a,b]$:

$$Mu = \alpha u'' + \beta u' + \gamma u, \qquad u \in C^2[a,b], \tag{3.1}$$

dove α, β e γ sono funzioni reali continue in x, con $\alpha(x) \neq 0$.

Dalla teoria delle equazioni differenziali è noto il seguente risultato:

Teorema 3.1.1. *Data $f \in C[a,b]$ e due scalari $A, B \in \mathbb{C}$, nelle ipotesi precedenti il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Mu = f \quad in\ [a,b] \\ u(a) = A \\ u'(a) = B \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^2[a,b]$.

Un operatore come quello introdotto precedentemente può essere sempre semplificato e scritto nella forma:

$$Lu = -(pu')' + qu, \tag{3.2}$$

con $p \in C^1[a,b], q \in C[a,b]$ e $p > 0$ in $[a,b]$; infatti, moltiplicando l'equazione $Mu = f$ per la funzione

$$-\frac{1}{\alpha(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right),$$

e ponendo:

$$p(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right), \quad q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right),$$

si ricava facilmente

$$-\frac{1}{\alpha(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right) Mu = -pu'' - u'p' + qu = -(pu')' + qu,$$

e dunque, $Mu = f$ se e solo se

$$Lu = -f(x)\alpha(x) \exp\left(-\int_a^x \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi\right).$$

In questo modo lo studio delle equazioni differenziali del secondo ordine, a coefficienti reali, può essere ricondotto allo studio di operatori differenziali della forma (3.2).
Consideriamo adesso *l'equazione di Sturm-Liouville*:

$$Lu = f,$$

con L operatore del tipo (3.2) e u soggetta a condizioni agli estremi diverse da quelle di Cauchy, sarà perciò necessario restringere il dominio di L.
Definiamo dunque

$$\mathfrak{D} = \{u \in C^1[a,b] : \exists(-pu')' \in L^2(a,b),\ B_1u = B_2u = 0\},$$

dove

$$B_1u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a), \qquad B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b),$$

e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sono costanti reali tali che $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, |\alpha_2| + |\beta_2| > 0$.

Osservazione 3.1.2. Possiamo vedere L come una trasformazione lineare $L : \mathfrak{D} \subset L^2(a,b) \to L^2(a,b)$.
La scelta delle condizioni al contorno B_1 e B_2 rende L autoaggiunto nello spazio di Hilbert $L^2(a,b)$: risulta infatti, integrando due volte per parti e ricordando che p e q sono funzioni reali,

$$(Lu, v)_{L^2(a,b)} = \int_a^b (-(pu')' + qu)\overline{v}\ dx =$$

$$= [-p(u'\overline{v} - u\overline{v}')]_a^b + \int_a^b u\overline{(-(pv')' + qv)}dx = (u, Lv)_{L^2(a,b)} \quad \forall u, v \in \mathfrak{D}.$$

Ora notiamo che $[-p(u'\overline{v} - u\overline{v}')]_a^b = 0$, cioè:

$$-p(b)[u'(b)\overline{v(b)} - u(b)\overline{v'(b)}] + p(a)[u'(a)\overline{v(a)} - u(a)\overline{v'(a)}] = 0;$$

infatti il rispetto delle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} B_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \\ B_1 v = \alpha_1 \overline{v(a)} + \beta_1 \overline{v'(a)} = 0, \end{cases}$$

implica l'annullarsi del determinante $u(a)\overline{v'(a)} - u'(a)\overline{v(a)}$ del sistema.

Chiameremo **autofunzioni** di L gli autovettori di L, cioè le funzioni $u \in \mathfrak{D}$ tali che $Lu = \lambda u$ per qualche autovalore λ.

Proposizione 3.1.3. *Sia L l'operatore definito in $\mathfrak{D} \subset L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*. Allora:*
(i) *gli autovalori di L sono reali;*
(ii) *autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali;*
(iii) *gli autovalori di L formano un insieme al più numerabile.*

Dimostrazione. Gli enunciati **(i)** e **(ii)** si dimostrano come nel lemma 2.3.5. Per dimostrare l'enunciato **(iii)** osserviamo che se l'insieme degli autovalori fosse più che numerabile, allora lo spazio di Hilbert separabile $L^2(a,b)$ possiederebbe un sistema ortonormale di autovettori più che numerabile; questo è assurdo per la proposizione 2.1.6. □

Dimostriamo adesso un importante risultato:

Proposizione 3.1.4. *Sia L l'operatore definito in $\mathfrak{D} \subset L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*. Allora gli autovalori di L formano una successione inferiormente limitata.*

Dimostrazione. Sia $u \in \mathfrak{D}$ un'autofunzione relativa all'autovalore λ, con $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned}\lambda =& \lambda\|u\|^2_{L^2(a,b)} = (Lu, u)_{L^2(a,b)} = \int_a^b [-(pu')' + qu]\overline{u}\, dx = \\ &= -p(b)u'(b)\overline{u(b)} + p(a)u'(a)\overline{u(a)} + \int_a^b (p|u'|^2 + q|u|^2)dx.\end{aligned}$$

Il nostro scopo è quello di minorare gli addendi dell'ultimo membro. Notiamo che essendo $|u|$ una funzione continua in $[a,b]$, ha minimo positivo in un punto $z \in [a,b]$: poiché $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$, si ha

$$1 = \int_a^b |u(x)|^2 dx \geq (b-a)|u(z)|^2,$$

cosicché dobbiamo avere

$$|u(z)| = \min_{x\in[a,b]} |u(x)| \le \frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

Di conseguenza, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, otteniamo:

$$\begin{aligned} |u(x)| \le \ & |u(x)-u(z)| + |u(z)| = \left| \int_x^z u'(y)\ dy \right| + |u(z)| \le \\ \le \ & \sqrt{b-a}\ \sqrt{\int_a^b |u'(y)|^2\ dy} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \quad \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Notiamo adesso che se $u(a) = 0$ oppure $u'(a) = 0$, vale $p(a)u'(a)\overline{u(a)} = 0$; altrimenti, se $u(a)u'(a) \neq 0$, dalla condizione $B_1 u = 0$ otteniamo $\beta_1 \neq 0$, dunque:

$$|p(a)u'(a)\overline{u(a)}| \le \|p\|_\infty \left|\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right| |u(a)|^2 \le$$

$$\le c\left[\sqrt{b-a}\ \sqrt{\int_a^b |u'(y)|^2\ dy} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right] \le c_1 \sqrt{\int_a^b |u'(y)|^2\ dy} + c_2.$$

Con una stima analoga:

$$|p(b)u'(b)\overline{u(b)}| \le c_1 \sqrt{\int_a^b |u'(y)|^2\ dy} + c_2,$$

e infine:

$$\begin{aligned} \lambda &\ge -|p(a)u'(a)\overline{u(a)}| - |p(b)u'(b)\overline{u(b)}| + \min_{x\in[a,b]} p(x) \int_a^b |u'|^2\ dy \ge \\ &\ge c_3 \int_a^b |u'|^2\ dy - c_4 \sqrt{\int_a^b |u'(y)|^2\ dy} - c_5 = \\ &= \left(\sqrt{c_3 \int_a^b |u'|^2\ dy} - \frac{c_4}{2\sqrt{c_3}}\right)^2 - c_6 > -\infty. \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.1.5. Abbiamo assunto $p > 0$ in $[a,b]$; se fosse $p < 0$ in $[a,b]$, la successione degli autovalori di L sarebbe limitata superiormente.

Proviamo infine un'ultima proprietà dell'*operatore di Sturm-Liouville* L:

Proposizione 3.1.6. *Sia L l'operatore definito in $\mathfrak{D} \subset L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2). *Ogni autovalore di L ha molteplicità* 1.

Dimostrazione. Siano u e $v \in \mathfrak{D}$ due autofunzioni non nulle di L relative all'autovalore λ. Allora:

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \\ B_1 u = B_2 u = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv = \lambda v \\ B_1 v = B_2 v = 0. \end{cases}$$

Vale in particolare:

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0,$$

essendo α_1 e β_1 non entrambi nulli, deve essere

$$\det \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Le colonne della precedente matrice sono dunque linearmente dipendenti; esistono quindi δ e $\gamma \in \mathbb{C}$, non entrambi nulli, tali che:

$$\delta \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo di conseguenza che la funzione $\delta u + \gamma v$ risolve:

$$\begin{cases} (L - \lambda I)(\delta u + \gamma v) = 0 \quad in\ [a, b] \\ (\delta u + \gamma v)(a) = (\delta u + \gamma v)'(a) = 0, \end{cases}$$

e grazie al teorema 3.1.1 otteniamo la dipendenza lineare di u e v, cioè

$$\delta u + \gamma v \equiv 0 \quad in\ [a, b].$$

□

Osservazione 3.1.7. Dalla proposizione 3.1.4 segue che esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda > N$ per ogni autovalore λ di L. Pertanto, l'operatore

$$L_0 u = -(pu')' + (q - N)u, \quad u \in \mathfrak{D},$$

è ancora di Sturm-Liouville e ha tutti gli autovalori positivi: infatti

$$L_0 u - \mu u = 0 \Leftrightarrow Lu - (\mu + N)u = 0,$$

e questo implica

$$\mu + N > N \Leftrightarrow \mu > 0.$$

In definitiva, nello studio delle proprietà generali degli operatori di Sturm-Liouville, non è restrittivo supporre che 0 non sia un autovalore.

3.2 Operatori integrali

In questo paragrafo studieremo le principali proprietà degli operatori integrali nello spazio di Hilbert $L^2(a,b)$, che ci serviranno per dimostrare alcuni risultati relativi all'inverso di un operatore di Sturm-Liouville.

Sia T l'operatore integrale definito da:

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \quad x \in]a,b[,$$

dove $K :]a,b[\times]a,b[\to \mathbb{C}$ è il *nucleo* di T.

Osservazione 3.2.1. Si verifica facilmente, usando la disuguaglianza di Hölder, che se

$$\|K\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} = \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < \infty,$$

allora $T \in L^2(a,b)$ e $\|Tf\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))} \leq \|K\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)}\|f\|_{L^2(a,b)}$ per ogni $f \in L^2(a,b)$.

Vediamo ora cosa possiamo dire sul prodotto di operatori integrali di $L^2(a,b)$.

Siano $T, T' : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ operatori integrali con nuclei rispettivamente Ke K'; consideriamo l'operatore prodotto $(TT') : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$.

Proposizione 3.2.2. *Il nucleo dell'operatore integrale* $(TT') : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ *è dato da:*

$$K''(x,y) = \int_a^b K(x,z)K'(z,y)dz.$$

Dimostrazione. In virtù del Teorema di Fubini abbiamo:

$$(TT'f)(x) = \int_a^b K(x,z)(T'f(z))dz = \int_a^b K(x,z)dz \int_a^b K'(z,y)f(y)dy =$$

$$= \int_a^b \left(f(y) \int_a^b K(x,z)K'(z,y)dz \right) dy = \int_a^b K''(x,y)f(y)dy.$$

□

Osservazione 3.2.3. Se $T = T'$, il nucleo dell'operatore T^2 è dato da:

$$K_2(x, y) = \int_a^b K(x, z)K(z, y)dz.$$

In generale il nucleo dell'operatore T^n è:

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, z)K_{n-1}(z, y)dy.$$

Veniamo ora ad un importante risultato di questo paragrafo:

Teorema 3.2.4. *Sia $K \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$. Allora l'operatore integrale $T : L^2(a, b) \to L^2(a, b)$ che ha K come nucleo è compatto in $L^2(a, b)$.*

Dimostrazione. Proviamo che l'operatore T è il limite in $\mathcal{L}(L^2(a, b))$ di una successione di operatori T_n ad immagine finito-dimensionale. Poiché, per il teorema di Weierstrass, l'anello dei polinomi in due variabili $\mathbb{K}[x, y]$ è denso in $C([a, b] \times [a, b])$ in norma uniforme, esso è denso anche in $L^2(]a, b[\times]a, b[)$. Pertanto esiste una successione $\{K_n(x, y)\}$ di polinomi tali che, detto T_n l'operatore integrale di nucleo K_n, in virtù dell'osservazione 3.2.1:

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))} \leq \|K_n - K\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} \to 0.$$

Notiamo che, per ogni $f \in L^2(a, b)$, la funzione $T_n f(x)$ è un polinomio; quindi ciascun T_n è un operatore ad immagine finito-dimensionale (è lo spazio generato da $\{1, x, x^2, ..., x^k\}$ per un opportuno $k = k(n)$) e quindi è compatto per la proposizione 1.4.5. Dato che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(H)$, il teorema 1.4.6 ci dice che T è compatto. □

L'ultimo obiettivo di questo paragrafo è quello di enunciare e dimostrare il *teorema di Mercer*.

Iniziamo con alcuni risultati preliminari:

Definizione 3.2.5. Un operatore integrale $T : L^2(a, b) \to L^2(a, b)$ il cui nucleo $K(x, y) \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$ soddisfa la relazione:

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)},$$

è detto operatore **Hermitiano**.
Il nucleo di un operatore Hermitiano si chiama nucleo di **Hilbert-Schmidt**.

D'ora in poi consideriamo un nucleo K di Hilbert-Schmidt. Siano $\Phi_i(x)$ le autofunzioni ortonormali del corrispondente operatore Hermitiano T, il quale, per il teorema 3.2.4, è compatto nonché autoaggiunto; vogliamo far vedere che il suo nucleo $K(x,y)$ è limite in $L^2(a,b)$ di prodotti di autofunzioni della forma $\Phi_i(x)\overline{\Phi_i(y)}$. Avremo dunque che:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(x)\overline{\Phi_i(y)} \quad in\ L^2(]a,b[\times]a,b[),$$

e risulterà quindi:

$$\int_a^b K(x,y)\Phi_i(y)dy = \lambda_i \Phi_i(x) = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \Phi_j(x)\overline{\Phi_j(y)}\Big)\Phi_i(y)dy = a_i \Phi_i(x),$$

ovvero i coefficienti a_i risulteranno essere proprio gli autovalori λ_i dell'operatore T.

Teorema 3.2.6. *Sia K un nucleo di Hilbert-Schmidt, allora la serie*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x)\overline{\Phi_i(y)},$$

dove i λ_i sono gli autovalori non nulli dell'operatore integrale T indotto da K e le Φ_i sono le corrispondenti autofunzioni ortonormali, converge a $K(x,y)$ in $L^2(a,b)$ rispetto a y per quasi ogni x e in $L^2(a,b)$ rispetto a x per quasi ogni y.

Dimostrazione. Per quasi ogni x si ha:

$$\int_a^b |K(x,y)|^2 dy < \infty.$$

Sia $\{\psi_i\}$ una base ortonormale per $\ker T$. Allora il sistema ortonormale $\{\overline{\Phi_i(y)}, \overline{\psi_i(y)}\}$ è completo in $L^2(a,b)$, dunque K è somma della sua serie di Fourier rispetto al sistema $\{\overline{\Phi_i(y)}, \overline{\psi_i(y)}\}$. Si ha allora:

$$(K(x,.), \overline{\psi_i})_{L^2(a,b)} = \int_a^b K(x,y)\psi_i(y)dy = 0,$$

$$(K(x,.), \overline{\Phi_i})_{L^2(a,b)} = \int_a^b K(x,y)\Phi_i(y)dy = \lambda_i \Phi_i(x),$$

e dunque:

$$K(x,.) = \sum_{i=1}^{\infty} (K(x,.), \overline{\Phi_i})_{L^2(a,b)} \overline{\Phi_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x)\overline{\Phi_i}.$$

In modo del tutto analogo si verifica che per quasi ogni y, nel senso di $L^2(a,b)$, si ha

$$\overline{K(y,.)} = \sum_{i=1}^{\infty} (\overline{K(y,.)}, \Phi_i)_{L^2(a,b)} \Phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \overline{\Phi_i(y)}\Phi_i.$$

Ne segue la tesi essendo $\overline{K(y,x)} = K(x,y)$. □

Ci occorre adesso la proposizione seguente

Proposizione 3.2.7. *Sia* $\{g_h\}$ *una base ortonormale in* $L^2(a,b)$. *Allora* $\{g_h(x), g_k(y)\}$ *è una base ortonormale in* $L^2(]a,b[\times]a,b[)$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che le combinazioni lineari finite di $\{g_h(x), g_k(x)\}$ sono dense in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$.
Sia dunque $K \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione costante a tratti:

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} c_i^\varepsilon \chi_{I_i^\varepsilon \times J_i^\varepsilon}(x,y) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} c_i^\varepsilon \chi_{I_i^\varepsilon}(x)\chi_{J_i^\varepsilon}(y)$$

tale che $\|K - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} < \varepsilon$. Scegliamo ora per $i = 1, ..., N_\varepsilon$ (avendo posto $C_\varepsilon = \max_{1\le i\le N_\varepsilon} |c_i^\varepsilon|$)

$$\eta_i^\varepsilon = \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} p_k^\varepsilon g_k, \quad \psi_i^\varepsilon = \sum_{h=1}^{h_\varepsilon} q_h^\varepsilon g_h$$

tali che:

$$\|\chi_{I_i^\varepsilon} - \eta_i^\varepsilon\|_{L^2(a,b)} < \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon C_\varepsilon}, \quad \|\chi_{J_i^\varepsilon} - \psi_i^\varepsilon\|_{L^2(a,b)} < \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon C_\varepsilon},$$

e consideriamo

$$\vartheta_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} c_i^\varepsilon \eta_i^\varepsilon(x)\psi_i^\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k=1}^{k_\varepsilon}\sum_{h=1}^{h_\varepsilon} c_i^\varepsilon p_k^\varepsilon q_h^\varepsilon g_k(x) g_h(y).$$

Si ha, notando che, per ε sufficientemente piccolo, $\|\eta_i^\varepsilon\|_{L^2(a,b)} \le \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon C_\varepsilon} + \|\chi_{I_i^\varepsilon}\|_{L^2(a,b)} \le 2\sqrt{b-a}$ e analogamente $\|\psi_i^\varepsilon\|_{L^2(a,b)} \le 2\sqrt{b-a}$,

$$\|\varphi_\varepsilon - \vartheta_\varepsilon\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} = \left(\int_a^b\int_a^b |\varphi_\varepsilon(x,y) - \vartheta_\varepsilon(x,y)|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |c_i^\varepsilon| \left(\int_a^b\int_a^b |\eta_i^\varepsilon(x)\psi_i^\varepsilon(y) - \chi_{I_i^\varepsilon}(x)\chi_{J_i^\varepsilon}(y)|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |c_i^\varepsilon| \left(\int_a^b |\psi_i^\varepsilon(y)|^2 dy \int_a^b |\eta_i^\varepsilon(x) - \chi_{I_i^\varepsilon}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |c_i^\varepsilon| \left(\int_a^b |\psi_i^\varepsilon(y) - \chi_{J_i^\varepsilon}(y)|^2 dy \int_a^b |\chi_{I_i^\varepsilon}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\sqrt{b-a}\; N_\varepsilon C_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{N_\varepsilon C_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon C_\varepsilon}\right) = 4\varepsilon\sqrt{b-a}.$$

Si ha dunque la tesi, infatti $\|K - \vartheta_\varepsilon\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} < c\varepsilon$. □

Teorema 3.2.8. *Sia K un nucleo di Hilbert-Schmidt, allora la serie*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x) \overline{\Phi_i(y)},$$

dove i λ_i sono gli autovalori non nulli dell'operatore integrale T indotto da K e le Φ_i sono le corrispondenti autofunzioni ortonormali, converge a $K(x,y)$ in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$.

Dimostrazione. Sia $\{\psi_i\}$ una base ortonormale di $\ker T$. Allora, indicando con $\{g_h\}$ la famiglia $\{\Phi_i, \psi_i\}$, il sistema $\{g_h\}$ è ortonormale completo in $L^2(a,b)$; quindi anche $\{\overline{g_h}\}$ è ortonormale completo in $L^2(a,b)$. Ne segue che il sistema $\{\overline{g_h(x)}, g_k(y)\}$ è ortonormale completo in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$ in virtù della proposizione 3.2.7. Osservato che

$$(K, \psi_i \overline{\psi_j})_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} = (K, \Phi_i \overline{\psi_j})_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} = 0,$$

gli unici coefficienti non nulli di K rispetto al sistema $\{\overline{g_h(x)}, g_k(y)\}$ sono quelli relativi a $\Phi_i \overline{\Phi_j}$, per i quali

$$(K, \Phi_i \overline{\Phi_j})_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} = \int_a^b \int_a^b K(x,y) \overline{\Phi_i(x)} \Phi_i(y)\ dx\ dy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,y) \Phi_j(y)\ dy \right) \overline{\Phi_i(x)}\ dx = \int_a^b \lambda_j \Phi_j(x) \overline{\Phi_i(x)}\ dx = \delta_{ij} \lambda_j.$$

Essendo $K(x,y) = \sum_{ij=1}^{\infty} (K, \Phi_i \overline{\Phi_j})_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} \Phi_i(x) \overline{\Phi_j(y)}$ in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$, si ottiene dunque la tesi:

$$K(x,y) = \sum_{ij=1}^{\infty} \delta_{ij} \lambda_j \Phi_i(x) \overline{\Phi_j(y)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x) \overline{\Phi_i(y)}.$$

□

Osserviamo adesso che se l'operatore integrale T è Hermitiano anche T^n lo è; il nucleo di T^n è il nucleo iterato K_n, ed è ancora di Hilbert-Schmidt, con le stesse autofunzioni di T e con autovalori λ_i^n, dove i λ_i sono gli autovalori di T. Per $n \geq 1$ abbiamo dunque dal teorema 3.2.8 che:

$$K_n(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n \Phi_i(x) \overline{\Phi_i(y)},$$

con convergenza in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$. Se supponiamo in più $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$ abbiamo che $K_n \in C^0([a,b] \times [a,b])$ per ogni n. Per $n > 1$ è dunque lecito scegliere $x = y$ ottenendo:

$$K_n(x,x) = \int_a^b K(x,y) K_{n-1}(y,x) dy = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n |\Phi_i(x)|^2.$$

Se n è pari si può integrare termine a termine in virtù del teorema di Beppo Levi. Se n è dispari, ricordando che $\lambda_i \to 0$ e quindi $|\lambda_i| < 1$ per ogni $i \geq i_0$, si può scrivere

$$\sum_{i=i_0}^{N} |\lambda_i|^n |\Phi_i(x)|^2 \leq \sum_{i=i_0}^{\infty} |\lambda_i|^{2n} |\Phi_i(x)|^2 = g(x) \in L^1(a,b) \quad \forall N \geq i_0,$$

e dunque, per il teorema di Lebesgue, si può ugualmente integrare termine a termine ottenendo

$$\int_a^b K_n(x,x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n < \infty \quad \forall n > 1.$$

Dimostriamo ora un risultato generale:

Teorema 3.2.9 (teorema del Dini). *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali continue su un insieme compatto A tali che $f_n \leq f_{n+1}$. Se $f_n \to f$ puntualmente in A, e f è continua in A, allora f_n converge a f uniformemente in A.*

Dimostrazione. Poniamo $A_n = \{x \in A : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$; poichè $f_n \leq f_{n+1}$, si ha $A_n \subseteq A_{n+1}$. Inoltre, per ipotesi, $A = \cup_{n=1}^{\infty}$; per compattezza esisterà $m \in \mathbb{N}$ tale che $A \subseteq \cup_{h=1}^{m} A_h = A_m$. Dunque risulta $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$, e per monotonia si ha $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ e per ogni $n \geq m$. $\square$

Introduciamo adesso un lemma che ci servirà nella dimostrazione del teorema di Mercer:

Lemma 3.2.10. *Sia K un nucleo di Hilbert-Schmidt e sia T l'operatore integrale associato. Supponiamo $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$ e T semidefinito positivo; allora*

$$K(x,x) \geq 0.$$

Dimostrazione. Dato che $K(x,x) = \overline{K(x,x)}$, K è reale sulla diagonale del quadrato $[a,b] \times [a,b]$.
Supponiamo che $K(x_0,x_0) = -\delta$ per qualche x_0 con $\delta > 0$, dalla continuità di K deriva l'esistenza di un quadrato $D = \{(x,y) : |x-x_0| < \varepsilon, |y-y_0| < \varepsilon\}$ nel quale $\Re K(x,y) < -\delta$. Sia $f = \chi_{[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]}$; essendo l'operatore semidefinito positivo si ha:

$$0 \leq \int_a^b \int_a^b K(x,y) f(y) \overline{f(x)} dy dx = \int \int_D K(x,y) dy dx = \Re \int \int_D K(x,y) dy dx,$$

otteniamo quindi un assurdo:

$$0 \leq \int\int_D \Re K(x,y)dydx < -\delta 4\varepsilon^2.$$

□

Teorema 3.2.11 (teorema di Mercer)**.** *Sia K un nucleo di Hilbert-Schmidt e sia T l'operatore integrale associato. Supponiamo $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$ e T semidefinito positivo; allora per ogni x e per ogni y si ha*

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x)\overline{\Phi_i(y)},$$

e la serie converge assolutamente e uniformemente.

Dimostrazione. Per ogni n definiamo il nucleo:

$$K^{(n)}(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i(x)\overline{\Phi_i(y)},$$

il quale è continuo, di Hilbert-Schmidt, ha autovalori $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, ...$ e induce l'operatore hermitiano $T^{(n)}$ che è compatto e autoaggiunto, con autovalori non negativi essendo semidefinito positivo. Dunque, per il teorema 2.3.7 (teorema spettrale):

$$T^{(n)}f(x) = \int_a^b K^{(n)}(x,y)f(y)dy = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (f, \Phi_k)_{L^2(a,b)} \Phi_k(x);$$

dato che $\lambda_k \geq 0$ per ogni k, l'operatore $T^{(n)}$ è semidefinito positivo. In virtù del lemma 3.2.10, $K^{(n)}(x,x) \geq 0$, ossia $K(x,x) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\Phi_i(x)|^2$. Per ogni $n \to \infty$ si ha quindi:

$$K(x,x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(x)|^2.$$

Dalla disuguaglianza di Schwarz segue allora:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(x)||\Phi_i(y)| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\frac{1}{2}} |\Phi_i(x)| \lambda_i^{\frac{1}{2}} |\Phi_i(y)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(x)| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(y)| \right)^{\frac{1}{2}} \leq K(x,x)^{\frac{1}{2}} K(y,y)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{[a,b]\times[a,b]} |K|.$$

Quindi la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x)\overline{\Phi_i(y)}$ converge assolutamente; inoltre essa converge in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$ a $K(x,y)$; Per quanto riguarda la convergenza uniforme osserviamo che $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(x)|^2$ converge a $K(x,x)$ puntualmente, allora per il teorema 3.2.9 (teorema del Dini), $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(x)|^2$ converge uniformemente a $K(x, x)$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste quindi n_0 tale che: $\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i(x) |\Phi_i(x)|^2 < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$; ma allora, di nuovo per la disuguaglianza di Schwarz, per ogni $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x) \overline{\Phi_i(y)} \right| \leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i |\Phi_i(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 2\varepsilon,$$

quindi $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(x) \overline{\Phi_i(y)}$ converge uniformemente a $K(x, y)$. □

Una diretta conseguenza del teorema di Mercer è il seguente:

Corollario 3.2.12. Sia

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy.$$

Sia $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$ e T semidefinito positivo, allora:

$$\int_a^b K(x, x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \lambda_i |\Phi_i(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

ossia, la serie dei λ_i converge.

3.3 L'operatore inverso

Il nostro prossimo passo sarà quello di dimostrare che, sotto l'ipotesi che 0 non sia autovalore dell'operatore di Sturm-Liouville L, esiste un operatore $M : L^2(a, b) \to \mathfrak{D}$ inverso di L, compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $L^2(a, b)$.
Innanzitutto dimostriamo il seguente lemma preliminare:

Lemma 3.3.1. *Sia L l'operatore definito in $L^2(a, b)$ dall'equazione* (3.2), *e supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per L. Allora i due problemi al bordo:*

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 & in\ [a, b] \\ B_1 u_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_2 = 0 & in\ [a, b] \\ B_2 u_2 = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

hanno rispettivamente soluzioni $u_1, u_2 \in C^2[a, b]$ reali, non identicamente nulle e tali che per ogni $x \in [a, b]$ i due vettori:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. u_1 e u_2 risolvono rispettivamente i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \quad in\ [a,b] \\ u_1(a) = \beta_1 \\ u_1'(a) = -\alpha_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0 \quad in\ [a,b] \\ u_2(b) = \beta_2 \\ u_2'(b) = -\alpha_2, \end{cases} \tag{3.4}$$

che per il teorema 3.1.1 hanno un'unica soluzione reale non identicamente nulla su $C^2[a,b]$. Supponiamo ora per assurdo che $\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u_2(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix}$ siano linearmente dipendenti per qualche punto di $[a,b]$; esiste quindi $x_0 \in [a,b]$ tale che $u_1'(x_0)u_2(x_0) - u_1(x_0)u_2'(x_0) = 0$. Osserviamo adesso che vale:

$$\frac{d}{dx}(p(x)[u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x)]) = 0 \quad \forall x \in [a,b],$$

infatti

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x))) = \\ &= (p(x)u_1'(x))'u_2(x) + p(x)u_1'(x)u_2'(x) - (p(x)u_2'(x))u_1(x) - p(x)u_2'(x)u_1'(x) = \\ &= (p(x)u_1'(x))u_2(x) - (p(x)u_2'(x))u_1(x) = \\ &= q(x)u_1(x)u_2(x) - q(x)u_2(x)u_1(x) = 0. \end{aligned}$$

Quindi $p(u_1'u_2 - u_1u_2')$ è una costante in $[a,b]$, ma tale funzione si annulla in x_0, e dunque è identicamente nulla. Ne segue:

$$u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

In particolare, scelti $x = a$ e $x = b$, si ha immediatamente $B_1u_2 = B_2u_1 = 0$; quindi u_1 e u_2 risolvono il problema:

$$\begin{cases} Lu = 0 \quad in\ [a,b] \\ B_1u = B_2u = 0, \end{cases}$$

ma 0, per ipotesi, non è autovalore di L, dunque si avrà che $u_1 = u_2 = 0$, questo è però assurdo perché, sempre per ipotesi, u_1 e u_2 non sono identicamente nulle. □

Proviamo adesso l'esistenza dell'operatore L^{-1}:

Teorema 3.3.2. *Sia L l'operatore definito in $L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*; supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per L e che valga $p(u_1'u_2 - u_1u_2') = -1$ in $[a,b]$ (essendo la funzione $p(u_1'u_2 - u_1u_2')$ costante su $[a,b]$ la supposizione è giustificata), dove u_1 e u_2 sono le soluzioni dei problemi* (3.3)*.*

Allora esiste una funzione $G \in C([a,b] \times [a,b])$ *reale e simmetrica, tale che per ogni* $f \in C[a,b]$ *il problema al bordo;*

$$\begin{cases} Lg = f \quad in\ [a,b] \\ B_1 g = B_2 g = 0, \end{cases}$$

ha come unica soluzione:

$$g(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\ dy, \quad x \in [a,b].$$

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione g per l'equazione $Lg = f$ col metodo di variazione delle costanti arbitrarie:

$$g(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x),$$

dove $u_1(x)$ e $u_2(x)$ sono le funzioni introdotte in (3.4), e $c_1(x)$ e $c_2(x)$ risolvono il sistema:

$$\begin{cases} c_1' u_1 + c_2' u_2 = 0 \\ c_1' u_1' + c_2' u_2' = -\frac{f}{p}, \end{cases}$$

che ha determinante $u_1 u_2' - u_1' u_2 = \frac{-1}{p} \neq 0$. Si ottiene dunque $c_1' = -u_2 f$, $c_1' = u_1 f$, e di conseguenza scegliamo:

$$c_1(x) = \int_x^b u_2(y) f(y)\ dy, \quad c_2(x) = \int_a^x u_1(y) f(y)\ dy.$$

Otteniamo quindi:

$$g(x) = u_1(x) \int_x^b u_2(y) f(y)\ dy + u_2(x) \int_a^x u_1(y) f(y)\ dy = \int_a^b G(x,y) f(y)\ dy,$$

avendo definito $G(x,y)$ nel seguente modo:

$$G(x,y) = \begin{cases} u_1(x) u_2(y) & se\ x \leq y \\ u_1(y) u_2(x) & se\ x \geq y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Si ha così che $g \in C^2[a,b]$ verifica le condizioni al contorno e risolve l'equazione. Verifichiamo ora l'unicità; se g_1 fosse un'altra soluzione del problema al bordo, allora $g - g_1$ verificherebbe:

$$\begin{cases} L(g - g_1) = 0 \quad in\ [a,b] \\ B_1(g - g_1) = B_2(g - g_1) = 0, \end{cases}$$

pertanto, siccome 0 non è autovalore per L, si ha $g - g_1 = 0$. □

Osservazione 3.3.3. Abbiamo appena fatto vedere che l'operatore integrale $f \to Mf$ è così definito:

$$Mf(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\ dy, \quad x \in [a,b],$$

agisce su $C[a,b]$ a valori in $\mathfrak{D}$ ed inverte L, cioè $ML = I_{\mathfrak{D}}$ e $LM = I_{C[a,b]}$.

Definizione 3.3.4. Il nucleo di M è la funzione $G(x,y)$ definita dall'equazione (3.5) ed è chiamata **funzione di Green** associata a $(L, \mathfrak{D})$.

Andiamo ora ad analizzare le proprietà dell'operatore M visto come operatore integrale nello spazio di Hilbert $L^2(a,b)$; come vedremo M è un operatore hermitiano e dunque il suo nucleo, ossia la funzione di Green, è un nucleo di Hilbert-Schmidt.

Proposizione 3.3.5. *Sia L l'operatore definito in $L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*, e supponiamo che* 0 *non sia un suo autovalore. Allora l'operatore M è compatto ed autoaggiunto in $L^2(a,b)$.*

Dimostrazione. L'operatore M è compatto per il teorema 3.2.4. Inoltre, grazie al teorema 3.3.2, per ogni f_1, $f_2 \in C[a,b]$ esistono ed uniche g_1 e $g_2 \in \mathfrak{D}$ tali che $Lg_1 = f_1$ e $Lg_2 = f_2$. Essendo dunque L autoaggiunto si ha:

$$(f_1, Mf_2)_{L^2(a,b)} = (Lg_1, g_2)_{L^2(a,b)} = (g_1, Lg_2)_{L^2(a,b)} = (Mf_1, f_2)_{L^2(a,b)}.$$

Abbiamo la tesi perché $C[a,b]$ è denso in $L^2(a,b)$. □

Proposizione 3.3.6. *Sia L l'operatore definito in $L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*, e supponiamo che* 0 *non sia un suo autovalore. Allora $\lambda \neq 0$ è autovalore per M, e $h \in L^2(a,b)$ è un'autofunzione per M relativa a λ, se e soltanto se $\frac{1}{\lambda}$ è autovalore per L e h è un'autofunzione per L relativa a $\frac{1}{\lambda}$. In particolare gli autovalori di M sono reali, non nulli e di molteplicità* 1*, e le autofunzioni di M appartengono a $\mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $Mh = \lambda h$ con $h \in L^2(a,b) - \{0\}$. Per la continuità di $G(x,y)$ si ha $h = \frac{1}{\lambda}Mh \in C[a,b]$, pertanto $Mh \in \mathfrak{D}$, da cui segue che $h \in \mathfrak{D}$; se ora applichiamo L troviamo $Lh = \frac{1}{\lambda}h$. Notiamo che in virtù del punto **(i)** della proposizione 3.1.3 segue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Vediamo il viceversa, se $g \in \mathfrak{D}$ e $Lg = \frac{1}{\lambda}g$, allora abbiamo che $g \in C[a,b]$ e, se applichiamo M, otteniamo $\lambda g = Mg$.
Verifichiamo che 0 non è autovalore per M. Supponiamo che $f \in L^2(a,b)$ sia tale che $Mf = 0$, dobbiamo dunque provare che $f = 0$. Ricordando la definizione di $G(x,y)$, posto

$$c_1(x) = \int_x^b u_2(y)g(y)\ dy, \quad c_2(x) = \int_a^x u_1(y)g(y)\ dy,$$

si ricava immediatamente:

$$c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) = \int_a^b G(x,y)g(y)\ dy = 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Derivando otteniamo

$$c_1u_1' + c_2u_2' + (c_1'u_1 + c_2'u_2) = 0 \quad q.o.\ in\ [a,b];$$

ricordando che:

$$\begin{cases} c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0 \\ c_1'u_1' + c_2'u_2' = -\frac{f}{p}, \end{cases}$$

si ottiene:

$$c_1u_1' + c_2u_2' = 0 \quad q.o.\ in\ [a,b].$$

Derivando ulteriormente troviamo:

$$c_1u_1'' + c_2u_2'' + (c_1'u_1' + c_2'u_2') = c_1u_1'' + c_2u_2'' - \frac{f}{p} = 0 \quad q.o.\ in\ [a,b],$$

moltiplicando per p:

$$-f + p(u_1''c_1 + u_2''c_2) = 0 \quad q.o.\ in\ [a,b].$$

Dato che valgono le relazioni $Lu_1 = Lu_2 = 0$, otteniamo:

$$(qu_1 - p'u_1')c_1 + (qu_2 - p'u_2')c_2 - f = 0 \quad q.o.\ in\ [a,b],$$

cioè:

$$q(c_1u_1 + c_2u_2) - p(c_1u_1' + c_2u_2') - f = 0 \quad q.o.\ in\ [a,b],$$

e dunque $f = 0$ *q.o. in* $[a,b]$. □

3.4 Rappresentazione delle soluzioni

Dopo aver studiato le proprietà degli operatori L e $M = L^{-1}$ possiamo finalmente, grazie al teorema spettrale, rappresentare le soluzioni del nostro problema al bordo.
Iniziamo con l'enunciare un corollario delle proposizioni 3.3.5 e 3.3.6, la cui verifica è una diretta conseguenza del teorema spettrale (teorema 2.3.7).

Corollario 3.4.1. Sia L l'operatore definito in $L^2(a,b)$ dall'equazione (3.2) e supponiamo che 0 non sia un suo autovalore. Allora gli autovalori di M formano una successione reale $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ tale che $|\mu_i| \geq |\mu_{i+1}| > 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}^+$ e $\mu_i \to 0$ quando $i \to \infty$; ogni autovalore ha molteplicità 1, ed esiste una base ortonormale in $L^2(a,b)$ di autofunzioni corrispondenti $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathfrak{D}$.

Proposizione 3.4.2. *Sia L l'operatore definito in $L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*. Allora gli autovalori di L formano una successione reale $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$, tale che $|\lambda_i| \to +\infty$ quando $i \to \infty$; ogni autovalore ha molteplicità* 1 *ed esiste una base ortonormale in $L^2(a,b)$ di autofunzioni corrispondenti $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. Se 0 non è autovalore per L, la tesi segue dal corollario 3.4.1 e dalle proposizioni 3.3.6 e 3.1.3. Se 0 è autovalore per L prendiamo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che non sia autovalore per L; poniamo $L_0 = L - \lambda_0 I$, l'operatore L_0 appena introdotto è di Sturm-Liouville e non ha 0 come autovalore. Esiste quindi un operatore M_0 che inverte L_0; se $\{\lambda_i\}$ è la successione degli autovalori di L, i $\{\frac{1}{\lambda_i-\lambda_0}\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ sono gli autovalori di M_0, i quali hanno come corrispondenti autofunzioni esattamente le autofunzioni $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ di L relative ai $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$. Applicando a M_0 il corollario 3.4.1 si ha la tesi. □

Veniamo dunque al risultato principale di questo capitolo, il quale ci consentirà, tramite il teorema spettrale e le precedenti proposizioni, di rappresentare le soluzioni del problema di Sturm-Liouville.

Teorema 3.4.3. *Sia L l'operatore definito in $L^2(a,b)$ dall'equazione* (3.2)*. Allora valgono i seguenti risultati:*
(i) *Se* 0 *non è autovalore di L, il problema al bordo:*

$$\begin{cases} Lg = f \in L^2(a,b) \\ B_1 g = B_2 g = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

è univocamente risolubile in $\mathfrak{D}$; la soluzione è somma in $L^2(a,b)$ della serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (f, u_i)_{L^2(a,b)} u_i,$$

dove $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori di L e $\{u_i\}$ è una corrispondente base ortonormale di autofunzioni.
(ii) *Se* 0 *è autovalore per L, allora il problema al bordo* (3.6) *è risolubile (non univocamente) se e soltanto se $f \in (\ker L)^\perp$; in tal caso le soluzioni sono tutte e sole le funzioni della forma:*

$$u_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (f, u_i)_{L^2(a,b)} u_i(x),$$

dove $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori non nulli di L, $\{u_i\}$ una corrispondente base ortonormale di autofunzioni in $(\ker L)^\perp$, e u_0 è un arbitrario vettore di $\ker L$, il quale è un sottospazio di dimensione 1 *di $L^2(a,b)$; la serie converge in $L^2(a,b)$.*

Dimostrazione. **(i)** La tesi è diretta conseguenza del teorema spettrale (teorema 2.3.7), si ha dunque:

$$L^{-1}f = Mf = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}(f, u_i)_{L^2(a,b)} u_i \quad \textit{in } L^2(a, b).$$

(ii) Prendiamo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che non sia autovalore per L; allora, come abbiamo già visto, $L_0 = L - \lambda_0 I$ non ha 0 come autovalore ed esiste $M_0 = L_0^{-1}$, si ha pertanto che l'equazione $Lg = f$ è equivalente a $g + \lambda_0 M_0 g = M_0 f$, la quale è risolubile se e solo se $M_0 f \in [\ker(I + \lambda_0 M_0)]^\perp$. Inoltre, grazie alla relazione:

$$(f, v)_{L^2(a,b)} = -(f, \lambda_0 M_0 v)_{L^2(a,b)} = -\lambda_0 (M_0 f, v)_{L^2(a,b)} \quad \forall v \in \ker(I + \lambda_0 M_0),$$

abbiamo:

$$M_0 f \in [\ker(I + \lambda_0 M_0)]^\perp \iff f \in [\ker(I + \lambda_0 M_0)]^\perp.$$

Dato che M_0 è invertibile abbiamo anche:

$$\ker(I + \lambda_0 M_0) = \ker L$$

questo perché:

$$v + \lambda_0 M_0 v = 0 \iff (M_0)^{-1} v + \lambda_0 v = 0 \iff Lv = 0.$$

Perciò $Lg = f$ ha soluzione se e soltanto se $f \in (\ker L)^\perp$.
Prendiamo ora $f \in (\ker L)^\perp$ e $g \in \mathfrak{D}$ tale che $Lg = f$; se fissiamo un versore $u_0 \in \ker L$ è possibile scrivere $g = (g, u_0)_{L^2(a,b)} u_0 + g_1$, con $g_1 \in (\ker L)^\perp$ univocamente determinata dalla scelta di g. Vale in più:

$$\begin{aligned}(f, u_i)_{L^2(a,b)} &= (Lg, u_i)_{L^2(a,b)} = (Lg_1, u_i)_{L^2(a,b)} = \\ &= (g_1, Lu_i)_{L^2(a,b)} = \lambda_i (g_1, u_i)_{L^2(a,b)} \quad \forall i \in \mathbb{N}^+,\end{aligned}$$

dunque:

$$g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}(f, u_i)_{L^2(a,b)} u_i \quad \textit{in } L^2(a, b),$$

da cui deriva la tesi. □

Vediamo infine alcune applicazioni della teoria illustrata.

Esempio 3.4.4 (problema di Dirichlet)**.** Sia $Lu = -u''$ e consideriamo come dominio di L:

$$\mathfrak{D} = \{u \in C^1[0,\pi] : \exists\ u'' \in L^2(0,\pi),\ u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Scegliamo quindi $p = q = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ per le condizioni al bordo.
Cerchiamo dunque gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni: la soluzione generale dell'equazione $Lu = \lambda u$ è:

$$u(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

e le condizioni al bordo implicano che $a = 0$ e che $\sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N}^+$; dunque $\lambda = \lambda_i = n^2$, e in particolare 0 non è autovalore. Le autofunzioni di $(L, \mathfrak{D})$ sono $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ ed esse formano un sistema ortonormale completo su $[0,\pi]$.
Costruiamo adesso la funzione di Green associata a $(L, \mathfrak{D})$. Osserviamo che le funzioni $u(x) = cx$ e $v(x) = c(\pi - x)$ verificano rispettivamente per 0 e per π le condizioni al bordo e sono entrambe annullate da L, cioè:

$$\begin{cases} -u'' = 0 \\ u(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -v'' = 0 \\ v(\pi) = 0, \end{cases}$$

e vale che $v'(x)u(x) - u'(x)v(x) = -1$ se e soltanto se $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
La funzione di Green cercata è dunque:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(\pi - y)}{\pi} & \text{se } x \leq y \\[2ex] \dfrac{y(\pi - x)}{\pi} & \text{se } x \geq y. \end{cases}$$

Pertanto se $f \in L^2(0,\pi)$ la soluzione del problema al bordo:

$$\begin{cases} -g'' = f \ in\ [a,b] \\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{cases}$$

è la funzione:

$$g(x) = \int_0^\pi G(x,y)f(y)\ dy = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\int_0^\pi f(t)\sin nt\ dt\Big)\sin nx.$$

Esempio 3.4.5 (problema di Neumann)**.** Consideriamo adesso lo stesso operatore L dell'esempio precedente, cioè $Lu = -u''$, e modifichiamo le condizioni al bordo prendendo come dominio:

$$\mathfrak{D} = \{u \in C^1[0,\pi] : \exists\ u'' \in L^2(0,\pi),\ u'(0) = u'(\pi) = 0\}.$$

Abbiamo allora $p = -1, q = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1$; gli autovalori sono $\lambda = \lambda_i = n^2$ con $n \in \mathbb{N}$. In particolare 0 è autovalore, quindi l'operatore L non ha una funzione di Green associata; possiamo dunque concludere che il corrispondente sistema ortonormale di autofunzioni su $[0, \pi]$ è $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\} \cup \{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx\}_{n\in\mathbb{N}^+}$.
Le soluzioni del problema al bordo:

$$\begin{cases} -g'' = f \ in \ [0, \pi] \\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{cases}$$

con $f \in (\ker L)^\perp$, dove

$$\ker L = \{c\}_{c\in\mathbb{C}}, \ (\ker L)^\perp = \left\{u \in L^2(0, \pi) : \int_0^\pi u(x) \ dx = 0\right\},$$

sono date dalla famiglia $\{g_c\}_{c\in\mathbb{C}}$ con

$$g_c(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\int_0^\pi f(t) \cos nt \ dt\right) \cos nx + c.$$

Osservazione 3.4.6. Nei due esempi precedenti le serie di Fourier rispettivamente dei seni e dei coseni convergono uniformemente e assolutamente in $[0, \pi]$; combinando i due esempi si conclude che $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortogonale completo su $[-\pi, \pi]$ e che, se $f \in C^2(-\pi, \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi)$ e $f'(-\pi) = f'(\pi)$, la serie esponenziale di Fourier di f converge assolutamente e uniformemente.

Bibliografia

[1] H. Widom, Lectures on integral equation, notes by D.Drasin and A. Tromba, Van Nostrand-Reinhold Co., New York 1969.

[2] P. Acquistapace, Appunti di analisi funzionale, http://www.dm.unipi.it/ acquistp/mate.html.

[3] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, Interscience Publ., New York 1958.