Esercizio Sia

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare

(i) l'insieme delle funzioni $g \in L^1(\mathbb{R})$, tali che $xg(x) \in L^1(\mathbb{R})$, che verificano l'equazione $g \star g = f$;

(ii) l'insieme delle funzioni $g \in L^1(\mathbb{R})$, che verificano l'equazione $g \star g = f$.

Risoluzione

(i) Se g appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e $g \star g = f$, deve essere anche

$$\widehat{g}^2 = \widehat{g \star g} = \widehat{f}.$$

Ora si ha, denotando con $\mathcal{F}$ l'applicazione $h \mapsto \widehat{h}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}\left((-ix)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(\xi) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(\xi) - \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(\xi)\right] = \\
&= -\frac{d^2}{d\xi^2}e^{-\frac{\xi^2}{2}} - e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} - e^{-\frac{\xi^2}{2}} = -\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Adesso osserviamo che la condizione $xg(x) \in L^1(\mathbb{R})$ significa dire che $\widehat{g} \in C^1(\mathbb{R})$ e che l'equazione $g \star g = f$ diventa, applicando $\mathcal{F}$,

$$[\widehat{g}(\xi)]^2 = -\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

ovvero

$$\widehat{g}(\xi) = \pm i\,\xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad \text{oppure} \quad \widehat{g}(\xi) = \pm i\,|\xi|\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Siccome però $\widehat{g} \in C^1(\mathbb{R})$, dobbiamo escludere la seconda eventualità. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{g}}(y) &= \pm\mathcal{F}\left(i\,\xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\right)(y) = \mp\mathcal{F}\left((-i\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\right)(y) = \\
&= \mp\frac{d}{dy}\left(\sqrt{4\pi}\,e^{-y^2}\right) = \pm 4\sqrt{\pi}\,y\,e^{-y^2};
\end{aligned}$$

osservato che $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, che di conseguenza anche $g \in L^2(\mathbb{R})$, e che dunque vale la formula di inversione, si ottiene

$$g(y) = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{\widehat{g}}(-y) = \mp\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,y\,e^{-y^2}.$$

Se invece si parte dalla sola ipotesi che $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora anche la seconda eventualità è possibile: da $\widehat{g}(\xi) = \pm i\,|\xi|\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ segue, essendo $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{g}}(y) &= \pm i\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,d\xi = \\
&= \pm\left[-i\int_{-\infty}^{0} \xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,d\xi + i\int_{0}^{+\infty} \xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,d\xi\right] = \\
&= \pm\left[i\int_{0}^{+\infty} \xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{i\xi y}\,d\xi + i\int_{0}^{+\infty} \xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,d\xi\right] =: \pm[h(y)+h(-y)].
\end{aligned}$$

Calcoliamo ad esempio $h(-y)$ integrando per parti:

$$\begin{aligned}
h(-y) &= i\int_{0}^{+\infty} \xi\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,d\xi = -2i\int_{0}^{\infty}\left[-\frac{\xi}{2}e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\right]d\xi = \\
&= -2i\left[e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\right]_0^{\infty} - 2i(iy)\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,dy = \\
&= 2i + 2y\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,dy;
\end{aligned}$$

dunque

$$h(y) = 2i - 2y\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{i\xi y}\,dy.$$

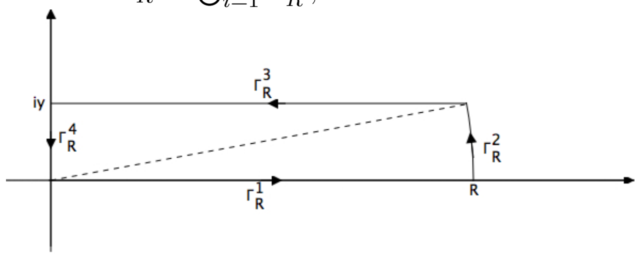
Pertanto

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{g}}(y) &= \pm[h(y)+h(-y)] = \\
&= \pm\left[4i + 2y\left(\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{-i\xi y}\,dy - \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,e^{i\xi y}\,dy\right)\right] =: \pm[4i + I_1 + I_2].
\end{aligned}$$

Calcoliamo I_1 e I_2 utilizzando il teorema dei residui. Per simmetria è sufficiente considerare il caso $y > 0$ (se $y = 0$ ovviamente $I_1 = I_2 = 0$). Per I_1 risulta, completando il quadrato,

$$I_1 = 2y\,e^{-y^2}\int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\xi}{2}+iy\right)^2}d\xi = 4y\,e^{-y^2}\int_{\gamma} e^{-z^2}dz,$$

ove γ è la semiretta $\{x+iy : x \in [0,\infty[\}$. Possiamo considerare, fissato $R>0$, la curva chiusa $\Gamma_R = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_R^i$, ove



$$
\begin{aligned}
&\Gamma_R^1 = [0,R], && \text{orientazione positiva,}\\
&\Gamma_R^2 = \left\{z = R\,e^{i\vartheta} : \vartheta \in [0,\vartheta_R]\right\}, && \text{orientazione positiva,}\\
&\Gamma_R^3 = \{x+iy : x \in [0, R\cos\vartheta_R]\}, && \text{orientazione negativa,}\\
&\Gamma_R^4 = \{it : t \in [0,y]\}, && \text{orientazione negativa.}
\end{aligned}
$$

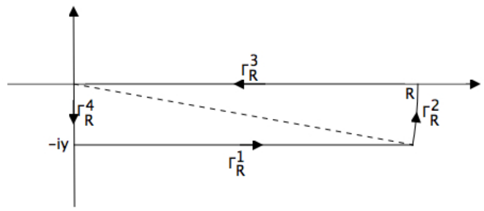
ove $\vartheta_R = \arcsin\frac{y}{R}$. Essendo e^{-z^2} una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, l'integrale di tale funzione sulla curva chiusa Γ_R è nullo per ogni $R>0$. Ne segue, utilizzando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 4y\,e^{-y^2}\int_\gamma e^{-z^2}dz = 4y\,e^{-y^2}\lim_{R\to+\infty}\left[-\int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2}dz\right] = \\
&= 4y\,e^{-y^2}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{\Gamma_R^4} e^{-z^2}dz + \int_{\Gamma_R^1} e^{-z^2}dz + \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2}dz\right] = \\
&= 4y\,e^{-y^2}\lim_{R\to\infty}\left[-i\int_0^y e^{t^2}dt + \int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^{\vartheta_R} e^{-R^2e^{2i\vartheta}}\,iRe^{i\vartheta}d\vartheta\right] = \\
&= -4iy\,e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt + 4y\,e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx + 0 = \\
&= -4iy\,e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt + \sqrt{2\pi}\,y\,e^{-y^2}.
\end{aligned}
$$

In modo analogo,

$$
I_2 = -2y\,e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\xi}{2}-iy\right)^2}d\xi = -4y\,e^{-y^2}\int_\varphi e^{-z^2}dz,
$$

ove φ è la semiretta $\{x-iy : x \in [0,\infty[\}$. Stavolta, fissato $R>0$, la curva chiusa Γ_R è data da $\Gamma_R = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_R^i$, ove



$$
\begin{array}{ll}
\Gamma_R^1 = \{x - iy : x \in [0, R\cos\vartheta_R]\}, & \text{orientazione positiva,} \\
\Gamma_R^2 = \left\{z = R\,e^{i\vartheta} : \vartheta \in [-\vartheta_R, 0]\right\}, & \text{orientazione positiva,} \\
\Gamma_R^3 = [0, R], & \text{orientazione negativa,} \\
\Gamma_R^4 = \{it : t \in [-y, 0]\}, & \text{orientazione negativa.}
\end{array}
$$

Nuovamente, per olomorfia, l'integrale di e^{-z^2} sulla curva chiusa Γ_R è nullo per ogni $R > 0$. Ne segue, come prima,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -4y\,e^{-y^2}\int_\varphi e^{-z^2}dz = -4y\,e^{-y^2}\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\Gamma_R^1} e^{-z^2}dz\right] = \\
&= -4y\,e^{-y^2}\lim_{R\to\infty}\left[-\int_{\Gamma_R^4} e^{-z^2}dz - \int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2}dz - \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2}dz\right] = \\
&= -4y\,e^{-y^2}\lim_{R\to\infty}\left[i\int_{-y}^0 e^{t^2}dt + \int_0^R e^{-x^2}dx - \int_{-\vartheta_R}^0 e^{-R^2e^{2i\vartheta}}iRe^{i\vartheta}d\vartheta\right] = \\
&= -4iy\,e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt - 4y\,e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx + 0 = \\
&= -4iy\,e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}\,dt - \sqrt{2\pi}\,y\,e^{-y^2}.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$\widehat{\widehat{g}}(y) = \pm[4i + I_1 + I_2] = \pm\left[4i - 8iy\,e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}\,dt\right],$$

ed infine

$$g(x) = \pm\frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{g}}(-x) = \pm\left[\frac{2}{\pi}\,i + \frac{4}{\pi}\,ix\,e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt\right],$$

ovvero

$$g(x) = \pm\frac{2}{\pi}\,i\left[1 - 2x\,e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt\right].$$

Osservazione La funzione g appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, come è giusto: infatti essa è continua e pari, e all'infinito si comporta come x^{-2}. Infatti, utilizzando due volte il teorema di de L'Hôpital si ha

$$\begin{aligned}
x^2\left[1-2x\,e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt\right] &= \frac{x^2\,e^{x^2}-2x^3\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} \simeq \\
&\simeq \frac{2x\,e^{x^2}+2x^3\,e^{x^2}-6x^2\int_0^x e^{t^2}\,dt-2x^3\,e^{x^2}}{2x\,e^{x^2}} = \frac{2x\,e^{x^2}-6x^2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{2x\,e^{x^2}} \simeq \\
&\simeq \frac{2\,e^{x^2}+4x^2\,e^{x^2}-12x\int_0^x e^{t^2}dt-6x^2\,e^{x^2}}{2\,e^{x^2}+4x^2\,e^{x^2}}\,;
\end{aligned}$$

da qui, utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi e in particolare il fatto che $x\int_0^x e^{t^2}\,dt \simeq \frac{1}{2}e^{x^2}$ per $x \to +\infty$ (facile verifica), si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[1-2x\,e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2\,e^{x^2}}{4x^2\,e^{x^2}} = -\frac{1}{2}\,.$$