

Estratto da «Archimede» - Fasc. 1-2 (1984)

QUALCHE CALCOLO SUL BILIARDO

INTRODUZIONE.

Osservando una pallina che si muove su di un biliardo ci possiamo porre alcune domande sulla sua traiettoria. Ad esempio possiamo chiederci se dopo un certo numero di rimbalzi la pallina ripasserà dal punto di partenza e con la stessa direzione che aveva all'inizio, o almeno possiamo cercare di trovare delle condizioni perché ciò accada; in altri termini ci domandiamo se e quando la traiettoria della pallina sia periodica.

Accertato che ci sono sia traiettorie periodiche, sia traiettorie che non lo sono, possiamo domandarci se cambiando di poco le condizioni iniziali di una traiettoria periodica essa rimanga tale o no; possiamo inoltre chiederci in che misura questo dipenda dalla forma rettangolare del biliardo.

Per semplificare le cose supporremo il biliardo privo di attriti e perfettamente orizzontale; in questo modo oltre ad essere impossibili « effetti » e virtuosismi, una pallina, una volta messa in moto, non si ferma più e percorre una spezzata con i vertici sui lati del biliardo. Supporremo inoltre la pallina puntiforme. Sotto queste ipotesi l'unica legge cui è soggetta la traiettoria è quella della riflessione sui bordi del rettangolo: l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione.

In questo articolo verranno svolte considerazioni classiche tali da poter essere presentate nelle ultime classi di una scuola secondaria superiore; infatti gli argomenti di matematica usati sono: coordinate cartesiane ed equazione della retta nel piano, riflessioni e simmetrie, proprietà di densità dei numeri razionali nei reali, proprietà dell'ellisse derivanti dalla sua definizione come luogo geometrico.

L'argomento è stato diviso in due paragrafi che possono essere letti indipendentemente:

nel primo vi sono i principali risultati nel caso di un biliardo dalla tradizionale forma rettangolare;

nel secondo è trattato il caso ellittico: le principali proprietà sono ricavate facendo uso soltanto delle proprietà geometriche elementari delle coniche.

Nell'esposizione della materia ci si può avvalere di un terminale video: in particolare noi abbiamo visualizzato il caso del biliardo ellittico sullo schermo di un TEKTRONIX 4052: in appendice è riportato il relativo programma BASIC.

L'argomento è trattato in molti libri e articoli: in particolare per molte delle considerazioni esposte ci si può riferire ad esempio a [1]. Una bibliografia più esauriente la si può trovare in [4].

1. BILIARDO RETTANGOLARE.

Sia R un rettangolo di lati a , b in un piano riferito ad assi cartesiani come in fig. 1: questo è il piano del nostro biliardo.

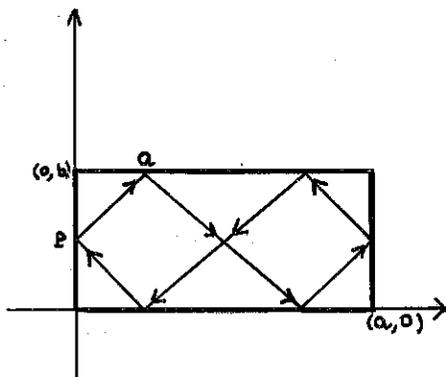


Fig. 1.

Se la pallina, ad esempio, parte da $P \equiv (0, b/2)$ e va a colpire il punto $Q \equiv (a/4, b)$ è facile verificare che dopo 6 passi la traiettoria si richiude e poi si ripete, cioè è periodica.

Esistono però traiettorie che non si richiudono. Per studiare meglio le traiettorie del nostro biliardo conviene pensarle « raddrizzate » nel piano nel modo seguente.

Consideriamo il rettangolo \bar{R} di lati $2a$, $2b$, disposto come in fig. 2 e poi tasselliamo il piano con tante copie di \bar{R} ottenute da \bar{R} con successive traslazioni (l'opportunità di scegliere un rettangolo di lati doppi rispetto al biliardo apparirà chiara nel corso della procedura descritta).

Consideriamo una traiettoria $\gamma = P_1 P_2 \dots P_n \dots$ in R e prolunghiamo il segmento $P_1 P_2$ ad una semiretta Γ uscente da P_1 . Γ è la « raddrizzata »

di γ ; infatti riportando in \bar{R} con le opportune traslazioni i segmenti che Γ taglia sulle copie di \bar{R} si ottiene in \bar{R} un insieme di segmenti tutti paralleli tra di loro (fig. 3).

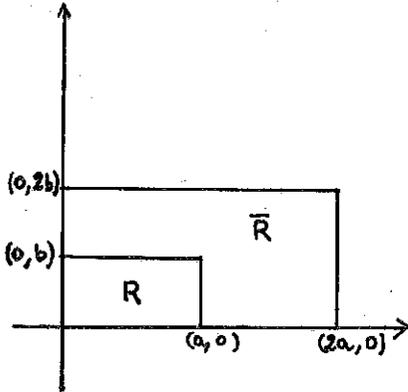


Fig. 2.

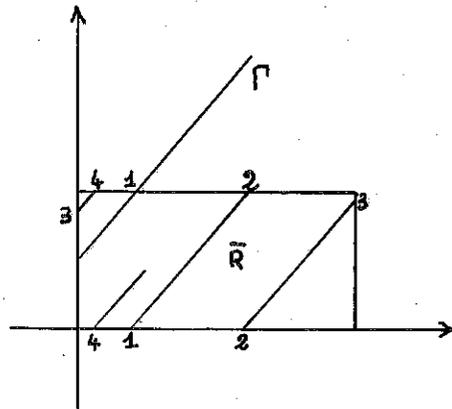


Fig. 3.

\bar{R} è formato dai quattro rettangoli $R_1 = R, R_2, R_3, R_4$, che sono ottenuti da R con le due riflessioni sui lati in neretto o composizione delle due (fig. 4).

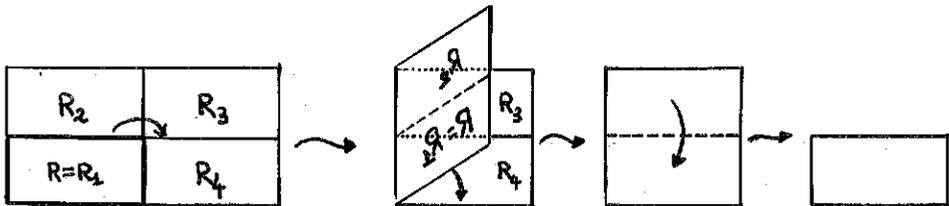


Fig. 4.

Queste stesse riflessioni portano i segmenti paralleli di \bar{R} precisamente nei segmenti della spezzata γ . Ciò è facilmente immaginabile pensando di « piegare » il rettangolo \bar{R} lungo le sue mediane in modo da riottenere R .

Con tale procedimento a ogni traiettoria γ che parte da P_1 corrisponde una semiretta Γ uscente da P_1 e viceversa.

Ora possiamo precisare la condizione affinché una traiettoria sia periodica.

Proposizione 1. Una traiettoria γ uscente da P è periodica se e solo se la pendenza della semiretta corrispondente Γ è un multiplo razionale di b/a (a e b sono le dimensioni del biliardo).

Dim. Sia γ una traiettoria periodica di vertici

$$P_1 = P, P_2, \dots, P_n, P_{n+1} = P$$

Vediamo come è fatta la semiretta Γ uscente da P ; su Γ si deve evidentemente trovare un altro punto Q situato in una copia di \bar{R} esattamente nella stessa posizione che P ha in \bar{R} . Ciò equivale a dire che tra le coordinate (x_Q, y_Q) di Q e le coordinate (x_P, y_P) di P si ha la relazione

$$(1) \quad \begin{cases} x_Q = x_P + 2ka \\ y_Q = y_P + 2hb \end{cases} \quad \text{con } h, k \in \mathbb{Z}$$

Ma allora l'equazione della retta di cui Γ fa parte è

$$y - y_P = \frac{h}{k} \cdot \frac{b}{a} (x - x_P)$$

ossia la pendenza di Γ è un multiplo razionale di b/a :

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{k} \cdot \frac{b}{a} \quad (h \text{ e } k \text{ sono interi}).$$

Viceversa se la pendenza è un multiplo razionale di b/a , ossia la (2) è verificata, il punto Q di coordinate $(x_P + 2ka, y_P + 2hb)$ appartiene a Γ e si trova in una copia di \bar{R} come P si trova in \bar{R} . Ripetendo a ritroso il ragionamento di prima si ottiene quindi che γ è periodica.

Nel caso di traiettorie non periodiche si può dire qualche cosa di più.

Proposizione 2. Una traiettoria γ non periodica è densa in R ; cioè, preso comunque un punto Q di R , γ passa vicino quanto si vuole a Q .

Dim. Se P è il punto iniziale di γ , sappiamo che la semiretta corrispondente Γ esce da P con pendenza tga che è un multiplo irrazionale di b/a .

Quanto vogliamo dimostrare si può esprimere così: supponiamo di porre su ogni copia di \bar{R} un birillo, in modo che tutti i birilli abbiano nel loro rettangolo la stessa posizione; mettiamo in P una pallina e lanciamola lungo la semiretta Γ (la cui pendenza è un multiplo irrazionale di b/a); ebbene, per quanto piccoli siano i birilli e la pallina, almeno un birillo sarà colpito.

Per dimostrare la tesi è sufficiente dimostrare che l'insieme unione dei segmenti paralleli in \bar{R} in cui viene riportata Γ è denso in \bar{R} , anzi basta dimostrare che gli estremi di tali segmenti appartenenti al lato inferiore \overline{OA} di \bar{R} sono densi in \overline{OA} ⁽¹⁾.

(1) Un segmento S in \bar{R} entra nel cerchio di centro Q e raggio $\varepsilon \sin \alpha$ e solo se il suo piede appartiene all'intervallo di centro Q' e ampiezza $2\varepsilon/\sin \alpha$ dove $Q' \in \overline{OA}$ e QQ' è parallelo ad S (fig. 5).

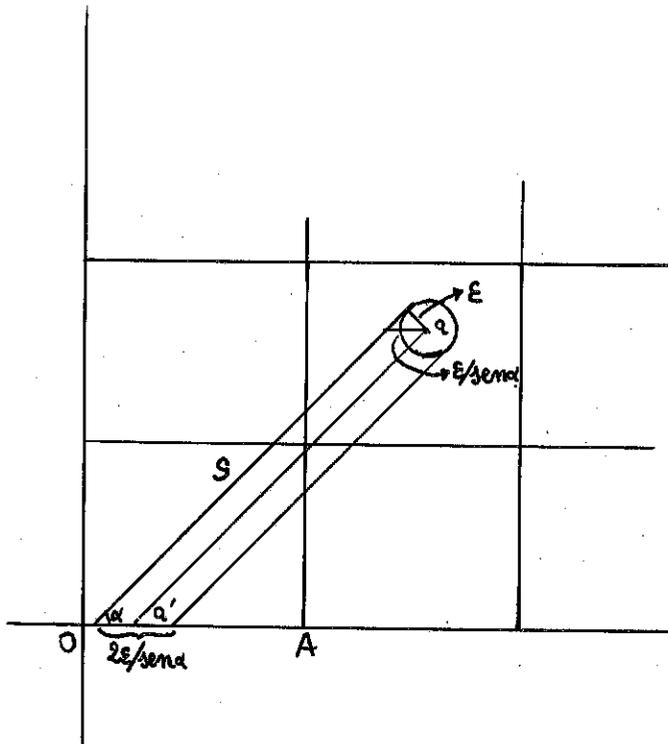


Fig. 5.

Che ascissa hanno gli estremi di questi segmenti? Se il primo parte dal punto $(x_0, 0)$ con $0 \leq x_0 < a$, i successivi saranno della forma $x_0 + m \cdot \frac{a}{\beta} - k \cdot a$ ove $\operatorname{tg} \alpha = \beta \cdot \frac{b}{a}$ con β irrazionale, $h = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b}{\beta} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{\beta}$ (fig. 6)

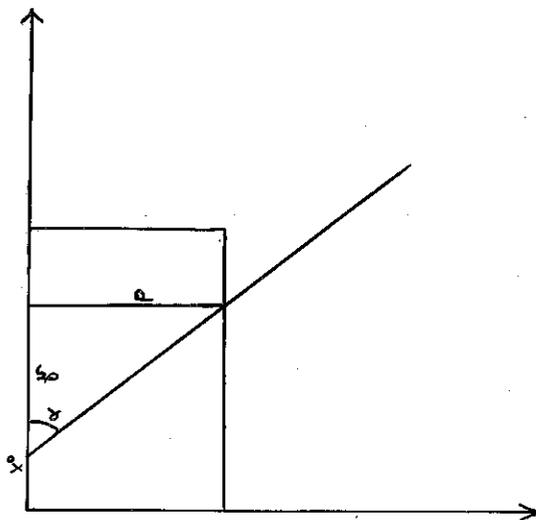


Fig. 6.

e k è l'unico intero per cui $0 \leq x_0 + m \cdot \frac{a}{\beta} - k \cdot a < a$.

Basta allora dimostrare che al variare degli interi m e k la differenza $m \cdot \frac{a}{\beta} - k \cdot a$, o equivalentemente $m - k \cdot \beta$ si può rendere piccola quanto si vuole.

Siamo così ricondotti a dimostrare il seguente lemma.

Lemma. Sia β un numero irrazionale; per ogni intero N esistono due interi m e k tali che

$$|k \cdot \beta - m| < \frac{1}{N}$$

Dim. I punti $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$ dividono l'intervallo $[0, 1]$ in N parti. Possiamo scrivere il numero $k \cdot \beta$ come $m + x$ dove m è intero e $0 < x < 1$.

Pertanto al variare di k , ogni x appartiene ad una delle N parti in cui abbiamo diviso l'intervallo (non può essere un punto di suddivisione perché è irrazionale).

Ma allora tra i numeri $1, 2, \dots, N + 1$ si potranno trovare due interi $k_1 < k_2$ tali che

$$x_1 = k_1 \cdot \beta - m_1 \quad \text{e} \quad x_2 = k_2 \cdot \beta - m_2$$

siano nello stesso intervallino di ampiezza $1/N$.

Abbiamo quindi:

$$|x_1 - x_2| = |(k_1 - k_2) \cdot \beta - (m_1 - m_2)| < \frac{1}{N}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

2. BILLIARDO ELLITTICO.

Che cosa succede se si cambia la forma del bordo del biliardo? Saranno valide considerazioni analoghe a quelle del paragrafo precedente nel caso, ad esempio, di un biliardo di forma triangolare o, più in generale, poligonale?

Per una trattazione di questi casi preferiamo rimandare a [1].

Qui vogliamo invece trattare un caso particolarmente semplice di biliardo dalla forma del bordo diversa.

Supponiamo di avere un biliardo di forma ellittica, che pensiamo come la parte E_c di un piano limitata dalla ellisse e_c di fuochi F_1, F_2 definita da:

$$\{P: d(P, F_1) + d(P, F_2) = c\}.$$

Per le traiettorie di un tale biliardo gli angoli di incidenza e di riflessione si misurano rispetto alla tangente T_p all'ellisse nel punto di impatto P .

Nel caso del biliardo ellittico si hanno risultati abbastanza diversi dal caso rettangolare:

Proposizione 3. Sia γ una traiettoria uscente da P_0 sul biliardo E_0 , di vertici $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$:

1) Se il segmento P_1P_2 passa per uno dei fuochi allora tutti i segmenti P_iP_{i+1} passano alternativamente per F_1 e F_2 .

2) Se il segmento P_1P_2 non attraversa il segmento F_1F_2 allora:

- a) nessun segmento P_iP_{i+1} lo attraversa;
- b) tutti i segmenti P_iP_{i+1} sono tangenti ad una stessa ellisse che ha gli stessi fuochi F_1 e F_2 .

3) Se il segmento P_1P_2 attraversa F_1F_2 allora:

- a) tutti i segmenti P_iP_{i+1} lo attraversano;
- b) tutti i segmenti P_iP_{i+1} sono tangenti ad una stessa iperbole che ha gli stessi fuochi F_1 e F_2 di ε_0 .

Dim: Caso 1. È sufficiente mostrare che per ogni $P \in \varepsilon_0$ i segmenti PF_1 e PF_2 formano angoli uguali con la tangente T_P all'ellisse in P .

Sia F_2' il simmetrico di F_2 rispetto a T_P (fig. 7): esso è allineato con P e F_1 .

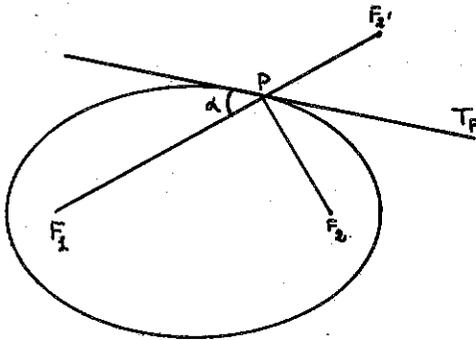


Fig. 7.

Infatti per ogni punto $P' \in T_P$, essendo P' fuori dell'ellisse, si ha:

$$\begin{aligned} d(P', F_1) + d(P', F_2) &= d(P', F_1) + d(P', F_2) \geq \\ &\geq c = d(P, F_1) + d(P, F_2) \end{aligned}$$

L'uguaglianza si ha solo per $P' = P$: questo prova che la retta F_1F_2' incontra T_P precisamente in P . Pertanto l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione.

Dal caso 1 si deduce facilmente che se P_1P_2 attraversa (non attraversa) il segmento F_1F_2 allora anche tutti i tratti successivi di γ attraversano (non attraversano) F_1F_2 (cfr. fig. 8) e questo prova le parti a) dei casi 2 e 3.

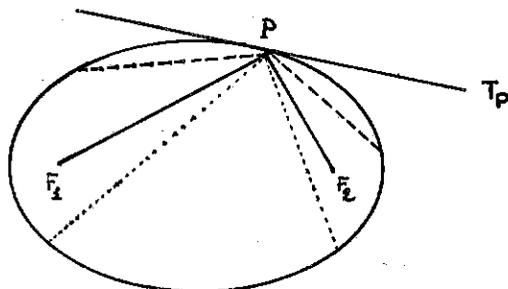


Fig. 8.

Caso 2. È chiaro che esistono due ellissi ε_{c_1} , ε_{c_2} di fuochi F_1 e F_2 tangenti rispettivamente a Q_1P e PQ_2 (indichiamo così due tratti successivi della traiettoria γ).

Basterà dimostrare che $c_1 = c_2$.

A tal fine consideriamo i punti F_1' , simmetrico di F_1 rispetto alla retta Q_1P , e F_2' , simmetrico di F_2 rispetto alla retta Q_2P (fig. 9).

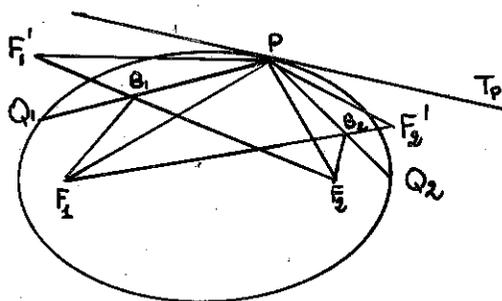


Fig. 9.

Indichiamo con B_1 e B_2 i punti di intersezione descritti nella fig. 8 che stanno rispettivamente sulle ellissi ε_{c_1} e ε_{c_2} .

Si ha:

$$\begin{aligned} d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) &= d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2') = d(F_1, F_2') = c_2, \\ d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) &= d(B_2, F_1') + d(B_2, F_2) = d(F_2, F_1') = c_1. \end{aligned}$$

Ma i triangoli F_1PF_2' e $F_1'PF_2$ sono uguali in quanto $PF_1' = PF_1$, $PF_2 = PF_2'$ e gli angoli compresi sono uguali per l'ipotesi che Q_1P e Q_2P siano tratti successivi di una traiettoria. Quindi $F_1F_2' = c_2 = F_2F_1' = c_1$.

Il 3° caso si dimostra come il 2°, sostituendo alle ellissi ε_{c_1} e ε_{c_2} due iperboli ι_{c_1} e ι_{c_2} .

Osservazione 1. Se ι è una iperbole di fuochi F_1 e F_2 e P è un punto di ι , i segmenti F_1P e F_2P formano angoli uguali con la tangente T_P a ι in P : la dimostrazione è analoga a quella del caso 1 della proposizione 3.

Osservazione 2. In un biliardo ellittico nessuna traiettoria è densa.

Osservazione 3. La proprietà delle traiettorie di un biliardo circolare si deducono facilmente dal caso ellittico portando F_1 a coincidere con F_2 .

In particolare una traiettoria che passa dal centro è periodica con un lato solo e si riduce ad un diametro.

Tutte le altre (periodiche o meno) hanno i lati tangenti ad una stessa circonferenza concentrica al perimetro del biliardo.

Abbiamo elaborato un programma per il TEKTRONIX 4052 che permette di disegnare le traiettorie di un biliardo ellittico.

L'argomento è trattato in appendice.

Una costruzione classica dovuta a Poncelet è la seguente ⁽²⁾:

Siano E ed E' due coniche (ad esempio due ellissi); partiamo da $P_1 \in E$, conduciamo da P_1 una tangente ad E' e chiamiamo P_2 l'altra intersezione di tale tangente con E ; conduciamo da P_2 l'altra tangente ad E' e chiamiamo P_3 l'altra intersezione e così via; costruiamo così una spezzata.

Il teorema di Poncelet dà delle condizioni algebriche su E e E' (che non dipendono dal punto iniziale) affinché tale spezzata si richiuda dopo n passi.

Come caso particolare siano E una ellisse ε_a ed E' una ellisse ε_b con $b < a$ (oppure una iperbole) avente gli stessi fuochi di ε_a .

Ci possiamo allora domandare: la spezzata data dalla costruzione di Poncelet è una traiettoria del biliardo definito da E ?

⁽²⁾ L'ambiente corretto in cui la costruzione di Poncelet è sempre possibile per due coniche qualsiasi è il piano proiettivo complesso.

La proposizione 3 tuttavia ci assicura che nel nostro caso le tangenti considerate sono tutte reali.

È facile vedere, riesaminando la dimostrazione della proposizione 2 che la risposta è affermativa.

Il teorema di Poncelet (la cui dimostrazione (cfr. [2]) non ci è sembrata riconducibile a termini elementari) dà allora come conseguenza il seguente:

Corollario. Sia γ una traiettoria periodica del biliardo ellittico definito da E , tangente all'ellisse (o iperbole) E' confocale con E : allora ogni traiettoria tangente ad E' è periodica ed ha lo stesso numero di lati di γ .

In più, fissata la prima ellisse E e il numero dei lati n della traiettoria periodica, esistono al più un numero finito di ellissi con gli stessi fuochi di E per cui la costruzione dà un'orbita periodica di n lati.

Sorge la domanda se per ogni n esiste una traiettoria periodica con n lati. La risposta è affermativa e vale anche per biliardi di forma più generale.

Proposizione 4. Sia B una regione limitata, convessa del piano avente per bordo una curva chiusa Γ (di classe C^1). Allora per ogni numero naturale n il biliardo definito da B ha una traiettoria periodica con n lati.

Dim. Consideriamo il prodotto $\Gamma^n = \Gamma \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$ (n volte); un elemento $P = (P_1, \dots, P_n) \in \Gamma^n$ può essere pensato come la spezzata chiusa con n lati di vertici $P_1, \dots, P_n, P_{n+1} = P_1$ (fig. 10).

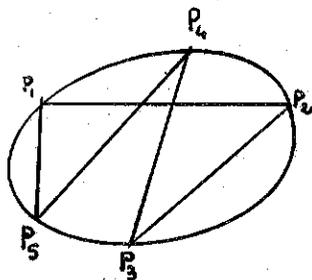


Fig. 10.

L'insieme Γ^n può quindi essere pensato come l'insieme delle spezzate chiuse con al più n lati; infatti può capitare che in P vi siano punti consecutivi coincidenti e quindi la spezzata abbia in effetti meno di n lati.

Consideriamo la funzione « lunghezza »

$$l: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}$$

così definita:

$$l(P) = \sum_{i=1}^n \overline{P_i P_{i+1}}$$

Γ^n è un sottoinsieme chiuso e limitato di $(\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{R}^{2n}$ ed l una funzione continua. Pertanto l ha un massimo in corrispondenza di un punto $\bar{P} \in \Gamma^n$.

a) La spezzata corrispondente a \bar{P} ha effettivamente n lati, cioè se

$$\bar{P} = (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n) \text{ si ha } \bar{P}_i \neq \bar{P}_{i+1} \text{ per } i = 1, \dots, n.$$

Se infatti così non fosse per un certo i_0 , basta fissare un punto P'_{i_0+1} sull'arco di Γ di estremi \bar{P}_{i_0} e \bar{P}_{i_0+2} per ottenere una spezzata $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{i_0}, P'_{i_0+1}, \bar{P}_{i_0+2}, \dots, \bar{P}_n)$ di lunghezza maggiore di $l(\bar{P})$, contro l'ipotesi che \bar{P} sia un punto di massimo (stiamo utilizzando l'ipotesi che B è convesso: cfr. fig. 11).

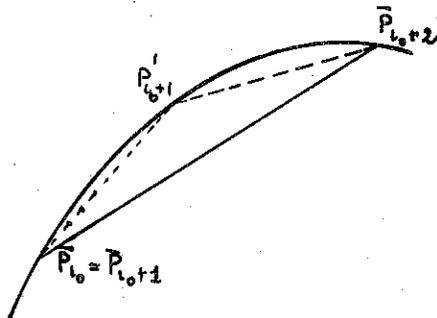


Fig. 11.

b) La spezzata \bar{P} di lunghezza massima è una traiettoria.

Dobbiamo dimostrare che per ogni i l'angolo fra $\bar{P}_{i-1}\bar{P}_i$ e la tangente a Γ in \bar{P}_i è uguale all'angolo fra $\bar{P}_i\bar{P}_{i+1}$ e la tangente a Γ in \bar{P}_i .

Costruiamo l'ellisse di fuochi \bar{P}_{i-1} e \bar{P}_{i+1} passante per \bar{P}_i ; ogni P sull'arco di Γ che va da \bar{P}_{i-1} a \bar{P}_{i+1} è interno all'ellisse in quanto

$$d(P, \bar{P}_{i-1}) + d(P, \bar{P}_{i+1}) \leq d(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i) + d(\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1})$$

perché \bar{P} è la spezzata di lunghezza massima.

Ma allora l'ellisse e Γ devono avere la stessa tangente in \bar{P}_i e dunque gli angoli in questione sono uguali (cfr. caso 1 della proposizione 2) perché sono gli angoli formati dalla tangente in \bar{P}_i a un'ellisse e dalle congiunti \bar{P}_i con i fuochi.

Concludiamo l'argomento con un accenno ad alcune generalizzazioni. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione. Una curva C (di classe C^1) si dice caustica per un biliardo se gode della seguente proprietà: se il segmento iniziale di una traiettoria è tangente a C , allora ogni altro segmento della traiettoria è tangente a C .

Il corollario alla proposizione 3 mostra che in un biliardo ellittico ogni ellisse interna al biliardo e con gli stessi fuochi è una caustica per quel biliardo.

Nella definizione di caustica si è richiesto alla curva C di avere tangente; se si chiede soltanto che C sia il bordo di un convesso, invece della tangente si deve considerare una retta che tocchi il convesso in un punto e lo lasci tutto da una stessa parte; una tale retta viene detta di sostegno per il convesso.

Ci si può porre allora la questione se dato un convesso K , esiste un biliardo di cui esso (o meglio il suo bordo) sia una caustica.

La risposta è affermativa e la costruzione di un tale biliardo prende spunto da quella ben nota dell'ellisse a partire dai suoi fuochi: il segmento che congiunge i fuochi, in particolare, è ben una caustica per l'ellisse.

Si prenda un anello di corda di lunghezza l maggiore del «perimetro» di K e lo si faccia passare attorno a K in modo che pur essendo libero di muoversi non possa mai oltrepassarlo: si metta una matita dentro l'anello e tirando al massimo la si faccia scorrere. In questo modo si disegnerà una curva (una circonferenza se K è un punto, un'ellisse se K è un segmento, ecc.).

Se K è un triangolo la curva è composta da 6 archi di ellisse e non è difficile provare direttamente che il triangolo è una caustica.

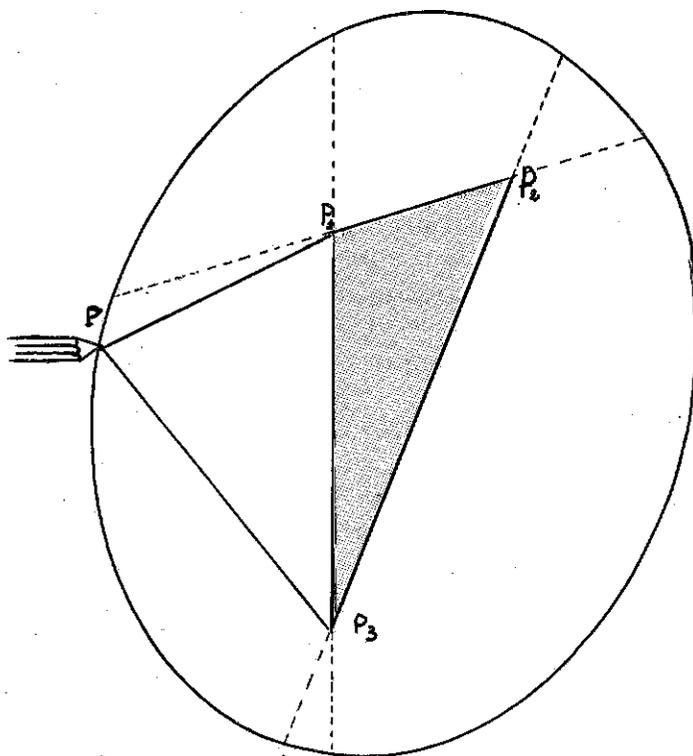


Fig. 12.

Il risultato generale è il seguente:

- 1) Per ogni l maggiore del perimetro di K la costruzione sopra esposta dà un biliardo di cui K è caustica.
- 2) un biliardo ammette una caustica se e solo è costruibile in questo modo.

Naturalmente un biliardo può avere più caustiche e di forme anche molto diverse (si pensi all'ellisse).

Una dimostrazione dei risultati esposti si può trovare in [4], cui rimandiamo anche, come detto nell'introduzione, per una esauriente bibliografia.

APPENDICE.

Abbiamo visualizzato il caso del biliardo ellittico sul TEKTRONIX 4052.

Il programma usato è strettamente legato alla forma ellittica del biliardo, cioè non è pronto a ricevere una curva qualsiasi, calcolare il vettore normale, scrivere l'isometria relativa $\sigma: S^1 \rightarrow S^1$. Per fare questo occorrerebbe modificarlo radicalmente.

In esecuzione il terminale chiede all'utente le coordinate del punto di partenza e la direzione iniziale del moto, dopo di che disegna sullo schermo il biliardo e i primi 500 tratti della traiettoria.

Nel programma le istruzioni 100-300 servono a richiedere i dati e a verificare che il punto di partenza sia interno o sul bordo dell'ellisse, in questo secondo caso viene anche verificato che la direzione prescelta punti all'interno; se le assegnazioni sono errate il programma lo comunica e chiede altri dati.

Con l'istruzione 310 va a una subroutine che disegna una ellisse di semiassi A e B .

Il moto del biliardo è descritto nelle istruzioni 340-370 che vengono percorse 500 volte. Unica eccezione è il primo tratto della traiettoria che parte in generale da un punto interno, per cui occorre un modo leggermente diverso di calcolare il punto successivo di rimbalzo (istruzioni 440-580).

Seguono le subroutine relative al disegno di una ellisse (1000-1070), del calcolo del punto di rimbalzo nel caso generale (2000-2050) e del calcolo della direzione di uscita (2060-2150). Questo ultimo conto utilizza l'equazione parametrica dell'ellisse:

$$\begin{cases} x = A\cos(t) \\ y = B\sin(t) \end{cases}$$

da cui si deduce facilmente che il vettore normale orientato verso l'esterno nel punto (x_0, y_0) dell'ellisse è il vettore $\left(\frac{B}{A}x_0, \frac{A}{B}y_0\right)$.

Per un biliardo a forma di poligono regolare, o più generale, conviene riscrivere il programma piuttosto che adattare questo.

PAOLO ACQUISTAPACE - FABRIZIO BROGLIA

Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri 7 - 56100 Pisa

Dipartimento di Matematica,
Via Buonarroti, 2 - 56100 Pisa

```
100 REM BILIARDO ELLITTICO
110 A = 65
120 B = 50
130 PRINT « DAI IL PUNTO P: LE ASCISSE VARIANO DA — 65 A 65 »
140 PRINT «           LE ORDINATE DA — 50 A 50 »
150 INPUT P1, P2
160 REM VERIFICA PUNTO
170 Z = P1↑2/A↑2 + P2↑2/B↑2
180 IF Z <= 1 THEN 210
190 PRINT « ASSEGNAZIONE ERRATA: IL PUNTO NON È NELL'EL-
      LISSE »
200 GOTO 130
210 PRINT « ASSEGNA IL VETTORE V »
220 INPUT V1, V2
230 REM VERIFICA VETTORE
240 IF Z < 1 THEN 300
250 Z1 = B*P1*V1/A + A*P2*V2/B ,
260 IF Z1 < 0 THEN 300
270 PRINT « ASSEGNAZIONE ERRATA: »
280 PRINT « IL PUNTO È SULL'ELLISSE E IL VETTORE V NON
      PUNTA DENTRO »
290 GOTO 210
300 PAGE
310 GOSUB 1000
320 MOVE P1, P2
330 IF Z1 < 1 THEN 400
340 FOR I = 1 TO 500
350 GOSUB 2000
360 DRAW P1, P2
370 NEXT I
380 END
400 REM CALCOLO DEL PRIMO PUNTO CON P INTERNO
410 J1 = V1↑2/A↑2 + V2↑2/B↑2
420 J2 = V1*P1/A↑2 + V2*P2/B↑2
430 J3 = P1↑2/A↑2 + P2↑2/B↑2 — 1
440 D = J2↑2 — J1*J3
450 D = SQR(D)
460 T = (— J2 + D)/J1
470 P1 = P1 + V1*T
480 P2 = P2 + V2*T
490 REM CALCOLO DEL VETTORE V
500 E1 = — A/B*P2
510 E2 = B/A*P1
520 N = SQR(E1↑2 + E2↑2)
530 E1 = E1↑N
540 E2 = E2↑N
550 S = V1*E1 + V2*E2
560 V1 = — V1 + 2*S*E1
570 V2 = — V2 + 2*S*E2
580 DRAW P1, P2
```

```
590 GOTO 340
1000 REM DISEGNO DI UNA ELLISSE DI SEMIASSI A E B CON CEN.
      TRO IN (0, 0)
1010 WINDOW — 65, 65, — 50, 50
1020 Q = 2*PI/100
1030 MOVE A, 0
1040 FOR I = 1 TO 100
1050 DRAW A*COS(Q*I), B*SIN(Q*I)
1060 NEXT I
1070 RETURN
2000 REM CALCOLO DEL PUNTO INTERSEZIONE, CASO GENERIC0
2010 K1 = V1^2/A^2 + V2^2/B^2
2020 K2 = V1*PI/A^2 + V2*P2/B^2
2030 T = — (2*K2/K1)
2040 P1 = P1 + V1*T
2050 P2 = P2 + V2*T
2060 REM CALCOLO DI V
2070 E1 = — A/B*P2
2080 E2 = B/A*P1
2090 N = SQR(E1^2 + E2^2)
2100 E1 = E1/N
2110 E2 = E2/N
2120 S = V1*E1 + V2*E2
2130 V1 = — V1 + 2*S*E1
2140 V2 = — V2 + 2*S*E2
2150 RETURN
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] CORNFELD I. P. - FOMIN S. V. - SINAI YA. G., *Ergodic theory*, Springer 1981.
- [2] GRIFFITHS P. A., *Variations on a theorem of Abel*, in « *Inventiones Math.* », 35 (1976), pp. 321-390.
- [3] HALMOS P. R., *Lectures on ergodic theory*, The Math. Soc. of Japan 1956.
- [4] TURNER P. H., *Convex caustics for billiards*, in *Convexity and related combinatorial geometry*, edited by Kay D. C. & Breen M., M. Dekker, New York, 1982. pp. 85-106.