

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

La funzione ζ di Riemann

25 Novembre 2011

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Candidato
Benedetta Pratelli

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace
Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

Indice

1	Premesse	7
1.1	Polinomi e numeri di Bernoulli	7
1.2	Funzione Gamma di Eulero	12
2	Funzione ζ di Riemann	19
2.1	Prolungamento analitico e zeri banali	19
2.2	Equazione funzionale di Riemann per $\zeta(s)$	22
2.3	Stime della funzione ζ	27
3	Numeri primi e zeri della funzione ζ	31
3.1	Primo studio della disposizione degli zeri di ζ	31
3.2	Il teorema dei numeri primi	35
3.3	Esistenza di infiniti zeri nella <i>striscia critica</i>	44
3.4	Conclusioni	55

Introduzione

Sebbene il mondo dei numeri interi fin dall'antichità abbia affascinato l'umanità, e molti importanti risultati siano stati ottenuti in particolare dalla scuola greca e dai Pitagorici, dopo le fondamentali opere di Euclide e Diofanto di Alessandria lo studio dei numeri interi e delle loro proprietà è caduto nell'oblio.

Si suole dire che il padre della moderna teoria dei numeri sia Fermat (1601-1665), che per primo dopo molti secoli raggiunge significativi progressi in vari settori. Nel secolo successivo Eulero (1707-1783) studia, fra le moltissime altre cose, la distribuzione dei numeri primi attraverso la funzione

$$\pi(x) = \sum_{p < x} 1, \quad p \text{ primi,}$$

scoprendo la fondamentale identità

$$\prod_{p \text{ primi}} (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

che lega i numeri primi a quella che viene chiamata, dopo che Riemann (1826-1866) la analizzò a fondo, *funzione ζ di Riemann*.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Nell'articolo "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", pubblicato nel 1859, Riemann si propone di studiare la funzione $\pi(x)$ e scopre lo stretto legame tra la funzione ζ ed il *teorema dei numeri primi*, che stabilisce il comportamento asintotico di $\pi(x)$.

Nello stesso articolo viene formulata l'*ipotesi di Riemann* riguardante la disposizione nel piano complesso degli zeri della funzione ζ , che è ancora oggi un problema irrisolto.

In questa tesi ci si propone di introdurre questo argomento e illustrarne alcuni risultati importanti, mettendo in evidenza il legame con il comportamento asintotico della funzione $\pi(x)$. Vediamo in dettaglio il contenuto dei capitoli.

Nel capitolo 1, dedicato alle premesse, introduciamo e dimostriamo alcuni risultati, che utilizzeremo nei capitoli successivi, riguardanti i polinomi di Bernoulli e la funzione Γ di Eulero

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu+s} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right)^s.$$

Nel capitolo 2 ci si occupa per prima cosa di estendere la definizione di ζ a tutto il piano complesso, facendo uso dei polinomi di Bernoulli. Si osserva che ζ è olomorfa su tutto \mathbb{C} , ad eccezione del punto $s = 1$ che è un polo semplice. Successivamente grazie alla funzione $\Gamma(s)$ si arriva a scrivere l'equazione funzionale

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

che garantisce la simmetria degli zeri di ζ rispetto alla retta di ascissa $\frac{1}{2}$, ad eccezione eventualmente dei poli di $\Gamma(s)$.

Il capitolo 3 inizia con lo studio della disposizione degli zeri di $\zeta(s)$: si scopre che non vi sono zeri di ζ nel semipiano $Re(s) > 1$ e che nel semipiano $Re(s) < 0$ gli unici zeri sono in corrispondenza dei punti $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Questi ultimi, poiché si determinano in maniera relativamente semplice, sono detti *zeri banali* di ζ . È invece molto difficile determinare la disposizione degli zeri nella regione di spazio $0 \leq Re(s) \leq 1$, che per questo viene denominata *striscia critica*. Una semplice osservazione, che si può fare immediatamente a partire dall'equazione funzionale, è che gli zeri nella striscia critica sono simmetrici rispetto alla retta verticale di ascissa $\frac{1}{2}$, grazie all'assenza in essa di poli della funzione $\Gamma(s)$.

La congettura di Riemann afferma che tutti gli zeri non banali di ζ si trovano esattamente sulla retta $Re(s) = \frac{1}{2}$.

I risultati finali di questo capitolo sono la dimostrazione del *teorema dei numeri primi*, che afferma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1,$$

e la dimostrazione dell'esistenza di infiniti zeri nella *striscia critica*.

Capitolo 1

Premesse

In questo capitolo definiremo i polinomi di Bernoulli la funzione Γ di Eulero, ed esporremo alcune delle loro proprietà che ci saranno utili per lo studio della funzione ζ di Riemann.

1.1 Polinomi e numeri di Bernoulli

Definizione 1.1. Per ogni $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ la funzione $B_n(x)$ è data dall'equazione

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

I valori $B_n(0) = B_n$ sono chiamati *numeri di Bernoulli*, e sono determinati tramite

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Proposizione 1.2. Le funzioni $B_n(x)$ sono polinomi in x dati da

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k};$$

essi vengono chiamati polinomi di Bernoulli.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n &= \frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti di z^n otteniamo perciò

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 1.3. *Si ha $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Semplicemente derivando si ottiene

$$\begin{aligned} B'_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k x^{n-k+1} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k (n-k+1) x^{n-k} = (n+1)B_n(x). \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.4. *I polinomi di Bernoulli soddisfano l'equazione*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad \forall n \geq 1;$$

di conseguenza

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n \quad \forall n \geq 2.$$

Dimostrazione. Abbiamo la seguente identità

$$\frac{ze^{(x+1)z}}{e^z - 1} - \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = ze^{xz},$$

da cui ricaviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} n z^n.$$

Uguagliando i coefficienti di z^n otteniamo la tesi. □

Questa proposizione può essere generalizzata: fissati due interi M, N , $M < N$, si ha

$$\begin{aligned} B_q(N) - B_q(M) &= [B_q(N) - B_q(N-1)] + \cdots + [B_q(M+1) - B_q(M)] = \\ &= q \sum_{n=M}^{N-1} \binom{n}{q-1} \end{aligned}$$

perciò abbiamo l'equazione

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \frac{1}{q+1} \{B_{q+1}(N) - B_{q+1}(M)\}. \quad (1.1)$$

Corollario 1.5. *Per ogni $n \geq 2$ si ha*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

Dimostrazione. Questa si ricava semplicemente dalle proposizioni 1.2 e 1.4. \square

Abbiamo ottenuto una formula ricorsiva per calcolare i numeri di Bernoulli. Dalla definizione 1.1 segue che $B_0 = 1$, dunque tutti i numeri di Bernoulli sono reali e i polinomi di Bernoulli sono a coefficienti reali. Questi sono i primi dieci numeri:

$$\begin{aligned} B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \\ B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che i numeri di indice dispari maggiore di 1 sono nulli; vale infatti la seguente

Proposizione 1.6. *Per ogni $n \geq 1$ i numeri di Bernoulli di indice dispari B_{2n+1} sono nulli.*

Dimostrazione. Dall'equazione (1.1) otteniamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} n^q &= \frac{1}{q+1} \{B_{q+1}(N) - B_{q+1}(1)\}, \\ \sum_{n=-N+1}^{-1} n^q &= (-1)^q \sum_{n=1}^{N-1} n^q = \frac{1}{q+1} \{B_{q+1}(0) - B_{q+1}(1-N)\}. \end{aligned}$$

Perciò se $q \geq 1$

$$[B_{q+1}(N) - B_{q+1}] = (-1)^{q+1} [B_{q+1}(1-N) - B_{q+1}].$$

Poiché questi due polinomi coincidono per ogni intero positivo N , devono coincidere per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$:

$$[B_{q+1}(x) - B_{q+1}] = (-1)^{q+1} [B_{q+1}(1-x) - B_{q+1}].$$

Derivando entrambi i membri dell'equazione si ha, dal corollario 1.3,

$$B_q(x) = (-1)^q B_q(1-x);$$

perciò se $q = 2n + 1$, con $n \geq 1$, valutando in $x = 0$ si ottiene, in base alla proposizione 1.4

$$B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0) = 0.$$

□

Proposizione 1.7. (Sviluppo in serie di Fourier dei polinomi di Bernoulli) Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{2k-1}(t - [t]) = 2(-1)^k (2k-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2k-1}}, \\ B_{2k}(t - [t]) = 2(-1)^{k-1} (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2k}}. \end{array} \right.$$

Dimostrazione. Per ogni $q \in \mathbb{N}^+$ la funzione $B_q(t - [t])$ è periodica di periodo 1 e, ad eccezione di $B_1(t - [t])$, è pure continua, grazie alla proposizione 1.4. In ogni caso essa è limitata, questo permette di farne lo sviluppo in serie di Fourier:

$$B_q(t - [t]) = \frac{a_0^{(q)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(q)} \cos(2\pi nt) + b_n^{(q)} \sin(2\pi nt) \right)$$

con

$$a_n^{(q)} = 2 \int_0^1 B_q(x) \cos(2\pi nx) dx,$$

$$b_n^{(q)} = 2 \int_0^1 B_q(x) \sin(2\pi nx) dx.$$

Calcoliamo per primo a_0 trattandolo separatamente dagli altri a_n :

$$\begin{aligned} a_0^{(q)} &= 2 \int_0^1 B_q(x) dx = \frac{2}{q+1} \int_0^1 B'_{q+1}(x) dx = \\ &= \frac{2}{q+1} (B_{q+1}(1) - B_{q+1}(0)) = 0, \quad \forall q \geq 1. \end{aligned}$$

Invece nel caso $n > 0$, integrando per parti e ricordando il corollario 1.3, otteniamo

$$\begin{aligned} a_n^{(q)} &= 2 \left[B_q(x) \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 B_q'(x) \sin(2\pi nx) dx = \\ &= -\frac{q}{\pi n} \int_0^1 B_{q-1}(x) \sin(2\pi nx) dx, \end{aligned}$$

ovvero

$$a_n^{(q)} = \begin{cases} -\frac{q}{2\pi n} b_n^{(q-1)}, & q \neq 1 \\ 0, & q = 1, \end{cases}$$

dove nel secondo caso si usa il fatto che $B_0(x) = 1$.

In maniera analoga, calcoliamo

$$b_n^{(q)} = -2 \left[B_q(x) \frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 + \frac{q}{\pi n} \int_0^1 B_{q-1}(x) \sin(2\pi nx) dx,$$

da cui

$$b_n^{(q)} = \begin{cases} \frac{q}{2\pi n} a_n^{(q-1)} & q \neq 1 \\ -\frac{1}{\pi n}, & q = 1, \end{cases}$$

dove il secondo caso segue dal calcolo diretto, osservando che $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, come si vede facilmente dalla proposizione 1.2.

Combinando i due risultati si ottiene la tesi. □

Proposizione 1.8. (Formula di Eulero-MacLaurin) Sia $f(x)$ una funzione di classe C^p , con $p \in \mathbb{N}^+$; per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$ e per $1 \leq q \leq p$, vale

$$\sum_{n=a+1}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{r=1}^q (-1)^r \frac{B_r}{r!} (f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)) + R_q,$$

dove

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \int_a^b B_q(x - [x]) f^{(q)}(x) dx.$$

Dimostrazione. Poiché $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, integrando per parti si ha

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B_1'(x)dx = [f(x)B_1(x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x)dx.$$

Possiamo continuare ad integrare per parti finché la regolarità della funzione f ce lo permette, ottenendo, in base al corollario 1.3,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{r=1}^q (-1)^{r-1} \left[\frac{B_r(x)}{r!} f^{(r-1)}(x) \right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!} f^{(q)}(x)dx.$$

Isoliamo il termine $r = 1$: osservando ora che $B_1(1) = 1 + B_1(0) = 1 + B_1$, e sfruttando per i valori di r diversi da 1 la proposizione 1.4, risulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx = & f(1) + B_1(f(1) - f(0)) + \sum_{r=2}^q (-1)^{r-1} \frac{B_r}{r!} (f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)) + \\ & + (-1)^q \int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!} f^{(q)}(x)dx; \end{aligned}$$

dunque,

$$\begin{aligned} f(1) = & \int_0^1 f(x)dx + \sum_{r=1}^q (-1)^r \frac{B_r}{r!} (f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)) + \\ & + (-1)^{q-1} \int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!} f^{(q)}(x)dx. \end{aligned}$$

Sostituendo ad x il valore $n - 1 + x$ si ha

$$\begin{aligned} f(n) = & \int_0^1 f(n - 1 + x)dx + \sum_{r=1}^q (-1)^r \frac{B_r}{r!} (f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(n - 1)) + \\ & + (-1)^{q-1} \int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!} f^{(q)}(n - 1 + x)dx. \end{aligned}$$

Sommando infine per $n = (a + 1), \dots, b$ i valori $f(n)$ si ottiene la tesi. □

1.2 Funzione Gamma di Eulero

Sia x un intero non negativo. Si può osservare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+n)\dots(x+1)} = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n},$$

dove definiamo

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

e osserviamo che questa definizione si può estendere a tutti gli $a \in \mathbb{C}$.

Possiamo inoltre osservare che

$$x! = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \cdot \frac{(n+1)_x}{n^x} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e tenuto conto del limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1,$$

possiamo concludere che

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Questa sarà la definizione estesa del fattoriale per $x \in \mathbb{C}$, $-x \notin \mathbb{N}^+$; dobbiamo però dimostrare che il limite esiste anche per tali valori.

Proposizione 1.9. *Per ogni $x \in \mathbb{C}$, a meno che $-x \in \mathbb{N}^+$, esiste il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}.$$

Dimostrazione. Prima di tutto mostriamo la non esistenza del limite per x che assume valori interi negativi. Questa si può immediatamente dedurre dal fatto che se $x = -k$, definitivamente il denominatore

$$(x+1)_n = (x+n)\dots(x+1)$$

è nullo, quindi l'argomento del limite è indefinito.

Possiamo poi osservare che

$$\frac{n!n^x}{(x+1)_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x;$$

infatti

$$\frac{n!n^x}{(x+1)_n} = n^x \prod_{j=1}^n \frac{j}{x+j} = n^x \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1};$$

si arriva, poi, al risultato semplicemente perché

$$\prod_{j=1}^n \frac{j+1}{j} = n+1.$$

Inoltre possiamo osservare che

$$\left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x = 1 + \frac{x(x-1)}{2j^2} + O\left(\frac{1}{j^3}\right);$$

questo si può dimostrare facendo lo sviluppo in serie di Taylor del primo membro, come funzione di $\frac{1}{j}$, fino all'ordine 2. Perciò per ogni x fissato, nel dominio dell'ipotesi, il prodotto

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x$$

converge; infatti

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x(x-1)}{2j^2} + O\left(\frac{1}{j^3}\right)\right)$$

converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x(x-1)}{2j^2} + O\left(\frac{1}{j^3}\right)$$

che è evidentemente convergente. □

Definizione 1.10.

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^{x-1}}{(x)_k}.$$

Questa funzione ha poli nei punti $x = 0, -1, -2, \dots$, ed è immediato osservare che

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.2}$$

e che

$$\Gamma(1) = 1. \tag{1.3}$$

Inoltre dalla definizione possiamo dedurre che

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{1.4}$$

infatti

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^{x-1} x}{(x+k)(x+k-1) \dots (x+1)x} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x \left(\frac{k}{x+k} \right) \frac{k! k^{x-1}}{(x)_n} = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Proposizione 1.11. Per ogni x, y con $\operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt =: B(x, y).$$

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1} dt = B(x, y) - B(x+1, y);$$

inoltre, integrando per parti,

$$B(x, y+1) = \left[\frac{1}{x} t^x (1-t)^y \right]_0^1 + \frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dx = \frac{y}{x} B(x+1, y).$$

Mettendo insieme le due cose abbiamo

$$B(x, y) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1).$$

Iterando l'ultima uguaglianza

$$\begin{aligned}B(x, y) &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{y(y+1)} B(x, y+2) = \dots = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n) = \\ &= \frac{(x+y)_n}{(y)_n} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y+n-1} dt.\end{aligned}$$

Cambiamo variabile e moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{n^{y-1}}{n!}$:

$$B(x, y) = \frac{(x+y)_n n^{y-1}}{n!} \cdot \frac{n!}{(y)_n n^{y-1}} n^x \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+y-1} dt.$$

Poiché questo è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo fare il limite per $n \rightarrow \infty$. Per il teorema di Lebesgue, possiamo invertire il limite con l'integrale, ottenendo

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Scelto $y = 1$, sfruttando le equazioni (1.3), (1.4) e la definizione di $B(x, y)$, possiamo ricavare che

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

e da questa uguaglianza segue la tesi. □

Un risultato ricavato durante la dimostrazione, ma importante di per sé, è il seguente.

Corollario 1.12. (Integrale di Eulero) Per $\operatorname{Re}(x) > 0$ si ha

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

A partire dalla proposizione appena dimostrata, possiamo osservare che

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{1.5}$$

infatti

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta = \pi,$$

dove si è sfruttato il cambio di variabile $t = \sin^2 \theta$.

Proposizione 1.13. (Formola di riflessione di Eulero)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Dimostrazione. Se al risultato della proposizione 1.11 applichiamo il cambio di variabile $t = \frac{s}{s+1}$ otteniamo

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds.$$

Consideriamo ora $y = 1 - x$, $0 < x < 1$: grazie all'equazione (1.3), si ha

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s} ds.$$

Per calcolare questo integrale consideriamo

$$\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z} dz,$$

dove C è la curva che si ottiene percorrendo in senso antiorario, a partire dal punto $-R$, la circonferenza centrata nell'origine, proseguendo lungo il segmento che congiunge $-R$ e $-\varepsilon$, percorrendo poi la circonferenza centrata nell'origine in senso orario, ed infine il segmento che congiunge $-\varepsilon$ e $-R$. Per il teorema dei residui questo integrale è

$$-2\pi i = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1 - Re^{i\theta}} d\theta + \int_R^{\varepsilon} \frac{t^{x-1} e^{ix\pi}}{1+t} dt + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{i\varepsilon^x e^{ix\theta}}{1 - \varepsilon e^{i\theta}} d\theta + \int_{\varepsilon}^R \frac{t^{x-1} e^{-ix\pi}}{1+t} dt.$$

Se facciamo tendere $R \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, si verifica facilmente che il primo ed il terzo integrale tendono a zero, mentre sommando il secondo ed il quarto otteniamo

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1} (-2i \sin(\pi x))}{1+t} dt = -2\pi i,$$

e da questa espressione è immediato ricavare la tesi per $0 < x < 1$. Per analiticità possiamo estendere questo risultato a $0 < \operatorname{Re} x < 1$. Lo possiamo poi estendere per continuità a $\operatorname{Re} x = 0$, $x \neq 0$, infine per x traslato di un intero grazie all'equazione (1.4) e al fatto che $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

□

Proposizione 1.14. (Formula di duplicazione di Legendre)

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2s} \Gamma(2s).$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$g(x) = 2^{2x-1} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\};$$

è facile osservare che, grazie all'equazione (1.4), si ha

$$g(x+1) = g(x).$$

Inoltre, grazie ad una generalizzazione della formula di Stirling per il fattoriale complesso, si veda [3],

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \quad \text{per } \operatorname{Re} x \rightarrow \infty,$$

possiamo verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x+n) = 1.$$

Poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = g(x+n)$, possiamo dunque affermare che $g(x) = 1$. Questo, grazie all'equazione (1.5), implica la tesi.

□

Capitolo 2

Funzione ζ di Riemann

In questo capitolo introdurremo la funzione ζ di Riemann ed alcune delle sue proprietà fondamentali.

Definizione 2.1. Definiamo $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ per ogni $s \in \mathbb{C}$.

Questa serie è assolutamente convergente per $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$, ed è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$. Si ha dunque convergenza uniforme per ogni semipiano chiuso $\sigma \geq 1 + \delta > 1$, perciò $\zeta(s)$ è analitica sul semipiano $\sigma > 1$.

2.1 Prolungamento analitico e zeri banali

Ricordando la *formula di Eulero-MacLaurin* 1.8 possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\zeta(s) - 1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} \text{ e con } f(n) = \frac{1}{n^s} \text{ applicare la formula:} \\ \zeta(s) - 1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x^s} dx + \\ &+ \sum_{r=1}^q (-1)^r \frac{B_r}{r!} (-1)^{r-1} s(s+1) \dots (s+r-2) (N^{-s-r+1} - 1) + \\ &+ \frac{(-1)^q}{q!} \int_1^N B_q(x - [x]) (-1)^{q-1} s(s+1) \dots (s+q-1) x^{-s-q} dx = \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx + \sum_{r=1}^q \frac{B_r}{r!} s(s+1) \dots (s+r-2) + \\ &- \frac{1}{q!} \int_1^\infty B_q(x - [x]) s(s+1) \dots (s+q-1) x^{-s-q} dx.\end{aligned}$$

Isolando il termine di indice 1, $B_1 = -\frac{1}{2}$, si ottiene

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^q \frac{B_r}{r!} s(s+1) \dots (s+r-2) + \frac{1}{q!} s(s+1) \dots (s+q-1) \int_1^\infty \frac{B_q(x-[x])}{x^{s+q}} dx. \quad (2.1)$$

L'integrale converge non solo per $\operatorname{Re}(s) > 1$ ma anche per $\operatorname{Re}(s) > 1 - q$ e converge uniformemente per ogni compatto contenuto nel secondo semipiano, perciò questa scrittura fornisce un prolungamento analitico della ζ per tutti i valori di s ad eccezione dell'unico polo semplice nel punto $s=1$.

Proposizione 2.2. *La funzione ζ assume i valori:*

- $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$
- $\zeta(-2m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$

e questi ultimi li indicheremo come zeri banali di ζ .

Dimostrazione. Il primo dei due punti è facile da verificare.

Per il secondo vorremmo definire $\zeta(-k)$ con $q = k+1$ ma ciò non è possibile, perché l'integrale che definisce ζ potrebbe non convergere. È possibile però considerare

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow -k^+} \zeta(s) \\ q = k+1 \end{cases}$$

$$\zeta(-k) = \lim_{s \rightarrow -k^+} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^{k+1} \frac{B_r}{r!} s(s+1) \dots (s+r-2) + \frac{1}{(k+1)!} s(s+1) \dots (s+k) \int_1^\infty \frac{B_{k+1}(x-[x])}{x^{s+k+1}} dx \right].$$

L'ultimo addendo vale

$$\begin{aligned} & - \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)(s+k)}{(k+1)!} \sum_{h=1}^\infty \int_h^{h+1} \frac{B_{k+1}(x-h)}{x^{s+h+1}} dx = \\ & = - \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)(s+k)}{(k+1)!} \sum_{h=1}^\infty \int_0^1 \frac{B_{k+1}(t)}{(t+h)^{s+h+1}} dt. \end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\lim_{s \rightarrow -k^+} (s+k) \sum_{h=1}^\infty \int_0^1 \frac{B_{k+1}(t)}{(t+h)^{s+h+1}} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^1 \frac{B_{k+1}(t) dt}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \int_0^1 \frac{B_{k+1}(t) dt}{h^{1+\varepsilon}} \right] + \left[\frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \int_0^1 B_{k+1}(t) dt \right] \right\}.$$

Dalla proprietà 1.3 dei polinomi di Bernoulli, osserviamo che il secondo termine è nullo, infatti

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_{k+1}(t) dt &= \frac{1}{k+2} \int_0^1 B'_{k+2}(t) dt = \frac{1}{k+2} [B_{k+2}(1) - B_{k+2}(0)] = \\ &= \frac{1}{k+2} [B_{k+2} - B_{k+2}] = 0. \end{aligned}$$

Allora il limite si riduce a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^1 B_{k+1}(t) \left[\frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right] dt.$$

Verifichiamo che possiamo portare la somma dentro l'integrale per convergenza dominata:

$$B_{k+1}(t) \sum_{h=1}^N \left[\frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} B_{k+1}(t) \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right]$$

e inoltre

$$\begin{aligned} |B_{k+1}(t)| \left| \sum_{h=1}^N \left[\frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right] \right| &\leq \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |B_{k+1}(t)| \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} \right] \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |B_{k+1}(t)| \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(1+h)^{1+\varepsilon}} \right] = \sup_{t \in [0,1]} |B_{k+1}(t)| < \infty. \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_0^1 B_{k+1}(t) \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right] dt$$

e questo è uguale a 0 poichè

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left| \int_0^1 B_{k+1}(t) \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right] dt \right| \leq \\
& \leq \varepsilon \int_0^1 |B_{k+1}(t)| \sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(t+h)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \right| dt \leq \\
& \leq \int_0^1 |B_{k+1}(t)| dt \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(1+h)^{1+\varepsilon}} \right] = \varepsilon \int_0^1 |B_{k+1}(t)| dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\zeta(-k) = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} - \sum_{r=2}^{k+1} \frac{B_r}{r!} k(k-1) \dots (k-r+2) (-1)^r.$$

Ricordando però che $B_{2m+1} = 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ nella somma compaiono solo gli addendi per cui $(-1)^r = 1$. Perciò

$$\zeta(-k) = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} - \sum_{r=2}^{k+1} \frac{B_r}{r!} k(k-1) \dots (k-r+2).$$

Moltiplicando a destra e sinistra per $k+1$ e ricordando che

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_1 = -\frac{1}{2} \\ B_q(x) = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} B_k x^{q-k}, \end{cases}$$

otteniamo infine

$$(k+1)\zeta(-k) = -\sum_{r=0}^{k+1} B_r \binom{k+1}{r} = -B_{k+1}(1) = -B_{k+1}.$$

Perciò, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{cases} \zeta(-2m+1) = -\frac{1}{2m} B_{2m} \\ \zeta(-2m) = 0. \end{cases}$$

□

2.2 Equazione funzionale di Riemann per $\zeta(s)$

Lemma 2.3. *Valgono le seguenti identità:*

$$\Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) = \int_0^\infty y^{s-1} \cos y \, dy \quad , 0 < \operatorname{Re}(s) < 1,$$

$$\Gamma(s) \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) = \int_0^\infty y^{s-1} \sin y \, dy \quad , -1 < \operatorname{Re}(s) < 1,$$

dove i secondi membri sono integrali di Riemann impropri.

Dimostrazione. Ricordiamo l'integrale Γ di Eulero 1.12. Chiameremo $s = \sigma + it$. Integriamo la funzione $z^{s-1}e^{-z}$ lungo il rettangolo Q di vertici 0 , M , $M+iM$, iM , e tagliando il vertice 0 con un quarto di circonferenza di raggio ε infinitesimo. L'esponenziale complesso z^{s-1} è una funzione multivoca; la definiamo utilizzando la determinazione principale del logaritmo:

$$\begin{aligned} 0 = \int_Q z^{s-1} e^{-z} dz &= \int_\varepsilon^M x^{s-1} e^{-x} dx + \int_M^{M+iM} z^{s-1} e^{-z} dz + \\ &+ \int_{M+iM}^{iM} z^{s-1} e^{-z} dz + \int_M^\varepsilon (iy)^{s-1} e^{-iy} i \, dy + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\varepsilon e^{i\phi})^{s-1} e^{-\varepsilon e^{i\phi}} \varepsilon i e^{i\phi} d\phi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque, per $0 < \sigma < 1$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_0^M (M+iy)^{s-1} e^{-M-iy} dy \right| \leq \int_0^M (M^2+y^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\operatorname{Arg}(M+iy)t} e^{-M} dy \leq \\ &\leq e^{-M+\frac{\pi}{4}|t|} \int_0^M (M^2+y^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} dy \leq e^{-M+\frac{\pi}{4}|t|} M \cdot M^{\sigma-1} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_M^0 (x+iM)^{s-1} e^{-x-iM} dx \right| \leq \int_0^M (M^2+x^2)^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\operatorname{Arg}(x+iM)t} e^{-x} dx \leq \\ &\leq e^{\frac{\pi}{2}|t|} M^{\sigma-1} \int_0^M e^{-x} dx \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

infine

$$|I_5| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon^{\sigma-1} e^{-\phi t} e^{-\varepsilon \cos \phi} \varepsilon \, d\phi \leq \varepsilon^\sigma e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Questi due limiti mostrano che

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} |I_1 + I_4| = 0$$

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = i \int_0^\infty (iy)^{s-1} e^{-iy} dy = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}(s-1)} \int_0^\infty y^{s-1} e^{-iy} dy$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}s} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-iy} dy.$$

Otteniamo allora

$$\begin{cases} e^{-i\frac{\pi}{2}s} \Gamma(s) = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-iy} dy \\ e^{i\frac{\pi}{2}s} \Gamma(s) = \int_0^\infty y^{s-1} e^{iy} dy, \end{cases}$$

dove la seconda relazione si ottiene con conti analoghi integrando z^{s-1} lungo il rettangolo di vertici $0, M, M - iM, -iM$, e tagliando il vertice 0 con un quarto di circonferenza di raggio ε infinitesimo. Sommando e sottraendo le due equazioni otteniamo la tesi del lemma. Nella seconda equazione del lemma entrambi i membri sono funzioni analitiche anche per $-1 < \operatorname{Re}(s) \leq 0$ perché $\Gamma(s) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ non ha poli in $s = 0$ e perché l'integrale improprio converge anche per $\operatorname{Re}(s) = 0$ grazie al seno. Per il principio del prolungamento analitico le due funzioni coincideranno in tutta la striscia $-1 < \operatorname{Re}(s) < 1$. \square

Proposizione 2.4. Vale la seguente equazione per la funzione ζ

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Dimostrazione. Riprendiamo la funzione ζ che, come abbiamo visto, può essere scritta in maniera estesa (2.1). Se poniamo $q = 3$ questa relazione è ben definita per $\sigma > -2$ e, ricordando che $B_3 = 0$, è uguale a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2}s - \frac{1}{3!} s(s+1)(s+2) \int_1^\infty B_3(x - [x]) x^{-3-s} dx \quad (2.2)$$

Prendiamo ora in considerazione l'integrale

$$\int_0^1 B_3(x - [x]) x^{-3-s} dx = \int_0^1 B_3(x) x^{-3-s} dx,$$

poiché $B_3(x) = x(x-1)(x-\frac{1}{2}) \sim x^3$ per $x \rightarrow 0$, l'integrale converge per $\sigma < -1$.

Ricordando che:

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ B_1(1) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{k+1} B'_{k+1}(x) = B_k(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

integrando per parti si ottiene

$$\frac{1}{6} s(s+1)(s+2) \int_0^1 B_3(x) x^{-3-s} dx = -\frac{B_2}{2} s - \frac{1}{2} - \frac{1}{s-1}.$$

Possiamo scrivere allora

$$\zeta(s) = -\frac{1}{6} s(s+1)(s+2) \int_0^\infty B_3(x - [x]) x^{s-3} dx \quad \text{per } -2 < \sigma < -1$$

Ricordando che vale

$$B_{2k-1}(t - [t]) = 2(-1)^k (2k-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2k-1}}$$

si conclude che

$$\zeta(s) = -2s(s+1)(s+2) \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^3} x^{-s-3} dx.$$

Per giustificare lo scambio tra le operazioni di somma e integrazione, poniamo

$$S_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_0^\varepsilon \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx$$

$$S_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_\omega^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} |S_\varepsilon| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \left| \int_0^\varepsilon \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_0^\varepsilon \frac{(2\pi nx)}{x^{\sigma+3}} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2} \frac{\varepsilon^{-\sigma-1}}{-\sigma-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{per } \sigma < -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_\omega| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \left| \int_\omega^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_\omega^\infty \frac{1}{x^{\sigma+3}} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^3} \frac{\omega^{-\sigma-2}}{\sigma+2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \quad \text{per } \sigma > -2. \end{aligned}$$

Ora osserviamo che nell'intervallo $[\varepsilon, \omega]$ la serie converge uniformemente; possiamo, dunque, scambiarla con l'integrale. Perciò otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^3} x^{-s-3} dx &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \int_\varepsilon^\omega \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^3} x^{-s-3} dx = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_\varepsilon^\omega \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx - S_\varepsilon - S_\omega \right] = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^3} \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+3}} dx \end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $y = 2\pi nx$

$$\zeta(s) = -2s(s+1)(s+2) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^{1-s}} \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{s+3}} dy$$

Poiché con le condizioni che abbiamo imposto su σ vale $-1 < \operatorname{Re}(-s-2) < 0$ possiamo utilizzare la seconda equazione del Lemma 2.3

$$\zeta(s) = -2s(s+1)(s+2)\Gamma(-s-2) \sin\left(-\frac{\pi}{2}s - \pi\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^{1-s}}$$

Poiché $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 2\Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^{1-s}} = \\ &= 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \zeta(1-s) \end{aligned}$$

Questa è l'equazione funzionale di Riemann per $\zeta(s)$. L'abbiamo verificata per $-2 < \sigma < -1$, ma per il principio del prolungamento analitico essa è valida su tutto il piano complesso. Essa può essere riscritta in forma più sintetica grazie alla formula di duplicazione di Legendre 1.14 e alla formula di riflessione di Eulero 1.13.

Otteniamo, infatti, sostituendo $\frac{1-s}{2}$ al posto di s ,

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s)\pi^{\frac{1}{2}}2^s &= \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \\ &= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Perciò possiamo concludere che

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1-s)}{\sin \frac{\pi s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)},$$

da cui

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

□

Osserviamo che il risultato di questa proposizione, posto

$$\Phi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

può essere riscritto più brevemente come

$$\Phi(s) = \Phi(1-s).$$

2.3 Stime della funzione ζ

In questo paragrafo raccogliamo alcune stime del comportamento della funzione $\zeta(s)$ che ci saranno utili per affrontare i capitoli successivi.

Proposizione 2.5.

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1} \quad \text{per } s \rightarrow 1.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata grazie alla formula estesa di ζ (2.1).

□

Proposizione 2.6. *Posto $s = \sigma + it$, per $-2 < \sigma$ si ha*

$$\zeta(s) = O(|t|^3) \quad \text{per } |t| \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. Questa discende dall'equazione (2.2) nella quale, per ottenere la tesi, basta osservare che il modulo dell'argomento dell'integrale è indipendente dal tendere di t a infinito.

□

Proposizione 2.7. *Posto $s = \sigma + it$, per $1 \leq \sigma \leq 2$ si ha*

$$\zeta(s) = O(\log |t|), \quad \text{per } |t| \rightarrow \infty$$

Dimostrazione. Si ha ovviamente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n^s}.$$

Supponiamo $\sigma > 1$, possiamo applicare al secondo addendo la formula di Eulero-MacLaurin 1.8

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_M^N \frac{1}{x^s} dx + B_1(N^{-s} - M^{-s}) + \right. \\ &\quad \left. + \int_M^N B_1(x - [x])(-s)x^{-s-1} dx \right] = \\ &= \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} + \left[\frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}M^{-s} \right] - s \int_M^\infty B_1(x - [x])x^{-s-1} dx \end{aligned}$$

Se imponiamo ora le condizioni $1 < \sigma \leq 2$, $|t| \geq 1$ e $M = \lceil |t| \rceil$ abbiamo

$$\zeta(s) = O(\log |t|) + O(|t|^{-\sigma}) + O(|t| \cdot |t|^{-\sigma}) = O(\log |t|)$$

ovvero la tesi; infatti si verifica banalmente che i primi due addendi hanno quel comportamento asintotico, mentre per quanto riguarda il terzo basta osservare che:

$$\begin{aligned} (\sigma + it) \int_M^\infty B_1(x - [x])x^{-s-1} dx &= O(|t|) \cdot O\left(\int_M^\infty \frac{|B_1(x - [x])|}{|x^{\sigma+1}|} dx\right) = \\ &= O(|t|) \cdot O\left(\int_{|t|}^\infty \frac{\sup_{x \in [0,1]} |B_1(x)|}{|x^{\sigma+1}|} dx\right) = O(|t| \cdot |t|^{-\sigma}) \end{aligned}$$

Se siamo invece nel caso $\sigma = 1$ l'integrale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_M^N \frac{1}{x^s} dx$$

è indeterminato, perché non esiste il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{1-s}}{1-s}$. Tuttavia, la formula ricavata nel caso $\sigma > 1$ continua a valere; infatti se $|t| \geq 1$ la funzione è olomorfa in un intorno del punto $s = 1 + it$ perciò

$$\zeta(1 + it) = \lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta(\sigma + it).$$

□

Proposizione 2.8. *Nelle stesse condizioni della proposizione precedente*

$$\zeta'(s) = O(\log^2 |t|), \quad \text{per } |t| \rightarrow \infty$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questa proposizione è sufficiente derivare la seguente espressione della $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} + \frac{M^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}M^{-s} - s \int_M^{\infty} B_1(x - [x])x^{-s-1} dx$$

ricavata nella proposizione precedente.

$$\begin{aligned} \zeta'(s) = & - \sum_{n=1}^M \frac{\log n}{n^s} - \frac{M^{1-s} \log M}{s-1} - \frac{M^{1-s}}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}M^{-s} \log M + \\ & - \int_M^{\infty} \frac{B_1(x - [x])}{x^{s+1}} dx + s \int_M^{\infty} \frac{B_1(x - [x])}{x^{s+1}} \log x dx \end{aligned}$$

Da questa espressione si deduce la tesi con osservazioni molto simili a quelle fatte nella 2.7 \square

Proposizione 2.9. *La funzione $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ è olomorfa in un intorno di $s = 1$.*

Dimostrazione. Dalla scrittura estesa di $\zeta(s)$

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^q \frac{B_r}{r!} s(s+1) \dots (s+r-2) + \\ & - \frac{1}{(q)!} s(s+1) \dots (s+q-1) \int_1^{\infty} \frac{B_q(x - [x])}{x^{s+q}} dx = \\ = & \frac{1}{s-1} + f(s) \end{aligned}$$

con f olomorfa in un intorno di 1. Perciò

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + f'(s)$$

con f' olomorfa in un intorno di 1. Dunque si ricava con facili calcoli

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{f(s) + (s-1)f'(s)}{1 + f(s)(s-1)} = f(1)$$

\square

Capitolo 3

Numeri primi e zeri della funzione ζ

In questo capitolo studieremo, per quanto possibile, la disposizione degli zeri della funzione ζ ed enunceremo l'*ipotesi di Riemann*. Dimostreremo anche il teorema dei numeri primi e vedremo i collegamenti tra questi due argomenti.

3.1 Primo studio della disposizione degli zeri di ζ

Il teorema fondamentale della teoria dei numeri afferma che ogni numero naturale può essere scomposto in maniera univoca come prodotto di potenze di numeri primi diversi tra loro. Grazie ad esso possiamo subito osservare una relazione tra la funzione ζ e i numeri primi, data dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.1. *Risulta*

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} \right) = \prod_{p \text{ primi}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \text{per } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Dimostrazione. Da ora in poi indicheremo con p i numeri primi, dove 1 non si considera un numero primo. Fissato $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re}(s) > 1$, definiamo la funzione

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Essendo la serie assolutamente convergente possiamo manipolarla con il prodotto finito, ottenendo

$$P(x) = \sum_{n \in A_x} \frac{1}{n^s}, \quad \text{con } A_x = \{n : p/n \Rightarrow p \leq x\}.$$

La differenza tra $\zeta(s)$ e $P(x)$ è data da

$$\zeta(s) - P(x) = \sum_{n \in A_x^c} \frac{1}{n^s}, \quad \text{con } A_x^c = \{n : \exists p/n, p > x\}$$

in particolare gli elementi di A_x^c sono tutti maggiori di x , quindi possiamo concludere che

$$|\zeta(s) - P(x)| \leq \sum_{n \in A_x^c} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}} \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

□

Consideriamo adesso la funzione $\frac{1}{\zeta}$, data dal prodotto $\prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$:

osserviamo che questo converge assolutamente per $\operatorname{Re}(s) > 1$ grazie alla disuguaglianza

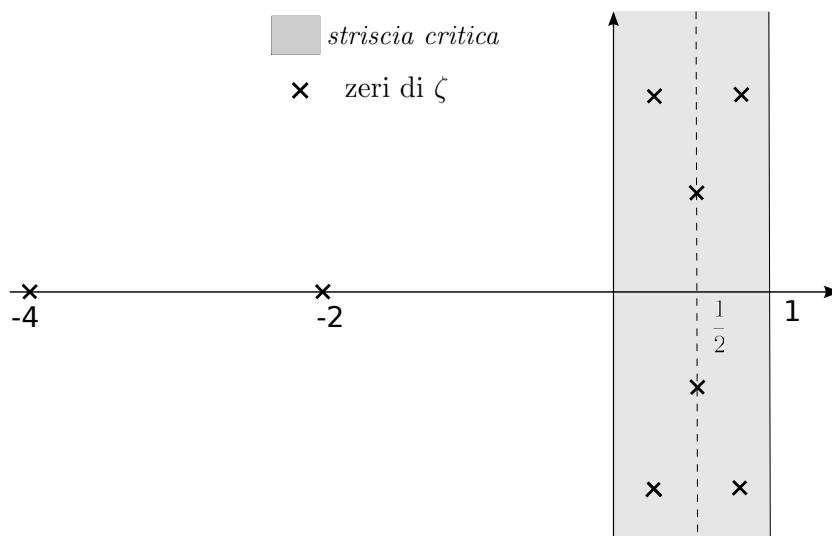
$$\sum_{p \text{ primi}} \frac{1}{p^\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}, \quad \sigma > 1;$$

perciò, essendo tutti i fattori diversi da zero, l'assoluta convergenza della serie implica l'assenza di zeri per ζ nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Per studiare invece gli zeri nel semipiano $\operatorname{Re}(s) < 0$, utilizziamo il risultato della proposizione 2.4: essendo $\zeta(s) \neq 0$ nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > 1$ lo è anche $\zeta(1-s) = \zeta(r)$ per $\operatorname{Re}(r) < 0$ a meno che $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)$ non abbia un polo. Gli zeri di ζ in $\operatorname{Re}(s) < 0$ sono quindi al più nei poli di $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ dunque nei punti $s = 0, -2, -4, \dots$, perciò, grazie alla proposizione 2.2, sappiamo che sono zeri di $\zeta(s)$ i punti $s = -2, -4, -6, \dots$ ma non $s = 0$ nonostante sia un polo per $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

L'esatta disposizione degli zeri in $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ è ancora un problema aperto: chiameremo questa regione *striscia critica*. Una prima osservazione che si può fare è che, non avendo $\Gamma(s)$ poli in quella regione, per la proposizione 2.4 gli zeri di ζ sono simmetrici rispetto alla retta verticale $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Inoltre si può osservare che $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$; questo implica che gli zeri sono anche simmetrici rispetto all'asse reale.

$$\zeta(\rho) = 0 \Rightarrow \zeta(\bar{\rho}) = \zeta(1 - \rho) = \zeta(1 - \bar{\rho}) = 0$$



Tutto quello che riusciremo a dimostrare è che gli zeri nella striscia critica esistono e sono infiniti, ma non stanno sul bordo. La *congettura di Riemann* afferma che questi si trovano tutti sulla retta verticale $Re(s) = \frac{1}{2}$ ed effettivamente a tutt'oggi sono stati trovati zeri solo su di essa.

Proposizione 3.2. *La funzione $\zeta(s)$ non ha zeri sulle rette $Re(s) = 0$ e $Re(s) = 1$.*

Dimostrazione. La prima osservazione che facciamo è che sarà sufficiente dimostrare la proposizione su $Re(s) = 1$, grazie alla simmetria degli zeri sulla *striscia critica*. Per prima cosa osserviamo che per ogni t reale vale la disuguaglianza

$$3 + 4 \cos t + \cos 2t \geq 0,$$

infatti

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos t + \cos 2t &= 3 + 4 \cos t + [\cos^2 t - \sin^2 t] = \\ &= 2 + 4 \cos t + 2 \cos^2 t = 2(1 + \cos t)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che per $\sigma > 1$ si ha:

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = Re(\log \zeta(\sigma + it)) = Re\left(\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma-it}\right),$$

ove

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{se } n = p^m \quad p, \text{ primo,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo risultato deriva dalla proposizione 3.1. Infatti

$$\log(\zeta(\sigma + it)) = - \sum_{p \text{ primi}} \log \left(1 - \left(\frac{1}{p} \right)^{\sigma + it} \right)$$

Possiamo utilizzare lo sviluppo in serie del logaritmo:

$$\log(1 + u) = \sum_{n > 0} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}, \quad |u| < 1;$$

scelto $u = - \left(\frac{1}{p} \right)^{\sigma + it}$, si ha $|u| < 1$ per ogni p primo, quando $\sigma > 0$. Perciò

$$\log(\zeta(\sigma + it)) = \sum_{p \text{ primi}} \sum_{n > 0} \frac{1}{n} p^{-ns},$$

ovvero

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \operatorname{Re} \left(\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \sum_{p \text{ primi}} p^{-ns} \right); \quad (3.1)$$

poiché l'applicazione che a (n, p) associa p^n , con p primo e $n \in \mathbb{N}^+$, è iniettiva, possiamo scrivere, con i c_k sopra definiti,

$$\log |\zeta(s)| = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=2}^{\infty} c_k k^{-s} \right),$$

che è la nostra tesi. Allora

$$\log |\zeta(s)| = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \operatorname{Re} (n^{-\sigma - it}) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma} \cos(t \log(n))$$

e utilizzando la prima proprietà che avevamo dimostrato, otteniamo la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned} \log |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| &= \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma} [3 + 4 \cos(t \log(n)) + \cos(2t \log(n))] \geq 0. \end{aligned}$$

Per $\sigma > 1$ abbiamo

$$|\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| \geq 1, \quad (3.2)$$

$$((\sigma - 1)\zeta(\sigma))^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \leq \frac{1}{\sigma - 1} \quad (3.3)$$

Supponiamo ora per assurdo che per un certo valore di t si abbia

$$\zeta(1 + it) = 0,$$

cioè che vi siano zeri sul bordo della striscia critica. Ne ricaveremmo il seguente limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} = \lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1} = \zeta'(1 + it).$$

Grazie a questa osservazione e alla proposizione 2.5 se passiamo al limite per $\sigma \rightarrow 1$ in entrambi i membri della disequazione (3.3), si può osservare che il primo limite è finito,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} ((\sigma - 1)\zeta(\sigma))^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = 1 \cdot |\zeta'(1 + it)|^4 \cdot |\zeta(1 + 2it)|,$$

mentre il secondo è infinito

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sigma - 1} = +\infty :$$

questo porta ad un assurdo. □

3.2 Il teorema dei numeri primi

Definiamo la funzione costante a tratti $\pi(x)$ che conta i numeri interi primi che non superano il valore $x \in \mathbb{R}$:

Definizione 3.3.

$$\pi(x) = \sum_{p \text{ primi} \leq x} 1.$$

L'obiettivo di questa sezione è, procedendo per piccoli passi, quello di arrivare alla dimostrazione del teorema seguente.

Teorema 3.4. (dei numeri primi)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Per prima cosa vediamo il legame tra questo teorema e la funzione ζ : si ha

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primi}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Se passiamo alla derivata logaritmica, grazie all'espressione (3.1), otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{d}{ds} \log(\zeta(s)) = \frac{d}{ds} \sum_{p \text{ primi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns} = \sum_{p \text{ primi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{ds} e^{-\log(p)ns} = \\ &= - \sum_{p \text{ primi}} \log p \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^{-ns} \right). \end{aligned}$$

Questa relazione si può anche scrivere come

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

ove si è definito

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{per } n = p^k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione 3.5. Poniamo

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

La funzione $\psi(x)$, evidentemente collegata alla ζ , sarà più facile da discutere della $\pi(x)$.

Proposizione 3.6. Per dimostrare il teorema dei numeri primi è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Dimostrazione. Possiamo subito dire che

$$\frac{\psi(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{x} \sum_{p \text{ primi} \leq x} \log p \left[\frac{\log x}{\log p} \right].$$

Infatti, per la definizione dei coefficienti $\Lambda(n)$, si ha

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p \text{ primi} \leq x} \log p \cdot m_p$$

dove m_p è il più grande intero tale che $p^{m_p} \leq x$, cioè $m_p = \left[\frac{\log x}{\log p} \right]$. Perciò

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \sum_{p \leq x} \log p \frac{\log x}{\log p} = \frac{1}{x} \log x \pi(x),$$

dunque con semplici passaggi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq 1.$$

Sia ora $\omega(x)$ una funzione monotona crescente per $x \geq 2$ per cui valga $0 < \omega(x) < x$. Per il momento non specifichiamo come è fatta questa funzione: la sceglieremo in seguito come risulterà più vantaggioso. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x)}{x} &\leq \frac{\log x}{x} \pi(\omega(x)) + \frac{\log x}{x} (\pi(x) - \pi(\omega(x))) = \\ &= \frac{\log x}{x} \pi(\omega(x)) + \frac{\log x}{x} \left(\sum_{\omega(x) \leq p \leq x} 1 \right) \leq \\ &\leq \frac{\log x}{x} \left[\pi(\omega(x)) + \frac{1}{\log \omega(x)} \left(\sum_{\omega(x) \leq p \leq x} \log p \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{\log x}{x} \left[\pi(\omega(x)) + \frac{1}{\log \omega(x)} \left(\sum_{p \leq x} \log p \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{\log x}{x} \left[\pi(\omega(x)) + \frac{\psi(x)}{\log \omega(x)} \right] \end{aligned}$$

Poiché $\pi(\omega(x)) \leq \omega(x)$ abbiamo la seguente disuguaglianza

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \pi(x) \frac{\log x}{x} \leq \frac{\log x}{x} \omega(x) + \frac{\log x}{\log \omega(x)} \frac{\psi(x)}{x}$$

Se trovassimo una ω con tutte le proprietà già dette e per cui valgano

$$\begin{cases} \frac{\log x}{x} \omega(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \\ \frac{\log x}{\log \omega(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \end{cases}$$

allora si avrebbe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \omega(x) + \frac{\log x}{\log \omega(x)} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

da cui, grazie alla disuguaglianza appena vista, dedurremmo la tesi della proposizione:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1.$$

In effetti tale funzione $\omega(x)$ esiste: si verifica infatti facilmente che la seguente funzione rispetta tutte le proprietà sopra scritte:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq e^2 \\ \frac{x}{(\log x)^2} & \text{se } e^2 \leq x. \end{cases}$$

□

Osservazione. I due limiti sono addirittura equivalenti. Infatti la disuguaglianza

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \pi(x) \frac{\log x}{x} \leq \frac{\log x}{x} \omega(x) + \frac{\log x}{\log \omega(x)} \frac{\psi(x)}{x}$$

può essere riscritta, come

$$\frac{\pi(x) \log \omega(x)}{x} - \frac{\log \omega(x)}{x} \omega(x) \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x},$$

e in questa relazione il primo e il terzo membro tendono a 1 se vale il *teorema dei numeri primi*.

Lemma 3.7. Per ogni intero $k \geq 1$ e per ogni $y > 0$ reale vale che

$$I_k(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \begin{cases} 0 & \text{per } y \in (0, 1] \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{y}\right)^k}{k!} & \text{per } y \in (1, \infty) \end{cases}$$

Dimostrazione. Per primo studiamo il caso in cui $0 < y \leq 1$: integriamo la funzione $f(s) = \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)}$ lungo la curva chiusa formata dal segmento verticale che congiunge i punti $2+i\omega$, $2-i\omega$ e dalla semicirconferenza destra C_ω di raggio ω centrata in 2. Poiché $f(y)$ non ha poli dentro la curva appena descritta

$$\int_{C_\omega} f dz + \int_{2+i\omega}^{2-i\omega} f dz = 0$$

Perciò, passando al limite per ω che tende all'infinito, osserviamo che

$$I_k(y) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\omega} f(s) ds;$$

d'altra parte, se $\omega > k + 2$, si ha

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{C_\omega} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| = \\
& = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^{2+\omega e^{it}}}{(2+\omega e^{it})(2+\omega e^{it}+1)\dots(2+\omega e^{it}+k)} dt \right| \leq \\
& \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{\sqrt{\omega^2+4} \cdot \sqrt{\omega^2+9} \dots \sqrt{\omega^2+(k+2)^2}} dt = \\
& = \frac{\pi y^2}{\omega^{k+1}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

questo dimostra la tesi nel primo caso.

Se invece $1 < y$ integriamo la stessa funzione $f(y)$ sulla curva formata dal segmento verticale che congiunge i punti $2 - i\omega$, $2 + i\omega$ e dalla semicirconferenza sinistra C'_ω considerando $\omega > k + 2$ in modo che la curva includa tutti i poli $0, -1, \dots, -k$ dell'integrando.

Il residuo nel generico punto $-j$ con $j = 0, \dots, k$ vale $\frac{y^{-j}}{(-1)^j j!(k-j)!}$, perciò

$$I_k(y) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_\omega} f(s) ds + \sum_{j=0}^k \frac{y^{-j}}{(-1)^j j!(k-j)!}$$

$$\left| \int_{C'_\omega} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| \leq \frac{\pi y^2}{(\omega-2)\dots(\omega-k-2)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Perciò } I_k(y) = \sum_{j=0}^k \frac{y^{-j}}{(-1)^j j!(k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-y)^{-j} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^k.$$

□

Definizione 3.8. Per $x > 1$, definiamo la funzione

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds$$

Grazie all'assoluta e uniforme convergenza della somma e dell'integrale è possibile invertirne l'ordine, ottenendo così, per il lemma appena dimostrato,

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) I_1\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right).
\end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1},$$

la quale è regolare in $s = 1$ (proposizione 2.9) e nell'intero semipiano $\operatorname{Re}(s) \geq 1$, essendo $\zeta(s) \neq 0$ in esso. Possiamo dedurre che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)(s-1)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)(s+2)} ds = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

dove abbiamo utilizzato il lemma 3.7. Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - R(x), \\ \text{ove } R(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Abbiamo adesso intenzione di spostare la retta di integrazione nella definizione di $R(x)$ da quella di ascissa 2 a quella di ascissa 1. Questo passaggio si può giustificare semplicemente integrando lungo il rettangolo con due lati sulle rette in questione e altezza che va da $-M$ a M , osservando che al suo interno non vi sono poli della funzione e gli integrali sui lati orizzontali tendono a zero per M che tende all'infinito. Per farlo dovremo stimare il comportamento di $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, come nel lemma che segue.

Lemma 3.9. *Data $s = \sigma + it$, per $1 \leq \sigma \leq 2$ si ha*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^9 |t|), \quad \text{per } |t| \rightarrow \infty$$

Dimostrazione. Ricordiamo che per $\sigma > 1$, vale la disequazione (3.2). Grazie inoltre alle proposizioni 2.5 e 2.7 abbiamo che

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \zeta^{\frac{3}{4}}(\sigma) |\zeta(\sigma + 2it)|^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{con } \begin{cases} \zeta^{\frac{3}{4}}(\sigma) \sim \frac{1}{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}} & \text{per } \sigma \rightarrow 1 \\ |\zeta(\sigma + 2it)| = O(\log |2t|) = O(\log |t|) & \text{per } |t| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Otteniamo perciò che

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \zeta^{\frac{3}{4}}(\sigma) |\zeta(\sigma + 2it)|^{\frac{1}{4}} \leq B \frac{\log^{\frac{1}{4}} |t|}{(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}}$$

Adesso, grazie alla proposizione 2.8, possiamo osservare che

$$\zeta(1 + it) - \zeta(\sigma + it) = - \int_1^\sigma \zeta'(u + it) du = O((\sigma - 1) \log^2 |t|)$$

e mettendo insieme i due risultati ottenuti

$$|\zeta(1 + it)| \geq \left| A(\sigma - 1) \log^2(|t|) - \frac{1}{B}(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}} \log^{-\frac{1}{4}} |t| \right|$$

dove possiamo assumere $A \geq 2$ e $0 < \frac{1}{B} \leq 1$.

Se scegliamo $\begin{cases} (\sigma - 1) = \log^{-9} |t| \\ |t| \geq e, \end{cases}$ si ottiene

$$|\zeta(1 + it)| \geq \log^{-7} |t|.$$

Perciò se $|t| \geq e$

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(1 + it)| - |\zeta(1 + it) - \zeta(\sigma + it)| \geq \log^{-7} |t| - C(\sigma - 1) \log^2 |t|$$

Dimostriamo adesso che nelle ipotesi del lemma si ha che

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7 |t|) \quad \text{per } |t| \rightarrow \infty;$$

cioè, in virtù della proposizione 2.8, la tesi del lemma.

Per $\sigma \geq 1 + \frac{1}{2C \log^9 |t|}$ la relazione è vera in quanto

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq B \frac{\log^{\frac{1}{4}} |t|}{(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}} \leq B \log^{\frac{1}{4}} |t| [2C \log^9 |t|]^{\frac{3}{4}} = D \log^7 |t|.$$

Invece per $1 \leq \sigma \leq 1 + \frac{1}{2C \log^9 |t|}$ le relazione è vera perché

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \log^{-7} |t| - C(\sigma - 1) \log^2 |t| \geq \frac{1}{2} \log^{-7} |t|.$$

□

Abbiamo dimostrato, grazie a questo lemma, che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds = \\ &= \frac{x}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it \log x}}{(1+it)(2+it)} \left(\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)} + \frac{1}{it} \right) dt \end{aligned}$$

Adesso, per mezzo del prossimo lemma, dimostriamo che $R(x) = o(x)$ per $x \rightarrow \infty$

Lemma 3.10. *Sia $f(t)$ continua e*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

assolutamente convergente, allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(t) dt = 0.$$

Dimostrazione. Sicuramente il secondo integrale converge assolutamente. Sia ω abbastanza grande affinché

$$\left| \int_{\omega}^{\infty} e^{it\lambda} f(t) dt \right| + \left| \int_{-\infty}^{-\omega} e^{it\lambda} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\omega}^{\omega} e^{it\lambda} f(t) dt \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\omega}^{\omega} e^{it\lambda} f(t) dt - \int_{-\omega-\frac{\pi}{\lambda}}^{\omega-\frac{\pi}{\lambda}} e^{it\lambda} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) dt \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\omega}^{\omega-\frac{\pi}{\lambda}} e^{it\lambda} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) dt + \int_{\omega-\frac{\pi}{\lambda}}^{\omega} e^{it\lambda} f(t) dt - \int_{-\omega-\frac{\pi}{\lambda}}^{-\omega} e^{it\lambda} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\int_{-\omega}^{\omega-\frac{\pi}{\lambda}} |f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)| dt + \int_{\omega-\frac{\pi}{\lambda}}^{\omega} |f(t)| dt + \int_{-\omega-\frac{\pi}{\lambda}}^{-\omega} |f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)| dt \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\int_{-\omega}^{\omega} |f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)| dt + \int_{\omega-\frac{\pi}{\lambda}}^{\omega} |f(t)| dt + \int_{-\omega}^{-\omega+\frac{\pi}{\lambda}} |f(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

La funzione $f(t)$ è uniformemente continua e limitata per $|t| \leq \omega$, perciò λ può essere scelto abbastanza grande affinché i tre integrali siano tutti minori di $\frac{\varepsilon}{3}$ e quindi

$$\left| \int_{-\omega}^{\omega} e^{it\lambda} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

In conclusione si ha che per ogni ε esiste un λ sufficientemente grande, tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(t) dt \leq \varepsilon,$$

e dunque la tesi. □

Grazie a questo lemma e all'equazione (3.4), abbiamo che

$$x\Psi(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow \infty.$$

Inoltre avevamo visto che $\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)$, perciò grazie al teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} x\Psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x-n) = \int_0^x \Lambda(n)(x-n) dn = \int_0^x \Lambda(n) \left(\int_n^x d\nu \right) dn = \\ &= \int_0^x \left(\int_0^\nu \Lambda(n) dn \right) d\nu = \int_0^x \sum_{n \leq \nu} \Lambda(n) d\nu = \int_1^x \sum_{n \leq \nu} \Lambda(n) d\nu = \int_1^x \psi(\nu) d\nu, \end{aligned}$$

abbiamo quindi ottenuto che

$$\int_1^x \psi(\nu) d\nu \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \rightarrow \infty.$$

Dimostreremo con il prossimo lemma che questa condizione, insieme al fatto che ψ è monotona crescente, implica che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1;$$

questo, grazie al lemma 3.6, è sufficiente per dimostrare il *teorema dei numeri primi* 3.4.

Lemma 3.11. *Se $g(\nu)$ è una funzione crescente per $\nu \geq 1$, tale che*

$$\int_1^x g(\nu) d\nu \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

allora $g(x) \sim x$ per $x \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Per ogni $\delta > 0$ fissato esiste $x_0(\delta)$ tale che

$$\forall x \geq x_0 \quad (1-\delta) \frac{x^2}{2} \leq \int_1^x g(\nu) d\nu \leq (1+\delta) \frac{x^2}{2}.$$

Dunque, se $x \geq x_0$, si ha

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \int_x^{x(1+\varepsilon)} g(\nu) d\nu &= \int_1^{x(1+\varepsilon)} g(\nu) d\nu - \int_1^x g(\nu) d\nu < \\ &< (1+\delta) \frac{x^2}{2} (1+\varepsilon)^2 - (1-\delta) \frac{x^2}{2} = \\ &= x^2 \left((1+\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \varepsilon + \delta \right). \end{aligned}$$

Inoltre in virtù della monotonia di $g(x)$

$$\int_x^{x(1+\varepsilon)} g(\nu) d\nu \geq x\varepsilon g(x)$$

si ha dunque $\frac{g(x)}{x} \leq (1+\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0,$
per x sufficientemente grande. Scegliendo allora $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ e $\delta \rightarrow 0$, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \leq 1.$$

In maniera analoga si ricava da

$$\int_{x(1-\varepsilon)}^x g(\nu) d\nu$$

che vale $g(x) > x \left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (1+\delta) - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)$ e dunque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \geq 1$. □

3.3 Esistenza di infiniti zeri nella *striscia critica*

Chiameremo Θ il limite superiore delle parti reali degli zeri di $\zeta(s)$; dallo studio fatto nella sezione 3.1 possiamo dedurre che $\Theta \leq 1$. Non abbiamo però ancora dimostrato l'esistenza di zeri nella *striscia critica*, $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$. Abbiamo perciò le seguenti due possibilità:

- se non vi fossero zeri nella striscia critica avremmo $\Theta = -2$;
- altrimenti, grazie alla simmetria degli zeri rispetto alla retta di ascissa $\frac{1}{2}$, avremmo $\Theta \geq \frac{1}{2}$.

Possiamo quindi riscrivere l'*ipotesi di Riemann* come $\Theta = \frac{1}{2}$. Noi ci limiteremo a dimostrare l'esattezza della seconda alternativa e il fatto che gli zeri nella *striscia critica* sono infiniti.

Lemma 3.12. Sia $\varphi(z)$ una funzione analitica per $|z| < R$ con $\operatorname{Re}(\varphi(z)) \geq 0$. Allora

$$\begin{cases} |\varphi(z) - \varphi(0)| \leq \frac{2|z|}{R - |z|} \operatorname{Re}(\varphi(0)) \\ \left| \frac{\varphi^{(\nu)}(z)}{\nu!} \right| \leq \frac{2R}{(R - |z|)^{\nu+1}} \operatorname{Re}(\varphi(0)), \quad \nu = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Dimostrazione. Grazie all' analiticità di $\varphi(z)$ possiamo scrivere

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < R,$$

$$\text{con } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} dz, \quad C = \text{cerchio di raggio } r < R,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(re^{i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta \quad \forall n \geq 0.$$

Inoltre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi} r^n \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \operatorname{Res}(\varphi(z) z^{n-1}, 0) = 0$$

$\forall n \geq 1$

per analiticità di $\varphi(z)z^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dividendo l'ultima espressione per r^{2n} e scomponendo in parte reale e immaginaria $\varphi(z) = P(z) + iQ(z)$, abbiamo che

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} (P + iQ) e^{-in\theta} d\theta, & n \geq 0, \\ 0 = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} (P + iQ) e^{in\theta} d\theta, & n \geq 1. \end{cases}$$

Possiamo riscrivere il sistema nel modo seguente:

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} (P + iQ) e^{-in\theta} d\theta, & n \geq 0, \\ 0 = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} (P - iQ) e^{-in\theta} d\theta, & n \geq 1. \end{cases}$$

Sommando le due abbiamo che

$$c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P e^{-in\theta} d\theta, \quad n \geq 1.$$

Invece dalla prima otteniamo

$$\operatorname{Re}(c_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P| d\theta \quad \text{poiché per ipotesi } P \geq 0$$

$$\text{perciò } |c_n| \leq \frac{2\operatorname{Re}(c_0)}{r^n} \quad \forall n \geq 1, \forall r < R.$$

Se facciamo tendere $r \rightarrow R$ otteniamo

$$|c_n| \leq \frac{2\operatorname{Re}(c_0)}{R^n} \quad \forall n \geq 1.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - \varphi(0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - c_0 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^n \leq 2\operatorname{Re}(c_0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R}\right)^n = \\ &= \frac{2R}{R - |z|} \operatorname{Re}(\varphi(0)), \quad |z| < R. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima parte del lemma; per quanto riguarda la seconda invece

$$\begin{aligned} \left| \varphi^{(\nu)}(z) \right| &\leq \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\nu+1) |c_n| |z|^{n-\nu} \leq \\ &\leq \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{n!}{(n-\nu)!} \cdot \frac{2\operatorname{Re}(c_0)}{R^n} |z|^{n-\nu} = \frac{\nu! 2\operatorname{Re}(c_0)}{R^\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n}{\nu} \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-\nu} = \\ &= \frac{\nu! 2\operatorname{Re}(c_0)}{R^\nu} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z|}{R}\right)^{\nu+1}} = \frac{\nu! 2R}{(R - |z|)^{\nu+1}} \operatorname{Re}(\varphi(0)), \quad |z| < R, \end{aligned}$$

e questo conclude la dimostrazione del lemma. □

Corollario 3.13. (Lemma di Carathéodory) Sia $f(s)$ olomorfa con $\operatorname{Re}(f(s)) \leq M$ in $|s - s_0| < R$, allora

$$\begin{cases} |f(s) - f(s_0)| \leq \frac{2|s - s_0|}{R - |s - s_0|} (M - \operatorname{Re}(f(s_0))) \\ |f'(s)| \leq \frac{2R}{(R - |s - s_0|)^2} (M - \operatorname{Re}(f(s_0))). \end{cases}$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo corollario si ottiene applicando il lemma 3.12 a $\varphi(s) = M - f(s - s_0)$. □

Per dimostrare la presenza di zeri sulla *striscia critica* il primo passo sarà, fissato un certo $\Theta_1 > \Theta$, quello di spostare da $Re(s) = 2$ a $Re(s) = \Theta_1$ la retta di integrazione di

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds$$

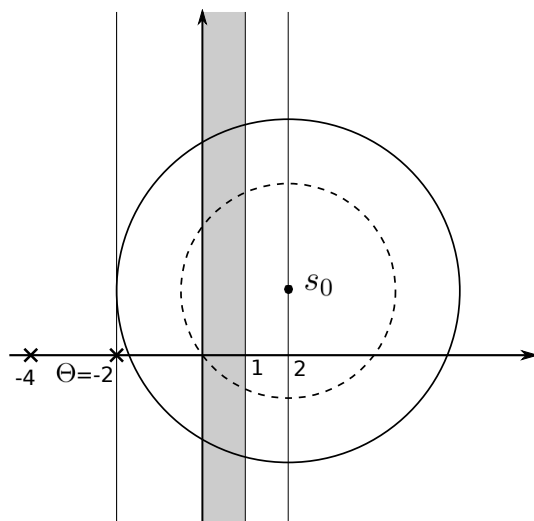
Questo è stato già fatto per $\Theta_1 = 1$ ma, con Θ_1 generico, dobbiamo stimare la funzione $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ su $-2 < Re(s) \leq 1$, perché Θ_1 può assumere valori fino a -2 . Per fare questo sfrutteremo il *lemma di Carathéodory*. Si ha

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = \frac{d}{ds} (\log(\zeta(s)(s-1))).$$

La funzione $\log(\zeta(s)(s-1))$ è olomorfa su $Re(s) > \Theta$: infatti, per definizione di Θ , sotto tale condizione $\zeta(s) \neq 0$ e, nel punto $s = 1$, $\zeta(s)(s-1)$ assume valore 1 grazie alla proposizione 2.5.

Fissiamo $s_0 = 2 + it_0$ e $R = 2 - \Theta \leq 4$: nella regione $|s - s_0| < R$ la funzione $\log(\zeta(s)(s-1))$ continua ad essere olomorfa. Possiamo applicare il *lemma di Carathéodory* nella regione chiusa $|s - s_0| \leq 2 - \Theta_1$ per ogni $\Theta < \Theta_1 < 2$, perché riusciamo a trovare un valore M che maggiori $Re(\log(\zeta(s)(s-1)))$ su $|s - s_0| < R$, o più in generale, data l'arbitrarietà di t_0 , su $-2 < Re(s) < 6$.

CASO 1: non vi sono zeri nella *striscia critica*.



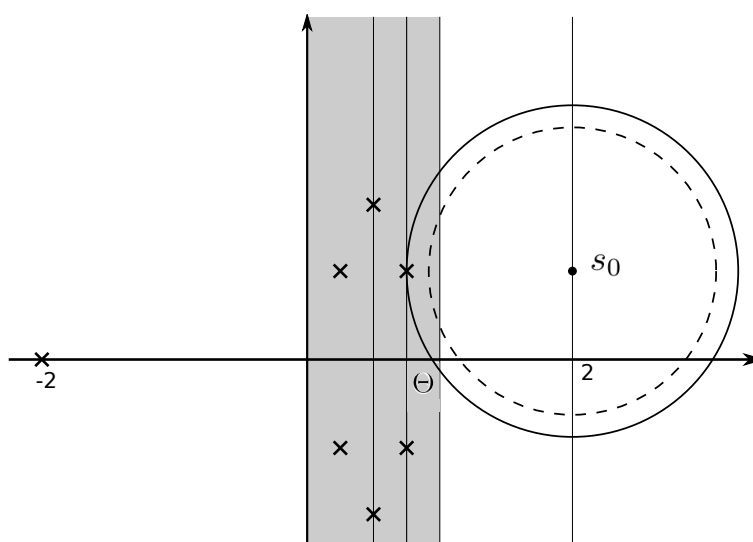
■ *striscia critica*

× zeri di ζ

$\{s/|s - s_0| < 2 - \Theta\}$

$\{s/|s - s_0| < 2 - \Theta_1\}$

CASO 2: vi sono zeri nella *striscia critica*.



Grazie alla proposizione 2.6, si ha per $-2 < \text{Re}(s) < 6$

$$|\zeta(s)(s-1)| \leq C(|t|^3 \sqrt{36 + |t|^2}) < C(|t|^3(6 + |t|)) < C(|t| + 6)^4.$$

Allora

$$\text{Re}(\log(\zeta(s)(s-1))) = \log |\zeta(s)(s-1)| < C \log(|t| + 6),$$

dove C è una costante diversa da quella di prima.

Per il *lemma di Carathéodory* abbiamo che

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right| \leq \frac{4 - 2\Theta}{(\Theta_1 - \Theta)^2} (C \log(|t| + 6) - \log |\zeta(s_0)(s_0 - 1)|).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
 -\log |\zeta(s_0)(s_0 - 1)| &= \log |\zeta(s_0)|^{-1} + \log |s_0 - 1|^{-1} = \\
 &= \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+it_0}} \right|^{-1} + \log |1 + it_0|^{-1} \leq \\
 &\leq \log \frac{1}{\left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+it_0}} \right|} \leq \log \frac{1}{1 - \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+it_0}} \right|} \leq \\
 &\leq \log \frac{1}{2 - \frac{\pi^2}{6}} < \log 3.
 \end{aligned}$$

Modificando, quindi, opportunamente la costante C possiamo dire che, per $s = \sigma + it$ e $\Theta_1 \leq \sigma \leq 2$

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right| \leq \frac{C \log(|t| + 6)}{(\Theta_1 - \Theta)^2}.$$

Grazie a questa stima possiamo cambiare la retta di integrazione che definisce $R(x)$. Scegliamo il valore Θ_1 in questo modo:

- Se $\Theta = -2$, allora $\Theta_1 = -\frac{1}{2}$.
- Se $\frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1$, allora $\Theta_1 = \Theta + \varepsilon < 2$ con ε da scegliere in seguito.

Ricordiamo che il nostro obiettivo è di escludere il primo caso. Riprendiamo la $\Psi(x)$, definizione 3.8:

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - R(x).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
 (x+1)\Psi(x+1) - x\Psi(x) &= \sum_{n \leq x+1} \Lambda(n)(x+1-n) - \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x-n) = \\
 &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) + \Lambda([x]+1)(x-[x]) = \\
 &= \psi(x) + \Lambda([x]+1)(x-[x]),
 \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned}
(x+1)\Psi(x+1) - x\Psi(x) &= \\
&= \frac{(x+1)^2}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 - \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - (x+1)R(x+1) + xR(x) = \\
&= x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds \right] = \\
&= x - \frac{1}{2} - I(x).
\end{aligned}$$

Perciò abbiamo ottenuto che $\psi(x) + \Lambda([x] + 1)(x - [x]) = x - \frac{1}{2} - I(x)$. Scriviamo adesso $\psi(x) = x + r(x)$: abbiamo visto durante la dimostrazione del *teorema dei numeri primi* che $r(x) = o(x)$ per $x \rightarrow \infty$. Possiamo ora affermare che

$$r(x) = -\Lambda([x] + 1)(x - [x]) - \frac{1}{2} - I(x).$$

Per escludere il primo caso, $\Theta = -2$, abbiamo intenzione di provare che questo contrasta con l'ipotesi, già dimostrata, che $r(x) = o(x)$.

Se adesso cambiamo la retta di integrazione, come abbiamo già dimostrato di poter fare, dobbiamo osservare che la funzione integrata ha un polo nel punto $s = 0$ di residuo

$$\text{Res} \left(\frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right), 0 \right) = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - 1.$$

Se definiamo perciò

$$A(\Theta) = \begin{cases} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - 1 & \text{se } \Theta = -2 \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1, \end{cases}$$

possiamo dire che

$$\begin{aligned}
r(x) &= -\Lambda([x] + 1)(x - [x]) - \frac{1}{2} - A(\Theta) + \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Theta_1 - i\infty}^{\Theta_1 + i\infty} \frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds \right].
\end{aligned}$$

Per stimare l'integrale osserviamo che

$$(x+1)^{s+1} - x^{s+1} = \int_x^{x+1} (s+1)u^s du$$

perciò se $Re(s) = \Theta_1$, $x \geq 1$ e $\Theta_1 \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$$|(x+1)^{s+1} - x^{s+1}| \leq |s+1| \int_x^{x+1} u^{\Theta_1} du \leq |s+1|(x+1)^{\Theta_1} \leq 4x^{\Theta_1}|s+1|.$$

Ma se utilizzassimo questa stima sull'intera retta di integrazione otterremmo un integrale divergente, perciò useremo anche questa:

$$|(x+1)^{s+1} - x^{s+1}| \leq (x+1)^{\Theta_1+1} + x^{\Theta_1+1} \leq 9x^{\Theta_1+1}.$$

Si ha allora, per cominciare

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1+i\infty} \frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds \right| \leq \\ & \leq 2 \int_{\Theta_1}^{\Theta_1+i\infty} \frac{|(x+1)^{s+1} - x^{s+1}|}{|s(s+1)|} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right| ds. \end{aligned}$$

Fissato $T > 0$ ancora da scegliere, maggioreremo separatamente l'integrale da 0 a T con la prima stima, e sfrutteremo la maggiorazione

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right| \leq \frac{C \log(|t|+6)}{(\Theta_1 - \Theta)^2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1+i\infty} \frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds \right| \leq \\ & \leq C \frac{x^{\Theta_1}}{(\Theta - \Theta_1)^2} \int_0^T \frac{\log(t+6)}{|\Theta_1 + it|} dt + \\ & \quad + C_1 \frac{x^{\Theta_1+1}}{(\Theta - \Theta_1)^2} \int_T^\infty \frac{\log(t+6)}{|(\Theta_1 + it)(\Theta_1 + it + 1)|} dt \leq \\ & \leq C \frac{x^{\Theta_1}}{(\Theta - \Theta_1)^2} \int_0^T \frac{\log(t+6)}{\frac{1}{2} + t} dt + C_1 \frac{x^{\Theta_1+1}}{(\Theta - \Theta_1)^2} \int_T^\infty \frac{\log(t+6)}{t^2} dt \end{aligned}$$

Possiamo maggiorare i due integrali:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\log(t+6)}{\frac{1}{2} + t} dt & < \log(T+6) \int_0^T \frac{1}{\frac{1}{2} + t} dt = \log(T+6) \log(2T+1) < \\ & < 2 \log^2(T+6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \frac{\log(t+6)}{t^2} dt &= \left[-\frac{\log(t+6)}{t} \right]_T^\infty + \int_T^\infty \frac{1}{t(t+6)} dt < \\ &< \frac{\log(T+6)}{T} + \int_T^\infty \frac{1}{t^2} = \frac{\log(T+6)}{T} + \frac{1}{T} < \\ &< \frac{2\log(T+6)}{T}. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Theta_1-i\infty}^{\Theta_1+i\infty} \frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds \right| \leq \\ &\leq C \frac{x^{\Theta_1}}{(\Theta - \Theta_1)^2} \log^2(T+6) + C \frac{x^{\Theta_1+1}}{(\Theta - \Theta_1)^2} \frac{\log(T+6)}{T}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se scegliamo $T = x$ possiamo allora concludere che

$$r(x) = -\Lambda([x]+1)(x-[x]) - \frac{1}{2} - A(\Theta) - O\left(\frac{x^{\Theta_1} \log^2 x}{(\Theta - \Theta_1)^2}\right), \quad \text{per } x \rightarrow \infty.$$

Possiamo ora discutere i due casi:

nel primo, $\Theta = -2$ e $\Theta_1 - \Theta = \frac{3}{2}$,

$$r(x) = \frac{1}{2} - \Lambda([x]+1)(x-[x]) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x\right),$$

invece nel secondo, $\frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1$ e $\Theta_1 - \Theta = \varepsilon$, possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{1}{\log x}$ e coerentemente con questa scelta si ha $x^{\Theta_1} = x^{\Theta+\varepsilon} = x^\Theta e^{\varepsilon \log x} = e x^\Theta$, da cui

$$r(x) = O\left(x^\Theta \log^4 x\right) \quad \text{per } x \rightarrow \infty,$$

dove gli altri termini possono essere assorbiti, in quanto

$$\Lambda([x]+1) \leq \log([x]+1) \quad \text{e} \quad (x-[x]) \leq 1.$$

Osservazione. Si noti che questa stima è più debole della proprietà, già dimostrata, $r(x) = o(x)$ per $x \rightarrow \infty$.

Teorema 3.14. *Esistono infiniti zeri di $\zeta(s)$ nella striscia critica*

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo l'esistenza: supponiamo per assurdo che non vi siano zeri e sia $x = m$ un intero. Allora, per $\psi(x) = x + r(x)$, abbiamo

$$\psi(m) - \psi(m-1) = \sum_{n \leq m} \Lambda(n) - \sum_{n \leq m-1} \Lambda(n) = \Lambda(m) = 1 + r(m) - r(m-1).$$

Poiché, come abbiamo visto,

$$r(x) = \frac{1}{2} - \Lambda([x] + 1)(x - [x]) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x\right)$$

otteniamo

$$\Lambda(m) = 1 + O\left(m^{-\frac{1}{2}} \log^2 m\right) \quad \text{per } m \rightarrow \infty.$$

In particolare se $m = p$, numero primo,

$$\Lambda(p) = \log(p) = 1 + O\left(p^{-\frac{1}{2}} \log^2 p\right)$$

e questo è assurdo.

Supponiamo ora per assurdo che $\zeta(s)$ abbia un numero finito di zeri non banali. Grazie alla simmetria degli zeri rispetto alla retta di ascissa $\frac{1}{2}$, discussa all'inizio del capitolo, avremo un numero pari di zeri; li indicheremo con

$$\rho_1 \dots \rho_N \quad (N \text{ pari}) \quad \text{di molteplicità rispettivamente } \mu_1 \dots \mu_N.$$

Ciascuno di essi si può anche scrivere come

$$\rho_k = \beta_k + i\gamma_k \quad \text{con } 0 < \beta_k < 1, \quad k = 1 \dots N,$$

dove le disuguaglianze sono strette grazie alla proposizione 3.2.

Essendoci un numero finito di zeri esiste $G > 0$ tale che

$$|\gamma_k| < G \quad \forall k = 1 \dots N.$$

Riprendiamo allora

$$r(x) = -\Lambda([x] + 1)(x - [x]) - \frac{1}{2} + \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) ds.$$

Abbiamo intenzione di spostare la retta di integrazione dall'ascissa 2 all'ascissa $-\frac{1}{2}$. Per farlo dovremo utilizzare nuovamente il *lemma di Carathéodory* 3.13 ma, essendo adesso $\Theta \neq -2$, la funzione $\log(\zeta(s)(s-1))$ non è più olomorfa su $Re(s) > -2$, in compenso lo è aggiungendo l'ipotesi che $|t| > G$. Fissiamo allora $s_0 = 2 + it_0$ con $t_0 > G + 4$ e $R = 4$: per $|s - s_0| < R$

la funzione è olomorfa e vale $\operatorname{Re}(\log(\zeta(s)(s-1))) < C \log(|t|+6)$, perciò per il lemma 3.13

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right| \leq \frac{C \log(|t|+6)}{(\Theta_1 - \Theta)^2}.$$

Grazie a questa stima possiamo spostare la retta di integrazione, sommando i residui nei punti $0, \rho_1 \dots \rho_N$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right), 0 \right) &= \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - 1, \\ \operatorname{Res} \left(\frac{(x+1)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right), \rho_k \right) &= \mu_k \frac{(x+1)^{\rho_k+1} - x^{\rho_k+1}}{\rho_k(\rho_k+1)}. \end{aligned}$$

E grazie alla stima (3.5), possiamo dire che

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1}{2} - \Lambda([x]+1)(x-[x]) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{(x+1)^{\rho_k+1} - x^{\rho_k+1}}{\rho_k(\rho_k+1)} + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 x\right), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto per dimostrare l'esistenza fissiamo un intero m : si ha

$$\begin{aligned} \psi(m) - \psi(m-1) &= \Lambda(m) = 1 + r(m) - r(m-1) = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{(m+1)^{\rho_k+1} - m^{\rho_k+1}}{\rho_k(\rho_k+1)} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{m^{\rho_k+1} - (m-1)^{\rho_k+1}}{\rho_k(\rho_k+1)} + O\left(m^{-\frac{1}{2}} \log^2 m\right). \end{aligned}$$

Consideriamo ora le due serie a parte:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N \mu_k \frac{(m+1)^{\rho_k+1} - m^{\rho_k+1}}{\rho_k(\rho_k+1)} - \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{m^{\rho_k+1} - (m-1)^{\rho_k+1}}{\rho_k(\rho_k+1)} = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_m^{m+1} \frac{u^{\rho_k} - (u-1)^{\rho_k}}{\rho_k} du = \sum_{k=1}^N \int_m^{m+1} \left[\int_{u-1}^u v^{\rho_k-1} dv \right] du. \end{aligned}$$

Ma

$$\left| \int_m^{m+1} \left[\int_{u-1}^u v^{\rho_k-1} dv \right] du \right| \leq \int_m^{m+1} \left[\int_{u-1}^u v^{\beta_k-1} dv \right] du \leq (m-1)^{\beta_k-1};$$

allora avremmo che

$$\Lambda(m) = 1 + \sum_{k=1}^N O\left(m^{\beta_k-1}\right) + O\left(m^{-\frac{1}{2}} \log^2 m\right) \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

ma questo è assurdo perché

$$\begin{cases} \Lambda(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \\ \sum_{k=1}^N O\left(m^{\beta_k-1}\right) + O\left(m^{-\frac{1}{2}} \log^2 m\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

□

3.4 Conclusioni

La congettura di Riemann, che afferma che tutti gli zeri di ζ si trovano sulla retta $Re(s) = \frac{1}{2}$, è l'ottavo dei 23 problemi proposti da Hilbert al Congresso internazionale dei matematici, tenutosi a Parigi l'8 Agosto 1900, ed è uno dei due che risultano tutt'ora aperti. È anche uno tra i 7 Millennium Problems, formulati dall'Istituto matematico Clay, ad imitazione dei problemi di Hilbert. Diversi sono stati i tentativi di dimostrare o confutare l'*ipotesi di Riemann*, uno in particolare è quello di Louis de Branges de Bourcia, che nel 1992 pubblicò una dimostrazione che si è poi rivelata non corretta. Un tentativo molto recente è quello di Richard Stone che all'inizio di questo mese ha pubblicato invece un articolo [5] in cui afferma di averla confutata, sebbene diversi siano i passaggi non dimostrati completamente. La risoluzione di questo problema aperto, dato il legame tra gli zeri di ζ e la distribuzione dei numeri primi, potrebbe avere, ad esempio, importanti ricadute su applicazioni informatiche. Stabilire, infatti, che vi sia una regolarità sulla distribuzione dei numeri primi, avrebbe conseguenze sulla Crittografia, che spesso utilizza numeri interi la cui fattorizzazione contenga numeri primi talmente grandi da non essere calcolabili in tempi accettabili.

Bibliografia

- [1] H. Rademacher. *Topics in Analytic Number Theory*. Springer, 1973.
- [2] H. Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Publications, 1995.
- [3] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.
- [4] G. E. Andrews, R. Askey e R. Roy. *Special Functions*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] R. Stone. *Generalised Cesaro Convergence, Root Identities and the Riemann Hypothesis*. arXiv.1111.1951v1 [math.NT] 7 Nov 2011