Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

# Sull'interpolazione in spazi misurati

Candidato:

*Francesco Sapio*

Relatore:

*Prof. Paolo Acquistapace*

Anno Accademico 2012/2013

*A nonna Anna e zia Lina*

# Indice

# Introduzione

La teoria dell'interpolazione ha origine nella prima metà del XX secolo con due fondamentali contributi: il primo è dovuto a Marcel Riesz (1886-1969), che intorno al 1920 pubblicò il suo classico teorema di interpolazione, poi ridimostrato ed esteso dal suo allievo G.Olof Thorin (1912-2004). Il secondo risultato che è alla base della moderna teoria dell'interpolazione, è dovuto a Józef Marcinkiewicz (1910-1940), il quale nel 1939 lo comunicò in forma orale al suo maestro Antoni Zygmund, subito prima di partire per la guerra. Purtroppo Marcinkiewicz morì in prigionia e il suo teorema venne pubblicato da Zygmund solo dopo il 1950. Possiamo esprimere il significato di questi due teoremi nel modo seguente: siano $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ e $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ due famiglie di spazi di Banach che dipendono in modo opportuno dal parametro $t$; se $T$ è un operatore lineare che manda con continuità $A_0$ in $B_0$ e $A_1$ in $B_1$, allora $T$ manda con continuità $A_t$ in $B_t$ per ogni $t \in ]0,1[$.
A partire dal 1950 la teoria dell'interpolazione ha avuto un enorme sviluppo, ed è diventata una importante branca dell'analisi funzionale, con vastissime applicazioni nell'analisi armonica, nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, nell'analisi numerica e nella teoria dell'approssimazione.
Questa tesi è dedicata all'analisi dei due classici teoremi di Riesz-Thorin e di Marcinkiewicz negli spazi $L^p$ rispetto a una misura finita o, talvolta, $\sigma$-finita. Le dimostrazioni, tutt'altro che banali, dei due teoremi sono riportate in dettaglio.
In particolare, per il teorema di Marcinkiewicz è stato necessario descrivere le principali proprietà degli spazi $L^p$ deboli, denotati con $L^p_*$, e degli spazi di Lorentz, denotati con $L^{pr}$, che ne costituiscono una generalizzazione.
La tesi descrive anche alcune significative applicazioni di questi due teoremi di interpolazione: mediante il primo si fornisce una dimostrazione della disuguaglianza di Young, e grazie ad entrambi si possono provare alcune proprietà di continuità della trasformata di Fourier in spazi $L^p(\mu)$.
Il secondo teorema trova poi una importante applicazione allo studio della trasformata di Hilbert, che è l'oggetto del secondo capitolo: qui ne vengono analizzate le proprietà e i legami con le funzioni armoniche su un semipiano.

# Capitolo 1

# Teoremi classici di interpolazione

Questo capitolo è dedicato alle dimostrazioni e ad alcune applicazioni dei teoremi di Riesz-Thorin e di Marcinkiewicz, entrambi i quali riguardano operatori lineari $T$ tra spazi di Lebesgue.

## 1.1 Teorema di Riesz-Thorin

**Definizione 1.1.1.** Sia $X$ un insieme. Una $\sigma$-algebra $\mathcal{M}$ su tale insieme è una famiglia di parti di $X$, che rispetta le seguenti condizioni:

$$\emptyset \in \mathcal{M},$$

$$A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M},$$

$$\{A_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{M}.$$

**Definizione 1.1.2.** Con spazio misurato si intende una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dove $X$ è un insieme, $\mathcal{M}$ è una $\sigma$-algebra su $X$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ è una funzione, chiamata misura, che rispetta le seguenti proprietà:

$$\mu(\emptyset) = 0,$$

$$\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n), \qquad \{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{M}.$$

**Definizione 1.1.3.** Siano $(U, \mathcal{M}, \mu)$ e $(V, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi misurati e consideriamo $f : U \to V$ una funzione. Si dice che $f$ è misurabile se per ogni $N \in \mathcal{N}$ si ha $f^{-1}(N) = M \in \mathcal{M}$.

**Definizione 1.1.4.** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una norma è un'applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tale che:

1. $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$,
2. $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$.

**Definizione 1.1.5.** Sia $(U, \mu)$ uno spazio misurato (per semplicità di scrittura stiamo sottintendendo la sua $\sigma$-algebra); definiremo $\mathscr{L}^p$ lo spazio delle funzioni a valori reali $\mu$-misurabili che soddisfano

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_U |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

con $1 \leq p < \infty$. Se $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty$$

Definiremo invece $L^p = \mathscr{L}^p/_\sim$ lo spazio costituito dalle classi di equivalenza generate dalla relazione $f \sim g \iff f \equiv g$ su $U \setminus A$ dove $\mu(A) = 0$.

**Osservazione 1.1.6.** I nostri risultati riguarderanno operatori lineari limitati tra spazi $L^p$, ossia

$$T : L^p \to L^q$$

tali che

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \quad \forall f, g \in L^p \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f)\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} < \infty.$$

**Teorema 1.1.7** (Teorema di Riesz-Thorin)**.** *Siano $(U, \mu), (V, \nu)$ spazi misurati di misura positiva e finita. Sia*

$$T \in \mathcal{L}(L^{p_1}(U), L^{q_1}(V)) \cap \mathcal{L}(L^{p_2}(U), L^{q_2}(V))$$

*con norme $\|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}(U), L^{q_1}(V))} = M_1$ e $\|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_2}(U), L^{q_2}(V))} = M_2$ ove*

$$1 \leq p_i \leq \infty, \quad 1 \leq q_i \leq \infty, \quad i = 1, 2.$$

*Posto allora*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}, \quad t \in [0,1]$$

*(quindi* $1 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty$*), risulta* $T \in \mathcal{L}(L^p(U), L^q(V))$ *e inoltre*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p(U),L^q(V))} = M \leq M_1^{1-t} M_2^t.$$

**Osservazione 1.1.8.** Il teorema è valido anche nel caso in cui lo spazio $V$ non abbia misura finita ma sia esprimibile come unione crescente di elementi di misura finita (proprietà di $\sigma$-finitezza); infatti se

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n, \quad V_n \subseteq V_{n+1}, \quad \nu(V_n) < \infty$$

allora per ogni $n$ si ha

$$||T(u)||_{L^q(V_n)} \leq ||T(u)||_{L^{q_1}(V_n)}^{1-t} ||T(u)||_{L^{q_2}(V_n)}^t \leq ||T(u)||_{L^{q_1}(V)}^{1-t} ||T(u)||_{L^{q_2}(V)}^t$$

e per $n \to \infty$ si ottiene la tesi utilizzando il teorema di Beppo-Levi.

*Dimostrazione.* Cominciamo con il caso in cui $p_1 = p_2 = p$. Allora se $u \in L^p(\Omega)$ si ha sicuramente $T(u) \in L^{q_1 \vee q_2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ (dato che valgono ovviamente in generale le relazioni $p_1 \wedge p_2 \leq p \leq p_1 \vee p_2, \quad q_1 \wedge q_2 \leq q \leq q_1 \vee q_2$). Inoltre

$$\|T(u)\|_{L^q(V)} = \left[\int_V |T(u)|^{q(1-t)} |T(u)|^{qt} dx\right]^{\frac{1}{q}} = M$$

Effettuando ora le maggiorazioni

$$M \leq \left[\int_V |T(u)|^{q_1} dx\right]^{\frac{1-t}{q_1}} \left[\int_V |T(u)|^{q_2} dx\right]^{\frac{t}{q_2}} \leq M_1^{1-t} M_2^t,$$

la tesi è provata in tale caso particolare.
Supponiamo perciò ora $p_1 \neq p_2$; ne segue $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, infatti

$$p = 1 \Longleftrightarrow p_1 = p_2 = 1,$$

$$p = \infty \Longleftrightarrow p_1 = p_2 = \infty.$$

Da notare che le implicazioni $\Longleftarrow$ sono ovvie, mentre le implicazioni $\Longrightarrow$ discendono dal fatto che $0 \leq \frac{1}{p_1} \wedge \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} \vee \frac{1}{p_2} \leq 1$.
Nel corso della dimostrazione supporremo $1 \leq q \leq \infty$, sottintendendo le ovvie modifiche necessarie nel caso $q = 1$ oppure $q = \infty$.
La dimostrazione inizia col seguente ben noto principio del massimo per funzioni olomorfe su un disco:

**Lemma 1.1.9.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua su $\overline{\Omega}$ e olomorfa in $\Omega$. Allora*

$$|u(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

**Lemma 1.1.10.** *Sia $S(a,b) = \{z = x + iy : a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{C}$. Consideriamo una funzione $u : S(a,b) \to \mathbb{C}$ continua e limitata in $S(a,b)$ ed olomorfa in $\overset{\circ}{S}(a,b)$, ed inoltre tale che $|u(a+iy)| \leq M$ e $|u(b+iy)| \leq M$; allora si ha*

$$|u(z)| \leq M \quad \forall z \in S(a,b).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che

$$\lim_{|y|\to\infty} u(x+iy) = 0 \quad uniformemente\ per\ x \in [a,b].$$

Allora esiste $y_0 > 0$ tale che

$$|u(z)| \leq M \quad \forall z = x + iy : |y| \geq y_0, \quad \forall x \in [a,b].$$

D'altra parte, posto $Q = \{z : |y| \leq y_0, x \in [a,b]\}$, la funzione $u$ è olomorfa in $\overset{\circ}{Q}$ e continua in $Q$, per cui dal lemma 1.1.9 segue

$$|u(z)| \leq \max_{\partial Q} |u| \leq M \quad \forall z \in Q.$$

Dunque

$$|u(z)| \leq M \quad \forall z \in S(a,b).$$

Vediamo ora il caso generale. Per ogni $n \geq 1$, poniamo

$$u_n(z) = u(z)e^{\frac{z^2}{n}} \quad \forall z \in S(a,b).$$

Allora $u_n$ è continua in $S(a,b)$, olomorfa in $\overset{\circ}{S}(a,b)$ e inoltre

$$|u_n(z)| = |u(z)|e^{\frac{x^2-y^2}{n}} \leq |u(z)|e^{\frac{c^2-y^2}{n}},$$

ove $c^2 = a^2 \vee b^2$; ne segue

$$\lim_{|y|\to\infty} u_n(z) = 0.$$

Inoltre si ha $|u_n(a+iy)| \leq Me^{\frac{c^2}{n}}$, $\quad |u_n(b+iy)| \leq Me^{\frac{c^2}{n}}$; dunque per quanto visto nella prima parte della dimostrazione

$$|u_n(z)| \leq Me^{\frac{c^2}{n}} \quad \forall z \in S(a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(z)| = |u(z)| \leq M \quad \forall z \in S(a,b).$$

□

**Lemma 1.1.11** (Lemma delle tre rette)**.** *Sia $u$ continua e limitata in $S(a,b)$ e olomorfa su $\overset{\circ}{S}(a,b)$, e tale che*

$$|u(a+iy)| \leq M_1, \quad |u(b+iy)| \leq M_2.$$

*Allora se $z \in S(a,b)$*

$$|u(z)| \leq M_1^{1-t} M_2^t$$

*ove $t \in [0,1]$ è il numero tale che $(1-t)a + tb = Rez$.*

*Dimostrazione.* Si deve provare che

$$\frac{|u(z)|}{M_1^{1-t}M_2^t} = \frac{|u(z)|}{M_1^{\frac{b-Rez}{b-a}} M_2^{\frac{Rez-a}{b-a}}} = \left| \frac{u(z)}{M_1^{\frac{b-z}{b-a}} M_2^{\frac{z-a}{b-a}}} \right| \leq 1.$$

Sia

$$\mathcal{U}(z) = \frac{u(z)}{M_1^{\frac{b-z}{b-a}} M_2^{\frac{z-a}{b-a}}} :$$

questa funzione è continua e limitata in $S(a,b)$ e olomorfa su $\overset{\circ}{S}(a,b)$. Inoltre

$$|\mathcal{U}(a+iy)| \leq \frac{M_1}{M_1} = 1, \quad |\mathcal{U}(b+iy)| \leq \frac{M_2}{M_2} = 1.$$

La tesi segue allora dal lemma 1.1.10. □

Possiamo ora passare a dimostrare il teorema. Poniamo

$$\langle h, g \rangle = \int_V h(y) g(y) d\nu$$

e $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$. Dalla disuguaglianza di Hölder, abbiamo

$$||h||_{L^q} = \sup\{|\langle h, g\rangle| : ||g||_{L^{q'}} = 1\}$$

e

$$M = \sup\{|\langle T(f), g\rangle| : ||f||_{L^p} = ||g||_{L^{q'}} = 1\}.$$

Dato che $p < \infty$, $q' < \infty$ possiamo assumere che $f$ e $g$ siano limitate a supporto compatto. Poniamo ora

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_1} + \frac{z}{p_2}, \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q_1'} + \frac{z}{q_2'}, \quad Rez \in [0,1]$$

e

$$\varphi_z(x) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}-1} f(x), \qquad x \in U,$$

$$\psi_z(y) = |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}-1} g(y), \qquad y \in V.$$

Poiché $f$,$g$ sono limitate e $\mu(U) < \infty$, $\nu(V) < \infty$ abbiamo

$$\varphi_z \in L^{p_1}(U) \cap L^{p_2}(U), \quad \psi_z \in L^{q_1'}(V) \cap L^{q_2'}(V),$$

e di conseguenza

$$T(\varphi_z) \in L^{q_1}(V) \cap L^{q_2}(V).$$

Dal momento che $\varphi_z, \psi_z$ sono funzioni potenza nella variabile $z$, sono derivabili e vale

$$\frac{d}{dz}\varphi_z \in L^{p_1}(U) \cap L^{p_2}(U), \quad \frac{d}{dz}\psi_z \in L^{q_1'}(V) \cap L^{q_2'}(V)$$

e di conseguenza

$$T(\frac{d}{dz}\varphi_z) = \frac{d}{dz}T(\varphi_z) \in L^{q_1}(V) \cap L^{q_2}(V).$$

Questo implica l'esistenza di

$$F(z) = \langle T(\varphi_z), \psi_z \rangle = \int_V [T(\varphi_z)](y)\psi_z(y)dy$$

Inoltre $F(z)$ è analitica sulla striscia aperta $0 < Rez < 1$ ed è limitata e continua sulla striscia chiusa $0 \leq Rez \leq 1$. Successivamente notiamo che

$$||\varphi_{i\theta}||_{L^{p_1}(U)} = \Big[\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p_1}p_1} dx\Big]^{\frac{1}{p_1}} = ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} = 1,$$

$$||\varphi_{1+i\theta}||_{L^{p_2}(U)} = \Big[\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p_2}p_2} dx\Big]^{\frac{1}{p_2}} = ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_2}} = 1$$

e analogamente

$$||\psi_{i\theta}||_{L^{q'_1}(V)} = \left[\int_V |g(y)|^{\frac{q'}{q'_1}q'_1} dy\right]^{\frac{1}{q'_1}} = ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}} = 1,$$

$$||\psi_{1+i\theta}||_{L^{q'_2}(V)} = \left[\int_V |g(y)|^{\frac{q'}{q'_2}q'_2} dy\right]^{\frac{1}{q'_2}} = ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_2}} = 1$$

Dalle ipotesi fatte abbiamo quindi

$$|F(i\theta)| = \left|\int_V [T(\varphi_{i\theta})](y)\psi_{i\theta}(y)dy\right| \leq ||T(\varphi_{i\theta})||_{L^{q_1}(V)}||\psi_{i\theta}||_{L^{q'_1}(V)} \leq M_1,$$

$$|F(1+i\theta)| = \left|\int_V [T(\varphi_{1+i\theta})](y)\psi_{1+i\theta}(y)dy\right| \leq ||T(\varphi_{1+i\theta})||_{L^{q_2}(V)}||\psi_{1+i\theta}||_{L^{q_2'}(V)} \leq M_2.$$

Notiamo anche che $\varphi_t = f$ e $\psi_t = g$, e quindi

$$F(t) = \langle T(f), g\rangle = \int_V [T(f))](y)g(y)dy.$$

Usando ora il lemma 1.1.11 otteniamo la conclusione

$$|\langle T(f), g\rangle| \leq M_1^{1-t}M_2^t,$$

o equivalentemente passando all'estremo superiore

$$M \leq M_1^{1-t}M_2^t.$$

Questo conclude il ragionamento se $f$ e $g$ sono limitate. Se invece non lo sono, possiamo trovare due successioni $f_n, g_n$ di funzioni limitate tali che

$$||f - f_n||_{L^p} \to 0, \quad ||g - g_n||_{L^{q'}} \to 0,$$

e quindi

$$\langle T(f_n), g_n)\rangle \to \langle T(f), g\rangle$$

che implica la tesi. □

**Osservazione 1.1.12.** In modo del tutto analogo il teorema vale per funzioni a valori vettoriali: ad esempio $T$ può essere un operatore che opera da $L^p(U, H)$ a $L^q(V, Q)$ ove $H, Q$ sono spazi di Hilbert. Le modifiche formali sono ovvie, in particolare le funzioni $\varphi_z, \psi_z$ si definirebbero in questo modo:

$$\varphi_z(y) = \|f(y)\|_H^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}-1}f(y) \quad \psi_z(y) = \|g(y)\|_Q^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}-1}g(y).$$

Si pone poi

$$F(z) = \int_V \langle [T(\varphi_z)](y), \psi_z(y)\rangle_Q dy.$$

## 1.2 Applicazioni del teorema di Riesz-Thorin

Ora illustreremo alcune delle applicazioni derivanti dal teorema di interpolazione di Riesz-Thorin.

### 1.2.1 Trasformata di Fourier

Consideriamo $U = V = \mathbb{R}^n$ e $d\mu = d\nu = dx$ la misura di Lebesgue. Sia $\mathscr{F}$ la trasformata di Fourier definita da

$$(\mathscr{F}(f))(\xi)) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx,$$

dove

$$\langle x,\xi\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i, \quad x = (x_1,...,x_n), \quad \xi = (\xi_1,...,\xi_n).$$

Per le proprietà dell'integrale otteniamo

$$|(\mathscr{F}(f))(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{-i\langle x,\xi\rangle}|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

e per l'identità di Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathscr{F}(f))(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$$

Ciò implica che

$$\mathscr{F} : L^1 \to L^\infty, \quad \|\mathscr{F}\| = 1$$
$$\mathscr{F} : L^2 \to L^2, \quad \|\mathscr{F}\| = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

Usando il teorema di Riesz-Thorin concludiamo che

$$\mathscr{F} : L^p \to L^q$$

con

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2}, \quad 0 < t < 1.$$

Eliminando $t$ otteniamo $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$; dunque $q = p'$ e $p \in ]1,2[$. Perciò la norma di $\mathscr{F} : L^p \to L^{p'}$ è limitata da $(2\pi)^{\frac{nt}{2}} = (2\pi)^{\frac{n}{p'}}$. In tale maniera segue

**Teorema 1.2.1** (Disuguaglianza di Hausdorff-Young)**.** *Se* $1 \leq p \leq 2$ *allora*

$$\|\mathscr{F}(f)\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_{L^p}.$$

### 1.2.2 Convoluzioni

Sia ora $T$ un operatore di convoluzione su $\mathbb{R}^n$:

$$T(f(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy = (k * f)(x),$$

con $k$ funzione fissata in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Allora detto $p'$ l'esponente coniugato di $p$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)||f(y)|dy \right]^p dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)||f(y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|^{\frac{1}{p'}}dy \right]^p dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|^p|f(y)|dy \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \right]^{\frac{p}{p'}} dx = \|f\|_{L^{p'}}^{\frac{p}{p'}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|^p dx$$

da cui ricaviamo

$$\|T(f)\|_{L^p} = \|k * f\|_{L^p} \leq \|k\|_{L^p} \cdot \|f\|_{L^1}.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder, invece, ricaviamo

$$\|T(f)\|_{L^\infty} \leq \|k\|_{L^p} \cdot \|f\|_{L^{p'}}.$$

Sfruttando ora il teorema di Riesz-Thorin, poiché

$$T : L^1 \to L^p,$$

$$T : L^{p'} \to L^\infty,$$

allora

$$T : L^r \to L^q,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{p'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{\infty}.$$

Eliminando $t$ otteniamo $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ e $1 \leq r \leq p'$. In tale maniera abbiamo dimostrato:

**Teorema 1.2.2** (Disuguaglianza di Young). *Sia $k \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$; se $1 \leq r \leq p'$ allora per ogni $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ si ha $k * f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$ e*

$$\|k * f\|_{L^q} \leq \|k\|_{L^{p'}} \cdot \|f\|_{L^p}.$$

## 1.3 Il teorema di Marcinkiewicz

### 1.3.1 Spazi $L^p$ deboli

Consideriamo $(U, \mu)$ spazio di misura. Sia $f : (U, \mu) \to \mathbb{R}$ finita quasi ovunque; introduciamo la funzione di distribuzione $m(\sigma, f)$ così definita

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x : |f(x)| > \sigma\})$$

Essa è una funzione di $\sigma$ a valori reali definita su $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Se $\sigma_1 \leq \sigma_2$ allora si verifica facilmente che $\{x : |f(x)| > \sigma_2\} \subseteq \{x : |f(x)| > \sigma_1\}$ da cui si ricava, per le proprietà delle misure, $m(\sigma_2, f) \leq m(\sigma_1, f)$. Fissiamo ora $\sigma^* \in \mathbb{R}_+$; se $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ è una successione di numeri positivi tali che $\sigma_n \to \sigma^*_+$, non è restrittivo supporre che sia decrescente: infatti considerata $\{\sigma'_n\}_{n \geq 0}$ definita da $\sigma'_n = \min\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, essa è decrescente e vale $\sigma'_n \to \sigma^*_+$ e in più

$$\{x : |f(x)| > \sigma_n\} \subseteq \{x : |f(x)| > \sigma'_n\}.$$

Allora detto $M_n = \{x : |f(x)| > \sigma'_n\}$ risulta $M_n \subseteq M_{n+1}$ per ogni $n \geq 0$, e quindi

$$m(\sigma^*, f) = \mu(\{x : |f(x)| > \sigma^*\}) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(M_n);$$

per l'arbitrarietà della successione vale allora

$$\lim_{n \to \infty} \mu(M_n) = \lim_{\sigma \to \sigma^*_+} m(\sigma, f)$$

e perciò possiamo concludere che tale funzione è decrescente e continua a destra. Inoltre

$$\|f\|_{L^p} = \left(p \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^p m(\sigma, f) \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty : \tag{1.1}$$

infatti per il Teorema di Fubini vale che

$$\int_U |f| dx = \int_{\mathbb{R}_+} m(t, |f|) dt$$

e generalizzando

$$\int_U |f|^p dx = \int_{\mathbb{R}_+} m(t, |f|^p) dt = \int_{\mathbb{R}_+} m(t^{\frac{1}{p}}, |f|) dt.$$

Ora ponendo $t^{\frac{1}{p}} = \sigma$ si ha $t = \sigma^p$ e $dt = p\sigma^{p-1} d\sigma$, ottenendo infine

$$\|f\|^p_{L^p(U)} = p \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{p-1} m(\sigma, f) d\sigma.$$

Osserviamo poi che

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf_{\sigma} \{m(\sigma, f) = 0\}. \tag{1.2}$$

**Definizione 1.3.1.** Gli spazi $L^p$ deboli, denotati con $L^p_*$, sono costituiti da tutte le funzioni $f : U \to \mathbb{R}$, misurabili, tali che

$$\|f\|_{L^p_*} = \sup_\sigma \{\sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}}\} < \infty;$$

invece nel caso limite si definisce $L^\infty_* = L^\infty$.

Bisogna notare che $\|\cdot\|_{L^p_*}$ per $1 \leq p < \infty$ non è una norma come mostra il seguente controesempio:
Sia $p = 2$ e per ogni $x \in [0, 1]$ siano $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 - \sqrt{x}$; quindi $(f+g)(x) = 1$. Risulta $m(\sigma, f+g) = 1$, $m(\sigma, f) = 1-\sigma^2$, $m(\sigma, g) = (1-\sigma)^2$; di conseguenza

$$\|f\|_{L^2_*([0,1])} = \sup_\sigma \left\{\sigma(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{2},$$
$$\|g\|_{L^2_*([0,1])} = \sup_\sigma \{\sigma(1-\sigma)\} = \frac{1}{4},$$
$$\|f+g\|_{L^2_*([0,1])} = \sup_\sigma \{\sigma \cdot 1\} = 1,$$

e quindi vale

$$\|f+g\|_{L^2_*([0,1])} > \|f\|_{L^2_*([0,1])} + \|g\|_{L^2_*([0,1])}.$$

**Definizione 1.3.2.** Sia $X$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, definiamo quasi-norma un'applicazione $q : X \to [0, \infty[$ tale che

1. $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$,
2. $q(x) = 0$ se e solo se $x = 0$,
3. $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$,
4. $q(x + y) \leq C(q(x) + q(y))$ per una certa costante $C > 1$ e per ogni $x, y \in X$.

Risulta che $\|\cdot\|_{L^p_*}$ è una quasi norma su $L^p_*$; di fatto:

1. $m(\sigma, f) \geq 0$ per ogni $\sigma > 0$ perché è la misura di un insieme, perciò
$$\|f\|_{L^p_*} = \sup_\sigma \{\sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}}\} \geq 0 \quad \forall f \in L^p_*$$
perché estremo superiore di quantità positive.
2. $\|f\|_{L^p_*} = \sup_\sigma \{\sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}}\} = 0$ se e solo se $\sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}} = 0$ per ogni $\sigma > 0$, che è vero se e solo se $m(\sigma, f) = 0$ per ogni $\sigma > 0$, quindi se e solo se, ricordando la definizione di $m(\sigma, f)$, $\mu(\{x : |f(x)| > \sigma\}) = 0$ per ogni $\sigma > 0$, se e solo se $|f(x)| \leq \sigma$ per ogni $\sigma > 0$, da cui $f \equiv 0$.

3. Dal momento che
$$m(\sigma,\lambda f)=\mu(\{x:|(\lambda f)(x)|>\sigma\})=|\lambda|\mu(\{x:|f(x)|>\sigma\})=|\lambda|m(\sigma,f),$$
si ricava banalmente moltiplicando per $\sigma$ e passando all'estremo superiore
$$\|\lambda f\|_{L^p_*}=|\lambda|\|f\|_{L^p_*} \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \forall f\in L^p_*.$$

4. Fissiamo $\sigma>0$ e poniamo
$$A=\{x:|(f+g)(x)|>\sigma\},\quad B=\{x:|f(x)|>\frac{\sigma}{2}\},\quad C=\{x:|g(x)|>\frac{\sigma}{2}\}$$
Sia $x\in B^c\cap C^c$ allora $|f(x)|\leq\frac{\sigma}{2}$ e $|g(x)|\leq\frac{\sigma}{2}$. Dato che vale
$$|(f+g)(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}=\sigma$$
possiamo concludere che $x\in A^c$ e quindi $B^c\cap C^c\subseteq A^c$. Per le regole di De Morgan otteniamo $B\cup C=(B^c\cap C^c)^c\supseteq A$ ossia
$$\{x:|(f+g)(x)|>\sigma\}\subseteq\{x:|f(x)|>\frac{\sigma}{2}\}\cup\{x:|g(x)|>\frac{\sigma}{2}\}$$
Per le proprietà delle misure, otteniamo
$$m(\sigma,f+g)\leq m\left(\frac{\sigma}{2},f\right)+m\left(\frac{\sigma}{2},g\right), \tag{1.3}$$
e usando la disuguaglianza $(a+b)^{\frac{1}{p}}\leq a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{p}}$, valida per $a,b\geq 0$ e $p\geq 1$, otteniamo
$$\frac{\sigma}{2}m(\sigma,f+g)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{\sigma}{2}\left(m\left(\frac{\sigma}{2},f\right)+m\left(\frac{\sigma}{2},g\right)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{\sigma}{2}m\left(\frac{\sigma}{2},f\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{\sigma}{2}m\left(\frac{\sigma}{2},g\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Passando all'estremo superiore per $\sigma>0$ otteniamo
$$\|f+g\|_{L^p_*}\leq 2(\|f\|_{L^p_*}+\|g\|_{L^p_*}).$$

Se $p>1$ e $\mu(U)<\infty$, $L^p_*(U)$ è uno spazio di Banach rispetto ad una norma, la quale è equivalente alla quasi-norma prima definita. Nelle prossime righe ci occuperemo di dimostrare tale affermazione.

**Definizione 1.3.3.** Diremo che $u:U\to\mathbb{R}$ è misurabile nello spazio $M^\theta(U)$ con $\theta\in[0,1]$, se esiste $K>0$ tale che per ogni $E\subseteq U$ misurabile con $\mu(E)<\infty$ si ha
$$\int_E|u(x)|d\mu(x)\leq K\mu(E)^\theta$$
Posto ora
$$\|u\|_{M^\theta(U)}=\sup_E\left\{\frac{1}{\mu(E)^\theta}\int_E|u(x)|d\mu(x)\right\}$$

si vede facilmente che questa è una norma su $M^\theta(U)$ e che con tale norma lo spazio risulta essere di Banach.

**Proposizione 1.3.4.** *Sia $p > 1$ e $\mu(U) < \infty$; allora risulta*

$$L^p_*(U) = M^\theta(U), \qquad \theta = \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p},$$

*ed inoltre esiste una costante per cui*

$$\| \cdot \|_{L^p_*} \leq \| \cdot \|_{M^\theta} \leq c \| \cdot \|_{L^p_*}$$

*Dimostrazione.* Sia $u \in L^p_*(U)$, allora risulta $m(\sigma, u) \leq \frac{K}{\sigma^p}$ ove $K = \|u\|_{L^p_*(U)}$, e quindi se $E \subseteq U$ risulta

$$\int_E |u| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x : |u(x)| > \sigma\} \cap E) d\sigma = \int_0^{+\infty} m(\sigma, \chi_E u) d\sigma \leq$$

$$\leq \mu(E) d + K \frac{d^{1-p}}{p-1} \qquad \forall d > 0,$$

e minimizzando otteniamo

$$\int_E |u| d\mu \leq \mu(E) a_0 + K^p \frac{a_0^{1-p}}{p-1}, \qquad a_0 = \frac{K}{\mu(E)^{\frac{1}{p}}},$$

cioè

$$\int_E |u| d\mu \leq K \mu(E)^{1-\frac{1}{p}} + \frac{K}{(p-1)\mu(E)^{\frac{1-p}{p}}}.$$

Ciò prova che $u \in M^{1-\frac{1}{p}(U)}$ e che

$$\|u\|_{M^{1-\frac{1}{p}}(U)} \leq \frac{p}{p-1} \|u\|_{L^p_*(U)}.$$

Viceversa, sia $u \in M^{1-\frac{1}{p}(U)}$; allora, in particolare, si ha per ogni $\sigma > 0$

$$\sigma m(\sigma, u) \leq \int_{x:|u(x)|>\sigma} |u| d\mu \leq K m(\sigma, u)^{1-\frac{1}{p}}$$

ove $K = \|u\|_{M^{1-\frac{1}{p}}(U)}$, da cui $m(\sigma, u)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{K}{\sigma}$ per ogni $\sigma > 0$.
Ciò prova che $u \in L^p_*(U)$ e che

$$\|u\|_{L^p_*(U)} \leq \|u\|_{M^{1-\frac{1}{p}}(U)}.$$

$\square$

Dunque lo spazio $L^p_*(U)$ è uno spazio di Banach con la norma $\| \cdot \|_{M^{1-\frac{1}{p}}(U)}$.

### 1.3.2 Spazi $L^{pr}$ di Lorentz

Gli spazi $L^p_*$ sono casi speciali di spazi più generali chiamati spazi di Lorentz e denotati con $L^{pr}$. Consideriamo una funzione $f$ $\mu$-misurabile e definiamo con $f^*$ il suo *riordinamento decrescente* così definito

$$f^*(t) = \inf_{\sigma} \{m(\sigma, f) \leq t\} \tag{1.4}$$

Se $t_1 \leq t_2$ allora $\{\sigma > 0 : m(\sigma, f) \leq t_1\} \subseteq \{\sigma > 0 : m(\sigma, f) \leq t_2\}$ e quindi passando all'estremo inferiore si inverte la disuguaglianza ottenendo $f^*(t_1) \geq f^*(t_2)$. Quindi questa funzione è non negativa e decrescente su $\mathbb{R}_+$. Sia ora $L = \lim_{t \to t_0^+} f^*(t)$. Sia $\sigma > 0$ tale che $m(\sigma, f) \leq t_0$. Allora a maggior ragione $m(\sigma, f) < t$ per ogni $t > t_0$; quindi, per definizione, si ha $f^*(t) \leq \sigma$ per ogni $t > t_0$. Passando al limite per $t$ che tende a $t_0$ da destra, si ricava $L \leq \sigma$. Questo vale per ogni $\sigma > 0$ tale che $m(\sigma, f) \leq t_0$, e ciò ci garantisce che $L$ è un minorante di tale insieme. Quindi $L \leq f^*(t_0)$. Quindi $f^*$ è continua a destra. L'altra disuguaglianza $L \geq f^*(t_0)$ segue dalla decrescenza di $f^*$. Inoltre $f^*$ possiede la proprietà seguente:

$$m(\sigma, f) = m(\sigma, f^*) \quad \forall \sigma > 0. \tag{1.5}$$

Fissiamo $\sigma > 0$ e chiamiamo $A = \{\alpha > 0 : m(\alpha, f) \leq m(\sigma, f)\}$; allora $\sigma \in A$, quindi $f^*(m(\sigma, f)) = \inf A \leq \sigma$ e perciò, dato che $\{t : f^*(t) > \sigma\} \subseteq [0, m(\sigma, f)[$, vale $m(\sigma, f^*) \leq m(\sigma, f)$. Sia ora $t > m(\sigma, f^*)$. Poiché sappiamo già che $m(\sigma, f) \leq m(\sigma, f^*)$, abbiamo anche $t > m(\sigma, f)$. Ciò significa, per definizione, che $\sigma \geq f^*(t)$. Al limite per $t \to m(\sigma, f^*)$, otteniamo, grazie alla continuità a destra, $f^*(m(\sigma, f^*)) \leq \sigma$, e quindi per lo stesso ragionamento di prima $m(\sigma, f) \leq m(\sigma, f^*)$. La (1.5) si esprime dicendo che $f^*$ e $f$ sono equimisurabili. In tutti i punti dove $f^*(t)$ è continua, $\sigma = f^*(t)$ è equivalente a $t = m(\sigma, f)$.

**Definizione 1.3.5.** Sia $r \in [1, \infty]$; lo spazio di Lorentz $L^{pr}$ è lo spazio delle funzioni misurabili $f : U \to \mathbb{R}$ tali che

$$\|f\|_{L^{pr}} = \begin{cases} \left( \int_{\mathbb{R}_+} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, & 1 \leq r < \infty \\ \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t)) < \infty, & r = \infty. \end{cases}$$

**Osservazione 1.3.6.** Valgono le seguenti affermazioni:

1. $$L^{pp} = L^p.$$

Questa affermazione è implicata da (1.1),(1.2),(1.4) e (1.5); infatti risulta per $p < \infty$

$$\|f\|^p_{L^p(U)} = p\int_0^\infty \sigma^{p-1}m(\sigma,f)d\sigma = p\int_0^\infty \sigma^{p-1}m(\sigma,f^*)d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty m(t^{\frac{1}{p}},f^*)dt = \int_0^\infty m(t,|f^*|^p)dt = \int_0^\infty |f^*|^p dt = \|f\|_{L^{pp}(U)}$$

grazie alla sostituzione $\sigma^p = t$ e quindi $p\sigma^{p-1}d\sigma = dt$.

2.
$$L^{p\infty} = L^p_*.$$

Sia $p \in [1,\infty[$. Fissiamo $\sigma \in \mathbb{R}_+$ allora possiamo trovare $t \in \mathbb{R}_+$ tale che $f^*(t) = \sigma$ e dalla definizione di $f^*$ otteniamo $m(\sigma,f) \leq t$. Perciò elevando entrambi i membri alla $\frac{1}{p}$ e moltiplicando per $\sigma$ otteniamo $\sigma m(\sigma,f)^{\frac{1}{p}} \leq t^{\frac{1}{p}}f^*(t)$ e passando all'estremo superiore otteniamo $\|f\|_{L^p_*} \leq \|f\|_{L^{p\infty}}$. Viceversa, dato $\epsilon > 0$, possiamo scegliere $t$ per cui valga $\|f\|_{L^{p\infty}} \leq t^{\frac{1}{p}}f^*(t) + \epsilon$; posto $\sigma = f^*(t)$ allora $m(\sigma,f) = t$, per cui $\|f\|_{L^{p\infty}} \leq t^{\frac{1}{p}}f^*(t) + \epsilon = \sigma m(\sigma,f)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p_*}$.
Se $p = \infty$, allora per la prima parte di questa osservazione risulta $L^{\infty\infty} = L^\infty$; dato che per definizione abbiamo $L^\infty_* = L^\infty$, concludiamo che $L^{\infty\infty} = L^\infty$.

3.
$$L^p \subseteq L^p_*.$$

Sia $p \in [1,+\infty[$ e $f \in L^p$; allora

$$\infty > \|f\|_{L^p} = \sup_\sigma \left(\int_{\{x:|f(x)|>\sigma\}} |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \sup_\sigma \left(\sigma m(\sigma,f)^{\frac{1}{p}}\right) = \|f\|_{L^p_*}$$

e quindi $f \in L^p_*$.
Se invece $p = +\infty$ allora per definizione $L^\infty = L^\infty_*$.

**Definizione 1.3.7.** Sia $T : L^p \to L^q_*$ operatore lineare, diremo che $T$ è limitato se $\|T(f)\|_{L^q_*} \leq C\|f\|_{L^p}$ e la sua norma sarà l'estremo inferiore delle costanti $C$.

**Teorema 1.3.8** (Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz)**.** *Siano $(U,\mu)$, $(V,\nu)$ spazi di misura finita. Posto $\Delta = \left\{\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) : 0 \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq 1\right\}$, siano $p_i, q_i$ per $i = 1,2$ tali che $\left(\frac{1}{p_i},\frac{1}{q_i}\right) \in \Delta$ con $p_1 \geq p_2$ e $q_1 \neq q_2$; sia $T$ un operatore lineare tale che*

$$T : L^{p_1}(U,\mu) \to L^{q_1}_*(V,\nu), \quad \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_1},L^{q_1}{}_*)} = M_{1*},$$

$$T : L^{p_2}(U, \mu) \to L_*^{q_2}(V, \nu), \quad \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_2}, L_*^{q_2})} = M_{2*}.$$

*Poniamo*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2};$$

*allora*

$$T : L^p(U, \mu) \to L^q(V, \nu)$$

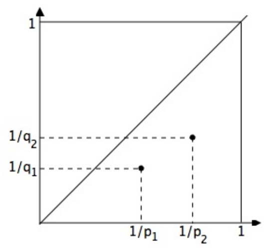
*è limitato con norma*

$$M = \|T\|_{\mathcal{L}(L^p, L^q)} \leq K_t M_{1*}^{1-t} M_{2*}^t,$$

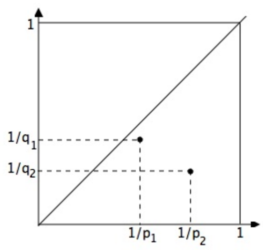
*ove* $K_t$ *è una costante opportuna. Inoltre* $K_t$ *diverge per* $t \to 0$ *se e solo se* $q_1$ *è finito, e diverge per* $t \to 1$ *se e solo se* $q_2$ *è finito.*

**Osservazione 1.3.9.** Osserviamo che nel teorema di Marcinkiewicz gli spazi classici di Lebesgue, presenti nel teorema di Riesz-Thorin, sono stati sostituiti con gli spazi deboli che come abbiamo visto sono più grandi. Perciò il teorema di Marcinkiewicz può essere usato in alcuni casi dove il teorema di Riesz-Thorin non è applicabile.

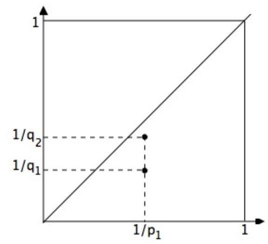
*Dimostrazione.* Distinguiamo quattro casi.
**(I)** $p_2 < p_1 < \infty$ e $q_2 < q_1$ con i sottocasi **(a)** $q_1 < \infty$, **(b)** $q_1 = \infty$



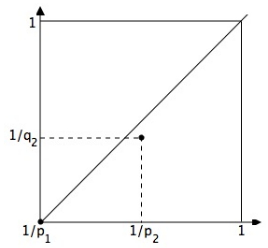

**(II)** $p_2 < p_1 < \infty$ e $q_2 > q_1$ con i sottocasi **(a)** $q_2 < \infty$, **(b)** $q_2 = \infty$




**(III)** $p_2 = p_1 < \infty$ e $q_2 < q_1$ con i sottocasi **(a)** $q_1 < \infty$, **(b)** $q_1 = \infty$




**(IV)** $p_2 < p_1 = \infty$ e $q_2 < q_1 = \infty$




Dimostrazione **(I)(a)**. Siamo nel caso $p_2 < p_1 < \infty$ e $q_2 < q_1 < \infty$.
Per ipotesi si ha, per $u \in L^{p_1}(U)$

$$\forall \sigma > 0, \quad m(\sigma, T(u)) \leq \left[\frac{M_{1*}}{\sigma}\|u\|_{L^{p_1}(U)}\right]^{q_1} \quad \forall u \in L^{p_1}(U), \tag{1.6}$$

$$\forall \sigma > 0, \quad m(\sigma, T(u)) \leq \left[\frac{M_{2*}}{\sigma}\|u\|_{L^{p_2}(U)}\right]^{q_2} \quad \forall u \in L^{p_2}(U). \tag{1.7}$$

Sia $u \in L^p(U)$, e poniamo per ogni $\sigma > 0$

$$h(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{N}\right)^{\xi}, \quad \xi = \frac{q - q_1}{p - p_1}\frac{p_1}{q_1}, \tag{1.8}$$

ove $N > 0$ è un numero che determineremo in seguito. Notiamo che $\xi > 0$ poiché $p_2 < p < p_1, \quad q_2 < q < q_1$ (essendo $t \in ]0, 1[$) e che

$$\xi = \frac{q}{p}\frac{1 - \frac{q_1}{q}}{1 - \frac{p_1}{p}} = \frac{q}{p}\frac{1 - \left(1 - t + t\frac{q_1}{q_2}\right)}{1 - \left(1 - t + t\frac{p_1}{p_2}\right)} = \frac{q}{p}\frac{1 - \frac{q_1}{q_2}}{1 - \frac{p_1}{p_2}} = \frac{q}{p}\frac{q_2}{p_2}\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}.$$

Per $\sigma > 0$ e $u \in L^{p_1}(U)$, poniamo $u = u_1^\sigma + u_2^\sigma$, dove

$$u_1^\sigma(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } |u(x)| \leq h(\sigma) \\ h(\sigma)e^{i \arg u(x)} & \text{se } |u(x)| > h(\sigma) \end{cases}$$

$$u_2^\sigma(x) = u(x) - u_1^\sigma(x).$$

É chiaro allora che $|u| = |u_1^\sigma| + |u_2^\sigma|$: infatti la cosa è ovvia se $|u(x)| \leq h(\sigma)$, mentre se $|u(x)| > h(\sigma)$ si ha

$$|u_2^\sigma| = \left| u - h(\sigma)\frac{u}{|u|} \right| = |u| \left( 1 - \frac{h(\sigma)}{|u|} \right) = |u| - h(\sigma) = |u| - |u_1^\sigma|.$$

Inoltre $u_1^\sigma \in L^\infty(U) \subseteq L^{p_1}(U)$ e $u_2^\sigma \in L^{p_2}(U)$ e questo poiché la funzione $u_2^\sigma$ è tale che $u_2^\sigma = u - u_1^\sigma \in L^{p_1}(U) \subseteq L^{p_2}(U)$).
Infine ricordiamo che vale

$$|T(u)| \leq c[|T(u_1^\sigma)| + |T(u_2^\sigma)|],$$

dalla quale segue

$$\{x : |T(u(x))| > \sigma\} \subseteq \left\{ x : |T(u_1^\sigma(x))| > \frac{\sigma}{2c} \right\} \cup \left\{ x : |T(u_2^\sigma(x))| > \frac{\sigma}{2c} \right\}$$

e quindi

$$m(\sigma, T(u)) \leq m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_1^\sigma)\right) + m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_2^\sigma)\right). \tag{1.9}$$

Valutiamo ora $\|T(u)\|_{L^q(V)}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\|T(u)\|^q_{L^q(V)} = q \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-1} m(\sigma, T(u)) d\sigma \leq \quad (\mathit{per}\ (1.6),\ (1.7),\ (1.9)) \\
&\leq q \sum_{i=1}^{2} (2c)^{q_i} M_{i*}^{q_i} \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-q_i-1} \|u_i^\sigma\|^{q_i \frac{p_i}{p_i}}_{L^{p_i}(U)} d\sigma = \quad \left(\mathit{osservando\ che}\ \frac{q_i}{p_i} \geq 1\right) \\
&= q p_1^{\frac{q_1}{p_1}} (2c)^{q_1} M_{1*}^{q_1} \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-q_1-1} \left[ \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_1-1} m(\rho, u_1^\sigma) d\rho \right]^{\frac{q_1}{p_1}} d\sigma + \\
&+ q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} (2c)^{q_2} M_{2*}^{q_2} \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-q_2-1} \left[ \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho, u_2^\sigma) d\rho \right]^{\frac{q_2}{p_2}} d\sigma = \\
&= P + Q.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Valutiamo separatamente i due addendi $P$ e $Q$. Poiché

$$\int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_1-1} m(\rho, u_1^\sigma) d\rho = \int_0^{h(\sigma)} \rho^{p_1-1} m(\rho, u_1^\sigma) d\rho \leq \int_0^{h(\sigma)} \rho^{p_1-1} m(\rho, u) d\rho$$

risulta

$$P \leq q p_1^{\frac{q_1}{p_1}} (2c)^{q_1} M_{1*}^{q_1} \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-q_1-1} \left[ \int_0^{h(\sigma)} \rho^{p_1-1} m(\rho, u) d\rho \right]^{\frac{q_1}{p_1}} d\sigma =$$

$$= qp_1^{\frac{q_1}{p_1}}(2c)^{q_1}M_{1*}^{q_1}\int_{\mathbb{R}_+}[\varphi(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}}\,d\mu(\sigma),$$

avendo posto $d\mu(\sigma) = \sigma^{q-q_1-1}d\sigma$ e $\varphi(\sigma) = \int_0^{h(\sigma)}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)d\rho$.
Poniamo ancora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(\sigma) = \int_0^{n\wedge h(\sigma)}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)d\rho :$$

allora $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ e $\varphi_n(\sigma) \to \varphi(\sigma)$ per ogni $\sigma > 0$; pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}[\varphi_n(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}}\,d\mu(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+}[\varphi(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}}\,d\mu(\sigma).$$

Ora si ha

$$\|\varphi_n\|^{\frac{q_1}{p_1}}_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)} = \int_{\mathbb{R}_+}[\varphi_n(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}}\,d\mu(\sigma) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\left[\int_0^{n\wedge h(\sigma)}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)d\rho\right][\varphi_n(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}-1}\,d\mu(\sigma) =$$

$$= \int_0^n\rho^{p_1-1}m(\rho,u)\left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty[\varphi_n(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}-1}\,d\mu(\sigma)\right]d\rho \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)\left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty[\varphi_n(\sigma)]^{\left(\frac{q_1}{p_1}-1\right)\left(\frac{q_1}{p_1}\right)'}\,d\mu(\sigma)\right]^{\frac{1}{\left(\frac{q_1}{p_1}\right)'}}\cdot\left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty d\mu(\sigma)\right]^{\frac{p_1}{q_1}}d\rho$$

$$\leq \|\varphi_n\|^{\frac{q_1}{p_1}/\left(\frac{q_1}{p_1}\right)'}_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)}\int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)\left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty\sigma^{q-q_1-1}d\sigma\right]^{\frac{p_1}{q_1}}d\rho.$$

Otteniamo allora

$$\|\varphi_n\|^{\frac{q_1}{p_1}}_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)} \leq \|\varphi_n\|^{\frac{q_1}{p_1}/\left(\frac{q_1}{p_1}\right)'}_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)}\int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)\left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty\sigma^{q-q_1-1}d\sigma\right]^{\frac{p_1}{q_1}}d\rho. \quad (1.11)$$

Verifichiamo ora che $\|\varphi_n\|_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)} < \infty$:

$$\|\varphi_n\|^{\frac{q_1}{p_1}}_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)} \leq C\int_0^\infty\left[\int_0^{n\wedge h(\sigma)}\rho^{p_1-1}d\rho\right]^{\frac{q_1}{p_1}}d\mu(\sigma) \leq$$

$$\leq C\int_0^\infty\left(\frac{[n\wedge h(\sigma)]^{p_1}}{p_1}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}\sigma^{q-q_1-1}d\sigma = C'\int_0^\infty\left[n\wedge\left(\frac{\sigma}{N}\right)^\xi\right]^{q_1}\sigma^{q-q_1-1}d\sigma \leq$$

$$\leq C''\left[\int_0^1\sigma^{\xi q_1+q-q_1-1}d\sigma + \int_1^\infty n^{q_1}\sigma^{q-q_1-1}d\sigma\right] =$$

$$= C''\left[\left|\frac{\sigma^{\xi q_1+q-q_1}}{\xi q_1+q-q_1}\right|_0^1 + \lim_{u\to\infty}\left|\frac{n^{q_1}\sigma^{q-q_1}}{q-q_1}\right|_1^u\right] = C''\left[\frac{1}{\xi q_1+q-q_1}+\frac{n^{q_1}}{q_1-q}\right] < \infty,$$

e questo perché $q-q_1<0$ e $\xi q_1+q-q_1=\frac{(q-q_1)p}{p-p_1}>0$.

Dividendo entrambi i membri della disuguaglianza (1.11) per $\|\varphi_n\|_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)}^{\frac{q_1}{p_1}/\left(\frac{q_1}{p_1}\right)'}$, otteniamo

$$\|\varphi_n\|_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)} \le \int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)\left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^{\infty}\sigma^{q-q_1-1}d\sigma\right]^{\frac{p_1}{q_1}}d\rho$$

Ne segue che

$$[P]^{\frac{p_1}{q_1}} \le q^{\frac{p_1}{q_1}}p_1(2c)^{p_1}M_{1*}^{p_1}\|\varphi\|_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)} \le$$

$$\le q^{\frac{p_1}{q_1}}p_1(2c)^{p_1}M_{1*}^{p_1}\int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_1-1}m(\rho,u)\left[\frac{-(N\rho^{\frac{1}{\xi}})^{q-q_1}}{q-q_1}\right]^{\frac{p_1}{q_1}}d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q_1-q}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}p_1(2c)^{p_1}M_{1*}^{p_1}N^{\frac{p_1(q-q_1)}{q_1}}\int_{\mathbb{R}_+}m(\rho,u)\rho^{p_1-1+\frac{q-q_1}{\xi}\cdot\frac{p_1}{q_1}}d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q_1-q}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}p_1(2c)^{p_1}M_{1*}^{p_1}N^{\frac{p_1(q-q_1)}{q_1}}\int_{\mathbb{R}_+}m(\rho,u)\rho^{p-1}d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q_1-q}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\frac{p_1}{p}(2c)^{p_1}M_{1*}^{p_1}N^{\frac{p_1(q-q_1)}{q_1}}\|u\|_{L^p(U)}^p$$

e quindi

$$P \le \frac{q}{q_1-q}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}(2c)^{q_1}M_{1*}^{q_1}N^{q-q_1}\|u\|_{L^p(U)}^{\frac{pq_1}{p_1}}. \tag{1.12}$$

Il secondo addendo $Q$ della (1.10) si valuta analogamente: osservando che

$$\int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_2-1}m(\rho,u_2^\sigma)d\rho = \int_{\mathbb{R}_+}\rho^{p_2-1}m(\rho+h(\sigma),u)d\rho =$$

$$= \int_{h(\sigma)}^{\infty}[\rho-h(\sigma)]^{p_2-1}m(\rho,u)d\rho \le \int_{h(\sigma)}^{\infty}\rho^{p_2-1}m(\rho,u)d\rho,$$

si ottiene

$$Q \le qp_2^{\frac{q_2}{p_2}}(2c)^{q_2}M_{2*}^{q_2}\int_{\mathbb{R}_+}\sigma^{q-q_2-1}\left[\int_{h(\sigma)}^{\infty}\rho^{p_2-1}m(\rho,u)d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}}d\sigma =$$

$$= qp_2^{\frac{q_2}{p_2}}(2c)^{q_2}M_{2*}^{q_2}\int_{\mathbb{R}_+}[\psi(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}}d\nu(\sigma)$$

avendo posto $d\nu(\sigma) = \sigma^{q-q_2-1}d\sigma$ e $\psi(\sigma) = \int_{h(\sigma)}^{\infty} \rho^{p_2-1}m(\rho,u)d\rho$.
Posto poi per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\psi_n(\sigma) = \int_{n\wedge h(\sigma)}^{n} \rho^{p_2-1}m(\rho,u)d\rho,$$

risulta $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ definitivamente e $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ per ogni $\sigma > 0$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} [\psi_n(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}} \, d\nu(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+} [\psi(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}} \, d\nu(\sigma).$$

Ora si ha

$$\|\psi_n\|^{\frac{q_2}{p_2}}_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} = \int_{\mathbb{R}_+} [\psi_n(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}} \, d\nu(\sigma) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{n\wedge h(\sigma)}^{n} \rho^{p_2-1}m(\rho,u)d\rho\right] [\psi_n(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}-1} \, d\nu(\sigma) =$$

$$= \int_0^n \rho^{p_2-1}m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} [\psi_n(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}-1} \, d\nu(\sigma)\right] d\rho \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1}m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} [\psi_n(\sigma)]^{\left(\frac{q_2}{p_2}-1\right)\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'} \, d\nu(\sigma)\right]^{\frac{1}{\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}} \cdot \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} d\nu(\sigma)\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho \leq$$

$$\leq \|\psi_n\|^{\frac{q_2}{p_2}/\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1}m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} \sigma^{q-q_2-1}d\sigma\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho;$$

otteniamo allora

$$\|\psi_n\|^{\frac{q_2}{p_2}}_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \leq \|\psi_n\|^{\frac{q_2}{p_2}/\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1}m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} \sigma^{q-q_2-1}d\sigma\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho. \quad (1.13)$$

Verifichiamo ora che $\|\psi_n\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} < \infty$:

$$\|\psi_n\|^{\frac{q_2}{p_2}}_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \leq C \int_0^{\infty} \left[\int_{n\wedge h(\sigma)}^{n} \rho^{p_2-1}d\rho\right]^{\frac{p_2}{q_2}} \sigma^{q-q_2-1}d\sigma$$

se $h(\sigma) < n$ cioè $\sigma < Nn^{\frac{1}{\xi}}$, otteniamo

$$\|\psi_n\|^{\frac{q_2}{p_2}}_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \leq C' \int_0^{Nn^{\frac{1}{\xi}}} \left[\int_{h(\sigma)}^{n} \rho^{p_2}\right]^{\frac{q_2}{p_2}} \sigma^{q-q_2-1}d\sigma \leq C' \int_0^{Nn^{\frac{1}{\xi}}} \left[\int_0^{n} \rho^{p_2}\right]^{\frac{q_2}{p_2}} \sigma^{q-q_2-1}d\sigma =$$

$$= C' \int_0^{Nn^{\frac{1}{\xi}}} n^{q_2}\sigma^{q-q_2-1}d\sigma = C''(Nn^{\frac{1}{\xi}})^{q-q_2} < \infty$$

e questo è vero perché $q - q_2 > 0$.

Dividendo entrambi i membri della disuguaglianza (1.13) per $\|\psi_n\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\mu)}^{\frac{q_2}{p_2}/\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}$, otteniamo

$$\|\psi_n\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \leq \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} \sigma^{q-q_2-1} d\sigma\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho.$$

Ne segue che

$$[Q]^{\frac{p_2}{q_2}} \leq q^{\frac{p_2}{q_2}} p_2 (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} \|\psi\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)} \leq$$

$$\leq q^{\frac{p_2}{q_2}} p_2 (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho,u) \left[\frac{(N\rho^{\frac{1}{\xi}})^{q-q_2}}{q-q_2}\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q-q_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} p_2 (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} N^{\frac{p_2(q-q_2)}{q_2}} \int_{\mathbb{R}_+} m(\rho,u) \rho^{p_2-1+\frac{q-q_2}{\xi}\cdot\frac{p_2}{q_2}} d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q-q_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} p_2 (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} N^{\frac{p_2(q-q_2)}{q_2}} \int_{\mathbb{R}_+} m(\rho,u) \rho^{p-1} d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q-q_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} \frac{p_2}{p} (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} N^{\frac{p_2(q-q_2)}{q_2}} \|u\|_{L^p(U)}^p,$$

e quindi

$$Q \leq \frac{q}{q-q_2} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{q_2}{p_2}} (2c)^{q_2} M_{2*}^{q_2} N^{q-q_2} \|u\|_{L^p(U)}^{\frac{pq_2}{p_2}}. \tag{1.14}$$

In definitiva, dalla (1.10),(1.12),(1.14) segue che

$$\|T(u)\|_{L^q(V)}^q \leq q \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{|q-q_i|} \left(\frac{p_i}{p}\right)^{\frac{q_i}{p_i}} (2c)^{q_i} M_{i*}^{q_i} N^{q-q_i} \|u\|_{L^p(U)}^{\frac{pq_i}{p_i}}. \tag{1.15}$$

Prendiamo ora $N = M_{1*}^r M_{2*}^s \|u\|_{L^p(U)}^\tau$ con $r, s, \tau$ tali che a secondo membro le potenze di $M_{1*}, M_{2*}, \|u\|_{L^p(U)}$ abbiano esponenti uguali nei due addendi; dovrà essere

$$M_{1*}^{q_1+r(q-q_1)} = M_{1*}^{r(q-q_2)},$$
$$M_{2*}^{q_2+s(q-q_2)} = M_{2*}^{s(q-q_1)},$$
$$\|u\|_{L^p(U)}^{\frac{pq_1}{p_1}+\tau(q-q_1)} = \|u\|_{L^p(U)}^{\frac{pq_2}{p_2}+\tau(q-q_2)},$$

ossia

$$q_1 + r(q-q_1) = r(q-q_2) \iff r = \frac{q_1}{q_1-q_2},$$

$$q_2 + s(q - q_2) = s(q - q_1) \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{q_2}{q_2 - q_1},$$

$$\frac{pq_1}{p_1} + \tau(q - q_1) = \frac{pq_2}{p_2} + \tau(q - q_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \tau = \frac{p}{q_2 - q_1}\left(\frac{q_2}{p_2} - \frac{q_1}{p_1}\right).$$

Con questa scelta di $N$, si ottiene che gli esponenti di $M_{1*}, M_{2*}, \|u\|_{L^p(U)}$ sono esattamente $(1-t)q, tq, q$. Infatti, detti $\alpha, \beta, \gamma$ tali esponenti, si ha

$$\alpha = r(q - q_2) = \frac{q_1}{q_1 - q_2}\left[\frac{q_1 q_2}{(1-t)q_2 + tq_1} - q_2\right] =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}\left[\frac{(1-t)(q_1 - q_2)}{(1-t)q_2 + tq_1}\right] = (1-t)\frac{1}{\frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}} = (1-t)q,$$

$$\beta = s(q - q_1) = \frac{q_2}{q_2 - q_1}\left[\frac{q_1 q_2}{(1-t)q_2 + tq_1} - q_1\right] =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}\left[\frac{t(q_1 - q_2)}{(1-t)q_2 + tq_1}\right] = t\frac{1}{\frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}} = tq,$$

$$\gamma = \frac{pq_1}{p_1} + \tau(q - q_1) =$$

$$= \frac{p_1 p_2}{(1-t)p_2 + tp_1}\left[\frac{q_1}{p_1} + \frac{1}{q_2 - q_1} \cdot \frac{q_2 p_1 - p_2 q_1}{p_2 p_1}\left(\frac{q_1 q_2}{(1-t)q_2 + tq_1} - q_1\right)\right] =$$

$$= \frac{p_1 p_2}{(1-t)p_2 + tp_1}\left[\frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2 p_1 - p_2 q_1}{p_2 p_1 (q_2 - q_1)} \cdot \frac{tq_1(q_2 - q_1)}{(1-t)q_2 + tq_1}\right] =$$

$$= \frac{p_1 p_2}{(1-t)p_2 + tp_1}\left[\frac{(1-t)q_1 q_2 p_2 + tq_1 p_1 q_2}{p_1 p_2[(1-t)q_2 + tq_1]}\right] =$$

$$= \frac{q_1 q_2[(1-t)p_2 + tp_1]}{[(1-t)p_2 + tp_1][(1-t)q_2 + tq_1]} = q.$$

Perciò la (1.15) diventa

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} \leq K^q M_{1*}^{(1-t)q} M_{2*}^{tq} \|u\|^q_{L^p(U)}$$

ove

$$K^q = q\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{|q - q_i|}(2c)^{q_i}\left(\frac{p_i}{p}\right)^{\frac{q_i}{p_i}},$$

e ciò conclude la dimostrazione del caso **(I)(a)**.

Dimostrazione **(I)(b)**. Siamo nel caso $p_2 < p_1 < \infty$ e $q_2 < q_1 = \infty$. Per ipotesi vale la (1.7), mentre la (1.6) è sostituita da

$$\sup_V |T(u)| \le M_{1*} \|u\|_{L^{p_1}(U)} \quad \forall u \in L^{p_1}(U). \tag{1.16}$$

Vogliamo ripetere il discorso precedente, con la sola modifica di rendere nullo l'addendo $P$ nella (1.10). Per ogni $u \in L^p(U)$ si effettua la troncatura (1.8), dove questa volta $\xi = \frac{p_1}{p_1 - p}$. Si pone cioè per ogni $\sigma > 0$

$$h(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{N}\right)^{\xi}, \quad \xi = \frac{p_1}{p_1 - p}, \tag{1.17}$$

e si sceglie $N = \lambda M_{1*} \|u\|_{L^p(U)}^{\frac{p}{p_1}}$, con $\lambda$ da determinarsi in seguito. Notiamo che se mandiamo al limite per $q_1 \to \infty$ gli esponenti $r, s, \tau$ che apparivano nella definizione di $N$ nel caso precedente, si ottengono esattamente i valori $1, 0, \frac{p}{p_1}$.
Posto, come prima, $u = u_1^\sigma + u_2^\sigma$, si ha ancora la (1.9); ora con un'opportuna scelta di $\lambda$ si può fare in modo che

$$m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_1^\sigma)\right) = 0. \tag{1.18}$$

Infatti poiché $|u_1^\sigma| \le h(\sigma)$, si ha $u_1^\sigma \in L^\infty(U)$, perciò

$$\sup_V |T(u_1^\sigma)|^{p_1} \le M_{1*}^{p_1} \|u_1^\sigma\|_{L^{p_1}(U)}^{p_1} = M_{1*}^{p_1} p_1 \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_1 - 1} m(\rho, u_1^\sigma) d\rho \le$$

$$\le M_{1*}^{p_1} p_1 \int_0^{h(\sigma)} \rho^{p_1 - 1} m(\rho, u) d\rho \le M_{1*}^{p_1} p_1 \int_{\mathbb{R}_+} [h(\sigma)]^{p_1 - p} \rho^{p-1} m(\rho, u) d\rho =$$

$$= M_{1*}^{p_1} \frac{p_1}{p} [h(\sigma)]^{p_1 - p} \|u\|_{L^p(U)}^p \le \left(\frac{\sigma}{2c}\right)^{p_1},$$

pur di scegliere $\lambda$ in modo che

$$M_{1*}^{p_1} \frac{p_1}{p} \frac{\sigma^{p_1}}{N^{p_1}} \|u\|_{L^p(U)}^p \le \left(\frac{\sigma}{2c}\right)^{p_1},$$

cioè

$$\lambda \ge 2c \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Scelto ad esempio $\lambda = 2c\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{p_1}}$, vale la (1.18), quindi si ha la (1.10) con $P = 0$. La (1.14) segue come nel caso precedente, e quindi si ha

$$\|T(u)\|_{L^q(V)} \leq K M_{1*}^{1-t} M_{2*}^{t} \|u\|_{L^p(U)}$$

ove $K = \left(\frac{q}{q-q_2}\right)^{\frac{1}{q}} (2c)^{\frac{q_2}{q}} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{q_2}{p_2 q}} (2c)^{\frac{q-q_2}{q}} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{q-q_2}{qp_1}} = 2c\left(\frac{q}{q-q_2}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{q_2}{p_2 q}} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{q-q_2}{qp_1}}$.
Ciò prova la tesi nel caso **(I)(b)**.

Dimostrazione **(II)(a)**. Siamo nel caso $p_2 < p_1 < \infty$ e $q_1 < q_2 < \infty$. Si ripete sostanzialmente la dimostrazione del caso **(I)(a)**; valgono ancora la (1.6), (1.7) e la (1.8) con la sola differenza che questa volta

$$\xi = \frac{q-q_2}{p-p_2}\frac{p_2}{q_2} < 0.$$

Si fa la solita scomposizione $u = u_1^\sigma + u_2^\sigma$ e si arriva alla (1.10). Nel valutare gli addendi $P$ e $Q$ c'è qualche modifica dovuta al fatto che $\sigma \to h(\sigma)$ è questa volta una funzione decrescente; precisamente se $\varphi_n(\sigma) = \int_0^{n\wedge h(\sigma)} \rho^{p_1-1} m(\rho,u)d\rho$, si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_n\|_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)}^{\frac{q_1}{p_1}} = \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_0^{n\wedge h(\sigma)} \rho^{p_1-1} m(\rho,u)d\rho\right] [\varphi_n(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}-1} d\mu(\sigma) =$$

$$= \int_0^n \rho^{p_1-1} m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} [\varphi_n(\sigma)]^{\frac{q_1}{p_1}-1} d\mu(\sigma)\right] d\rho \leq$$

$$\leq \|\varphi_n\|_{L^{\frac{q_1}{p_1}}(\mu)}^{\frac{q_1}{p_1}/\left(\frac{q_1}{p_1}\right)'} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_1-1} m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} \sigma^{q-q_1-1} d\sigma\right]^{\frac{p_1}{q_1}} d\rho$$

da cui

$$[P]^{\frac{p_1}{q_1}} \leq q^{\frac{p_1}{q_1}} p_1 (2c)^{p_1} M_{1*}^{p_1} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_1-1} m(\rho,u) \left[\int_0^{N\rho^{\frac{1}{\xi}}} \sigma^{q-q_1-1} d\sigma\right]^{\frac{p_1}{q_1}} d\rho \leq$$

$$\leq q^{\frac{p_1}{q_1}} p_1 (2c)^{p_1} M_{1*}^{p_1} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_1-1} m(\rho,u) \left[\frac{(N\rho^{\frac{1}{\xi}})^{q-q_1}}{q-q_1}\right]^{\frac{p_1}{q_1}} d\rho =$$

$$= \left(\frac{q_1}{q-q_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} \frac{p_1}{p} (2c)^{p_1} M_{1*}^{p_1} N^{\frac{p_1(q-q_1)}{q_1}} \|u\|_{L^p(U)}^p.$$

Analogamente se $\psi_n(\sigma) = \int_{n\wedge h(\sigma)}^n \rho^{p_2-1} m(\rho,u)d\rho$, si ha

$$\|\psi_n\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)}^{\frac{q_2}{p_2}} = \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{n\wedge h(\sigma)}^n \rho^{p_2-1} m(\rho,u)d\rho\right] [\psi_n(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}-1}\, d\nu(\sigma) =$$

$$= \int_0^n \rho^{p_2-1} m(\rho,u) \left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty [\psi_n(\sigma)]^{\frac{q_2}{p_2}-1}\, d\nu(\sigma)\right] d\rho \leq$$

$$\leq \|\psi_n\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)}^{\frac{q_2}{p_2}\big/\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho,u) \left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty \sigma^{q-q_2-1} d\sigma\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho,$$

da cui

$$[Q]^{\frac{p_2}{q_2}} \leq q^{\frac{p_2}{q_2}} p_2 (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho,u) \left[\int_{N\rho^{\frac{1}{\xi}}}^\infty \sigma^{q-q_2-1} d\sigma\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho =$$

$$= q^{\frac{p_2}{q_2}} p_2 (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} \int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho,u) \left[\frac{-(N\rho^{\frac{1}{\xi}})^{q-q_2}}{q-q_2}\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho =$$

$$= \left(\frac{q}{q_2-q}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} \frac{p_2}{p} (2c)^{p_2} M_{2*}^{p_2} N^{\frac{p_2(q-q_2)}{q_2}} \|u\|_{L^p(U)}^p.$$

Sostituendo nella (1.10) si ottiene come nel caso **(I)(a)**

$$\|T(u)\|_{L^q(V)} \leq K' M_{1*}^{1-t} M_{2*}^t \|u\|_{L^p(U)},$$

con $K' = -K$ ove $K$ è la costante del caso **(I)(a)**.

Dimostrazione **(II)(b)**. Siamo nel caso $p_2 < p_1 < \infty$ e $q_1 < q_2 = \infty$. Le ipotesi sono

$$m(\sigma, T(u)) \leq \left(\frac{M_{1*}\|u\|_{L^{p_1}(U)}}{\sigma}\right)^{q_1} \quad \forall u \in L^{p_1}(U),$$

$$\sup_V |T(u)| \leq M_{2*}\|u\|_{L^{p_2}}(U) \quad \forall u \in L^{p_2}(U).$$

Si ripete la dimostrazione del caso **(I)(b)**, scegliendo la troncatura (1.8), con

$$\xi = \frac{p_2}{p_2 - p} < 0;$$

si fissa $N = \lambda M_{2*}\|u\|_{L^p(U)}^{\frac{p}{p_2}}$ con $\lambda$ da determinarsi. Il valore di $N$ si ricava dal valore di $N$ del caso **(I)(a)**, mandando al limite per $q_2 \to \infty$ gli esponenti $r, s, t$. Scegliendo $\lambda = 2c\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{p_2}}$, si ottiene

$$m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_2^\sigma)\right) = 0$$

e quindi nella (1.10) il termine $Q$ è nullo. Si ha poi la (1.12) come nel caso **(I)(a)**, e si ottiene infine

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} \leq (K')^q M_{1*}^{(1-t)q} M_{2*}^{tq} \|u\|^q_{L^p(U)}$$

ove

$$K' = \left(\frac{q}{q-q_1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{q_1}{p_1 q}} (2c)^{\frac{q_1}{q}} \lambda^{\frac{q-q_1}{q}}.$$

Dimostrazione **(III)(a)**. Siamo nel caso $1 \leq q_2 < q_1 < \infty$ e $1 \leq p_1 = p = p_2 < \infty$. Per ipotesi si ha

$$m(\sigma, T(u)) \leq \left(\frac{M_{1*}\|u\|_{L^p(U)}}{\sigma}\right)^{q_1} \qquad \forall u \in L^p(U),$$

$$m(\sigma, T(u)) \leq \left(\frac{M_{2*}\|u\|_{L^p(U)}}{\sigma}\right)^{q_2} \qquad \forall u \in L^p(U).$$

Si ha allora

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} = q\int_0^N \sigma^{q-1} m(\sigma, T(u)) d\sigma + q\int_N^\infty \sigma^{q-1} m(\sigma, T(u)) d\sigma \leq$$

$$\leq q M_{2*}^{q_2} \|u\|^{q_2}_{L^p(U)} \int_0^N \sigma^{q-q_2-1} d\sigma + q M_{1*}^{q_1} \|u\|^{q_1}_{L^p(U)} \int_N^\infty \sigma^{q-q_1-1} d\sigma =$$

$$= q\frac{N^{q-q_2}}{q-q_2} M_{2*}^{q_2}\|u\|^{q_2}_{L^p(U)} + q\frac{N^{q-q_1}}{q_1-q} M_{1*}^{q_1}\|u\|^{q_1}_{L^p(U)}.$$

Scelto $N = M_{1*}^r M_{2*}^s \|u\|^\tau_{L^p(U)}$, siano $r, s, \tau$ tali che le potenze di $M_{1*}, M_{2*}, \|u\|_{L^p(U)}$ abbiano esponenti uguali nei due addendi; così si ottiene

$$r = \frac{q_1}{q_1 - q_2}, \quad s = \frac{q_2}{q_2 - q_1}, \quad \tau = 1,$$

e quindi

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} \leq (K'')^q M_{1*}^{(1-t)q} M_{2*}^{tq} \|u\|^q_{L^p(U)}$$

ove

$$K'' = q^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{q_1 - 1} + \frac{1}{q - q_2}\right].$$

Ciò conclude la dimostrazione del caso **(III)(a)**.

Dimostrazione **(III)(b)**. Siamo nel caso $1 \leq p_1 = p = p_2 < \infty$ e $1 \leq q_2 < q_1 = \infty$. Per ipotesi si ha

$$m(\sigma, T(u)) \leq \left(\frac{M_{2*}\|u\|_{L^p(U)}}{\sigma}\right)^{q_2} \quad \forall u \in L^p(U),$$

$$\sup_V |T(u)| \leq M_{1*}\|u\|_{L^p(U)} \quad \forall u \in L^p(U).$$

Allora

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} = q\int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-1} m(\sigma, T(u))d\sigma = q\int_0^{M_{1*}\|u\|_{L^p(U)}} \sigma^{q-1} m(\sigma, T(u))d\sigma \leq$$

$$\leq qM_{2*}^{q_2}\|u\|_{L^p(U)} \int_0^{M_{1*}\|u\|_{L^{q_2}(U)}} \sigma^{q-q_2-1}d\sigma$$

e analogamente al caso **(III)(a)** si ottiene infine

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} \leq (K'')^q M_{1*}^{(1-t)q} M_{2*}^{tq}\|u\|^q_{L^p(U)},$$

ove $K''$ si ricava dalla $K''$ del caso **(III)(a)** con un passaggio al limite per $q_1 \to \infty$; si ha cioè

$$K'' = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{q_1}+\frac{t}{q_2}}.$$

Dimostrazione **(IV)**. Siamo nel caso $p_2 < p_1 = \infty$ e $q_2 < q_1 = \infty$; in particolare $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p}{q}$. Per ipotesi si ha

$$\sup_V |T(u)| \leq M_{1*} \sup_U |u| \quad \forall u \in L^\infty(U),$$

$$m(\sigma, T(u)) \leq \left(\frac{M_{2*}\|u\|_{L^p(U)}}{\sigma}\right)^{q_2} \quad \forall u \in L^{p_2}(U).$$

Sia $u \in L^p(U)$, allora facendo la solita scomposizione $u = u_1^\sigma + u_2^\sigma$, avendo però posto per ogni $\sigma > 0$

$$h(\sigma) = \frac{\sigma}{2cM_{1*}},$$

si ha nel solito modo

$$\|T(u)\|^q_{L^q(V)} \leq q\int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-1}\left[m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_1^\sigma)\right) + m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_2^\sigma)\right)\right]d\sigma.$$

Poiché $u_1^\sigma \in L^\infty(U)$, si ha

$$\sup_V |T(u_1^\sigma)| \leq M_{1*} \sup_U |u_1^\sigma| = M_{1*}h(\sigma) = \frac{\sigma}{2c}$$

e quindi analogamente a quanto visto nei casi precedenti

$$\|T(u)\|_{L^q(V)}^q \leq q \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-1} m\left(\frac{\sigma}{2c}, T(u_2^\sigma)\right) d\sigma \leq$$

$$\leq q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^{q-q_2-1} \left[\int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho, u_2^\sigma) d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}} d\sigma =$$

$$= q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{h(\sigma)}^{\infty} \rho^{p_2-1} m(\rho, u_2^\sigma) d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}} d\nu(\sigma)$$

Si potrebbe continuare la dimostrazione in modo del tutto analogo a quando si è valutato l'addendo $Q$ nel caso **(I)(a)**, ma esponiamo invece un procedimento equivalente. Se $\varphi : U \to V$ è misurabile, si ha

$$\|\varphi\|_{L^s(U)} = \sup_{\|\psi\|_{L^{s'}(U)} \leq 1} \left|\int_U \varphi\psi d\mu\right|,$$

e se $\varphi \notin L^s(U)$, i due membri dell'uguaglianza valgono infinito. Nel nostro caso, posto

$$\varphi(\sigma) = \int_{h(\sigma)}^{\infty} \rho^{p_2-1} m(\rho, u) d\rho, \quad s = \frac{q_2}{p_2} \geq 1,$$

si ottiene

$$\|T(u)\|_{L^q(V)}^q \leq q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \|\varphi\|_{L^{\frac{q_2}{p_2}}(\nu)}^{\frac{q_2}{p_2}} =$$

$$= q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \sup_{\|\psi\|_{L^{\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}(\nu)} \leq 1} \left|\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(\sigma)\psi(\sigma) d\nu(\sigma)\right|^{\frac{q_2}{p_2}} \leq$$

$$\leq q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \sup_{\|\psi\|_{L^{\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}(\nu)} \leq 1} \left[\int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho, u) \left[\int_0^{2cM_{1*}\rho} |\psi(\sigma)| d\nu(\sigma)\right] d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}}.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo ponendo $\alpha = \|\psi\|_{L^{\left(\frac{q_2}{p_2}\right)'}(\nu)}$

$$\|T(u)\|_{L^q(\nu)}^q \leq$$

$$\leq q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \sup_{\alpha \leq 1} \left\{\int_{\mathbb{R}_+} \left[\alpha \rho^{p_2-1} m(\rho, u) \left[\int_0^{2cM_{1*}\rho} \sigma^{q-q_2-1} d\sigma\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}}\right\} \leq$$

$$\leq q p_2^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} (2c)^{q_2} \left[\int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1} m(\rho, u) \left[\int_0^{2cM_{1*}\rho} d\nu(\sigma)\right]^{\frac{p_2}{q_2}} d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}} =$$

$$= qp_1^{\frac{q_2}{p_2}} M_{2*}^{q_2} M_{1*}^{q-q_2} (2c)^q \left(\frac{1}{q-q_2}\right) \left[\int_{\mathbb{R}_+} \rho^{p_2-1+(q-q_2)\frac{p_2}{q_2}} m(\rho,u) d\rho\right]^{\frac{q_2}{p_2}} =$$

$$= \left(\frac{q}{q-q_2}\right) (2c)^q M_{1*}^{q-q_2} M_{2*}^{q_2} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{q_2}{p_2}} \|u\|_{L^p(U)}^q =$$

$$= (K''')^q M_{1*}^{(1-t)q} M_{2*}^{tq} \|u\|_{L^p(U)}^q,$$

ove $K''' = 2c\left(\frac{q}{q-q_2}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.
Notiamo che $K'''$ diverge per $t \to 1$ cioè per $q \to q_2$.
Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Marcinkiewicz. □

## 1.4 Applicazioni del teorema di Marcinkiewicz

Grazie al teorema di Marcinkiewicz possiamo dare una generalizzazione della disuguaglianza di Young. Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \mu)$ con $\mu$ misura di Lebesgue, e sia $w$ una funzione positiva e misurabile su $\mathbb{R}^n$. Definiamo con $L^p(w)$ lo spazio $L^p$ rispetto alla misura $wdx$, la cui norma è

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Teorema 1.4.1.** *Sia $1 \le p \le 2$. Allora la trasformata di Fourier verifica*

$$\|\mathscr{F}(f)\|_{L^p(|\xi|^{-n(2-p)})} \le C_p \|f\|_{L^p}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa

$$(T(f))(\xi) = |\xi|^n \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Grazie alla formula di Parseval otteniamo

$$\|T(f)\|_{L^2(|\xi|^{-2n})} = \|\widehat{f}\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}.$$

Dato che $L^2_*(|\xi|^{-2n}) \supset L^2(|\xi|^{-2n})$ possiamo dire che

$$T : L^2 \to L^2_*(|\xi|^{-2n}).$$

Vogliamo che sia ben definita

$$T : L^1 \to L^1_*(|\xi|^{-2n}); \tag{1.19}$$

in questo caso, applicando il teorema di Marcinkiewicz, otteniamo che è ben definita

$$T : L^p \to L^p(|\xi|^{-2n}),$$

il che implica il teorema. Per dimostrare la (1.19) consideriamo l'insieme

$$E_\sigma = \{\xi : |\xi|^n |\widehat{f}(\xi)| > \sigma\}.$$

Chiamiamo $\nu$ la misura $|\xi|^{-2n} d\xi$; possiamo assumere che $\|f\|_{L^1} = 1$, cosicché $|\widehat{f}(\xi)| \leq 1$. Se $\xi \in E_\sigma$ abbiamo $\sigma \leq |\xi|^n$. Perciò

$$m(\sigma, T(f)) = \nu(E_\sigma) = \int_{E_\sigma} |\xi|^{-2n} d\xi \leq \int_{|\xi|^n \geq \sigma} |\xi|^{-2n} d\xi.$$

Facendo ora il cambio di variabili $\xi = R\omega$ con $R > 0$ e $\omega \in S^{n-1}$, otteniamo

$$\int_{|\xi|^n \geq \sigma} |\xi|^{-2n} d\xi = \int_{\sigma^{\frac{1}{n}}}^{\infty} \int_{S^{n-1}} R^{-2n} R^{n-1} d\omega dR = \omega_n \int_{\sigma^{\frac{1}{n}}}^{\infty} R^{-n-1} dR = \frac{\omega_n}{n} \sigma^{-1},$$

dove $\omega_n$ è la misura (n-1)-dimensionale della superficie sferica.
Da ciò ricaviamo

$$m(\sigma, T(f)) \leq C\sigma^{-1}$$

da cui

$$\sigma m(\sigma, T(f)) \leq C\|f\|_{L^1},$$

e quindi $T(f) \in L^1_*(|\xi|^{-2n})$. □

# Capitolo 2

# Trasformata di Hilbert

## 2.1 Punti di Lebesgue

Data una qualunque $f$ sommabile su $\mathbb{R}^n$, le sue proprietà di misurabilità e di sommabilità non cambiano se essa viene modificata su un insieme di misura nulla. In questo paragrafo ci poniamo il problema di trovare, se possibile, una versione canonica di $f$, che ne ottimizzi la regolarità buttando via, ad esempio, le discontinuità eliminabili. Cominciamo con la seguente

**Definizione 2.1.1.** Sia $f$ sommabile in $\mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di Lebesgue per $f$ se $f(x) \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\cdot) - f(x)| dx = 0$$

ove $B(x,r)$ è la palla di centro $x$ e raggio $r$ in $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo che se $f$ è continua, allora ogni punto è di Lebesgue per $f$, ma per una generica $f$ solo sommabile non è detto a priori che i punti di Lebesgue esistano. In effetti però si ha:

**Teorema 2.1.2.** *Se $f$ è sommabile su $\mathbb{R}^n$, allora quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ è punto di Lebesgue per $f$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ introduciamo le seguenti quantità:

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\cdot) - f(x)| dx, \qquad r > 0,$$

$$A_f(x) = \limsup_{r \to 0^+} A_r f(x),$$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(x)|dx.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > 0\}) = 0$$

ed a questo scopo basterà provare che la misura esterna

$$m^*(\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > t\}) = 0 \qquad \forall t > 0,$$

in quanto da questo fatto e dalla subadditività di $m^*$ segue che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \left\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > \frac{1}{k}\right\}$$

ha misura esterna nulla (e quindi è misurabile, con misura nulla).
Sia dunque $t > 0$. Fissato $j \in \mathbb{N}^+$, sia $g_j \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che

$$\|f - g_j\|_{L^1} < \frac{1}{j}.$$

Si noti che si ha $Ag_j \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$. Utilizzando il fatto che

$$Af(x) \leq A(f - g_j)(x) + Ag_j(x) = A(f - g_j)(x),$$

possiamo scrivere

$$Af(x) \leq A(f - g_j)(x) \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f - g_j|dx + |f(x) - g_j(x)| \leq$$

$$\leq M(f - g_j)(x) + |f(x) - g_j(x)| \qquad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue

$$m^*(\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > 2t\}) \leq$$

$$\leq m(\{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g_j)(x) > t\}) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g_j(x)| > t\});$$

osserviamo che i due insiemi a secondo membro sono misurabili, il secondo per la misurabilità di $f$ e di $g_j$, il primo perché è addirittura un aperto.
Il secondo addendo si stima facilmente:

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g_j(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t}\|f - g_j\|_{L^1} \qquad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Per maggiorare il primo addendo ci occorre un enunciato apposito.

**Proposizione 2.1.3.** *Se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $t > 0$, allora*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : M\varphi(x) > t\}) \leq \frac{3^n}{t}\|\varphi\|_{L^1}$$

*Dimostrazione.* Sia $K$ un arbitrario compatto contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : M\varphi(x) > t\}$. Ogni punto $x \in K$ è allora il centro di una palla aperta $B_x = B(x, r_x)$ tale che

$$\int_{B_x} |\varphi| dx > tm(B_x).$$

Dato che le palle $\{B_x\}_{x \in K}$ ricoprono $K$, esisterà una sottofamiglia finita di palle $\{B_{x_1}, ......., B_{x_p}\}$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_{x_i}.$$

Proveremo ora che si può trovare una ulteriore sottofamiglia $\{B_{x_{i_1}}, ......., B_{x_{i_k}}\}$ contenuta nella sottofamiglia iniziale, ove $B_{x_{i_j}} = B(x_{i_j}, r_{i_j})$ tale che:

1. le palle $B_{x_{i_j}}$, $j = 1, ..., k$, sono tutte disgiunte;
2. $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$;
3. $m(k) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{x_{i_j}})$.

Per provare ciò, non è restrittivo supporre che si abbia $r_1 \geq r_2 \geq ...r_p$. Scegliamo $i_1 = 1$ e buttiamo via tutte le palle $B_{x_i}$, con $i > i_1$, che intersecano $B_{x_{i_1}}$. Sia ora $B_{x_{i_2}}$ la prima palla, secondo l'ordinamento degli indici, che è disgiunta da $B_{x_{i_1}}$ (ammesso che ci sia). Nuovamente buttiamo via le palle $B_{x_i}$, con $i > i_2$, che intersecano $B_{x_{i_2}}$, e prendiamo come terza palla $B_{x_{i_3}}$ la prima che è disgiunta da $B_{x_{i_2}}$. procedendo in questa maniera, dopo un numero finito di passi esauriamo le palle a disposizione ed il processo si arresta. Il risultato è la famiglia $B_{x_{i_1}}, ..., B_{x_{i_k}}$, che per costruzione è fatta di palle tra loro disgiunte. Dunque vale (1). Inoltre notiamo che se $B_{x_i}$ è una delle palle scartate, allora deve essere $B_{x_i} \cap B_{x_{i_j}} \neq \emptyset$ per qualche $j = 1, ..., k$ con $i > i_j$; in particolare si ha $r_i \leq r_{i_j}$ e di conseguenza $B_{x_i} \subseteq B(x_{i_j}, r_{i_j})$. La stessa inclusione vale ovviamente se $B_{x_i}$ è invece una delle palle $B_{x_{i_j}}$. Per l'arbitrarietà di $B_{x_i}$, si conclude che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_{x_i} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j}),$$

ossia vale (2). Infine, (3) è facile conseguenza di (2) in quanto

$$m(B(x_{i_j}, 3r_{i_j})) = 3^n m(B_{x_{i_j}}).$$

Dunque (denotando per semplicità con $B_j$ le palle $B_{x_{i_j}}$)

$$m(k) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_j) \leq \frac{3^n}{t} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} |\varphi| dx,$$

ed essendo le palle $B_j$ disgiunte si conclude che

$$m(K) \leq \frac{3^n}{t} \|\varphi\|_{L^1}.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni compatto $K$ contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : M\varphi(x) > t\}$; dato che ogni chiuso $F$ di $\mathbb{R}^n$ è unione al più numerabile dei compatti $F \cap \overline{B(0,k)}$, $k \in \mathbb{N}^+$, la stessa disuguaglianza vale per ogni chiuso contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^n : M\varphi(x) > t\}$. Poiché tale insieme è misurabile, ne segue la tesi. □

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Per quanto abbiamo visto, possiamo dedurre che

$$m^*(\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > 2t\}) \leq$$

$$\leq m(\{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g_j)(x) > t\}) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g_j(x)| > t\}) \leq$$

$$\leq \frac{1 + 3^n}{t} \|f - g_j\|_{L^1},$$

e dunque per come si è scelta $g_j$,

$$m^*(\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > 2t\}) \leq \frac{1 + 3^n}{jt} \qquad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Passando al limite per $j \to \infty$ otteniamo

$$m^*(\{x \in \mathbb{R}^n : Af(x) > 2t\}) = 0,$$

da cui la tesi del teorema. □

**Corollario 2.1.4.** Se $f$ è sommabile in $\mathbb{R}$, e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, allora si ha $F'(x) = f(x)$ in ogni punto $x$ di Lebesgue per $f$, ossia q.o in $\mathbb{R}$.

*Dimostrazione.* Sia $x$ un punto di Lebesgue per $f$. Per ogni successione reale infinitesima $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$, tale che $\delta_n \neq 0$ per ogni $n$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{F(x + \delta_n) - F(x)}{\delta_n} - f(x) \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{\delta_n} \int_{x}^{x+\delta_n} f(t)dt - f(x) \right| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)| dt \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\delta_n|} \int_{x-|\delta_n|}^{x+|\delta_n|} |f(t) - f(x)| dt =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{m(B(x, |\delta_n|))} \int_{B(x,|\delta_n|)} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

in virtù della definizione (2.1.1). Per l'arbitrarietà della successione si ha la tesi. $\square$

**Corollario 2.1.5.** Se$f$ è sommabile in $[a, b]$, allora

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \text{per q.o. } x \in [a, b].$$

*Dimostrazione.* Basta prolungare $f$ a 0 fuori di $[a, b]$ e applicare il corollario precedente a $f\chi_{[a,b]}$. $\square$

## 2.2 Funzioni armoniche su un semipiano

**Definizione 2.2.1.** Definiamo nucleo di Poisson e nucleo coniugato di Poisson per $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$, le seguenti funzioni

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

**Osservazione 2.2.2.** Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int_{\mathbb{R}} P(x, y)dx = 1 \qquad \forall y > 0,$$

$$\int_0^{\infty} Q(x, y)dx = +\infty \qquad \forall y > 0.$$

Inoltre $Q(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p > 1$, e

$$P(x, y) + iQ(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y + ix}{x^2 + y^2} = \frac{i}{\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{i}{\pi(x + iy)}.$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, le funzioni

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} P(x - t, y)f(t)dt, \qquad v(x, y) = \int_{\mathbb{R}} Q(x - t, y)f(t)dt$$

sono armoniche coniugate in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il che significa:

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0$$

e $u, v$ verificano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad v_x = -u_y.$$

La verifica è banale dal momento che si può derivare sotto il segno di integrale.
La $u$ è detta integrale di Poisson di $f$.
Inoltre

$$\lim_{y\to+\infty} v(x,y) = 0$$

per convergenza dominata: infatti

$$|Q(x-t,y)f(t)| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{(x-t)^2+y^2}}|f(t)| \leq \frac{1}{\pi y}|f(t)| \leq \frac{1}{\pi}|f(t)| \quad \forall y \geq 1$$

e

$$\lim_{y\to+\infty} Q(x-t,y)f(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Lemma 2.2.3.** *Valgono le seguenti affermazioni:*

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in \mathbb{R}; \tag{2.1}$$

*esiste una funzione $\theta$ tale che*

$$\lim_{y\to 0^+} v(x,y) = \theta(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

*Dimostrazione.* Per mostrare la (2.1), si fissi $y > 0$, e si ponga

$$\varphi(r) = \frac{y}{r^2+y^2};$$

allora si ottiene

$$\varphi(r)' = -\frac{2ry}{(r^2+y^2)^2} \leq 0,$$

quindi $\varphi(r)$ decresce, e in particolare

$$\frac{r}{2}\varphi(r) \leq \int_{\frac{r}{2}\leq|x|\leq r} \varphi(|x|)dx \leq \int_0^r \frac{y}{t^2+y^2}dt = \arctan\frac{r}{y}$$

dunque

$$\lim_{r\to 0^+} r\varphi(r) = 0$$

e pertanto esiste $A > 0$ tale che

$$r\varphi(r) \leq A \qquad \forall r > 0.$$

Sia adesso $x$ un punto di Lebesgue per $f$. Sia $\delta > 0$ e sia $\eta > 0$ tale che (per definizione di punto di Lebesgue)

$$\frac{1}{r}\int_{-r}^{r} |f(x-t) - f(x)|dt < \delta \qquad \forall r < \eta.$$

Valutiamo la differenza $|u(x,y) - f(x)|$ scrivendo, grazie al fatto che $\int_{\mathbb{R}} P(x,y)dx = 1$, per ogni $y > 0$,

$$|u(x,y) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{t^2+y^2}[f(x-t) - f(x)]dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{|t|\leq\eta} \frac{y}{t^2+y^2}[f(x-t) - f(x)]dt \right| + \left| \int_{|t|\geq\eta} \frac{y}{t^2+y^2}[f(x-t) - f(x)]dt \right| = I_1 + I_2.$$

Si ha per $r < \eta$

$$I_1 \leq \int_{|t|\leq\eta} |f(x-t) - f(x)| \frac{y}{t^2+y^2}dt = 2\int_0^{\eta} |f(x-t) - f(x)| \frac{y}{t^2+y^2}dt;$$

posto $G(r) = \int_0^r \left[\int_{|t|\leq s} |f(x-t) - f(x)|dt\right] ds$, integrando per parti si trova

$$I_1 = \frac{2G(\eta)y}{\eta^2+y^2} + 4\int_0^{\eta} \frac{G(t)ty}{(t^2+y^2)^2}dt \leq$$

$$\leq 2A\int_0^{\eta} \delta s ds + 4\int_0^{\eta} \frac{\delta t^2 y}{(t^2+y^2)^2}dt \leq A\delta\eta^2 + 4\delta\int_0^{\eta} \frac{y}{t^2+y^2}dt =$$

$$= A\delta\eta^2 + 4\delta \arctan\frac{\eta}{y} \leq (A\eta^2 + 2\pi)\delta.$$

Inoltre

$$I_2 = \left| \int_{|t|\geq\eta} \frac{y}{t^2+y^2}[f(x-t) - f(x)]dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{|t|\geq\eta\}}(t)P(t,y)|f(x-t)|dt + \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{|t|\geq\eta\}}(t)P(t,y)|f(x)|dt \leq$$

$$\leq \|\chi_{\{|t|\geq\eta\}}P(\cdot,y)\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} + |f(x)|\|\chi_{\{|t|\geq\eta\}}P(\cdot,y)\|_{L^1}.$$

D'altra parte,

$$\lim_{y\to 0^+} \sup_{|t|\geq\eta} \frac{y}{|t|^2+y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\eta^2+y^2} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0^+} \int_{|t|\geq\eta} P(t,y)dt = \lim_{y\to 0^+} 2\int_{\eta}^{\infty} \frac{y}{t^2+y^2}dt = \lim_{y\to 0^+} 2\left[\arctan\frac{t}{y}\right]_{\eta}^{\infty} =$$

$$\lim_{y\to 0^+} \left(\pi - 2\arctan\frac{\eta}{y}\right) = \pi - \pi = 0.$$

Quindi

$$\lim_{y \to 0^+} I_2 = 0.$$

Perciò

$$\lim_{y \to 0^+} |I_1 + I_2| \leq C\delta \qquad \forall \delta > 0,$$

ossia

$$\lim_{y \to 0^+} |u(x, y) - f(x)| = 0$$

se $x$ è punto di Lebesgue di $f$. Ciò prova (2.1).
Per provare (2.2) ci serve il seguente lemma:

**Lemma 2.2.4.** *Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, posto $G(x, y) = e^{u(x,y)+iv(x,y)}$, esiste il limite*

$$\lim_{y \to 0} G(x, y) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.* Scrivendo

$$g = (-g)^+ - (-g)^-$$

possiamo supporre $g \leq 0$ e poi il caso generale segue banalmente per moltiplicazione. Sia dunque $g \leq 0$, cosicché $|u| \leq 1$.

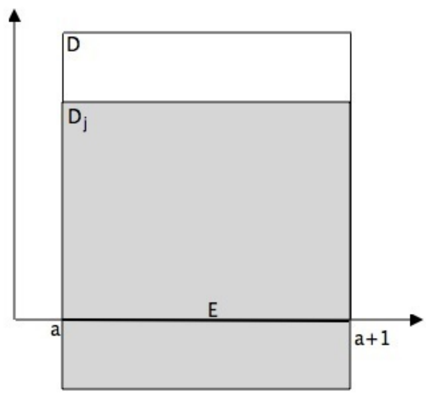
Sia $a \in \mathbb{R}$ e poniamo

$$A = [a, a + 1] \times \mathbb{R}^+$$

$$D = [a, a + 1] \times ]0, 1[$$

$$D_j = [a, a + 1] \times \left] -\frac{1}{j}, -\frac{1}{j} + 1 \right[$$

$$E = [a, a + 1] \times \{0\}.$$




Sia

$$G_j(x, y) = G\left(x, y + \frac{1}{j}\right);$$

notiamo che $|G| \leq 1$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, quindi $|G_j(x, y)| \leq 1$. Posto ora

$$\varphi_j(x, y) = \int_{\mathbb{R}} P(x - t, y)\chi_E(t)G_j(t, 0)dt$$

risulta $|\varphi_j(x, y)| \leq 1$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Siano ora

$$\psi_j(x, y) = G_j(x, y) - \varphi_j(x, y),$$

$$g_j(x) = G_j(x,0)\chi_E(x);$$

allora $\|g_j\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{m(E)} = 1$.
Quindi esiste una sottosuccessione $\{g_{j_k}\} \subseteq \{g_j\}$ tale che $g_{j_k} \rightharpoonup g$ in $L^2(\mathbb{R})$, da cui

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{j_k}(x,y) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P(x-t,y)g_{j_k}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} P(x-t,y)g(t)dt =: \varphi(x,y).$$

Poiché $G_j(x,y) \to G(x,y)$ per $j \to \infty$,

$$\psi_{j_k}(x,y) = G_{j_k}(x,y) - \varphi_{j_k}(x,y)$$

converge per $k \to \infty$ a $G(x,y) - \varphi(x,y) =: \psi(x,y)$.
Osserviamo che $\psi_{j_k}$ e $\psi$ sono armoniche in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ (sono integrali di Poisson).
Poi, grazie a (2.1),

$$\lim_{y\to 0^+} \varphi(x,y) = g(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

Proviamo che

$$\lim_{y\to 0^+} \psi(x,y) = g(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che

$$|\psi_j| \leq |G_j| + |\varphi_j| \leq 2$$

e che per ogni $x_0 \in E$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \psi_j(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \left[G\left(x, y+\frac{1}{j}\right) - \varphi_j(x,y)\right] = \tag{2.3}$$

$$= G\left(x_0, \frac{1}{j}\right) - g_j(x_0) = G\left(x_0, \frac{1}{j}\right) - G\left(x_0, \frac{1}{j}\right)\chi_E(x_0) = 0.$$

Ora cerchiamo $z(x,y)$ armonica in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, tale che

$$z(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \tag{2.4}$$

$$z(x,y) \geq 2 \qquad \forall (x,y) \in \partial D \setminus E, \tag{2.5}$$

$$\lim_{y\to 0^+} z(x,y) = 0 \qquad \text{per q.o. } x \in E. \tag{2.6}$$

Se la trovassimo, avremmo $z(x,y)\pm\psi_j(x,y) \geq 0$ in $\partial D\setminus E$; quindi risulterebbe $z \pm \psi_j \geq 0$ in $D$: infatti, altrimenti, il principio del massimo per funzioni armoniche implicherebbe l'esistenza di una successione $\{(x_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D$, tale che $(x_k,y_k) \to (\bar{x},\bar{y}) \in E$, e $z(x_k,y_k) \pm \psi_j(x_k,y_k) < -\epsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, con $\epsilon > 0$ opportuno. Ma si è visto che $\psi_j(x_k,y_k) \to 0$ per $k \to \infty$, in virtù di (2.3). Dunque per $k$ grande avremmo $z < 0$, il che sarebbe assurdo. Perciò, passando eventualmente a una sottosuccessione, potremmo dedurre per ogni $(x, y) \in D$

$$\lim_{j\to\infty}[z(x, y) \pm \psi_j(x, y)] \geq 0,$$

ossia $|\psi(x, y)| \leq z(x, y)$ per ogni $(x, y) \in D$. Da (2.6) avremmo allora

$$\lim_{y\to 0^+} \psi(x, y) = 0.$$

Costruiamo allora la $z$. Poniamo per $y > 0$

$$z(x, y) = 2y + \frac{cy}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{\mathbb{R}\setminus E}(t)}{(x-t)^2 + y^2}dt$$

con $c$ costante da determinare. Allora vale (2.4) e vale (2.6), perché se $x \in [a, a+1]$ l'integrando non ha singolarità e quindi al limite per $y \to 0^+$ tende a 0. Proviamo che vale (2.5). Se $(x, y) \in \partial D$ con $y = 1$, allora

$$z(x, y) \geq 2y = 2.$$

Se $(x, y) \in \partial D$ con $0 < y < 1$, allora $x = a$ oppure $x = a + 1$.
Consideriamo il caso $x = a$:

$$z(x, y) \geq \frac{cy}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus E} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2}dt =$$

$$= \frac{cy}{\pi}\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2}dt + \frac{cy}{\pi}\int_{a+1}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2}dt =$$

$$= \frac{cy}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{s^2 + y^2}ds + \frac{cy}{\pi}\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{s^2 + y^2}ds \geq$$

$$\geq \frac{cy}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{s^2 + y^2}ds = \frac{cy}{\pi}\left[\arctan\frac{s}{y}\right]_{-\infty}^{\infty} = c.$$

Con $x = a + 1$ il conto è analogo.
Quindi, scelta $c \geq 2$ si ha $z(x, y) \geq 2$. Come si è visto, ciò implica che

$$\lim_{y\to 0^+} \psi(x, y) = 0.$$

Si conclude allora, per l'arbitrarietà di $a$, che esiste

$$\lim_{y\to 0^+} G(x, y) = \lim_{y\to 0^+} \varphi(x, y) = g(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

□

Torniamo allora alla (2.2).
Come si è visto, esiste

$$\lim_{y\to 0^+} G(x,y) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R},$$

e tale limite è diverso da 0 essendo $|G(x,y)| = e^{u(x,y)} \to e^{f(x)}$ per (2.1).
Perciò esiste anche

$$\lim_{y\to 0^+} e^{iv(x,y)} = \cos\theta(x) + i\sin\theta(x),$$

ove $\theta$ è una funzione definita solamente modulo $2\pi$. Tuttavia, essendo $v$ continua in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, se per due successioni infinitesime $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,$\{y'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ avessimo

$$\lim_{k\to\infty} v(x,y_k) = a,$$
$$\lim_{k\to\infty} v(x,y'_k) = b = a + 2m\pi, \qquad m \neq 0,$$

allora per continuità tutti i punti fra $a$ e $b$ sarebbero punti limite di successioni $v(x,\tilde{y_k})$ con $\tilde{y_k} \to 0$. Quindi $\theta(x)$ non sarebbe ben definita neanche modulo $2\pi$.
Poiché invece $\theta$ è ben definita modulo $2\pi$, deve esistere

$$\lim_{y\to 0} v(x,y) = \theta(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

□

**Lemma 2.2.5.** *Se $w(x,y)$ è armonica in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ e limitata in ogni $\{(x,y) : y \geq y_0\}$ con $y_0 > 0$, allora per ogni $y_1, y_2 > 0$*

$$w(x, y_1 + y_2) = \int_{\mathbb{R}} w(t,y_1)P(x-t,y_2)dt.$$

*Dimostrazione.* Sia $y_0 > 0$, sia

$$z(x,y) = w(x, y + y_0) \qquad y \geq 0.$$

Sia poi per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

$$z_1(x,y) = \int_{\mathbb{R}} w(t,y_0)P(x-t,y)dt.$$

Vogliamo provare che $z \equiv z_1$.
La $w$ è armonica in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, nonché limitata e continua in $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$. Possiamo estendere $z_1$ a $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$, ricordando il lemma 2.2.3, ponendo $z_1(x,0) = w(x,y_0)$ e in questo modo abbiamo una funzione continua e limitata su $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$, armonica in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.
Allora $h = z_1 - z$ è armonica in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, continua e limitata in $\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$, e nulla su $\mathbb{R}\times\{0\}$. Ne segue che $h \equiv 0$ (estendendola per riflessione dispari su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-$, essa resta armonica e limitata su $\mathbb{R}^2$, quindi si applica il teorema di Liouville). □

## 2.3 Stime per la trasformata di Hilbert

**Definizione 2.3.1.** Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definiamo la trasformata di Hilbert $Hf$ nel seguente modo:

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\{|y|>\epsilon\}} \frac{f(x-y)}{y} dy, \qquad x \in \mathbb{R}$$

**Definizione 2.3.2.** Lo spazio di Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | x \mapsto x^\alpha D^\beta(\varphi(x)) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$$

A priori $Hf(x)$ potrebbe non essere ben definita. Però si ha:

**Proposizione 2.3.3.** *Sia $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier. Allora se $f \in S(\mathbb{R})$ si ha*

$$Hf(x) = \mathscr{F}^{-1}\left[-i\ sgn(\cdot)[\mathscr{F}f](\cdot)\right](x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.* Scriviamo, come è d'uso, $\mathscr{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Se $f \in S(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$ e la funzione $\widehat{f}(\cdot)sgn(\cdot)$ pur essendo (possibilmente) discontinua in $\xi = 0$, è certamente in $L^1(\mathbb{R})$ e questo ci servirà per scrivere esplicitamente $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}(\cdot)sgn(\cdot))$ come un integrale su $\mathbb{R}$.
Posto

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} & \text{se } |x| \geq \epsilon \\ 0 & \text{se } |x| < \epsilon \end{cases}$$

si ha $g_\epsilon \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\frac{1}{\pi} \int_{\{|y|\geq\epsilon\}} \frac{f(x-y)}{y} dy = f * g_\epsilon(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

per il teorema di Young; ricordando che

$$\widehat{f * g_\epsilon} = \widehat{f} \cdot \widehat{g_\epsilon} \qquad (f \in S(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}))$$

si ha

$$\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g_\epsilon})(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\{|y|\geq\epsilon\}} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Calcoliamo $\widehat{g_\epsilon}$:

$$\widehat{g_\epsilon}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{\{|x|\leq R\}} e^{-ix\xi} g_\epsilon(x) dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\{\epsilon\leq|x|\leq R\}} \frac{\cos x\xi - i \sin x\xi}{\pi x} dx =$$

$$= -i \lim_{R\to\infty} \int_{\{\epsilon\leq|x|\leq R\}} \left(0 - \frac{\sin x\xi}{\pi x}\right) dx = \frac{-i}{\pi} \int_{\{|x|\geq\epsilon\}} \frac{\sin x|\xi|}{x} dx.$$

La funzione $\xi \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq\epsilon\}}\frac{\sin x\xi}{x}dx$ è dispari, quindi coincide con

$$sgn(\xi)\frac{1}{\pi}\int_{\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq\epsilon\}}\frac{\sin x\xi}{x}dx.$$

Pertanto

$$\widehat{g_\epsilon}(x) = -i\ sgn(\xi)\frac{1}{\pi}\int_{\{t\in\mathbb{R}:|t|\geq\epsilon|\xi|\}}\frac{\sin t}{t}dt$$

e in particolare

$$\lim_{\epsilon\to 0}\widehat{g_\epsilon}(\xi) = -i\ sgn(\xi)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin t}{t}dt = -i\ sgn(\xi).$$

Perciò otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{\{|y|\geq\epsilon\}}\frac{f(x-y)}{y}dy = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}\cdot\widehat{g_\epsilon})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}\widehat{f}(\xi)\widehat{g_\epsilon}(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}\widehat{f}(\xi)sgn(\xi)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\{|t|\geq\epsilon|\xi|\}}\frac{\sin t}{t}dt\right]d\xi$$

e per $\epsilon\to 0$, grazie alla convergenza dominata (ricordiamo che $\widehat{f}\in S(\mathbb{R})$), si ha

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}\widehat{f}(\xi)sgn(\xi)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\{|t|\geq\epsilon|\xi|\}}\frac{\sin t}{t}dt\right]d\xi =$$

$$= \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}\widehat{f}(\xi)sgn(\xi)d\xi = \mathscr{F}^{-1}\left(-i\ sgn(\cdot)\widehat{f}(\cdot)\right)(x).$$

□

Di conseguenza si ha:

**Teorema 2.3.4.** *La Trasformata di Hilbert $H$ verifica:*

$$H\in\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R})),$$

$$\|H\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))} = 1.$$

*Dimostrazione.* Se $f\in S(\mathbb{R})$ si ha

$$\|Hf\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathscr{F}^{-1}\left(-i\widehat{f}(\cdot)sgn(\cdot)\right)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Per la densità di $S(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ si ottiene la tesi. □

Come abbiamo visto, la trasformata di Hilbert è lineare e limitata da $L^2(\mathbb{R})$ in sé, con $\|H\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq 1$. Mostreremo ora che la trasformata di Hilbert, opportunamente estesa a $L^1(\mathbb{R})$, è lineare e continua da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^1_*(\mathbb{R})$.
A questo scopo consideriamo la funzione,

$$\theta(x) = \lim_{y \to 0^+} v(x, y) = \lim_{y \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} Q(x - t, y) f(t) dt.$$

definita da (2.2)per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Osserviamo che se $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $\theta \in L^2(\mathbb{R})$, poiché per il Lemma di Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} |\theta(x)|^2 dx \leq \liminf_{y \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} |v(x, y)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \liminf_{y \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi, y)|^2 d\xi;$$

essendo $\hat{v}(\xi, y) = \hat{Q}(\xi, y) \hat{f}(\xi) = -isgn\xi e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi)$, segue che

$$\int_{\mathbb{R}} |\theta(x)|^2 dx = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi < \infty.$$

In particolare, esiste $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ infinitesima tale che

$$v(\cdot, y_k) \rightharpoonup w \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R});$$

ma poiché

$$v(x, y_k) \to \theta(x) \qquad q.o.,$$

si ha

$$v(\cdot, y_k) \rightharpoonup \theta \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

Dunque

$$\hat{v}(\cdot, y_k) \rightharpoonup \hat{\theta} \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R});$$

ma $\hat{v}(\xi, y_k) \to -i\ sgn(\xi) \hat{f}(\xi)$ $q.o.$, e quindi

$$\hat{\theta}(\xi) = -i\ sgn(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Dunque, se $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$\theta = \mathscr{F}^{-1}(-i\ sgn(\cdot) \hat{f}(\cdot)) = Hf.$$

**Osservazione 2.3.5.** Quindi possiamo estendere la definizione di $Hf$ a $L^1(\mathbb{R})$, ponendo

$$Hf(x) = \lim_{y \to 0^+} v(x, y) = \theta(x) \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}), \tag{2.7}$$

ove $v(x, y) = \int_{\mathbb{R}} Q(x - t, y) f(t) dt$.

**Proposizione 2.3.6.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora per ogni $\sigma > 0$*

$$m\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \sigma\} \leq \frac{c}{\sigma},$$

*ossia $Hf \in L^1_*(\mathbb{R})$ e $H$ è un operatore da $L^1(\mathbb{R})$ in $L^1_*(\mathbb{R})$ limitato.*

*Dimostrazione.* Decomponendo $f = f^+ - f^-$, possiamo limitarci al caso $f \geq 0$.
Per $s > 0$ sia $w(x, y) = \log|1 + s[u(x, y) + iv(x, y)]|$; allora usando il fatto che $u, v$ verificano le equazioni di Cauchy-Riemann si vede che $w$ è armonica in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ed inoltre $w$ è limitata in ogni semipiano del tipo $\{(x, y) : y \geq y_0\}$ con $y_0 > 0$: infatti, dalla maggiorazione $\log|1 + z| \leq \log(1 + |z|) \leq |z|$ segue

$$|w(x,y)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{sy}{(x-t)^2 + y^2}|f(t)|dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{s|x-t|}{(x-t)^2 + y^2}|f(t)|dt \leq \frac{2s}{y_0}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Applicando il lemma 2.2.5, si ha per $\eta \in ]0, y[$

$$\log|1+s[u(x,y)+iv(x,y)]| = \int_{\mathbb{R}} \log|1+s[u(t,y-\eta)+iv(t,y-\eta)]| \frac{\eta}{(x-t)^2 + \eta^2}dt;$$

se $\eta \to y^-$, il lemma di Fatou implica

$$\log|1 + s[u(x, y) + iv(x, y)]| =$$

$$= \lim_{\eta \to y^-} \int_{\mathbb{R}} \log|1 + s[u(t, y-\eta) + iv(t, y-\eta)]| \frac{\eta}{(x-t)^2 + \eta^2}dt \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} \log|1 + s[f(t) + i\theta(t)]| \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}dt.$$

Da qui ricaviamo, moltiplicando per $y$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{(x-t)^2 + y^2} \log\sqrt{[1 + sf(t)]^2 + [s\theta(t)]^2}dt \leq$$

$$\leq y\log|1 + s[u(x, y) + iv(x, y)]| \leq ys|u(x, y) + iv(x, y)|. \tag{2.8}$$

D'altra parte, si ha, per convergenza dominata,

$$\lim_{y\to\infty} y(u(x,y) + iv(x,y)) = \lim_{y\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\frac{y^2}{(x-t)^2 + y^2} + i\frac{(x-t)^2 y}{(x-t)^2 + y^2}\right] dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

perché $f \geq 0$. Perciò se $y \to \infty$ in (2.8) otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \log \sqrt{[1+sf(t)]^2+[s\theta(t)]^2}dt \leq s\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Dunque, posto $E_\sigma = \{t \in \mathbb{R} : |\theta(t)| > \sigma\}$, si ha

$$(\log s\sigma)m(E_\sigma) \leq \int_{\mathbb{R}} \log|s\theta(t)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} \log \sqrt{[1+sf(t)]^2+[s\theta(t)]^2}dt \leq s\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Scelto $s = \frac{e}{\sigma}$, si ha infine

$$m(E_\sigma) \leq \frac{e\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\sigma}.$$

□

Applicando il teorema di Marcinkiewicz, concludiamo con questo risultato:

**Teorema 2.3.7.** *La trasformata di Hilbert, definita da* (2.7)*, è lineare e limitata da $L^p(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in ]1,2]$.*

**Osservazione 2.3.8.** L'aggiunto $H^*$ dell'operatore $H$ in $L^2(\mathbb{R})$ è $-H$: infatti

$$\langle \varphi, Hf\rangle = \langle \varphi, \mathscr{F}^{-1}(-i\ sgn(\cdot)\hat{f}(\cdot))\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{\varphi}, -i\ sgn(\cdot)\hat{f}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi) i\ sgn(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} -i\ sgn(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left[\mathscr{F}^{-1}(-i\ sgn(\cdot)\hat{\varphi})\right](\xi)\overline{f(\xi)}d\xi = \langle -H\varphi, f\rangle.$$

Allora per $\varphi, \psi$ in $S(\mathbb{R})$ si ha

$$|\langle \varphi, H\psi\rangle| = |\langle H\varphi, \psi\rangle| \leq \|H\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^q} \leq \|H\|_{\mathscr{L}(L^p)}\|\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^q},$$

da cui

$$\frac{|\langle \varphi, H\psi\rangle|}{\|\varphi\|_{L^p}} \leq \|H\|_{\mathscr{L}(L^p)}\|\psi\|_{L^q}.$$

Perciò se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|H\psi\|_{(L^p)^*} = \|H\psi\|_{L^q} \leq \|H\|_{\mathscr{L}(L^p)}\|\psi\|_{L^q},$$

e dunque $H$ si estende, per densità, a un operatore continuo da $L^q$ in sé per ogni $q \in [2, \infty[$, con

$$\|H\|_{\mathscr{L}(L^q)} \leq \|H\|_{\mathscr{L}(L^p)}.$$

# Bibliografia


[1] J.Bergh, J.Löfström, *Interpolation spaces, An introduction*, 1976.

[2] R. E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction*, 1981.

[3] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 1935.

[4] P. Acquistapace, *Appunti di Analisi Funzionale*, 2012.