Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Dimensione di Hausdorff e insiemi di Furstenberg

Tesi di Laurea Triennale

Candidato
Andrea Rossi
andrearj@hotmail.it

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace
Università di Pisa

Anno Accademico 2010/2011

Indice

1 Introduzione

1.1 Misure esterne di Hausdorff

La misura m_N di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ non fa distinzioni fra i suoi sottoinsiemi misurabili di misura nulla: per esempio un iperpiano $(N-1)$-dimensionale, il sostegno di una curva, una k-varietà hanno tutti misura di Lebesgue nulla. Abbiamo quindi necessità di definire, in $\mathbb{R}^N$, una misura che ci permetta di distinguere e catalogare questi insiemi trascurabili rispetto a m_N.
La risposta a questo problema è affidata alle misure di Hausdorff H_p (dove $p > 0$), che attribuiscono, ai sottoinsiemi trascurabili sopra-citati, una dimensione caratteristica, che può essere intera (1 per il sostegno di una curva, k per una k-varietà) o anche non intera (per certi insiemi frattali come l'insieme di Cantor).
La costruzione delle misure di Hausdorff avverrà attraverso un procedimento standard per costruire misure, detto di Carathéodory: a partire da una misura esterna H_p^* definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, potremo ottenere la misura di Hausdorff H_p semplicemente restringendo la misura esterna ad un'opportuna tribù, quella degli insiemi H_p-misurabili.
Le misure di Hausdorff si definiscono a partire dalla nozione base di diametro di un insieme.

Definizione 1.1. Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, il *diametro* di E è il numero non negativo (eventualmente infinito)

$$diam\ E = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \sup\{|x-y| : x, y \in E\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione 1.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$, e siano p, $\delta > 0$. Definiamo

$$H^*_{p,\delta}(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (diam\ U_n)^p : U_n \text{ aperti, } diam\ U_n < \delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\}.$$

Osservazione 1.3. Per misurare in modo accurato l'insieme E quelli che contano sono i ricoprimenti con aperti di diametro piccolo: quindi un'approssimazione ottimale della misura di E si otterrà al limite per δ che tende a 0^+. Per $p > 0$ fissato, più δ è piccolo, più la quantità $H^*_{p,\delta}$ è grande, essendo l'estremo inferiore di un insieme più piccolo; in particolare:

Definizione 1.4. Sia $p > 0$, la *misura esterna p-dimensionale di Hausdorff* H_p^* è data da

$$H_p^*(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H^*_{p,\delta}(E) = \sup_{\delta>0} H^*_{p,\delta}(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Come conseguenza immediata della definizione si ha:

Proposizione 1.5. *Sia $p > 0$, allora:*
(i) $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
(ii) $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$;
(iii) H_p^* *è monotona.*

Dimostrazione. (i) Evidente.
(ii) Un ricoprimento di $\emptyset$ e di $\{x\}$ è la famiglia costituita dalla sola palla $B(x, \frac{\delta}{3})$ il cui diametro è minore di δ, dunque

$$H_{p,\delta}^*(\emptyset) \leqslant \left(\frac{2\delta}{3}\right)^p, \qquad H_{p,\delta}^*(\{x\}) \leqslant \left(\frac{2\delta}{3}\right)^p$$

e per confronto

$$\lim_{\delta \to 0^+} H_{p,\delta}^*(\emptyset) = \lim_{\delta \to 0^+} H_{p,\delta}^*(\{x\}) = 0.$$

(iii) Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento che concorre a definire $H_{p,\delta}^*(F)$ concorre anche a definire $H_{p,\delta}^*(E)$; quindi $H_{p,\delta}^*(E) \leqslant H_{p,\delta}^*(F)$ per ogni $\delta > 0$, da cui $H_p^*(E) \leqslant H_p^*(F)$.

□

1.2 Misure di Hausdorff

Introduciamo ora la classe degli insiemi misurabili rispetto alla misura di Hausdorff di indice $p > 0$.

Definizione 1.6. La classe degli insiemi H_p-misurabili è

$$M_H = \left\{E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ H_p^*(A) = H_p^*(A \cap E) + H_p^*(A \cap E^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N\right\}.$$

Osserviamo che in questa definizione quella che conta è la disuguaglianza $\geqslant$, dato che l'altra è sempre verificata per subadditività di H_p^*.

Definizione 1.7. La *misura di Hausdorff di indice* p è $H_p = H_p^*|_{M_H}$.

Si verifica che M_H è una tribù e che H_p è numerabilmente additiva sugli elementi disgiunti di M_H, quindi H_p è effettivamente una misura. La tribù M_H contiene i boreliani di $\mathbb{R}^N$; ciò è conseguenza della seguente

Proposizione 1.8. *Per ogni $p > 0$, i plurirettangoli di $\mathbb{R}^N$ sono elementi di M_H.*

Dimostrazione. Vedi [1], pag.40. □

Dato che la tribù dei boreliani $B(\mathbb{R}^N)$ è la minima tribù generata dai plurirettangoli, si ha $B(\mathbb{R}^N) \subseteq M_H$, cioè tutti i boreliani sono H_p-misurabili per ogni $p > 0$.

Osservazione 1.9. Il diametro di un insieme è chiaramente invariante per traslazioni e per isometrie lineari. Dunque, altrettanto lo è la misura di Hausdorff H_p. Inoltre, il diametro è omogeneo di grado 1 per omotetie, quindi H_p è omogenea di grado p per omotetie. Ricapitolando:

$$H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N;$$

$$H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Proposizione 1.10. *Sia* $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *una curva semplice di classe* C^1, *con* $\Gamma = \varphi([a, b])$. *Allora*

$$H_1(\Gamma) = l(\Gamma).$$

Dimostrazione. Γ è immagine continua del compatto $[a, b]$, perciò è compatto. In particolare Γ è un boreliano, quindi è H_1-misurabile.
($\leqslant$) φ è continua per ipotesi, perciò per ogni $\delta > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, per ogni suddivisione $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b\}$ di $[a, b]$ con $|t_i - t_{i-1}| < \eta$ per $i = 1, ..., m$, si abbia

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \frac{\delta}{1+\delta} \qquad \text{per } i = 1, ..., m.$$

Scegliamo una suddivisione σ con $|t_i - t_{i-1}| < \eta$.
Per $i = 1, ..., m$ consideriamo le palle aperte

$$B_i = B\left(\frac{\varphi(t_i) + \varphi(t_{i-1})}{2}; \frac{1+\delta}{2}\,|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|\right) \subseteq \mathbb{R}^N :$$

per costruzione, per $i = 2, ..., m$ si ha $\varphi(t_{i-1}) \in B_{i-1} \cap B_i$ e

$$diam\ B_i = (1+\delta)\,|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \delta.$$

Si intuisce che per $\delta < \delta_0$ sufficientemente piccolo, l'angolo che si forma tra due segmenti consecutivi $[\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)]$ e $[\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})]$ è vicino a π, dunque per ogni $\delta < \delta_0$ si ha

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_i.$$

ovvero si tratta di un ricoprimento di Γ tramite palle aperte di diametro minore di δ. Pertanto, fissato $\delta < \delta_0$, per la definizione 1.2 si ha

$$H^*_{1,\delta}(\Gamma) \leqslant \sum_{i=1}^{m} diam\ B_i = \sum_{i=1}^{m}(1+\delta)\,|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leqslant (1+\delta)l(\Gamma).$$

Passando al limite per $\delta \to 0^+$ si ottiene $H_1(\Gamma) \leqslant l(\Gamma)$.
($\geqslant$) Sia $\varepsilon > 0$, dato che φ è di classe C^1 per ipotesi, esiste $\delta_0 > 0$ tale che $\left|\varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(s)\right| < \varepsilon$ per $|t-s| < \delta_0$. Siano $\delta \leqslant \delta_0$ e $\{U_n\}$ un ricoprimento aperto di Γ tali che

$$diam\ U_n < \delta \quad \text{e} \quad \sum_n diam\ U_n < H_1(\Gamma) + \varepsilon.$$

Per compattezza esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{n_0}, ..., U_{n_m}\} \subseteq \{U_n\}$ di Γ: possiamo supporre, eventualmente riordinando gli indici n_i, che $\varphi(a) \in U_{n_0},\ \varphi(b) \in U_{n_m}$ e

$$U_{n_{i-1}} \cap U_{n_i} \neq \emptyset \qquad \forall\ i = 2, ..., m.$$

Scegliamo una suddivisione $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} = b\}$ di $[a,b]$ tale che $\varphi(t_i) \in U_{n_i} \cap U_{n_{i+1}}$ per ogni i, cosicché $\varphi(t_{i+1}), \varphi(t_i) \in U_{n_{i+1}}$. Allora

$$\sum_{i=1}^{m-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} diam\ U_{n_i} \leqslant \sum_n diam\ U_n < H_1(\Gamma) + \varepsilon.$$

Possiamo supporre che $|t_i - t_{i-1}| < \delta_0$, eventualmente considerando una suddivisione di $[a,b]$ più fine di σ (cioè aggiungendo altri punti intermedi tra $t_0 = a$ e $t_{m-1} = b$). In ogni caso $\sum_{i=1}^{m-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leqslant H_1(\Gamma) + \varepsilon$ vale ancora. Inoltre abbiamo anche

$$\begin{aligned}
l(\Gamma) &= \int_a^b \left|\varphi^{'}(t)\right|\ dt = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(t_i) + \varphi^{'}(t_i)\right|\ dt \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(t_i)\right|\ dt + \sum_{i=1}^{m-1} \left|\varphi^{'}(t_i)(t_i - t_{i-1})\right|\ dt \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(t_i)\right|\ dt + \sum_{i=1}^{m-1} \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi^{'}(t_i) - \varphi^{'}(t) + \varphi^{'}(t)\ dt\right| \\
&\leqslant 2\sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(t_i)\right|\ dt + \sum_{i=1}^{m-1} \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi^{'}(t)\ dt\right| \\
&< 2\varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^{m-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leqslant 2\varepsilon(b-a) + H_1(\Gamma) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene $l(\Gamma) \leqslant H_1(\Gamma)$. □

1.3 Dimensione di Hausdorff

Fissato $E \subseteq \mathbb{R}^N$, studiamo la misura esterna $H_p^*(E)$ al variare di $p > 0$.

Proposizione 1.11. *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varepsilon > 0$ vale*

$$H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0.$$

Dimostrazione. Fissato δ, consideriamo prima $E \subseteq \mathbb{R}^N$ di misura di Lebesgue m_N finita: per ogni ε positivo esiste un ricoprimento $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di E, dove B_j sono palle aperte di diametro $2r_j < \delta$, tale che

$$m_N(E) \leqslant \sum_j m_N(B_j) = \sum_j \omega_N r_j^N = \omega_N \sum_j r_j^N < m_N(E) + \varepsilon < \infty,$$

con ω_N opportuna costante che dipende solo da N. Per definizione si ha allora

$$H_{N+\varepsilon,\delta}^*(E) \leqslant \sum_j (2r_j)^{N+\varepsilon} = 2^{N+\varepsilon} \sum_j r_j^{N+\varepsilon}$$
$$\leqslant 2^{N+\varepsilon} \left(\frac{\delta}{2}\right)^\varepsilon \sum_j r_j^N < 2^N \delta^\varepsilon \frac{1}{\omega_N}(m_N(E) + \varepsilon).$$

La tesi segue facilmente passando al limite per δ che tende a 0^+. Nel caso rimanente di $E \subseteq \mathbb{R}^N$ di misura m_N infinita, possiamo usare un ricoprimento numerabile $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ di cubi Q_n N-dimensionali di lato unitario, e considerare $E_n = E \cap Q_n$: ovviamente $E = \bigcup E_n$. Essendo contenuti in cubi di lato unitario, gli insiemi E_n hanno chiaramente misura m_N finita, allora per quanto detto nel caso finito $H_{N+\varepsilon}^*(E_n) = 0$ per ogni n. Si conclude per subadditività numerabile che

$$H_{N+\varepsilon}^*(E) \leqslant \sum_n H_{N+\varepsilon}^*(E_n) = 0.$$

$\square$

Consideriamo quindi $H_p^*(E)$ limitandosi ai valori $p \in]0, N]$.

Proposizione 1.12. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $p \in]0, N]$:*

(i) se $H_p^*(E) < \infty$ allora $H_q^*(E) = 0 \qquad \forall\, q \in]p, N]$;

(ii) se $H_p^*(E) > 0$ allora $H_q^*(E) = \infty \qquad \forall\, q \in]0, p]$.

Dimostrazione. Sia $\{U_n\}$ un ricoprimento aperto di E, siano $s > r > 0$: Se $diam\ U_n < \delta$ si ha banalmente $(diam\ U_n)^s < \delta^{s-r} (diam\ U_n)^r$ da cui

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (diam\ U_n)^s < \delta^{s-r} \sum_{n\in N} (diam\ U_n)^r$$

cosicché

$$H^*_{s,\delta}(E) \leqslant \delta^{s-r} H^*_{r,\delta}(E) \qquad \forall\ s > r > 0$$

Le tesi si hanno per confronto passando al limite per δ che tende a 0^+ scegliendo

$$\text{(i) } r = p,\ \ s = q, \qquad \text{(ii) } r = q,\ \ s = p.$$

□

Corollario 1.13. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $H^*_p(E)$ non sia identicamente nulla per ogni $p > 0$, allora esiste $p_0 \in]0, N]$ tale che*

$$H^*_p(E) = \begin{cases} \infty & se\ 0 < p < p_0 \\ \in [0, \infty] & se\ p = p_0 \\ 0 & se\ p > p_0. \end{cases}$$

in particolare per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $p \longmapsto H^*_p(E)$ risulta decrescente in p. Di conseguenza possiamo introdurre il prossimo concetto.

Definizione 1.14. Si dice *dimensione di Hausdorff* di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$, il numero

$$dim_H(E) = \inf \left\{ p > 0 :\ H^*_p(E) = 0 \right\} \ \in\ [0, N].$$

Osservazione 1.15. Notiamo che il concetto di dimensione di Hausdorff vale per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$, anche non misurabile, perché la definizione si basa sul concetto di misura esterna di Hausdorff, definita per ogni E.
Come da intuito, la dimensione di Hausdorff è monotona, ovvero $E \subseteq F$ implica $dim_H(E) \leqslant dim_H(F)$: questo deriva dal fatto che H^*_p è monotona per la proposizione 1.5.
In seguito al corollario 1.13, per dimostrare che un insieme E ha una certa dimensione di Hausdorff s, è sufficiente verificare che

$$H^*_r(E) = \infty \quad \forall\ r < s \qquad \text{e} \qquad H^*_t(E) = 0 \quad \forall\ t > s,$$

indipendentemente dal fatto che $H^*_s(E)$ sia nulla, finita positiva o infinita.
Per la proposizione 1.12 se $0 < H^*_s(E) < \infty$ allora $dim_H(E) = s$.
Inoltre per quanto già detto tale dimensione risulta:

$$dim_H(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } H^*_p(E) = 0 \quad \forall p > 0 \\ p_0 \in]0, N] & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1.4 Il rapporto tra la misura di Hausdorff e quella di Lebesgue

Dopo aver introdotto la dimensione di Hausdorff, mostreremo ora come essa caratterizza gli insiemi non trascurabili rispetto a m_N, ovvero quelli con misura di Lebesgue strettamente positiva. Può essere molto utile, a tal scopo, stabilire un'eventuale relazione tra la misura di Hausdorff H_N e la misura di Lebesgue m_N. Vedremo che esse coincidono a meno di una costante moltiplicativa.

Teorema 1.16. *Esiste una costante α_N tale che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha*

$$H_N^*(E) = \alpha_N m_N^*(E)$$

$$\text{con} \qquad \alpha_N = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right),$$

dove Γ è la funzione di Eulero, $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx$, $p > 0$.

Dimostrazione. Vedi [1], pag.47. □

Osservazione 1.17. Si può dimostrare che $\alpha_N = \dfrac{1}{m_N(B_0)}$, dove B_0 è la palla di $\mathbb{R}^N$ di diametro unitario; ovvero, per il teorema la differenza tra le misure N-dimensionali di Hausdorff e Lebesgue è che la prima assegna misura 1 alla palla di diametro unitario, mentre la seconda assegna misura 1 al cubo di lato unitario (per i parallelepipedi la misura di Lebesgue è il volume N-dimensionale).

Corollario 1.18. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(E) > 0$, allora*

$$dim_H(E) = N.$$

Dimostrazione. Usando il teorema 1.16 e la proposizione 1.12 si ha:
$m_N^*(E) > 0 \Longrightarrow H_N^*(E) > 0 \Longrightarrow H_p^*(E) = \infty$ per ogni $p < N$; allora per definizione $dim_H(E) = N$.

□

Esempio 1.19. Il viceversa è falso. Esibiamo ora un controesempio in $\mathbb{R}$.
Per $s \in]0,1[$, sia $\Gamma_s \subset \mathbb{R}$ l'insieme di Cantor ottenuto togliendo da $[0,1]$ al primo passo l'intervallo (aperto) centrale di ampiezza s, e ricorsivamente ad ogni passo successivo togliendo da ogni sottointervallo residuo di lunghezza generica l l'intervallo (aperto) centrale di ampiezza ls.

Vogliamo calcolare $m_1(\Gamma_s)$:
al 1° passo tolgo 1 intervallo di ampiezza s: misura residua $1-s$,
al 2° passo tolgo 2 intervalli di ampiezza $\frac{s(1-s)}{2}$, cioè la misura residua è $1-s-2\frac{s(1-s)}{2}=(1-s)^2$, ... e così via,
all' m-esimo passo si può dimostrare (facilmente per induzione) che la misura residua è $(1-s)^m$; quindi

$$m_1(\Gamma_s)=\lim_{m\to+\infty}(1-s)^m=0 \qquad \forall s\in\,]0,1[.$$

Detto questo poniamo

$$\Gamma=\bigcup_{n=2}^{\infty}\Gamma_{1/n}.$$

Γ è il controesempio cercato, facciamo le verifiche.
Osserviamo che, per definizione di Γ_s, vale $\Gamma_{1/n}\subset\Gamma_{1/m}$ se $n<m$, ovvero Γ è unione di insiemi crescenti: allora

$$m_1(\Gamma)=\lim_{n\to+\infty}m_1(\Gamma_{1/n})=\lim_{n\to+\infty}0=0.$$

Mostreremo nell'esempio (iv) del paragrafo 1.5 che

$$dim_H(\Gamma_{1/n})=\frac{\log 2}{\log\frac{2}{1-1/n}} \qquad \text{per ogni insieme di Cantor } \ \Gamma_{1/n}.$$

Usando la proprietà (vedi [1], esercizio 2.5.2)

$$dim_H(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i)=\sup_{i\in\mathbb{N}}dim_H(A_i)$$

si conclude che

$$dim_H(\Gamma)=\sup_n dim_H(\Gamma_{1/n})=\sup_n\frac{\log 2}{\log\frac{2}{1-1/n}}=1.$$

In seguito al corollario 1.18 limiteremo la nostra attenzione alla dimensione di Hausdorff degli insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, e vedremo con alcuni esempi come tale dimensione riesca a catalogare e distinguere questi insiemi.

1.5 Esempi

Calcoliamo la dimensione di Hausdorff dei seguenti insiemi di misura di Lebesgue nulla:
(i) ogni insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione 0;
(ii) il supporto $\Gamma = \varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^N$ di ogni curva semplice di classe C^1 ha dimensione 1, in particolare la circonferenza $\mathbb{S}^1$ ha dimensione 1;
(iii) l'insieme ternario di Cantor $C = \Gamma_{1/3}$ ha dimensione $\frac{\log 2}{\log 3}$;
(iv) l'insieme di Cantor $\Gamma_{1/n}$ ha dimensione $\frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-1/n}}$.

Dimostrazione. (i) Banale. Per ogni $p > 0$ fissato, per ogni c costante positiva, esiste un ricoprimento di palle aperte $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ognuna centrata in un punto dell'insieme numerabile E e con diametri $\delta_n < \delta$ così piccoli che $\sum_{n\in\mathbb{N}} (diam\ U_n)^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n^p < c$, ovvero $H^*_{p,\delta}(E) = 0$ per ogni $p, \delta > 0$.
Segue ovviamente passando al limite $H^*_p(E) = 0$, e dato che vale per tutti i p, si ha $dim_H(E) = 0$.

(ii) Per la proposizione 1.10 si ha $H_1(\Gamma) = l(\Gamma)$, quindi $0 < H_1(\Gamma) < \infty$: mediante la proposizione 1.12 possiamo concludere che $dim_H(\Gamma) = 1$.

(iii) Consideriamo $C = \Gamma_{1/3}$ definito come nell'esempio 1.19. Per costruzione si può osservare che $C = C_1 \cup C_2$, dove C_1 e C_2 sono copie (disgiunte) rimpicciolite di C, ovvero $C_1 = \frac{1}{3}C,\ C_2 = C_1 + \frac{2}{3}$. Per l'additività sui disgiunti della misura H_p e per l'osservazione 1.9 si deduce

$$H_p(C) = H_p(C_1) + H_p(C_2) = \frac{1}{3^p}H_p(C) + \frac{1}{3^p}H_p(C) = \frac{2}{3^p}H_p(C);$$

perciò, se $H_p(C) \in]0, \infty[$, deve necessariamente essere $\frac{2}{3^p} = 1$ ovvero $p = \frac{\log 2}{\log 3}$.
Poniamo proprio $d = \frac{\log 2}{\log 3}$. Notiamo per la proposizione 1.12 che, se per un generico $p > 0$ si ha $H_p(C) \in]0, \infty[$, allora $dim_H(C) = p$. In particolare se mostriamo che $0 < H_d(C) < \infty$ abbiamo la tesi: più precisamente proveremo che $H_d(C) = 1$.
($\leqslant$) Sia $\delta > 0$, ancora per l'osservazione 1.9 vale

$$\begin{aligned} H^*_{d,\delta/3}(C) &= H^*_{d,\delta/3}(C_1) + H^*_{d,\delta/3}(C_2) \\ &= H^*_{d,\delta/3}\left(\frac{1}{3}C\right) + H^*_{d,\delta/3}\left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3^d}H^*_\delta(C) + \frac{1}{3^d}H^*_\delta(C) = \frac{2}{3^d}H^*_\delta(C) = H^*_\delta(C). \end{aligned}$$

Questo significa che $H^*_{d,\delta}(C)$ non dipende da δ, allora risulta che

$$H_d(C) = \lim_{\delta \to 0^+} H^*_{d,\delta}(C) = H^*_{d,3}(C).$$

Basta scegliere ora il ricoprimento di C che ha come unico aperto l'intervallo $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\supseteq C$: tale intervallo ha diametro minore di 3 per $0 < \varepsilon \leqslant 1$, dunque per definizione di $H^*_{d,3}(C)$ si deduce che

$$H_d(C) = H^*_{d,3}(C) \leqslant (1+2\varepsilon)^d \leqslant 1 + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si deduce $H_d(C) \leqslant 1$.
($\geqslant$) Sia $\delta > 0$, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, per definizione di $H^*_{d,\delta}(C)$ esiste un ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di C tale che

$$diam\ U_n < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d < H^*_{d,\delta}(C) + \varepsilon.$$

Se vale $1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d$, allora si ottiene la tesi $H_d(C) \geqslant 1$: infatti in tal caso

$$1 - \varepsilon \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d - \varepsilon < H^*_{d,\delta}(C) < H_d(C) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Perciò basta provare che $1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d$: per farlo avremo bisogno di un ricoprimento aperto finito $\{W_1, ..., W_M\}$ di C, che andremo a costruire, tale che

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{M} (diam\ W_i)^d \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d.$$

Innanzitutto C è compatto, allora è possibile estrarre dal ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoricoprimento finito $\left\{U'_1, ..., U'_h\right\}$, che per di più possiamo supporre minimale (nel senso che togliendo uno dei U'_i, gli altri non ricoprono più C). Consideriamo gli aperti U'_1 e U'_2: se non sono disgiunti sostituiamo nel ricoprimento la coppia $\left\{U'_1, U'_2\right\}$ con l'aperto $V_1 = U'_1 \cup U'_2$; quindi si ha

$$(diam\ V_1)^d \leqslant (diam\ U'_1 + diam\ U'_2)^d \leqslant (diam\ U'_1)^d + (diam\ U'_2)^d.$$

Iterando questo processo con la nuova coppia $\left\{V_1, U'_3\right\}$, e così via, si produce un ricoprimento finito di C fatto di aperti disgiunti $\{V_1, ..., V_m\}$, con la proprietà

$$\sum_{k=1}^{m} (diam\ V_k)^d \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d.$$

Ricordiamo che $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, dove C_k è ciò che resta dell'intervallo $[0,1]$ dopo il k-esimo passo nella costruzione dell'insieme di Cantor $C = \Gamma_{1/3}$ descritta in 1.19, cioè $C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} J_j^k$, dove i J_j^k sono gli intervalli chiusi e disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^k}$ con $d(J_j^k, J_{j+1}^k) \geqslant \frac{1}{3^k}$, inoltre $C_k \supset C_{k+1}$ per ogni k.
Per quanto detto $\bigcup_{k=1}^{m} V_k \supseteq C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, anzi, di più, per costruzione deve esistere un ν sufficientemente grande tale che $\bigcup_{k=1}^{m} V_k \supseteq C_\nu$. Dato che gli aperti V_k sono disgiunti e C_ν ha esattamente 2^ν componenti connesse, ognuna di esse è ricoperta da un solo aperto V_k, ovvero $m \leqslant 2^\nu$.
È possibile invece che un singolo aperto V_k ricopra $J_j^\nu \cup J_{j+1}^\nu$, cosicché

$$diam\ V_k > diam\ J_j^\nu + diam\ J_{j+1}^\nu + d(J_j^\nu, J_{j+1}^\nu) = 3^{-\nu} + 3^{-\nu} + d(J_j^\nu, J_{j+1}^\nu) \geqslant 3^{1-\nu}.$$

In tal caso sostituiamo V_k con due aperti disgiunti W_1 e W_2 tali che

$$W_1 \supseteq J_j^\nu, \quad W_2 \supseteq J_{j+1}^\nu, \qquad diam\ W_1 < 3^{-\nu} + \sigma, \quad diam\ W_2 < 3^{-\nu} + \sigma,$$

dove la costante $\sigma > 0$ è scelta opportunamente in modo che

$$(diam\ W_1)^d + (diam\ W_2)^d < (diam\ V_k)^d.$$

Ciò è sempre possibile infatti, preso $\eta \in\,]0, diam\ V_k - 3^{1-\nu}[$, si verifica immediatamente che vale, per $\sigma > 0$ sufficientemente piccolo,

$$(diam\ W_1)^d + (diam\ W_2)^d < 2(3^{-\nu} + \sigma)^d < (3^{1-\nu} + \eta)^d < (diam\ V_k)^d.$$

Così facendo abbiamo sostituito ogni aperto V_k che ricopre più di un intervallo J_j^ν con una coppia di aperti disgiunti, ovvero abbiamo generato un ricoprimento finito $\{W_1, ..., W_M\}$ di C, dove i W_i sono aperti disgiunti tali che

$$\sum_{i=1}^{M} (diam\ W_i)^d \leqslant \sum_{k=1}^{m} (diam\ V_k)^d \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d$$

e ogni W_i ricopre, per costruzione, uno ed un solo J_j^ν : questo implica $M = 2^\nu$, dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} (diam\ U_n)^d \geqslant \sum_{i=1}^{2^\nu} (diam\ W_i)^d \geqslant \sum_{i=1}^{2^\nu} (diam\ J_j^\nu)^d$$
$$= \sum_{i=1}^{2^\nu} 3^{-d\nu} = 2^\nu 3^{-d\nu} = 2^\nu (3^{\log_3 2})^{-\nu} = 1.$$

(iv) In modo del tutto analogo a (iii) si dimostra, nel caso generale, che $\Gamma_{1/n}$ ha dimensione $\frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-1/n}}$.

□

1.6 Insiemi di Furstenberg

Per approfondire il concetto di dimensione di Hausdorff, esamineremo adesso una classe di particolari sottoinsiemi del piano euclideo, di cui illustreremo alcune proprietà.

Definizione 1.20. Sia $\alpha \in]0,1]$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *insieme di Furstenberg di tipo* α (oppure insieme F_α) se, per ogni direzione e nel cerchio unitario, esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$. Diremo anche che in tal caso E appartiene alla classe F_α.

Osservazione 1.21. Ovviamente $E \cap l_e \subseteq l_e \subseteq \mathbb{R}$ (a meno di isometria, in ogni caso le misure la dimensione di Hausdorff sono invarianti per isometria) perciò, per quanto detto nell'osservazione 1.15, $dim_H(E \cap l_e) \in [0,1]$ (questo giustifica il fatto che α venga scelto in]0,1]); analogamente $dim_H(E) \in [0,2]$ dato che $E \subseteq \mathbb{R}^2$.

In realtà riusciremo a dare delle indicazioni più precise per un insieme E di Furstenberg.

Teorema 1.22 (Wolff)**.** *Sia* $E \in F_\alpha$*, allora*

$$dim_H(E) \geqslant \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

Questo teorema è corollario di due importanti teoremi su insiemi di Furstenberg generalizzati, che affronteremo nella sezione 3.2. Verrà di nuovo enunciato e finalmente dimostrato in 3.23.

2 Estensione alle misure H^h

2.1 Funzioni dimensione

Definizione 2.1. Una funzione $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ è chiamata *funzione dimensione* se

$$h(0) = 0,\ h(t) > 0 \text{ per } t > 0,\ h \text{ è crescente e continua a destra.}$$

Denotiamo con $\mathbb{H}$ la classe delle funzioni dimensione.

Definizione 2.2. Siano g, h due funzioni dimensione. Diremo che g è dimensionalmente più piccola di h e scriveremo $g \prec h$ se e solo se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

Osservazione 2.3. La relazione $\prec$ appena introdotta è un ordine parziale su $\mathbb{H}$. Le funzioni $h_p(x) = x^p$ sono chiaramente funzioni dimensione per ogni $p > 0$ con $h_\alpha \prec h_\beta \iff \alpha < \beta$, in altre parole la relazione $\prec$ è un ordine totale sulla sottoclasse delle funzioni x^p.

2.2 Estensione

Possiamo ora definire le misure esterne di Hausdorff H^h, dove $h \in \mathbb{H}$, analogamente al caso classico.

Definizione 2.4. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $\delta > 0$, h una funzione dimensione. Definiamo

$$H^h_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} h(diam\ U_n) : U_n \text{ aperti, } diam\ U_n < \delta,\ E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right\}.$$

Definizione 2.5. La *misura esterna h-dimensionale di Hausdorff* di $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è

$$H^h(E) = \lim_{\delta \to 0^+} H^h_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} H^h_\delta(E).$$

Osservazione 2.6. Notiamo come si tratti effettivamente di un'estensione delle definizioni precedenti, nel senso che la definizione usuale di misura esterna di Hausdorff $H^*_p (p > 0)$ si ottiene per $h_p(x) = x^p$, che è proprio una funzione dimensione. Analogamente per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $h \longmapsto H^h(E)$ risulta decrescente in h, ovvero se $g \prec h$ allora $H^h(E) \leqslant H^g(E)$: infatti per definizione $g \prec h$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che $h(x) < \varepsilon g(x)$ per $x < \delta_0$; ne segue, fissato $\varepsilon = 1$, che $H^h_\delta(E) \leqslant H^g_\delta(E)$ per ogni $\delta < \delta_0$, da cui $H^h(E) \leqslant H^g(E)$.

2.3 I risultati di Besicovitch

Come vedremo, non è vero in generale che, dato un insieme E, esista una funzione $h \in \mathbb{H}$ tale che

$$H^g(E) = \begin{cases} \infty & \text{se } g \prec h \\ 0 & \text{se } g \succ h \end{cases}$$

ovvero con questa estensione alle misure H^h perdiamo l'analogo della dimensione di Hausdorff, che invece esiste per ogni insieme E nella definizione standard. Per mostrare ciò, abbiamo bisogno dei seguenti risultati di Besicovitch.

Proposizione 2.7. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{H}$; allora si ha $H^h(E) = 0$ se e solo se esiste un ricoprimento $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ di E tale che $\sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ E_i) < +\infty$ e ogni $x \in E$ appartiene a infiniti E_i.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $H^h(E) = 0$; per definizione per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ esiste $\left\{E_i^{(n)}\right\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ tale che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^{(n)}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ E_i^{(n)}) < 2^{-n}.$$

Riorganizzando tutti gli $E_i^{(n)}$, al variare di n e i, otteniamo il ricoprimento numerabile $\left\{E_i^{(n)}\right\}_{i,n\in\mathbb{N}_0}$. Allora abbiamo la tesi dato che, per costruzione, ogni $x \in E$ appartiene a infiniti $E_i^{(n)}$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ E_i^{(n)}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

($\Longleftarrow$) Siano dati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, quindi $h(\delta) > 0$.
Allora $diam\ E_i \geqslant \delta$ solo per un n° finito di indici i, altrimenti avremmo

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ E_i) \geqslant \sum_{i=m}^{\infty} h(\delta) = +\infty$$

contro l' ipotesi. Dunque esiste un m tale che $diam\ E_i < \delta$ per ogni $i \geqslant m$. Inoltre senza perdita di generalità (per m sufficientemente grande) possiamo supporre che

$$\sum_{i=m}^{\infty} h(diam\ E_i) < \varepsilon.$$

Dato che ogni punto x di E appartiene a infiniti E_i, si ha

$$E \subseteq \bigcup_{i=m}^{\infty} E_i, \qquad diam\ E_i < \delta \quad \forall i \geqslant m, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ E_i) < \varepsilon,$$

ovvero $H^h_\delta(E) < \varepsilon$, da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon, H^h(E) = 0$.

□

Teorema 2.8. *Sia $h \in \mathbb{H}$ tale che $H^h(E) = 0$, allora*

$$\exists\ g \prec h\ (g \in \mathbb{H}) : \quad H^g(E) = 0.$$

Dimostrazione. Per la proposizione 2.7, esiste un ricoprimento $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di E, tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ S_i) < +\infty.$$

Scegliamo quindi una successione crescente di interi positivi $J(1), J(2), ...$ in modo che

$$\sum_{i=J(j)}^{\infty} h(diam\ S_i) < 4^{-j}, \qquad j = 1, 2, ...$$

e una successione descrescente di reali positivi $t_1, t_2, ...$ in modo che

$$t_j < \min_{\neq 0} \left\{diam\ S_1, diam\ S_2, ..., diam\ S_{J(j)}\right\}, \qquad j = 1, 2, ... \qquad (1)$$

Possiamo supporre allo stesso tempo che la successione $t_1, t_2, ...$, sia infinitesima, e che soddisfi la condizione $h(t_j) < \frac{1}{4} h(t_{j-1})$, $\quad j = 2, 3, ...$, ovvero

$$h(t_j) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} h(t_1) \qquad j = 1, 2, ...$$

Con questa scelta, se esiste S_i con $diam\ S_i < t_j$, per la (1) vale $diam\ S_i = 0$ oppure $i > J(j)$. Allora

$$\sum_{diam\ S_i < t_j} h(diam\ S_i) \leqslant \sum_{i=J(j)+1}^{\infty} h(diam\ S_i) < 4^{-j} \qquad j = 1, 2, ... \qquad (2)$$

Costruiamo ora la funzione g della tesi ponendo:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ h(t) & \text{se } t \geqslant t_1 \\ \min\left\{2^j h(t),\ 2^{j-1} h(t_j)\right\} & \text{se } t_{j+1} \leqslant t < t_j \end{cases}$$

Dato che h è crescente, positiva, continua a destra e vale $h(t_j) < \frac{1}{4}h(t_{j-1})$, è banale verificare che g è positiva (escluso in 0), crescente e continua a destra per $t > 0$. Verifichiamo che g è continua a destra anche in 0:

$$g(t_{j+1}) = \min\left\{2^j h(t_{j+1}),\ 2^{j-1}h(t_j)\right\} = 2^j h(t_{j+1}) \leqslant 2^j \left(\frac{1}{4}\right)^j h(t_1)$$

quindi $g(t_{j+1}) \to 0$ per $j \to 0$, che significa $g(t) \to 0 = g(0)$ per $t \to 0^+$. Inoltre per $t_{j+1} \leqslant t < t_j$,

$$g(t) = \min\left\{2^j h(t),\ 2^{j-1}h(t_j)\right\} \geqslant \min\left\{2^j h(t),\ 2^{j-1}h(t)\right\} = 2^{j-1}h(t),$$

perciò

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{g(t)} = 0$$

cioè per definizione $g \prec h$. Resta da dimostrare che $H^g(E) = 0$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g(diam\ S_i) = \sum_{diam\ S_i \neq 0} g(diam\ S_i) \leqslant \sum_{diam\ S_i \neq 0} 2^{j(i)} h(diam\ S_i)$$

dove denotiamo con $j(i)$ l'unico indice tale che $t_{j(i)+1} \leqslant diam\ S_i < t_{j(i)}$, con la convenzione $t_0 = +\infty$. Così facendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} g(diam\ S_i) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \left\{ \sum_{t_{j+1} \leqslant diam\ S_i < t_j} h(diam\ S_i) \right\}$$

$$\leqslant \sum_{t_1 \leqslant diam\ S_i} h(diam\ S_i) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left\{ \sum_{diam\ S_i < t_j} h(diam\ S_i) \right\}$$

$$\leqslant^{(2)} \sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ S_i) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j 4^{-j} = \sum_{i=1}^{\infty} h(diam\ S_i) + 1 < +\infty,$$

e usando il criterio della proposizione 2.7 si ottiene proprio $H^g(E) = 0$.

□

Teorema 2.9. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme boreliano. Se $h \in \mathbb{H}$ è tale che E ha misura H^h non σ-finita allora esiste $g \succ h$ ($g \in \mathbb{H}$) tale che E ha misura H^g non σ-finita.*

Il teorema vale per una classe ben più generale degli insiemi boreliani, gli insiemi analitici.

Dimostrazione. Si veda [2], teorema 7. □

Corollario 2.10. *Se per un boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ esiste $h \in \mathbb{H}$ tale che*

$$H^g(E) > 0 \quad \forall g \prec h, \qquad\qquad H^g(E) = 0 \quad \forall g \succ h,$$

allora E ha misura H^h positiva e σ-finita.

Dimostrazione. Segue subito dai teoremi 2.8 e 2.9. □

Definizione 2.11. Un boreliano E che verifica le ipotesi del corollario 2.10 si dice h-set; viceversa, se per ogni $h \in \mathbb{H}$ E non è un h-set, E si dice *a-dimensionale.*

Questo corollario è importante in quanto ci permetterà di mostrare un esempio di insieme a-dimensionale: l'insieme dei numeri di Liouville, che andremo ora ad analizzare.

2.4 I numeri di Liouville

Definizione 2.12. Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists\, p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) \text{ tali che } \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Il nostro obbiettivo è provare che questo insieme è a-dimensionale (nel senso sopra specificato).

Ricordiamo che un insieme si dice G_δ se è intersezione numerabile di aperti.

Proposizione 2.13. *L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:*
(i) $\emptyset \neq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}^c$, cioè i numeri di Liouville sono irrazionali,
(ii) $\mathbb{L}$ è un insieme G_δ quindi boreliano,
(iii) $\mathbb{L}$ è denso in $\mathbb{R}$,
(iv) $\mathbb{L}$ ha misura m di Lebesgue nulla.

Dimostrazione. (i) Sia

$$c_{\mathbb{L}} = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!},$$

mostriamo che $c_{\mathbb{L}} \in \mathbb{L}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $p_n = \sum_{j=1}^{n} 10^{n!-j!}$, $q_n = 10^{n!}$. Allora

$$\left| c_{\mathbb{L}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} 10^{-j!} = 10^{-(n+1)!} \sum_{j=n+1}^{\infty} 10^{-[j!-(n+1)!]}$$

$$
\begin{aligned}
&= 10^{-(n+1)!}\left(1+\sum_{j=n+2}^{\infty}\frac{1}{10^{(n+1)![j(j-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)-1]}}\right)\\
&< 10^{-(n+1)!}\left(1+\sum_{j=n+2}^{\infty}\frac{1}{10^{j-1}}\right)\leqslant 10^{-(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\\
&= \frac{10}{9}\cdot 10^{-(n+1)!} < 10\cdot 10^{-(n+1)!} < (10^{-n!})^n = \frac{1}{q_n^n}.
\end{aligned}
$$

Supponiamo che x sia razionale, cioè $\exists\ c, d \in \mathbb{Z}$ $(d > 0)$ tali che $x = \frac{c}{d}$; sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{n-1} > d$. Allora per ogni coppia di interi $p, q \quad (q \geqslant 2)$ tali che $\frac{p}{q} \neq \frac{c}{d}$ si ha

$$
\left|x-\frac{p}{q}\right| = \left|\frac{c}{d}-\frac{p}{q}\right| = \left|\frac{cq-dp}{dq}\right| \geqslant \frac{1}{dq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geqslant \frac{1}{q^n},
$$

quindi x non è un numero di Liouville.
(ii) Per ogni n intero positivo definiamo gli aperti

$$
\begin{aligned}
U_n &= \bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R} : 0 < \left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}\right\}\\
&= \bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)\setminus\left\{\frac{p}{q}\right\}.
\end{aligned}
$$

Basta ora osservare che $\mathbb{L} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, in particolare $\mathbb{L}$ è un boreliano dato che è intersezione numerabile dei boreliani U_n.
(iii) Ogni aperto U_n è denso, quindi $\mathbb{L}$ è denso in $\mathbb{R}$ per il teorema di Baire.
(iv) Siano $k, q \geqslant 2$, per ogni $n > 2$ si ha $\mathbb{L} \subseteq U_n$:

$$
\mathbb{L}\cap(-k,k) \subseteq U_n\cap(-k,k) \subseteq \bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcup_{p=-kq}^{kq}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right).
$$

Dato che $\left|\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)-\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}\right)\right| = \frac{2}{q^n}$,

$$
\begin{aligned}
m(\mathbb{L}\cap(-k,k)) &\leqslant \sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p=-kq}^{kq}\frac{2}{q^n} = \sum_{q=2}^{\infty}\frac{2(2kq+1)}{q^n} \leqslant (4k+1)\sum_{q=2}^{\infty} q^{1-n}\\
&\leqslant (4k+1)\int_1^{+\infty} q^{1-n}\,dq \leqslant \frac{4k+1}{n-2}.
\end{aligned}
$$

Ora $\lim_{n\to+\infty}\frac{4k+1}{n-2} = 0$, quindi per confronto $m(\mathbb{L}\cap(-k,k)) = 0$ per ogni $k > 1$: di conseguenza $m(\mathbb{L}) = 0$.

□

Definizione 2.14. Sia $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Il numero

$$\mu(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists \ c_\varepsilon > 0 : \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_\varepsilon q^{\lambda+\varepsilon}} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

è detto *misura di irrazionalità* di x.

Osservazione 2.15. Nella definizione possiamo supporre senza perdita di generalità che $\frac{p}{q}$ sia irriducibile: infatti nel caso di una frazione riducibile l'ipotesi fornisce la disuguaglianza

$$\left|x - \frac{ap}{aq}\right| > \frac{1}{c_\varepsilon (aq)^{\lambda+\varepsilon}},$$

che è meno forte rispetto al caso irriducibile, dove

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_\varepsilon q^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Teorema 2.16. *Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Per la misura di irrazionalità di x vale la relazione*

$$\mu(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \ \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\lambda} \ \text{ per al più un numero finito di } \ \frac{p}{q}\right\}.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda(x)$ l'estremo inferiore a secondo membro.
($\leqslant$) Se $\lambda > \lambda(x)$, fissato $\varepsilon > 0$ si ha necessariamente

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\lambda+\varepsilon}}$$

per al più un numero finito di $\frac{p}{q}$: $\frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_k}{q_k}$; altrimenti si avrebbe

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\lambda+\varepsilon}}$$

per infiniti $\frac{p}{q}$, ovvero $\lambda(x) \geqslant \lambda + \varepsilon$ che è assurdo. Allora

$$0 < q_i^{\lambda+\varepsilon}\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < 1 \quad i = 1, ..., k,$$

e posto

$$0 < \frac{1}{C} = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} q_i^{\lambda+\varepsilon}\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < 1,$$

avremmo
$$\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right| \geqslant \frac{1}{Cq_i^{\lambda+\varepsilon}} \qquad \text{per } i=1,...,k\ ,$$
$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^{\lambda+\varepsilon}} > \frac{1}{Cq^{\lambda+\varepsilon}} \qquad \forall\ \frac{p}{q} \notin \left\{\frac{p_i}{q_i},\ 1 \leqslant i \leqslant k\right\},$$

quindi $\lambda \geqslant \mu(x)$ per ogni $\lambda > \lambda(x)$, da cui $\lambda(x) \geqslant \mu(x)$.
($\geqslant$) Siano ora $\mu > \mu(x)$ e $\varepsilon > 0$;

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_\varepsilon q^{\mu+\varepsilon}} \quad \forall\ \frac{p}{q},$$

altrimenti esisterebbe $\frac{p}{q}$ tale che

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{c_\varepsilon q^{\mu+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{c_\varepsilon q^{y+\varepsilon}} \quad \forall y < \mu$$

ovvero $\mu(x) \geqslant \mu$ che è assurdo. Supponiamo che

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu+2\varepsilon}}, \quad (*)$$

dunque, per quanto detto,

$$\frac{1}{c_\varepsilon q^{\mu+\varepsilon}} < \left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu+2\varepsilon}}.$$

Questo implica

$$c_\varepsilon q^{-\mu-\varepsilon} < q^{-\mu-2\varepsilon}, \quad \text{da cui } q < (c_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$$

ovvero, dato che $q \in \mathbb{N}_0$ per ipotesi, la disuguaglianza $(*)$ vale per al più un numero finito di q. Fissiamo uno di questi q, dalla disuguaglianza $(*)$ segue facilmente che
$$qx - q^{-\mu-2\varepsilon+1} < p < qx + q^{-\mu-2\varepsilon+1},$$
dove per ipotesi $p \in \mathbb{Z}$; allora, fissato q, $(*)$ vale per al più un numero finito di p. Quindi
$$\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c_\varepsilon q^{\mu+2\varepsilon}}$$
vale per al più un numero finito di $\frac{p}{q}$, e pertanto $\lambda(x) \leqslant \mu + 2\varepsilon$, cioè $\lambda(x) \leqslant \mu(x) + 2\varepsilon$: per l'arbitrarietà di ε si ottiene $\lambda(x) \leqslant \mu(x)$.

□

Osservazione 2.17. Si ha $\mu(x) \geqslant 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dalla teoria delle frazioni continue, che fornisce delle approssimazioni di x del tipo

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \quad \text{per infiniti } \frac{p}{q}.$$

Corollario 2.18. $x \in \mathbb{L}$ *se e solo se* $\mu(x) = +\infty$.

Dimostrazione. Intanto, per la proposizione 2.13(i),

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists\, p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) \text{ tali che } \quad 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}\right\}.$$

Se $x \in \mathbb{L}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, per ogni $m > n$ esiste una coppia (p, q) tale che

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m} < \frac{1}{q^n}.$$

Il numero di queste coppie, al variare di m, è infinito: altrimenti ce ne sarebbe una che verifica

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m} \qquad \text{per infiniti valori di } m,$$

il che è impossibile perché darebbe $0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| = 0$. Allora

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} \text{ per infiniti } p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2)\right\}.$$

La tesi è ora evidente per il teorema 2.16. □

Teorema 2.19. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\, q \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Sia x un numero di Liouville. Per il corollario 2.18 e il teorema 2.16 vale la disuguaglianza

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} \quad \text{per infiniti } \frac{p}{q} \text{ qualunque sia } n \in \mathbb{N}_0.$$

Siano k, h interi primi fra loro ($h \neq 0$), consideriamo $x + \frac{k}{h}$ e supponiamo che non sia un numero di Liouville; allora per il corollario 2.18 esistono $n \in \mathbb{N}_0$ e $\varepsilon > 0$ tali che $n - \varepsilon > \mu(x)$, cioè per definizione

$$\left|x + \frac{k}{h} - \frac{u}{v}\right| > \frac{1}{Cv^n} \quad \forall\ \frac{u}{v} \text{ irriducibile;}$$

quindi

$$\left|x - \frac{uh - kv}{vh}\right| > \frac{1}{Cv^n} \quad \forall\ \frac{u}{v} \text{ irriducibile.}$$

Riduciamo la frazione $\frac{uh-kv}{vh}$ ai minimi termini: sia $m = MCD\{v, h\}$, allora si ha $v = am,\ h = bm$ con a, b primi fra loro, quindi

$$\frac{uh - kv}{vh} = \frac{ubm - kam}{abm^2} = \frac{ub - ka}{abm} =: \frac{s}{t},$$

dove nell'ultima forma la frazione è ridotta ai minimi termini. Infatti l'ultima forma è riducibile se e solo se u è divisibile per am oppure k è divisibile per bm, ma nel primo caso $\frac{u}{v}$ sarebbe riducibile e nel secondo $\frac{k}{h}$ sarebbe riducibile contro le ipotesi. Perciò,

$$\left|x - \frac{uh - kv}{vh}\right| = \left|x - \frac{ub - ka}{abm}\right| > \frac{1}{C(abm)^n} \quad \forall\ \frac{u}{v},$$

ovvero

$$\left|x - \frac{s}{t}\right| > \frac{1}{Ct^n} \quad \forall\ \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}.$$

Ma ciò per definizione ci dice che $n - \varepsilon \geqslant \mu(x)$, assurdo perché $\mu(x) = +\infty$. Ne segue la tesi.

$\square$

2.5 Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo $A + B = \{a + b :\ a \in A,\ b \in B\}, \quad A + t = \{a + t :\ a \in A\}$, e chiamiamo insieme di Cantor ogni insieme omeomorfo al classico insieme ternario di Cantor: è noto che l'insieme di Cantor è più che numerabile.

Lemma 2.20. *Sia X uno spazio metrico e μ una misura finita definita sui boreliani di X; allora μ è regolare, ovvero per ogni A $\mu - misurabile \subseteq X$*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) :\ F \textit{ chiuso} \subseteq A\} = \inf\{\mu(U) :\ U \textit{ aperto} \supseteq A\}.$$

Dimostrazione. Intanto per monotonia vale per ogni A $\mu - misurabile$

$$\sup\{\mu(F) :\ F \text{ chiuso} \subseteq A\} \leqslant \mu(A) \leqslant \inf\{\mu(U) :\ U \text{ aperto} \supseteq A\},$$

quindi si ha la tesi se proviamo che

$$\sup\{\mu(F) :\ F \text{ chiuso} \subseteq A\} = \inf\{\mu(U) :\ U \text{ aperto} \supseteq A\}.$$

Sia

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \sup\{\mu(F) : \ F \text{ chiuso} \subseteq A\} = \inf\{\mu(U) : \ U \text{ aperto} \supseteq A\}\}.$$

Mostriamo prima che tutti i boreliani appartengono ad $\mathcal{A}$: per fare ciò basta verificare che la classe $\mathcal{A}$ è una tribù che contiene la tribù dei boreliani. Dato che quella dei boreliani è la minima tribù che contiene i chiusi, è sufficiente mostrare che $\mathcal{A}$ è una tribù contenente i chiusi. Osserviamo che A appartiene ad $\mathcal{A}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$

$$\exists \ F \text{ chiuso} \subseteq A, \ U \text{ aperto} \supseteq A : \ \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Se A è un chiuso poniamo $F = A$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ consideriamo gli aperti $V_n = \bigcup_{x \in A} B(x, 1/n)$, inoltre definiamo $U_n = \bigcap_{k=1}^n V_k$. Si può osservare che, per ogni n, U_n è aperto e $U_n \supseteq U_{n+1}$: dato che μ è una misura finita e $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ si ha

$$\mu(F) = \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(U_n).$$

In particolare per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n' tale che $\mu(U_{n'} \setminus F) < \varepsilon$, dunque i chiusi appartengono alla classe $\mathcal{A}$. Per mostrare che è effettivamente una tribù va verificato il passaggio al complementare e unioni numerabili. Se $A \in \mathcal{A}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F chiuso $\subseteq A \subseteq U$ aperto con $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$: allora

$$U^c \text{ chiuso} \subseteq A^c \subseteq F^c \text{ aperto, con } \mu(F^c \setminus U^c) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon,$$

ne segue che $A^c \in \mathcal{A}$. Consideriamo una famiglia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, ovvero per ogni j e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F_j chiuso $\subseteq A_j \subseteq U_j$ aperto con $\mu(U_j \setminus F_j) < 2^{-j}\varepsilon$. Detto $A = \bigcup_j A_j$ poniamo $U = \bigcup_j U_j$ e $Z_k = \bigcup_{j=1}^k F_j$: notiamo che U è aperto, ogni Z_k è chiuso e vale $Z_k \subseteq A \subseteq U$. Inoltre per k grande si ha $\mu(U \setminus Z_k) < \varepsilon$, infatti per subadditività numerabile

$$\mu(\bigcup_{j=1}^\infty (U_j \setminus F_j)) \leqslant \sum_j \mu(U_j \setminus F_j) < \sum_j 2^{-j}\varepsilon = \varepsilon \qquad \text{con } \bigcup_k Z_k = \bigcup_j F_j,$$

dunque $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$. Quindi $\mathcal{A}$ è una tribù e fin qui abbiamo dimostrato la tesi per tutti i boreliani.

Sia ora A μ-misurabile, esistono due boreliani B, C e un insieme $N \subseteq C$ tali che $\mu(C) = 0$ e $A = B \cup N$. Usando la monotonia della misura

$$\mu(A) = \mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \text{ chiuso} \subseteq B\}$$

$$\leqslant \sup\{\mu(F) : F \text{ chiuso} \subseteq A\} \leqslant \mu(A).$$

Inoltre, dato $\varepsilon > 0$, siano $U_1 \supseteq B,\ U_2 \supseteq C$ gli aperti tali che

$$\mu(U_1 \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu(U_2 \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, posto $U = U_1 \cup U_2$, si ha $U \supseteq A$ e $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$.

□

Osservazione 2.21. È noto che un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo e separabile è anch'esso metrico completo e separabile, e che uno spazio metrico completo è compatto se e solo se è totalmente limitato.

Teorema 2.22. *Sia X uno spazio metrico completo e separabile, e sia μ una misura finita definita sui boreliani di X; allora μ è tesa, ovvero per ogni A $\mu - misurabile \subseteq X$*

$$\mu(A) = \sup\left\{\mu(K) :\ K \textit{ compatto} \subseteq A\right\}.$$

Dimostrazione. Per il lemma 2.20 possiamo supporre che A sia chiuso, quindi A è ancora metrico completo e separabile. Considerando, se necessario, la restrizione della misura $\mu_{|A}$, per la tesi basta mostrare che per ogni spazio metrico completo e separabile X

$$\mu(X) = \sup\left\{\mu(K) :\ K \text{ compatto} \subseteq X\right\}.$$

Osserviamo che in uno spazio metrico completo e separabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è sempre possibile trovare una famiglia al più numerabile di palle chiuse $\left\{B_i^{(n)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ di uguale raggio $\delta_n < 2^{-n}$ tale che $X = \bigcup_i B_i^{(n)}$. Infatti sia $D = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ denso e numerabile, consideriamo le palle $B_i^{(n)} = B(y_i, \delta_n)$ e supponiamo per assurdo che esista $x \in X$ non appartenente a $\bigcup_i B_i^{(n)}$. Per la densità di D, esiste $y_m \in B(x, \delta_n) \cap D$; in particolare $d(x, y_m) < \delta_n$ che è equivalente a $x \in B_m^{(n)}$: assurdo.
Per quanto detto $\lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{i\leqslant k} B_i^{(n)}) = \mu(X)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia k_n tale che $\mu(X \setminus \bigcup_{i\leqslant k_n} B_i^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Definiamo $K = \bigcap_n \bigcup_{i=0}^{k_n} B_i^{(n)}$: questo insieme è chiaramente chiuso e totalmente limitato, quindi compatto. Per concludere

$$\mu(X \setminus K) \leqslant \sum_n \mu(X \setminus \bigcup_{i\leqslant k_n} B_i^{(n)}) < \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

□

Teorema 2.23. *Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora*
(i) $\mu(B \cap (B + t)) = 0 \quad$ per m-q.o. t,
(ii) esiste un boreliano $B' \subseteq B$ con $\mu(B') > 0$ e $int(B' - B') = \emptyset$,
(iii) esiste un compatto $C \subseteq B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$.

Dimostrazione. (i) Sia $\mu : \Theta \longrightarrow [0, +\infty]$ la misura data su $\mathbb{R}$, dove Θ è la tribù contenente i boreliani. Definiamo una nuova misura μ_B

$$\mu_B(S) = \mu(B \cap S) \quad \forall\ S \in \Theta.$$

μ_B è chiaramente una misura boreliana σ-finita su $\mathbb{R}$. Definiamo

$$B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}.$$

B_0 è boreliano (in quanto è controimmagine del boreliano B tramite l'applicazione lineare $(x, y) \longrightarrow x + y$), dunque è misurabile per la misura prodotto $\mu_B \times m$. Siccome entrambe le misure sono σ-finite, possiamo applicare il teorema di Fubini a B_0. Le sezioni verticali di B_0 sono della forma

$$\{y \in \mathbb{R} : x + y \in B\} = \{y \in \mathbb{R} : y \in B - x\} = B - x.$$

perciò $m(B - x) = m(B) = 0$ (invarianza per traslazioni).
Per il teorema di Fubini, $[\mu_B \times m](B_0) = 0$, quindi m-q.o. le sezioni orizzontali di B_0 hanno misura μ_B nulla. Analogamente una sezione orizzontale è del tipo $B - y$, allora per m-q.o y otteniamo $0 = \mu_B(B - y) = \mu[B \cap (B - y)]$. Sostituendo y con $-t$ si ha la tesi.
(ii) Per la (i) possiamo scegliere un insieme denso e numerabile $D \subset \mathbb{R}$ tale che $\mu[B \cap (B + d)] = 0$ per ogni $d \in D$. Definiamo

$$B' = B \setminus \bigcup_{d \in D} (B + d) = B \setminus \bigcup_{d \in D} [B \cap (B + d)].$$

da cui, essendo $\mu[\bigcup_{d \in D} [B \cap (B + d)]] = 0$, si ha $\mu(B') = \mu(B) > 0$. Inoltre si verifica facilmente che $(B' - B') \cap D = \emptyset$, di conseguenza $int(B' - B') \subseteq int(D^c) = (\bar{D})^c = \emptyset$ per densità di D.
(iii) È sufficiente trovare un compatto $C \subseteq B'$ con $\mu(C) > 0$.
Poiché $B' \subseteq B$, la misura μ è σ-finita anche per B': quindi sarà $B' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ dove gli S_n sono Θ-misurabili di misura μ finita. Esiste quindi un $S_n = S \subseteq B'$ con $0 < \mu(S) < \infty$. Definiamo

$$\mu_S(A) = \mu(S \cap A) \quad \forall \text{ boreliano } A \in \mathbb{R}.$$

μ_S è una misura finita definita sui boreliani dello spazio metrico completo e separabile $\mathbb{R}$. Applicando il teorema 2.22 al boreliano B', e notando che $\mu_S(B') = \mu(S \cap B') = \mu(S) > 0$ otteniamo un compatto $C \subseteq B'$ con $\mu_S(C) = \mu(S \cap C) > 0$; pertanto $\mu(C) > 0$. □

Teorema 2.24. *Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subseteq B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subseteq B$ un compatto con $int(C - C) = \emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.*

Dimostrazione. Sia
$$T = \{t \in \mathbb{R} : C + t \subseteq B\}\,.$$
B è un insieme G_δ, così esistono aperti U_n tali che $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$. È chiaro che $C + t \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ se e solo se $C + t \subseteq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero $T = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$, dove $G_n = \{t \in \mathbb{R} : C + t \subseteq U_n\}$. Osserviamo che ogni G_n è aperto perché C è compatto e U_n aperto. Inoltre ogni G_n è denso: sia $D = \{t \in \mathbb{R} : B + t \subseteq B\}$ denso per ipotesi, se $t \in D$ allora $C + t \subseteq B + t \subseteq B \subseteq U_n$ per ogni n, quindi $D \subseteq G_n$, in particolare ogni G_n è denso.
È sufficiente costruire un insieme di Cantor $P \subseteq T$ con la proprietà $(C+p_0)\cap(C+p_1) = \emptyset$ per ogni coppia di punti distinti $p_0, p_1 \in P$. Detto Δ^n l'insieme delle sequenze di $\{0,1\}$ di lunghezza n, definiamo per induzione su n degli intervalli compatti $I_s,\ s \in \Delta^n$. Fissiamo $I_\emptyset \subseteq G_0$; se I_s è già stato definito per qualche $s \in \Delta^n$, prendiamo $x \in I_s \cap G_{n+1}$; dato che G_{n+1} è un aperto denso e $int(C - C) = \emptyset$ possiamo trovare $y \in [I_s \cap G_{n+1}] \backslash [(C - C) + x]$. Questo ci garantisce che $(C + x) \cap (C + y) = \emptyset$, altrimenti $c_0 + x = c_1 + y$ per $c_0, c_1 \in C$ cioè $y = (c_0 - c_1) + x$, in contraddizione con $y \in [I_s \cap G_{n+1}] \backslash [(C - C) + x]$. Per compattezza esistono due intervalli compatti disgiunti $I_{s\smile 0}, I_{s\smile 1} \subseteq I_s \cap G_{n+1}$ tali che $x \in I_{s\smile 0},\ y \in I_{s\smile 1}, \quad (C + I_{s\smile 0}) \cap (C + I_{s\smile 1}) = \emptyset$. Definiamo ora
$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in\Delta^n} I_s.$$
Chiaramente P è un insieme di Cantor, $P \subseteq T = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ e $I_s \subseteq G_n$ per ogni n e $s \in \Delta^n$. In più se $p_0 \neq p_1 \in P$ esistono n e $s \in \Delta^n$ tali che $p_0 \in I_{s\smile 0}, p_1 \in I_{s\smile 1}$, e anche $(C + p_0) \cap (C + p_1) = \emptyset$ visto che $(C + I_{s\smile 0}) \cap (C + I_{s\smile 1}) = \emptyset$. Infine $p_0 \neq p_1 \in P \subseteq T$, perciò $C + p_0, C + p_1 \subseteq B$, e questi traslati di C sono disgiunti (per quanto appena detto) e più che numerabili (per la cardinalità di P).

□

Teorema 2.25. *Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme (non vuoto) G_δ di misura di Lebesgue nulla, e supponiamo che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subseteq B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$. Allora per ogni misura μ boreliana su $\mathbb{R}$ e invariante per traslazioni si ha o $\mu(B) = 0$ oppure B ha misura μ non σ-finita.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista μ boreliana, invariante per traslazioni, positiva e σ-finita per B. Possiamo applicare (le ipotesi sono tutte rispettate) i teoremi 2.23 e 2.24: per il primo esiste un compatto $C \subseteq B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$; per il secondo esiste un insieme di indici I più che numerabile tale che
$$\bigsqcup_{i\in I} (C - t_i) \subseteq B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

dove gli A_n hanno misura μ finita e l'uguaglianza vale perché B ha misura μ σ-finita. Poiché I è più che numerabile, esistono $n_0 \in \mathbb{N}$ e $J \subseteq I$ più che numerabile tali che

$$\bigsqcup_{j\in J}(C - t_j) \subset A_{n_0}.$$

Allora

$$\mu(A_{n_0}) \geqslant \mu(\bigsqcup_{j\in J}(C - t_j)) \geqslant \mu(\bigsqcup_{j\in J_0}(C - t_j)) = \sum_{j\in J_0}\mu(C) = +\infty,$$

dove J_0 è un sottoinsieme numerabile di J e sono state utilizzate la numerabile additività sui disgiunti e l'invarianza per traslazioni.
Ma A_{n_0} ha misura μ finita quindi siamo arrivati all'assurdo.

□

Concludiamo questo paragrafo provando finalmente la a-dimensionalità dell'insieme dei numeri di Liouville.

Corollario 2.26. $\mathbb{L}$ *è un insieme a-dimensionale.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.13 e il teorema 2.19, $\mathbb{L}$ rispetta tutte le ipotesi del teorema 2.25; quindi per ogni misura μ boreliana su $\mathbb{R}$ e invariante per traslazione si ha o $\mu(\mathbb{L}) = 0$ oppure $\mathbb{L}$ ha misura μ non σ-finita.
In particolare questo vale per le misure di Hausdorff H^h, che sono boreliane e invarianti per traslazione. $\mathbb{L}$ è un boreliano, pertanto grazie al corollario 2.10 possiamo concludere che $\mathbb{L}$ è a-dimensionale. □

3 Insiemi di Furstenberg generalizzati

3.1 Definizioni e notazioni

La definizione di insieme di Furstenberg generalizzato per le misure di Hausdorff H^h, dove h è una funzione dimensione, è la seguente.

Definizione 3.1. Sia $h \in \mathbb{H}$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *insieme di Furstenberg di tipo h*, o insieme F_h, se per ogni direzione $e \in \mathbb{S}^1$ esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $H^h(l_e \cap E) > 0$.

Nella definizione appena data possiamo supporre che per ogni $e \in \mathbb{S}^1$ il segmento sia unitario. Infatti, fissato e, sia l_e il segmento che soddisfa la condizione $H^h(l_e \cap E) > 0$. Se l_e ha lunghezza minore di 1, possiamo estenderlo ad un segmento unitario l_e' che lo contiene: per monotonia si ha $H^h(l_e' \cap E) \geqslant H^h(l_e \cap E) > 0$. Se invece l_e ha lunghezza maggiore di 1, possiamo estenderlo ad un segmento di lunghezza intera e dividerlo in m sottosegmenti unitari consecutivi $l_e^1, ..., l_e^m$ con $l_e = \bigcup_{j=1}^m l_e^j$: se valesse $H^h(l_e^j \cap E) = 0$ per ogni $j = 1, ..., m$ allora per subadditività risulterebbe $H^h(l_e \cap E) = H^h((\bigcup_{j=1}^m l_e^j) \cap E) = H^h(\bigcup_{j=1}^m (l_e^j \cap E)) \leqslant \sum_{j=1}^m H^h(l_e^j \cap E) = 0$ che è assurdo.

Osservazione 3.2. Può sembrare che la condizione di questa definizione sia più forte di quella usata nella definizione 1.20 dei classici insiemi di Furstenberg F_α. In effetti nella definizione classica la condizione $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$ è equivalente a $H^\beta(l_e \cap E) > 0$ per ogni $\beta < \alpha$, non è quindi richiesto che $H^\alpha(l_e \cap E) > 0$. Invece, nella definizione generalizzata, $H^h(l_e \cap E) > 0$ implica anche $H^g(l_e \cap E) > 0$ per ogni $g \prec h$; infatti per definizione, $g \prec h$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $h(x) < \varepsilon g(x)$ per $x < \delta$, da cui $H_\delta^h(l_e \cap E) \leqslant \varepsilon H_\delta^g(l_e \cap E)$, ovvero $0 < H^h(l_e \cap E) \leqslant \varepsilon H^g(l_e \cap E)$.
In realtà le definizioni sono equivalenti: infatti per il teorema 2.8 se $H^g(l_e \cap E) > 0$ per ogni $g \prec h$ allora $H^h(l_e \cap E) > 0$.

Proposizione 3.3. *Dato un insieme E di tipo F_h per $h \in \mathbb{H}$, esistono sempre due costanti m_E, δ_E positive ed un insieme $\Omega_E \subseteq \mathbb{S}^1$ di lunghezza d'arco σ positiva tali che*

$$H_\delta^h(l_e \cap E) > m_E > 0 \qquad \forall\ \delta < \delta_E,\ \forall\ e \in \Omega_E.$$

Dimostrazione. Per ipotesi E è di tipo F_h, quindi per ogni $e \in \mathbb{S}^1$ esiste una costante positiva m_e tale che $H^h(l_e \cap E) > m_e$. Sia per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_n = \left\{ e \in \mathbb{S}^1 : \ \frac{1}{n+1} \leqslant m_e < \frac{1}{n} \right\}, \qquad \mathbb{S}^1 = \bigcup_n \Lambda_n.$$

Almeno uno di questi insiemi ha lunghezza d'arco σ positiva, altrimenti avremmo $\sigma(\mathbb{S}^1) \leqslant \sum_n \sigma(\Lambda_n) = 0$, che è assurdo. Sia Λ_{n_0} questo insieme di lunghezza d'arco positiva e prendiamo $0 < 2m_E < \frac{1}{n_0+1} \leqslant m_e$. Quindi

$$H^h(l_e \cap E) > 2m_E > 0 \qquad \forall\, e \in \Lambda_{n_0}.$$

Sia, per ogni n,

$$K_n = \left\{ e \in \Lambda_{n_0} :\ H^h_\delta(l_e \cap E) > m_E > 0 \quad \forall\, \delta < \frac{1}{n} \right\},$$

dato che $\Lambda_{n_0} = \bigcup_n K_n$, analogamente esiste $K_{n_1} = \Omega_E \subseteq \Lambda_{n_0}$ di lunghezza d'arco positiva tale che, posto $\delta_E = \frac{1}{n_1}$,

$$H^h_\delta(l_e \cap E) > m_E > 0 \qquad \forall\, \delta < \delta_E,\ \forall\, e \in \Omega_E.$$

□

Osservazione 3.4. Per semplificare la notazione, dato che nell'ultima disuguaglianza useremo solo il fatto che m_E, δ_E e $\sigma(\Omega_E)$ sono positive, è possibile considerare d'ora in poi la seguente definizione (più forte) di insieme F_h.

Definizione 3.5. Sia $h \in \mathbb{H}$. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice insieme di Furstenberg di tipo h, o insieme F_h, se per ogni direzione $e \in \mathbb{S}^1$ esiste un segmento unitario l_e nella direzione di e tale che, risulti per qualche $\delta_E > 0$, $H^h_\delta(l_e \cap E) > 1$ per ogni $\delta < \delta_E$.

Nelle prossime pagine mostreremo che un insieme di Furstenberg F_h, sotto opportune ipotesi su $g \prec h$, ha misura H^g positiva. Come corollario, nel caso particolare di un insieme di Furstenberg classico F_α, proveremo la disuguaglianza di Wolff del teorema 1.22.

Illustriamo ora definizioni e notazioni di cui avremo bisogno in seguito.

Definizione 3.6.

$$\mathbb{H}_d = \{ h \in \mathbb{H} :\ h(2x) \leqslant C h(x) \ \text{ per qualche } C > 0 \}.$$

Osservazione 3.7. Per definizione di $\mathbb{H}_d$, se $h \in \mathbb{H}_d$ allora la stessa disuguaglianza vale (con qualche altra costante) sostituendo al posto di 2 un qualunque $\lambda > 1$.

Definizione 3.8. Date due funzioni $g, h \in \mathbb{H}$ definiamo

$$\Delta_0(g,h)(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad \Delta_1(g,h)(x) = \frac{g(x)}{h^2(x)}.$$

Useremo la notazione $A \lesssim B$ per indicare che esiste una costante C indipendente da A e da B, tale che $A \leqslant CB$; se vale $A \lesssim B$ e $B \lesssim A$ scriveremo $A \backsim B$.
Su $\mathbb{S}^1$ consideriamo la lunghezza d'arco σ, e con $L^2(\mathbb{S}^1)$ intendiamo $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$; inoltre per ogni $e \in \mathbb{S}^1$, l_e sarà il segmento unitario nella direzione di e. Un insieme di direzioni θ-separate è un fascio di rette passanti per l'origine, tali che ogni coppia di rette consecutive formi un angolo $\geqslant \theta$.
Come al solito, un $\delta-$ricoprimento di un insieme è un ricoprimento dell'insieme ottenuto tramite aperti con diametro $< \delta$. Infine, dato un insieme A, indicheremo con $\sharp A$ la sua cardinalità.

Definizione 3.9. Sia $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente e infinitesima. Per ogni famiglia di palle $B = \{B_j\}$ con $B_j = B(x_j, r_j)$, $r_j \leqslant 1$ e per ogni insieme E definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ (per convenzione $b_{-1} = +\infty$)

$$J_k^b = \{j \in \mathbb{N} : \ b_k < r_j \leqslant b_{k-1}\} \qquad E_k = E \cap \bigcup_{j\in J_k^b} B_j.$$

Nel caso della successione diadica $b = \left\{2^{-k}\right\}$, omettiamo l'apice e poniamo

$$J_k = \left\{j \in \mathbb{N} : \ 2^{-k} < r_j \leqslant 2^{-k+1}\right\}.$$

Osservazione 3.10. È ovvio che $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k^b$, inoltre nel caso che B sia un ricoprimento di E, si ha $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

3.2 Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Lemma 3.11. *Siano E un insieme F_h per $h \in \mathbb{H}$ e $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione a valori non negativi tale che $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converga. Sia $B = \{B_j\}$ un $\delta-$ricoprimento di palle di E con $\delta < \delta_E$. Detto per ogni $k \in \mathbb{N}$*

$$\Omega_k = \left\{e \in \mathbb{S}^1 : \ H_\delta^h(l_e \cap E_k) > \frac{a_k}{2\left\|a\right\|_1}\right\},$$

si ha

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_k \Omega_k.$$

Dimostrazione. Chiaramente $\bigcup_k \Omega_k \subseteq \mathbb{S}^1$; supponiamo per assurdo che esista $e \in \mathbb{S}^1$ che non appartiene a nessuno degli Ω_k. Allora per tale direzione si ha

$$1 < H_\delta^h(l_e \cap E) \leqslant \sum_k H_\delta^h(l_e \cap E \cap \bigcup_{j\in J_k} B_j) \leqslant \sum_k \frac{a_k}{2\left\|a\right\|_1} = \frac{1}{2},$$

che è assurdo. $\square$

Lemma 3.12 (Ricoprimento di Vitali)**.** *Sia F una famiglia di palle aperte e non vuote di $\mathbb{R}^N$ con*

$$\sup\{diam\ B:\ B\in F\}<R<+\infty.$$

Allora esiste una sottofamiglia numerabile $G\subseteq F$, costituita da palle disgiunte, tale che

$$\bigcup_{B\in F}B\subseteq\bigcup_{B\in G}\hat{B},$$

ove $\hat{B}$ è la palla concentrica a B, di raggio quintuplo.

Dimostrazione. Consideriamo la decomposizione $F=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j$, dove

$$F_j=\left\{B\in F:\ \frac{R}{2^j}\leqslant diam\ B<\frac{R}{2^{j-1}}\right\},\qquad j\in\mathbb{N}_0.$$

Definiamo induttivamente $G_j\subseteq F_j$ come segue: notiamo che, detto

$$X=\{\text{sottofamiglie } G \text{ di palle disgiunte } \subseteq F_1\},$$

X è un insieme parzialmente ordinato per inclusione, in cui ogni sottoinsieme $\{G_j\}$ totalmente ordinato ha un maggiorante $\bar{G}=\bigcup_j G_j$. Quindi per il lemma di Zorn esiste una sottofamiglia $G_1\subseteq F_1$ massimale, costituita da palle disgiunte e quindi necessariamente numerabile.
Costruite $G_1,...,G_{j-1}$, scelgo

$$G_j:=\text{ sottofamiglia massimale di palle disgiunte}$$

$$\subseteq\left\{B\in F_j:\ B\cap B'=\emptyset\quad\forall\ B'\in\bigcup_{i=1}^{j-1}G_i\right\}.$$

A questo punto la famiglia

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i\subseteq F$$

è costituita da palle disgiunte ed è numerabile.
Proviamo che per ogni $B\in F$ esiste $B'\in G$ tale che

$$B\cap B'\neq\emptyset,\qquad B\subseteq\hat{B}'.$$

Ciò proverà la tesi. Se $B\in G$ è ovvio. Altrimenti sia $B\in F\setminus G$, allora esiste $j\in\mathbb{N}_0$ tale che $B\in F_j$. Quindi $B=B(x,r)$ con $x\in\mathbb{R}^N$ e $2r<\frac{R}{2^{j-1}}$. Per massimalità di G_j, esiste $B'\in\bigcup_{i=1}^{j-1}G_i$, tale che $B\cap B'\neq\emptyset$. Quindi esiste

$y \in B \cap B'$ e si ha $B' = B(z, \rho)$ con $z \in \mathbb{R}^N$ e $2\rho \geqslant \frac{R}{2^j}$. Allora $B \subseteq \hat{B}'$, poiché se $u \in B$ si ha

$$|u - z| \leqslant |u - y| + |y - z| \leqslant |u - x| + |x - y| + |y - z|$$
$$< 2r + \rho < \frac{R}{2^{j-1}} + \rho < 4\rho + \rho = 5\rho.$$

□

Definizione 3.13. Per una funzione integrabile $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, la *funzione massimale di Kakeya* $f^*_\delta : \mathbb{S}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ di scala δ è così definita:

$$f^*_\delta(e) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{|T^\delta_e(x)|} \int\limits_{T^\delta_e(x)} |f(x)|\, dx, \qquad e \in \mathbb{S}^1,$$

dove $T^\delta_e(x)$ è un tubo di lunghezza 1 e sezione di raggio δ, centrato in x e con i segmenti di lunghezza 1 paralleli alla direzione e, e per $\left|T^\delta_e(x)\right|$ si intende la sua misura di Lebesgue

Osservazione 3.14. In $\mathbb{R}^2$, questi tubi $T^\delta_e(x)$ sono semplicemente dei rettangoli di lati 1 e 2δ centrati in x, con i lati di lunghezza 1 paralleli ad e.

Proposizione 3.15. *In* $\mathbb{R}^2$, *per ogni* $0 < \delta < 1$ *vale*

$$\|f^*_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

In questa dimostrazione useremo la trasformata di Fourier e le sue proprietà di base: per una breve illustrazione rimandiamo all'appendice finale.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f \geqslant 0$. Consideriamo una funzione gaussiana del tipo $\varphi(x) = ce^{-\frac{x^2}{4}}$, dove c è una costante positiva tale che

$$\varphi(x) \geqslant 1 \qquad \text{per } |x| \leqslant 1.$$

Allora per la proposizione 4.4 si ha

$$\hat{\varphi}(\lambda) = c_1 e^{-\lambda^2} \qquad \text{dove } c_1 = 2c\sqrt{\pi}.$$

Siano $x = (x_1, x_2)$ le coordinate in $\mathbb{R}^2$ e definiamo

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\delta^{-1}\varphi(\delta^{-1}x_2) = \frac{c^2}{\delta} e^{-\frac{\delta^2 x_1^2 + x_2^2}{4\delta^2}},$$

$$\rho_\delta^\xi(x) = \delta^{-1}\chi_{T_\xi^\delta(0)}(x) \qquad \text{dove } \xi \in \mathbb{S}^1.$$

Sia p_ξ una rotazione del piano tale che $\xi = p_\xi^{-1}e_1$ e definiamo

$$\psi_\xi = \psi \circ p_\xi;$$

si ha allora

$$\rho_\delta^\xi \leqslant \psi_\xi. \qquad (1)$$

Infatti se $x \notin T_\xi^\delta(0)$, $\rho_\delta^\xi(x) = 0 \leqslant \psi_\xi(x)$; altrimenti per costruzione di φ e per definizione di $T_\xi^\delta(0)$,

$$\rho_\delta^\xi(x) = \delta^{-1} \leqslant \delta^{-1}\varphi(x_1')\varphi(\delta^{-1}x_2') = \psi_\xi(x).$$

Ancora per definizione di ρ_δ^ξ abbiamo

$$(\rho_\delta^\xi \star f)(a) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\delta^\xi(a-x)f(x)\ dx = \delta^{-1}\int_{T_\xi^\delta(a)} f(x)\ dx. \qquad (2)$$

Per valutare $\|f_\delta^*\|_2$ ci serve una stima di $|f_\delta^*(\xi)|$: usando (1) $-$ (2) e la definizione 3.13 di funzione massimale di Kakeya si ha

$$|f_\delta^*(\xi)| = \left|\sup_{a\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{\left|T_\xi^\delta(a)\right|}\int_{T_\xi^\delta(a)} f(x)\ dx\right| = \left|\sup_{a\in\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\delta}\int_{T_\xi^\delta(a)} f(x)\ dx\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\sup_{a\in\mathbb{R}^2}(\rho_\delta^\xi \star f)(a)\right| \leqslant \left\|\rho_\delta^\xi \star f\right\|_\infty \leqslant \|\psi_\xi \star f\|_\infty$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^2}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\psi_\xi(a-x)f(x)\ dx\right| = (2\pi)^{-2}\sup_{a\in\mathbb{R}^2}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\psi_\xi(a-\cdot)}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\ d\lambda\right|$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il teorema 4.5. Poiché

$$\widehat{\psi_\xi(a-\cdot)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2}\psi_\xi(a-x)e^{-i\langle x,\lambda\rangle}\ dx = \int_{\mathbb{R}^2}\psi_\xi(-t)e^{-i\langle a-t,\lambda\rangle}\ dt$$

$$= e^{-i\langle a,\lambda\rangle}\int_{\mathbb{R}^2}\psi_\xi(-t)e^{i\langle t,\lambda\rangle}\ dt = e^{-i\langle a,\lambda\rangle}\int_{\mathbb{R}^2}\psi_\xi(x)e^{-i\langle x,\lambda\rangle}\ dx = e^{-i\langle a,\lambda\rangle}\hat{\psi}_\xi(\lambda)$$

si ha

$$|f_\delta^*(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-2}\sup_{a\in\mathbb{R}^2}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\psi_\xi(a-\cdot)}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\ d\lambda\right|$$

$$= (2\pi)^{-2} \sup_{a\in\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i<a,\lambda>} \hat{\psi}_\xi(\lambda)\hat{f}(\lambda)\ d\lambda \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\hat{f}(\lambda)\right|\ d\lambda$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|}\left|\hat{f}(\lambda)\right|\sqrt{1+|\lambda|}\cdot\sqrt{\frac{\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|}{1+|\lambda|}}\ d\lambda$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2(1+|\lambda|)\ d\lambda\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|}{1+|\lambda|}\ d\lambda\right)^{1/2}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la disuguaglianza di Holder. Diamo una stima del secondo fattore: osserviamo che, per definizione di ψ e ψ_ξ,

$$\hat{\psi}_\xi = \hat{\psi}\circ p_\xi, \qquad \text{inoltre vale per ogni } \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$\hat{\psi}(\lambda) = c_1^2 e^{-\lambda_1^2-\delta^2\lambda_2^2}.$$

Infatti ancora per la proposizione 4.4, applicando il teorema di Tonelli,

$$\hat{\psi}(\lambda) = \frac{c^2}{\delta}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\frac{\delta^2 x_1^2}{4\delta^2}} e^{-i\langle x_1,\lambda_1\rangle} e^{-\frac{x_2^2}{4\delta^2}} e^{-i\langle x_2,\lambda_2\rangle}\ dx_1\ dx_2$$

$$= \frac{c^2}{\delta}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\delta^2 x_1^2}{4\delta^2}} e^{-i\langle x_1,\lambda_1\rangle}\ dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x_2^2}{4\delta^2}} e^{-i\langle x_2,\lambda_2\rangle}\ dx_2$$

$$= \frac{c^2}{\delta}\widehat{\left(e^{-\frac{x_1^2}{4}}\right)}(\lambda_1)\widehat{\left(e^{-\frac{x_2^2}{4\delta^2}}\right)}(\lambda_2)$$

$$= \frac{c^2}{\delta}\sqrt{4\pi}e^{-\lambda_1^2}\cdot\sqrt{4\delta^2\pi}e^{-\delta^2\lambda_2^2} = 4c^2\pi e^{-\lambda_1^2-\delta^2\lambda_2^2}$$

$$= c_1^2 e^{-\lambda_1^2-\delta^2\lambda_2^2}.$$

Di conseguenza , con il cambiamento di variabili $p_\xi(\lambda)=x$, si ha, essendo $\left|J_{p_\xi(\lambda)}\right| = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|}{1+|\lambda|}\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\left|\hat{\psi}(x)\right|}{1+|x|}\ dx$$

$$\leqslant c_1^2\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2}\frac{e^{-\delta^2 x_2^2}}{1+|x_2|}\ dx_1\ dx_2 = c_1^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\ dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\delta^2 x_2^2}}{1+|x_2|}\ dx_2$$

$$c_1^2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\delta^2 x_2^2}}{1+|x_2|}\ dx = 2c_1^2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\delta^2 x_2^2}}{1+x_2}\ dx_2$$

$$\leqslant 2c_1^2\sqrt{\pi}\left(\int_0^{1/\delta} \frac{1}{1+x_2}\ d\lambda_2 + \int_{1/\delta}^{+\infty} \frac{e^{-\delta^2 x_2^2}}{1+x_2}\ dx_2\right)$$

$$\leqslant 2c_1^2\sqrt{\pi}\left(\int_0^{1} 1\ dx_2 + \int_1^{1/\delta} \frac{1}{x_2}\ dx_2 + \delta\int_{1/\delta}^{+\infty} e^{-\delta^2 x_2^2}\ dx_2\right)$$

$$\leqslant 2c_1^2\sqrt{\pi}\left(1+\log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt\right)$$

$$= 2c_1^2\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Applicando il teorema di Tonelli otteniamo

$$\|f_\delta^*\|_2^2 = \int_{\mathbb{S}^1} |f_\delta^*(\xi)|^2\ d\xi$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{S}^1}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2(1+|\lambda|)\ d\lambda\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|}{1+|\lambda|}\ d\lambda\right)\ d\xi$$

$$\lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2(1+|\lambda|)\ d\lambda\ d\xi$$

$$= \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2(1+|\lambda|)\ d\lambda\ \int_{\mathbb{S}^1}\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|\ d\xi.$$

Se dimostriamo che

$$\int_{\mathbb{S}^1}\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right|\ d\xi \lesssim \frac{1}{1+|\lambda|} \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}^2 \qquad (3)$$

allora si ottiene la tesi

$$\|f_\delta^*\|_2^2 \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2\ d\lambda.$$

Proviamo dunque la stima (3) separatamente per $|\lambda|\leqslant 1$ e $|\lambda|>1$. Dato che per ogni $\xi\in\mathbb{S}^1$

$$\left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right| = \left|\hat{\psi}_\xi(p_\xi\lambda)\right| \leqslant e^{-(p_\xi(\lambda))_1^2-\delta^2(p_\xi(\lambda))_2^2} \leqslant 1,$$

se $|\lambda| \leqslant 1$ la stima vale perché

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1} \left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right| \, d\xi \leqslant \int\limits_{\mathbb{S}^1} 1 \, d\xi = 2\pi = \frac{2\pi(1+|\lambda|)}{1+|\lambda|} \leqslant \frac{4\pi}{1+|\lambda|} \lesssim \frac{1}{1+|\lambda|}.$$

Se $|\lambda| > 1$, si ha, ponendo $p_\xi(\lambda) = (p_{\xi 1}, p_{\xi 2})$:
(osserviamo che $|p_\xi(\lambda)| = |\lambda|\,,\ p_{\xi 1} = |\lambda|\cos\theta,\ p_{\xi 2} = |\lambda|\sin\theta$)

$$\int\limits_{\mathbb{S}^1} \left|\hat{\psi}_\xi(\lambda)\right| \, d\xi = \int\limits_{\mathbb{S}^1} e^{-p_{\xi 1}^2 - \delta^2 p_{\xi 2}^2} \, d\xi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-|\lambda|^2 \cos^2\theta - \delta^2 |\lambda|^2 \sin^2\theta} \, d\theta = 2 \int\limits_0^{\pi} e^{-|\lambda|^2(\cos^2\theta + \delta^2 \sin^2\theta)} \, d\theta$$

$$\leqslant 2 \int\limits_0^{\pi} e^{-|\lambda|^2 \cos^2\theta} \, d\theta = 4 \int\limits_0^{\pi/2} e^{-|\lambda|^2 \cos^2\theta} \, d\theta$$

$$= 4 \int\limits_0^{\pi/2} e^{-|\lambda|^2 \sin^2\theta} \, d\theta \leqslant 4 \int\limits_0^{\pi/2} e^{\frac{-4|\lambda|^2\theta^2}{\pi^2}} \, d\theta$$

$$4 \int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{-4|\lambda|^2\theta^2}{\pi^2}} \, d\theta = \frac{2\pi}{|\lambda|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2} \, ds$$

$$= \frac{\pi^{3/2}}{|\lambda|} = \frac{\pi^{3/2}}{1+|\lambda|} \cdot \frac{1+|\lambda|}{|\lambda|}$$

$$\leqslant \frac{2\pi^{3/2}}{1+|\lambda|} \lesssim \frac{1}{1+|\lambda|}.$$

$\square$

Teorema 3.16. *Siano E un insieme F_h con $h \in \mathbb{H}_d$, $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h^2$. Posto*

$$a_k = \sqrt{\frac{k}{\Delta_1(g,h)(2^{-k})}},$$

supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converga. Allora

$$H^g(E) > 0.$$

Per le definizioni di $\mathbb{H}_d$ e $\Delta_1(g,h)$ si vedano 3.6 e 3.8.

Osservazione 3.17. L' ipotesi $g \prec h^2$ del teorema è una condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum_k a_k$; infatti la successione a_k è infinitesima, per k che tende a infinito, solo se $g \prec h^2$.

Dimostrazione. Dato che $E \in F_h$, per la definizione 3.5,

$$H^h_\delta(l_e \cap E) > 1 \qquad \forall\, e \in \mathbb{S}^1,\ \forall\, \delta < \delta_E.$$

Ricordiamo che

$$H^g_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} g(diam\ U_n) : U_n \text{ aperti, } diam\ U_n < \delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\}.$$

Sia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di E tramite palle $B_j = B(x_j, r_j)$. Per la tesi è sufficiente mostrare che per ogni scelta di raggi r_j e per ogni g che rispetta le ipotesi,

$$\sum_j g(r_j) \gtrsim 1. \qquad (1)$$

Infatti fissato un qualsiasi ricoprimento aperto $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di E con $diam\ U_j < \delta$, per ogni aperto U_j esiste una palla aperta B_j di raggio $r_j = diam\ U_j$ tale che $U_j \subseteq B_j$. A maggior ragione $\{B_j\}$ è un ricoprimento aperto di E, quindi se vale la relazione (1) si ha

$$\sum_j g(diam\ U_j) = \sum_j g(r_j) \gtrsim 1.$$

Allora per ogni $\delta > 0$ si ha

$$H^g_\delta(E) \geqslant C > 0,$$

per un'opportuna costante C indipendente da δ; otterremmo allora la tesi $H^g(E) > 0$ passando al limite per $\delta \to 0^+$.
Possiamo limitarci al caso di δ-ricoprimenti con $\delta < \min\left\{\frac{\delta_E}{5}, \frac{1}{2}\right\}$: in particolare, detto $J_k = \left\{j \in \mathbb{N} : 2^{-k} < r_j < 2^{-k+1}\right\}$, si può prendere $J_0 = J_1 = \emptyset$, quindi $E_0 = E_1 = \emptyset$ e di conseguenza $\Omega_0 = \Omega_1 = \emptyset$ dati dal lemma 3.11. Applicando tale lemma si ottiene la decomposizione $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k=2}^\infty \Omega_k$ associata alla successione a. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia

$$F_{k+2} = \bigcup_{j\in J_{k+2}} B_j$$

e definiamo la funzione

$$f(x) = h(2^{-k-2})2^{k+2}\chi_{F_{k+2}}(x).$$

Vogliamo applicare la proposizione 3.15 alla funzione f; valutiamone allora la sua norma L^2:

$$\|f\|_2^2 = h^2(2^{-k-2})2^{2k+4} \int_{F_{k+2}} dx \lesssim h^2(2^{-k-2})2^{2k} \sum_{j\in J_{k+2}} r_j^2$$

$$\leqslant h^2(2^{-k-2})2^{2k} \sum_{j\in J_{k+2}} 2^{-2k-2} \lesssim h^2(2^{-k-2})\sharp J_{k+2},$$

dato che $r_j \leqslant 2^{-k-1}$ per $j \in J_{k+2}$. Quindi

$$\|f\|_2^2 \lesssim h^2(2^{-k-2})\sharp J_{k+2}. \qquad (2)$$

Fissiamo ora k e consideriamo la funzione massimale di Kakeya f_δ^*, di scala $\delta = 2^{-k-1}$, associata ad f.
Siano l_e il segmento unitario tale che $H_\delta^h(l_e \cap E) > 1$, e T_e il rettangolo $(1+2^{-k}) \times 2^{-k}$ costruito intorno a questo segmento (l_e è parallelo ai lati più lunghi e divide a metà il rettangolo). Definiamo, per ogni $e \in \Omega_{k+2}$,

$$J_{k+2}(e) = \{j \in J_{k+2} :\ l_e \cap E \cap B_j \neq \emptyset\}.$$

Grazie al lemma 3.12 possiamo selezionare una sottofamiglia $\widehat{J_{k+2}}(e) \subseteq J_{k+2}(e)$ di palle disgiunte tale che

$$\bigcup_{j\in J_{k+2}(e)} B_j \subseteq \bigsqcup_{j\in \widehat{J_{k+2}}(e)} B(x_j, 5r_j).$$

Notiamo che ogni palla B_j, con $j \in J_{k+2}(e)$ interseca l_e; inoltre almeno metà della palla B_j è contenuta nel rettangolo T_e poiché $r_j \leqslant 2^{-k-1}$ per $j \in J_{k+2}(e)$, ovvero $|T_e \cap B_j| \geqslant \frac{1}{2}\pi r_j^2$. Dividiamo ora il rettangolo in due rettangoli T_e^1, T_e^2 entrambi di dimensioni 1×2^{-k} in modo che $T_e = T_e^1 \cup T_e^2$. Allora per le proprietà dell'integrale e la definizione di funzione massimale di Kakeya si ha

$$\frac{1}{|T_e|}\int_{T_e} f\,dx \leqslant \frac{1}{|T_e|}\left(\int_{T_e^1} f\,dx + \int_{T_e^2} f\,dx\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{|T_e|}\left(\left|T_e^1\right| |f_{2^{-k-1}}^*(e)| + \left|T_e^2\right| |f_{2^{-k-1}}^*(e)|\right) \leqslant 2\,|f_{2^{-k-1}}^*(e)|\,.$$

Perciò

$$|f_{2^{-k-1}}^*(e)| \geqslant \frac{1}{2\,|T_e|}\int_{T_e} f\,dx = \frac{h(2^{-k-2})2^{k+2}}{2\,|T_e|}\left|T_e \cap \bigcup_{j\in J_{k+2}(e)} B_j\right|$$

$$\gtrsim h(2^{-k-2})2^{2k}\left|T_e \cap \bigcup_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} B_j\right| \gtrsim h(2^{-k-2})2^{2k}\sum_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} r_j^2$$
$$\geqslant h(2^{-k-2})2^{2k}\sum_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} 2^{-2k-4} \gtrsim h(2^{-k-2})\sharp\widehat{J_{k+2}}(e) \gtrsim \sum_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} h(r_j),$$

dove nell'ultimo passaggio si usa il fatto che $h \in \mathbb{H}_d$ e $r_j \leqslant 2^{-k-1}$.
Ora, dato che

$$l_e \cap E \subseteq \bigcup_{j\in J_{k+2}(e)} B_j \subseteq \bigsqcup_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} B(x_j, r_j),$$

e per ogni $e \in \Omega_{k+2}$ si ha per il lemma 3.11, $H^h_\delta(l_e \cap E_{k+2}) \gtrsim a_{k+2}$, otteniamo

$$|f^*_{2^{-k-1}}(e)| \gtrsim \sum_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} h(r_j) \gtrsim \sum_{j\in\widehat{J_{k+2}}(e)} h(5r_j) \gtrsim a_{k+2}.$$

Allora abbiamo la stima

$$\|f^*_{2^{-k-1}}(e)\|_2^2 \gtrsim \int_{\Omega_{k+2}} |f^*_{2^{-k-1}}(e)|^2 \gtrsim a^2_{k+2}\sigma(\Omega_{k+2}) = \frac{(k+2)\sigma(\Omega_{k+2})}{\Delta_1(2^{-k-2})}. \qquad (3)$$

Usando (2) e (3) insieme alla proposizione 3.15 si ha

$$\frac{(k+2)\sigma(\Omega_{k+2})}{\Delta_1(2^{-k-2})} \lesssim \|f^*_{2^{-k-1}}(e)\|_2^2 \lesssim \log(2^k)\,\|f\|_2^2 \lesssim (k+2)h^2(2^{-k-2})\sharp J_{k+2}$$

e quindi

$$\frac{\sigma(\Omega_{k+2})}{g(2^{-k-2})} \lesssim \sharp J_{k+2}.$$

Adesso siamo in grado di stimare la somma in (1). Sia $g \in \mathbb{H}$ che rispetti le ipotesi del teorema: allora

$$\sum_{j=0}^{\infty} g(r_j) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j\in J_{k+2}} g(r_j) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j\in J_{k+2}} g(2^{-k-2})$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} g(2^{-k-2})\sharp J_{k+2} \gtrsim \sum_{k=0}^{\infty}\sigma(\Omega_{k+2}) = \sum_{k=2}^{\infty}\sigma(\Omega_k) \geqslant \sigma(\mathbb{S}^1) > 0.$$

□

Osservazione 3.18. In generale non è detto che una funzione $h \in \mathbb{H}$ sia invertibile, perché può essere costante a tratti, quindi non iniettiva. In ogni caso definiamo, se $y \in [0, \infty)$ è immagine per la funzione h,

$$h^{-1}(y) = \sup \{x \in [0, \infty) : \ h(x) = y\}.$$

Lemma 3.19. *Siano $h \in \mathbb{H}, \delta > 0$, I un intervallo con $E \subseteq I$. Sia $\eta > 0$ tale che $h^{-1}(\frac{\eta}{8}) < \delta$ e $H^h_\delta(E) \geqslant \eta > 0$. Allora esistono due sottointervalli I^-, I^+ che sono $h^{-1}(\frac{\eta}{8})$-separati e con $H^h_\delta(I^\pm \cap E) \gtrsim \eta$.*

Dimostrazione. Sia $t = h^{-1}(\frac{\eta}{8})$ e suddividiamo I in $N (N > 2)$ sottointervalli I_j consecutivi (nel senso che si intersecano solo negli estremi) tali che $|I_j| = t$ per $1 \leqslant j \leqslant N - 1$ e $|I_N| \leqslant t$. Dato che per ogni $j \in \{1, ..., N\}$ si ha per ipotesi $|I_j| < \delta$ e $h(|I_j|) \leqslant \frac{\eta}{8}$, abbiamo per ogni j

$$H^h_\delta(E \cap I_j) \leqslant h(|I_j|) \leqslant \frac{\eta}{8} \qquad (1)$$

$$\eta \leqslant H^h_\delta(E) = H^h_\delta(\bigcup_j (E \cap I_j)) \leqslant \sum_j H^h_\delta(E \cap I_j). \qquad (2)$$

Sia allora n il primo indice per cui vale $\sum_{j=1}^n H^h_\delta(E \cap I_j) > \frac{\eta}{4}$. Dato che $\sum_{j=1}^{n-1} H^h_\delta(E \cap I_j) \leqslant \frac{\eta}{4}$, per (1) otteniamo

$$\frac{\eta}{4} < \sum_{j=1}^{n} H^h_\delta(E \cap I_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} H^h_\delta(E \cap I_j) + H^h_\delta(E \cap I_n) \leqslant \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{8} = \frac{3\eta}{8}$$

e analogamente

$$\sum_{j=1}^{n+1} H^h_\delta(E \cap I_j) \leqslant \frac{\eta}{2}.$$

Prediamo $I^- = I_1 \cup ... \cup I_n$, saltiamo I_{n+1}, e sia I^+ l'unione dei rimanenti sottointervalli. Allora per la (2) risulta

$$\sum_{j=n+2}^{N} H^h_\delta(E \cap I_j) \geqslant \frac{\eta}{2}.$$

Chiaramente i sottointervalli I^+ e I^- così costruiti sono $|I_{n+1}|$-separati, dove $|I_{n+1}| = t = h^{-1}(\frac{\eta}{8})$. Inoltre è evidente che $H^h_\delta(I^\pm \cap E) \gtrsim \eta$.

□

Lemma 3.20. *Sia $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente e infinitesima. Data una famiglia di palle $\{B_j = B(x_j, r_j)\}$, definiamo*

$$J_k^b = \{j \in \mathbb{N} : \ b_k < r_j \leqslant b_{k-1}\},$$

e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $\{e_i\}_{i=1}^{M_k}$ un insieme di direzioni b_k-separate. Supponiamo che per ogni i ci siano due segmenti $I_{e_i}^+$ e $I_{e_i}^-$ giacenti sulla stessa direzione e_i e s_k-separati per un certo s_k. Definiamo $\Pi_k = J_k^b \times J_k^b \times \{1, ..., M_k\}$ e

$$L_k^b = \left\{(j_+, j_-, i) \in \Pi_k : I_{e_i}^- \cap B_{j_-} \neq \emptyset, \ I_{e_i}^+ \cap B_{j_+} \neq \emptyset\right\}.$$

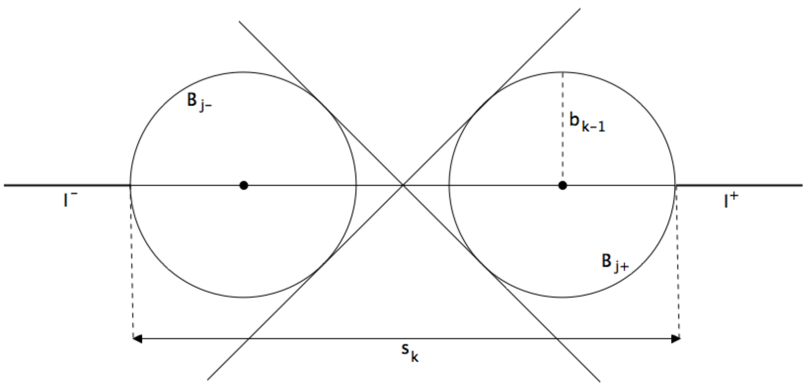
Se risulta $\frac{s_k}{5} > b_{k-1}$ per ogni k, allora

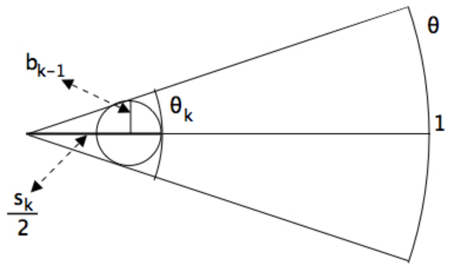
$$\sharp L_k^b \lesssim \frac{b_{k-1}}{b_k}\frac{1}{s_k}(\sharp J_k^b)^2.$$

Dimostrazione. Per calcolare la cardinalità di L_k^b fissiamo una coppia $(j_-, j_+) \in J_k^b$ (e i relativi B_{j_-} e B_{j_+}) e contiamo gli elementi di L_k^b al variare di $i \in \{1, ..., M_k\}$. Per distanza tra due palle intendiamo la distanza tra i rispettivi centri, per semplicità di notazione scriviamo $d(j_-, j_+) = d(B_{j_-}, B_{j_+})$. Se $d(j_-, j_+) < \frac{3}{5}s_k$ allora non esistono indici i tali che $(j_+, j_-, i) \in L_k^b$: infatti in tal caso la massima distanza tra due segmenti $I_{e_i}^+$ e $I_{e_i}^-$ che intersecano le palle corrispondenti è

$$\frac{3}{5}s_k + r_j + r_i \leqslant \frac{3}{5}s_k + 2b_{k-1} < s_k$$

che è assurdo dato che $I_{e_i}^+$ e $I_{e_i}^-$ sono s_k-separati per ipotesi.
Se $d(j_-, j_+) \geqslant \frac{3}{5}s_k$, possiamo prendere in considerazione la configurazione, data dalla prima figura, dove $r_{j_-} = r_{j_+} = b_{k-1}$ e ciascuna delle due palle B_{j_-}, B_{j_+} è tangente esternamente al corrispondente segmento I^-, I^+. Tale configurazione è significativa, perché in tutte le altre configurazioni il cono delle direzioni e_i accettabili è più stretto: possiamo quindi usarla per maggiorare il numero totale delle direzioni possibili al variare delle configurazioni.





Analizziamo nella seconda figura una metà del cono della nostra configurazione. Sia θ l'arco che delimita il cono, quindi ci sono al più $\frac{\theta}{b_k}$ direzioni che sono b_k-separate. Intanto si può notare che $\theta = \frac{2\theta_k}{s_k}$, dove θ_k è l'arco a distanza $\frac{s_k}{2}$ dal centro del cono. È chiaro che $\theta_k \sim b_{k-1}$; allora il numero D di linee in direzioni b_k-separate con intersezioni non vuote con B_{j_-} e B_{j_+} soddisfa

$$D \leqslant \frac{\theta}{b_k} = \frac{2\theta_k}{s_k b_k} \sim \frac{b_{k-1}}{b_k}\frac{1}{s_k}.$$

La tesi segue sommando su tutte le coppie $(j_-, j_+) \in J_k^b$.

□

Teorema 3.21. *Sia E un insieme F_h, con $h \in \mathbb{H}_d$, tale che $h(x) \lesssim x^\alpha$ per qualche $0 < \alpha < 1$, e sia $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h$. Posto*

$$a_k = (\Delta_0(h,g)(2^{-k}))^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}},$$

se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, allora

$$H^{g\sqrt{\cdot}}(E) > 0.$$

Rimandiamo a 3.6 e 3.8 per le definizioni di $\mathbb{H}_d$ e $\Delta_0(h,g)$.

Osservazione 3.22. Analogamente al caso del teorema 3.16, l' ipotesi $g \prec h$ del teorema 3.21 è una condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum_k a_k$.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del teorema 3.16, la tesi sarà provata se, per qualunque g che rispetti le ipotesi, e per ogni scelta di un ricoprimento di E tramite palle aperte di raggi r_j, vale la relazione

$$\sum_j g(r_j) r_j^{1/2} \gtrsim 1.$$

Dato che $E \in F_h$, per la definizione 3.5 si ha

$$H^h_\delta(l_e \cap E) > 1 \qquad \forall\, e \in \mathbb{S}^1,\ \forall\, \delta < \delta_E.$$

Poiché la successione $\{a_k\}$ è infinitesima, esiste k_0 tale che

$$h^{-1}\left(\frac{a_k}{16\,\|a\|_1}\right) < \delta_E \quad \text{per ogni } k \geqslant k_0. \qquad (1)$$

Consideriamo un qualsiasi δ-ricoprimento tramite palle $B = \{B_j\}$ di E con $\delta < \min\left\{\delta_E, 2^{-k_0}\right\}$. Usando il lemma 3.11 otteniamo

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_k \Omega_k, \qquad \Omega_k = \left\{e \in \mathbb{S}^1 :\ H^h_\delta(l_e \cap E_k) > \frac{a_k}{2\,\|a\|_1}\right\}.$$

Di nuovo $E_k = E \cap \bigcup_{j \in J_k} B_j$, ma, per la nostra scelta di δ, gli insiemi J_k e E_k sono vuoti per $2^{-k_0} < 2^{-k}$, cioè $k < k_0$. Dunque anche gli insiemi Ω_k sono vuoti per $k < k_0$, ovvero $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k \geqslant k_0} \Omega_k$.
Siccome per ogni $e \in \Omega_k$ vale la (1), possiamo applicare il lemma 3.19 a $l_e \cap E_k$ con $\eta = \frac{a_k}{2\|a\|_1}$. Otteniamo allora due intervalli $I^-_e, I^+_e \subseteq l_e$ con

$$H^h_\delta(I^\pm_e \cap E_k) \gtrsim a_k,$$

e che sono $h^{-1}(wa_k)$-separati per $w = (16\,\|a\|_1)^{-1}$.
Sia $\left\{e^k_i\right\}_{i=1}^{M_k}$ un sottoinsieme di Ω_k di direzioni 2^{-k}-separate, quindi $M_k \gtrsim 2^k\sigma(\Omega_k)$. Definiamo $\Pi_k = J^b_k \times J^b_k \times \{1, ..., M_k\}$ e

$$\Gamma_k = \left\{(j_-, j_+, i) \in \Pi_k :\ I^-_{e_i} \cap E_k \cap B_{j_-} \neq \emptyset,\ I^+_{e_i} \cap E_k \cap B_{j_+} \neq \emptyset\right\}.$$

Conteremo gli elementi di Γ_k in due modi diversi.
Prima fissiamo j_-, j_+ e contiamo per quanti valori di i la terna (j_-, j_+, i) appartiene a Π_k. Per quanto detto possiamo applicare il lemma 3.20 con $b = \left\{2^{-k}\right\}$: così otteniamo

$$\sharp\Gamma_k \lesssim \frac{1}{h^{-1}(wa_k)}(\sharp J_k)^2.$$

Adesso fissiamo i: in questo caso abbiamo per ipotesi $H^h_\delta(I^+_e \cap E_k) \gtrsim a_k$, quindi

$$a_k \lesssim \sum_{j_+} h(r_{j_+}) \lesssim Kh(2^{-k}),$$

dove K è il numero di elementi della sommatoria. Lo stesso vale per j_-, allora sommando su i si ottiene

$$\sharp\Gamma_k \gtrsim M_k K^2 = M_k\left(\frac{a_k}{h(2^{-k})}\right)^2.$$

Combinando le due stime per la cardinalità di Γ_k,

$$\begin{aligned}\sharp J_k &\gtrsim (\sharp\Gamma_k)^{1/2}(h^{-1}(wa_k))^{1/2}\\ &\gtrsim M_k^{1/2}\frac{a_k}{h(2^{-k})}(h^{-1}(wa_k))^{1/2}\\ &\gtrsim 2^{\frac{k}{2}}(\sigma(\Omega_k))^{1/2}\frac{a_k}{h(2^{-k})}(h^{-1}(wa_k))^{1/2}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Consideriamo ora una funzione dimensione $g \prec h$ come nelle ipotesi del teorema. Si ha

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} g(r_j)r_j^{1/2} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J_k} g(r_j)r_j^{1/2} \geqslant \sum_k\sum_{j\in J_k} g(2^{-k})2^{-\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_k\sum_{j\in J_k} h(2^{-k})(\Delta_0(2^{-k}))^{-1}2^{-\frac{k}{2}} = \sum_k h(2^{-k})(\Delta_0(2^{-k}))^{-1}2^{-\frac{k}{2}}\sharp J_k$$

$$\gtrsim \sum_{k\geqslant k_0}(\sigma(\Omega_k))^{1/2}(\Delta_0(2^{-k}))^{-1}a_k(h^{-1}(wa_k))^{1/2}.$$

dove l'ultimo passaggio segue dal (2) e dal fatto che $J_k = \emptyset$ per $k < k_0$. Per valutare quest'ultima espressione, usiamo l'ipotesi $h(x) \lesssim x^\alpha$ per $\alpha \in (0,1)$, allora $h^{-1}(x) \gtrsim x^{\frac{1}{\alpha}}$, e in particolare

$$(h^{-1}(wa_k))^{1/2} \gtrsim (wa_k)^{1/2\alpha} \gtrsim a_k^{1/2\alpha}.$$

Possiamo finalmente concludere:

$$\sum_j g(r_j)r_j^{1/2} \gtrsim \sum_{k\geqslant k_0}(\sigma(\Omega_k))^{1/2}(\Delta_0(2^{-k}))^{-1}a_k(h^{-1}(wa_k))^{1/2}$$

$$\gtrsim \sum_{k\geqslant k_0}(\sigma(\Omega_k))^{1/2}(\Delta_0(2^{-k}))^{-1}a_k^{\frac{1+2\alpha}{2\alpha}}$$

$$= \sum_{k\geqslant k_0}(\sigma(\Omega_k))^{1/2} \geqslant \left[\sum_{k\geqslant k_0}\sigma(\Omega_k)\right]^{1/2} \geqslant \left[\sigma\left(\bigcup_{k\geqslant k_0}\Omega_k\right)\right]^{1/2} = (\sigma(\mathbb{S}^1))^{1/2} \gtrsim 1.$$

□

3.3 Il caso degli insiemi di Furstenberg classici

Riprendiamo la definizione 1.20 di insieme di Furstenberg classico: dato $\alpha \in \,]0,1]$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice insieme di Furstenberg di tipo α (oppure insieme F_α) se, per ogni direzione e nel cerchio unitario, esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$. Diremo anche che in tal caso E appartiene alla classe F_α.
Un insieme di Furstenberg classico di tipo F_α con $\alpha \in \,]0,1]$, come spiegato nell'osservazione 3.2, non è altro che un caso particolare di insieme di Furstenberg generalizzato (definito in 3.1) di tipo F_h, con $h(x) = x^\alpha$.
Useremo i due importanti teoremi 3.16 e 3.21 sugli insiemi di Furstenberg generalizzati per dare un risultato notevole, dovuto a Wolff, per quanto riguarda la dimensione di Hausdorff di un insieme del tipo F_α. Ricordiamo a tal proposito la definizione di dimensione di Hausdorff:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^N \qquad \dim_H(E) = \inf\left\{p > 0 : H_p^*(E) = H^{x^p}(E) = 0\right\} \in [0, N].$$

Teorema 3.23 (Wolff). *Dato $\alpha \in]0,1]$, sia $E \in F_\alpha$. Allora*

$$dim_H(E) \geqslant \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

Dimostrazione. Per definizione di dimensione di Hausdorff, basta provare che

$$H_p^*(E) = H^{x^p}(E) > 0 \qquad \text{per ogni} \quad p < \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

Per fare ciò, utilizzeremo i teoremi 3.16 e 3.21 con il nostro insieme di Furstenberg di tipo $F_\alpha = F_{x^\alpha}$, dopo aver verificato che tutte le ipotesi siano rispettate. Innanzitutto risulta del tutto ovvio che $x^\alpha \in \mathbb{H}_d$.
Sia $p < 2\alpha$, cioè $x^p \prec x^{2\alpha}$: verifichiamo che tale ipotesi (per questo particolare tipo di funzioni) è condizione sufficiente (oltre che necessaria, vedi l'osservazione 3.17) per la convergenza della serie $\{a_k\}$ del teorema 3.16. La serie in questione è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{\Delta_1(g,h)(2^{-k})}},$$

dove nel nostro caso $h(x) = x^\alpha$ e $g(x) = x^p$. Sostituendo queste funzioni nella serie otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\gamma}\sqrt{k} \qquad \text{dove } \gamma = \frac{p}{2} - \alpha < 0.$$

Questa serie è ovviamente convergente; possiamo allora sfruttare il teorema 3.16 e concludere che

$$H^{x^p}(E) = H_p^*(E) > 0 \qquad \text{per ogni} \;\; p < 2\alpha,$$

ovvero

$$dim_H(E) \geqslant 2\alpha.$$

Procediamo in maniera identica per l'altro caso, dove useremo l'altro teorema. Intanto esaminiamo a parte il caso di $\alpha = 1$: in tal caso, per quanto appena detto, risulta $dim_H(E) \geqslant 2$. Ma un insieme di Furstenberg appartiene per definizione a $\mathbb{R}^2$, quindi la sua dimensione di Hausdorff è $\leqslant 2$. Allora $dim_H(E) = 2$ per $\alpha = 1$.
Per $0 < \alpha < 1$ possiamo usare il teorema 3.21: è evidente che $h(x) = x^\alpha \lesssim x^\beta$ con $0 < \beta < 1$ (si può considerare direttamente $\alpha = \beta$). Sia $p < \alpha$, cioè $x^p \prec x^\alpha$, anche stavolta tale ipotesi è condizione sufficiente per la convergenza della serie $\{a_k\}$ del teorema 3.21. Tale serie è

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_0(h,g)(2^{-k}))^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}},$$

dove nel nostro caso $h(x) = x^\alpha$ e $g(x) = x^p$. Sostituendo queste funzioni nella serie otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{2\alpha\gamma k}{\alpha+1}} \qquad \text{dove } \gamma = p - \alpha < 0,$$

e nuovamente questa serie è convergente. Per il teorema 3.16 possiamo affermare che

$$H^{x^p\sqrt{\cdot}}(E) = H^*_{p+1/2}(E) > 0 \qquad \text{per ogni } \; p < \alpha,$$

ovvero

$$dim_H(E) \geqslant \alpha + 1/2.$$

Unendo i due risultati otteniamo la tesi

$$dim_H(E) \geqslant \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

□

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio 3.24. Consideriamo il classico insieme di Cantor $C = \Gamma_{1/3} \subset \mathbb{R}$ (definito in 1.19), e sia $C' = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di 1/2. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x,y): \; x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; r \in C', \; \theta \in [0,\pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor di tipo $\Gamma_{1/3}$, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove, per il punto (iii) del paragrafo 1.5, si ha $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema 3.13 si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Più precisamente, dato che $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\log 4}{\log 3} \leqslant dim_H(\mathcal{W}) \leqslant 2.$$

4 Appendice: trasformata di Fourier

Introduciamo la trasformata di Fourier ed alcune sue proprietà di base utilizzate nella dimostrazione della proposizione 3.15.

Definizione 4.1. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la trasformata di Fourier di f è la funzione

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle x,\lambda\rangle}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^N,$$

dove per $\langle , \rangle$ si intende il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$.
L'operatore $f \longmapsto \hat{f}$ si indica con $\mathcal{F}$: si tratta di un operatore lineare.

Osservazione 4.2. In generale $\hat{f}(\lambda)$ è a valori complessi ed è banale verificare che vale

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

$$\text{ovvero} \qquad \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Enunciamo ora alcune proprietà ben note della trasformata: per le dimostrazioni rimandiamo a [1], sezione 8.4.

Proposizione 4.3. *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, *allora*

$$\hat{f} \text{ è uniformemente continua su } \mathbb{R}^N \qquad e \qquad \lim_{|\lambda|\to\infty} \hat{f}(\lambda) = 0.$$

Proposizione 4.4. *Sia* $f(x) = e^{-a|x|^2}$ $(a > 0)$ *una gaussiana in* $\mathbb{R}^N$,

$$\text{allora} \qquad \hat{f}(\lambda) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{N/2} e^{-\frac{|\lambda|^2}{4a}}.$$

Teorema 4.5 (Plancherel)**.** $\mathcal{F}$ *si estende univocamente ad un isomorfismo* $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ *tale che*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^{-N} \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Riferimenti bibliografici

[1] Paolo Acquistapace, Appunti di Analisi Funzionale, http://www.dm.unipi.it/∼acquistp/anafun.pdf .

[2] A. S. Besicovitch, On the definitions of tangents to sets of infinite linear measure, Proc. Camb. Phil. Soc. 52 (1956) 2029.

[3] Marton Elekes, Tamas Keleti, Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure, Adv. Math. 201 (2006) 102-115.

[4] L. C. Evans, R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, 1992.

[5] Markus Furtner, The Kakeya problem, www.mathematik.uni-muenchen.de/∼lerdos/Stud/furtner.pdf, 2008.

[6] A.S. Kechris, Classical descriptive set theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer, Berlin, 1995.

[7] Ursula Molter, Ezequiel Rela, Small Furstenberg sets, arXiv.org > math > arXiv:1006.4862, 2011.

[8] Ursula Molter, Ezequiel Rela, Improving dimension estimates for Furstenberg-type sets, Adv. Math. 223 (2010) 672-688.

[9] C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[10] Carlo Viola, Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità, La Matematica nella Società e nella Cultura, Boll. Un. Mat. Ital. (8) 7-A, agosto 2004.

[11] Thomas Wolff, Recent work connected with the Kakeya problem, Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996), 129162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

Ringraziamenti

Ai miei genitori, perché forse è stato più stressante per loro che per me, ma soprattutto per il sostegno costante che mi hanno sempre dimostrato nel corso degli anni.

Agli amici, quelli veri.

A chi mi rispetta e accetta semplicemente per quello che sono.

Ai compagni di facoltà, che mi hanno sopportato in questi anni.

A tutti i miei insegnanti, in particolare a quelli bravi e disponibili.

Al professor Acquistapace, per la competenza e l'infinita disponibilità.

A chi ha assistito alla mia tesi, anche se non ha capito niente.

A tutti coloro che, in più di dieci anni, hanno condiviso con me lo sport più bello del mondo.

A chi crede ancora nei sogni.

A tutti coloro che affrontano la vita con il sorriso.