1 Motivazioni

Questo capitolo è dedicato alla teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue in una o più variabili. Si potrebbe, più semplicemente, estendere la nozione di integrale di Riemann, descritta nel corso di Analisi I, al caso di più variabili; tuttavia la teoria di Riemann, seppure concettualmente semplice e soddisfacente per molti aspetti, non è abbastanza flessibile da consentire certe operazioni che pure appaiono naturali: ad esempio, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

solo se A è un insieme misurabile limitato (ad esempio un intervallo) e se vi è convergenza uniforme delle funzioni f_n (teorema 1.2.6). Inoltre, se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti, la loro unione non è necessariamente misurabile (esercizio 1.2) né, tanto meno, vale in generale la relazione

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$$

(qui la misura di A è data dall'integrale della funzione caratteristica, cioè $m(A) = \int_a^b I_A(x)\,dx$, essendo $[a,b]$ un arbitrario intervallo contenente A). Infine, le quantità

$$\int_A |f(x)|dx \ , \qquad \left[\int_A |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

non sono norme sullo spazio $\mathcal{R}(A)$ delle funzioni integrabili secondo Riemann su A (esempio 1.4.2 (7)), ma solo - quando A è compatto - sullo spazio $C(A)$ delle funzioni continue su A; tuttavia, tale spazio, munito di una qualunque di tali norme, non è completo (esercizio 1.7.4).
Vi sono poi altre, e più importanti, motivazioni "a posteriori": la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue ha dato l'avvio ad enormi sviluppi nell'analisi funzionale, nella teoria della probabilità, ed in svariatissime applicazioni (risoluzione di equazioni differenziali, calcolo delle variazioni, ricerca operativa, fisica matematica, matematica finanziaria, biomatematica, ed altre ancora).

Esercizi 1

1. Esibire una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite su $[a, b]$, Riemann-integrabili in $[a, b]$, puntualmente convergenti in $[a, b]$, e tali che
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx.$$
2. Esibire una successione $\{A_n\}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, misurabili secondo Riemann e disgiunti, tali che la loro unione non sia misurabile secondo Riemann.

2 Tribù e misure

Per introdurre la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ sono necessarie alcune premesse astratte di teoria della misura. Con le misure si hanno modi diversi di attribuire un'area, o un volume, a certe regioni, ossia a certi insiemi, così come differenti metriche definiscono in maniere diverse le distanze fra coppie di punti.
Sia X un insieme non vuoto fissato e sia $\mathcal{P}(X)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X.

Definizione 2.1 *Una sottofamiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice* algebra *se contiene X e se è chiusa rispetto all'unione (finita) ed al passaggio al complementare.*

Ad esempio, se $X = \mathbb{R}$, la famiglia delle unioni finite di intervalli di $\mathbb{R}$, limitati o no, è un'algebra. Si noti che un'algebra è chiusa rispetto all'intersezione (finita): infatti se $\mathcal{A}$ è un'algebra e $A, B \in \mathcal{A}$, allora anche A^c, B^c e $A^c \cup B^c$ appartengono ad $\mathcal{A}$, da cui $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.
È utile il seguente lemma:

Lemma 2.2 *Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra e sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Allora:*

(i) *esiste $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tale che*
$$A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\,;$$

(ii) *esiste* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$*, costituita da insiemi disgiunti, e tale che*

$$B_n \subseteq E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n=0}^{N} B_n = \bigcup_{n=0}^{N} E_n\,, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\,.$$

Dimostrazione **(i)** Basta scegliere $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$.

(ii) Basta prendere $B_0 = E_0$ e $B_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Definizione 2.3 *Una sottofamiglia* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *si dice* tribù*, o anche* σ*-*algebra*, se contiene* X *e se è chiusa rispetto all'unione numerabile ed al passaggio al complementare.*

È immediato verificare che ogni tribù è un'algebra; si noti che il viceversa non è vero, come mostra ancora una volta l'esempio delle unioni finite di intervalli di $\mathbb{R}$. Si vede facilmente che le tribù sono chiuse rispetto all'intersezione numerabile. Le classi $\mathcal{P}(X)$ e $\{\emptyset, X\}$ sono ovviamente esempi di tribù su X; inoltre, l'intersezione di una arbitraria famiglia di tribù è ancora una tribù. Quindi, data una qualsiasi famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di X, esiste la *minima* tribù contenente $\mathcal{E}$: basta infatti prendere l'intersezione di tutte le tribù su X contenenti $\mathcal{E}$, fra le quali vi è almeno $\mathcal{P}(X)$. Tale tribù è detta *tribù generata da* $\mathcal{E}$ e si denota con $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.

Esempio 2.4 Sia $\mathcal{I}$ la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$, limitati o no. La tribù su $\mathbb{R}$ generata da $\mathcal{I}$, che è anche la tribù generata dalla famiglia degli aperti di $\mathbb{R}$, si chiama *tribù Boreliana* e si denota con $\mathcal{B}$; i suoi elementi si chiamano *boreliani.*

Definizione 2.5 *Sia* X *un insieme non vuoto e sia* $\mathcal{T}$ *una tribù su* X*. La coppia* $(X, \mathcal{T})$ *si dice* spazio misurabile *e gli elementi di* $\mathcal{T}$ *si dicono* insiemi misurabili.

Definizione 2.6 *Sia* $(X, \mathcal{T})$ *uno spazio misurabile. Una funzione* $\mu : X \to [0, \infty]$ *si dice* misura *su* X *se:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) (numerabile additività) *per ogni famiglia* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di elementi disgiunti di* $\mathcal{T}$*, risulta*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

La misura μ si dice finita *se $\mu(X) < +\infty$; si dice* σ-finita *se si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, con $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ e $\mu(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine la misura μ si dice* completa *se ciascun sottoinsieme T di un insieme $N \in \mathcal{T}$ di misura nulla è a sua volta un elemento di $\mathcal{T}$ (necessariamente di misura nulla).*

Definizione 2.7 *Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio misurabile e se μ è una misura su X, la terna $(X, \mathcal{T}, \mu)$ si chiama* spazio misurato.

Esempi 2.8 **(1)** Se X è un insieme non vuoto e se $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, la funzione $n : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definita da

$$n(E) = \begin{cases} \#(E) & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è infinito,} \end{cases}$$

ove $\#(E)$ è la cardinalità di E, è una misura su $(X, \mathcal{P}(X))$, ovviamente completa; se X è un insieme numerabile, μ è σ-finita; se X è un insieme finito, μ è una misura finita.

(2) Fissato un insieme X non vuoto e un punto $x \in X$, la funzione $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ definita da

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \notin E \\ 1 & \text{se } \ x \in E \end{cases}$$

è una misura finita su X, che si chiama *misura di Dirac* concentrata nel punto x.

(3) Data una misura μ defnita su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{T})$ e fissato $A \in \mathcal{T}$, la funzione

$$\nu(E) = \mu(E \cap A) \qquad \forall E \in \mathcal{T}$$

è una misura su $(X, \mathcal{T})$. Rispetto a ν, tutti gli elementi di $\mathcal{T}$ disgiunti da A hanno misura nulla: si dice che μ è *concentrata* su A.

Osservazione 2.9 È importante sottolineare che ogni misura è, in particolare, finitamente additiva sui disgiunti: in altre parole, se $A_1, \ldots, A_n$ sono elementi disgiunti di $\mathcal{T}$, allora

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right) = \sum_{h=1}^{n} \mu(A_h).$$

Basta infatti applicare la proprietà di numerabile additività alla famiglia $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ definita da

$$E_h = \begin{cases} A_h & se \quad h \le n, \\ \emptyset & se \quad h > n. \end{cases}$$

Proposizione 2.10 *Sia $(X, \mathcal{T}, \mu)$ uno spazio misurato. Allora:*

(i) *se $A, B \in \mathcal{T}$ e $A \subseteq B$ si ha*

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B);$$

in particolare vale la proprietà di monotonia

$$\mu(A) \le \mu(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{T} \quad con \quad A \subseteq B.$$

(ii) *se $A, B \in \mathcal{T}$, si ha*

$$\mu(B \cup A) + \mu(B \cap A) = \mu(B) + \mu(A);$$

(iii) *se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$, allora vale la proprietà di* subadditività numerabile*:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Dimostrazione **(i)** Dato che l'unione $B = (B \setminus A) \cup A$ è disgiunta, per l'osservazione 2.9 si ha la tesi; la monotonia segue dal fatto che $\mu(B \setminus A) \ge 0$.
(ii) Si ha l'unione disgiunta

$$B \cup A = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (A \setminus B);$$

dunque, da (i) e dal fatto che $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ e $A = (A \setminus B) \cup (B \cap A)$,

$$\begin{aligned} \mu(B \cup A) + \mu(B \cap A) &= \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) + \mu(A \setminus B) + \mu(B \cap A) = \\ &= \mu(B) + \mu(A). \end{aligned}$$

(iii) Per il lemma 2.2 (ii) esiste una successione $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ costituita da elementi disgiunti di $\mathcal{T}$, con $B_n \subseteq A_n$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Ne segue, per numerabile additività,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \quad \square$$

Osservazione 2.11 Se la misura μ è finita, allora per ogni $A, B \in \mathcal{T}$ con $A \subseteq B$ possiamo scrivere

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A),$$

e similmente, per ogni $A, B \in \mathcal{T}$ si ha

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Si noti che queste relazioni non hanno in generale senso quando μ assume il valore $+\infty$: per esempio, se μ è la misura cardinalità su $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ e se si sceglie $B = \mathbb{N}$ e $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, in entrambi i secondi membri si ottiene $+\infty - \infty$.

Le misure hanno un buon comportamento rispetto alle successioni di insiemi mnotone rispetto all'inclusione.

Proposizione 2.12 *Sia $(X, \mathcal{T}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$.*

(i) *Se $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(ii) *Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ed esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_{n_0}) < \infty$, allora*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione **(i)** Per il lemma 2.2 esiste $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$, costituita da insiemi disgiunti, tale che

$$E_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n\,, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\,.$$

Quindi, usando la numerabile additività di μ,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu(F_n) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N). \end{aligned}$$

(ii) Poniamo $F_n = E_{n_0} \setminus E_n$ per ogni $n > n_0$. Allora gli F_n sono elementi di $\mathcal{T}$ e $F_n \subseteq F_{n+1}$; inoltre

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n = E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n.$$

Per l'osservazione 2.11 e per (i) abbiamo

$$\mu(E_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu(E_{n_0}) - \mu(E_n)] = \mu(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Ne segue la tesi poiché, ovviamente,

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\,. \quad \square$$

Osserviamo che l'ipotesi che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m(E_{n_0}) < \infty$ è essenziale nell'enunciato (ii): se μ è la misura cardinalità (esempio 2.8(1)) sullo spazio misurabile $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, e se poniamo $E_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$, si ha $E_n \supset E_{n+1}$, $\mu(E_n) = \infty$ per ogni n, ma l'intersezione degli E_n, essendo vuota, ha misura nulla.

Una nozione importante, in un certo senso a metà fra le definizioni di algebra e di tribù, è quella di "classe di Dynkin".

Definizione 2.13 *Una sottofamiglia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice* classe di Dynkin *se contiene X e se è chiusa rispetto all'unione numerabile disgiunta ed al passaggio al complementare.*

È facile vedere che ogni tribù è una classe di Dynkin, ma il viceversa non è vero: ad esempio, se $X = \{a, b, c, d\}$, la famiglia

$$\mathcal{D} = \big\{\emptyset, X, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}\big\}$$

è una classe di Dynkin ma non una tribù, né un'algebra. Si vede anche che l'intersezione di un'arbitraria famiglia di classi di Dynkin è ancora una classe di Dynkin. Dunque, così come accade per le tribù, data una qualsiasi famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di X esiste la *minima* classe di Dynkin contenente $\mathcal{E}$: basta

considerare l'intersezione di tutte le classi di Dynkin su X contenenti $\mathcal{E}$, fra le quali vi è certamente $\mathcal{P}(X)$. Tale intersezione è detta *classe di Dynkin generata da* $\mathcal{E}$ e si denota con $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.
La differenza fra classi di Dynkin e tribù è ben illustrata dal seguente lemma:

Lemma 2.14 *Una classe di Dynkin $\mathcal{D}$ su X, chiusa rispetto all'intersezione (finita), è una tribù.*

Dimostrazione È sufficiente provare che $\mathcal{D}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile. Sia allora $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{D}$: per il lemma 2.2 esiste una famiglia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi disgiunti, la cui unione coincide con l'unione degli E_n, data da

$$F_0 = E_0\,, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} E_k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proviamo per induzione che $F_n \in \mathcal{D}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: si ha $F_0 = E_0 \in \mathcal{D}$, $F_1 = E_1 \setminus F_0 = E_1 \cap F_0^c \in \mathcal{D}$, e se $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1} \in \mathcal{D}$, allora $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k \in \mathcal{D}$ (perché è una unione disgiunta), da cui, essendo $\mathcal{D}$ chiusa per intersezione, $F_n = E_n \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} E_k\right)^c \in \mathcal{D}$. Essendo $\mathcal{D}$ chiusa per unione numerabile disgiunta, deduciamo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{D}$, e dunque $\mathcal{D}$ è chiusa per unione numerabile. Ne segue la tesi. □

Possiamo ora enunciare un risultato assai importante per il seguito.

Teorema 2.15 (di Dynkin) *Sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, chiusa rispetto all'intersezione (finita). Allora la classe di Dynkin generata da $\mathcal{E}$ coincide con la tribù generata da $\mathcal{E}$, ossia $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.*

Dimostrazione L'inclusione $\subseteq$ è evidente dato che, per il lemma 2.14, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ è una delle classi di Dynkin che contengono $\mathcal{E}$.
Per provare l'inclusione $\supseteq$ basta provare che $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è una tribù, e a questo scopo, per il lemma 2.14, basta provare che $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è chiusa per intersezione finita.
Per un generico elemento $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, sia

$$\mathcal{E}_A = \{B \subseteq X : B \cap A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}.$$

Proviamo anzitutto che $\mathcal{E}_A$ è una classe di Dynkin. Si ha $X \in \mathcal{E}_A$ in quanto

$$X \cap A = A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Poi, se $E \in \mathcal{E}_A$, si ha $E \cup A^c = (E \cap A) \cup A^c \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, essendo una unione disgiunta di elementi di $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, da cui $E^c \cap A = (E \cup A^c)^c \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$; quindi $E^c \in \mathcal{E}_A$. Infine, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_A$ e se $E_n \cap E_m = \emptyset$ per $n \neq m$, allora

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap A) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

da cui $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}_A$ e pertanto $\mathcal{E}_A$ è una classe di Dynkin.
Inoltre, nel caso in cui $A \in \mathcal{E}$, si ha $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_A$ grazie alla stabilità di $\mathcal{E}$ per intersezione: pertanto, per la minimalità di $\mathcal{D}(\mathcal{E})$,

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}_A \qquad \forall A \in \mathcal{E},$$

ovvero, in altre parole,

$$A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \qquad \forall A \in \mathcal{E}, \quad \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Questa relazione implica, per definizione di $\mathcal{E}_B$,

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_B \qquad \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{E});$$

essendo $\mathcal{E}_B$ una classe di Dynkin, ciò implica a sua volta

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}_B \qquad \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

ovvero

$$A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \qquad \forall A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \quad \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Questo ci dice appunto che $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è stabile per intersezione. Da ciò, come si è osservato, segue la tesi. □

Il teorema precedente implica un risultato che, come si vedrà, è fondamentale per i nostri scopi. Premettiamo un'ultima definizione:

Definizione 2.16 *Sia $\mathcal{T}$ una tribù su X. Una famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di X è detta* base *per $\mathcal{T}$ se:*

(i) *$\mathcal{E}$ è stabile per intersezione (finita);*

(ii) *$\mathcal{T}$ coincide con la tribù $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ generata da $\mathcal{E}$;*

(iii) *esiste $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$.*

Esempio 2.17 Se $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}$ è la tribù Boreliana, una base per $\mathcal{B}$ è data dalla famiglia di tutti gli intervalli limitati di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.18 (criterio di coincidenza di due misure) *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio misurabile, sia $\mathcal{E}$ una base per $\mathcal{T}$ e siano $\mu, \nu : \mathcal{T} \to [0, \infty[$ due misure finite, tali che*

$$\mu(E) = \nu(E) \qquad \forall E \in \mathcal{E};$$

allora $\mu = \nu$.

Dimostrazione Poniamo

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{T} : \ \mu(E) = \nu(E)\}.$$

Proviamo che $\mathcal{D}$ è una classe di Dynkin su X. Mostriamo anzitutto che $\mathcal{D}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile disgiunta. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di elementi disgiunti di $\mathcal{D}$: allora dalla numerabile additività delle due misure segue che

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right),$$

da cui $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.
Per provare che $X \in \mathcal{D}$, ci occorre il seguente

Lemma 2.19 *Per ogni n-pla $A_1, \ldots, A_n$ di elementi della base $\mathcal{E}$ di $\mathcal{T}$ si ha $\bigcup_{h=1}^n A_h \in \mathcal{D}$.*

Dimostrazione Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 1$ la proprietà è evidente, dato che per ipotesi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Supponiamo ora che risulti

$$\bigcup_{h=1}^{n} B_h \in \mathcal{D} \quad \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E},$$

e consideriamo $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{E}$. Allora, sempre per l'osservazione 2.11,

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^{n+1} A_h\right) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{h=1}^{n} (A_h \cap A_{n+1})\right).$$

Ma, per ipotesi induttiva, gli insiemi $\bigcup_{h=1}^{n}(A_h \cap A_n)$ e $\bigcup_{h=1}^{n} A_h$ appartengono a $\mathcal{D}$; ne segue

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^{n+1} A_h\right) = \nu\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right) + \nu(A_{n+1}) - \nu\left(\bigcup_{h=1}^{n}(A_h \cap A_{n+1})\right) = \nu\left(\bigcup_{h=1}^{n+1} A_h\right),$$

e dunque $\bigcup_{h=1}^{n+1} A_h \in \mathcal{D}$. Per induzione, il lemma 2.19 è provato. □

Consideriamo allora una successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Posto, come nel lemma 2.2,

$$F_n = \bigcup_{h=1}^{n} E_h\,,$$

per il lemma 2.19 si ha $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ e, ovviamente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Per la proposizione 2.12 (i) si deduce

$$\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n) = \nu(X),$$

e dunque $X \in \mathcal{D}$.
Mostriamo infine che $\mathcal{D}$ è chiusa rispetto al passaggio al complementare. Sia $E \in \mathcal{D}$: allora per l'additività e finitezza delle due misure si ha

$$\mu(E^c) = \mu(X) - \mu(E), \qquad \nu(E^c) = \nu(X) - \nu(E);$$

d'altra parte, poiché $X \in \mathcal{D}$ si ha $\mu(X) = \nu(X)$ e dunque $\mu(E^c) = \nu(E^c)$, ossia $E^c \in \mathcal{D}$.
Abbiamo così provato che $\mathcal{D}$ è una classe di Dynkin. Poiché $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, risulta $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$; per il teorema di Dynkin si ha anche

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{T},$$

e quindi $\mathcal{T} = \mathcal{D}$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema 2.18. □

Il corollario che segue estende il criterio di coincidenza alle misure σ-finite.

Corollario 2.20 *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio misurabile, sia $\mathcal{E}$ una base per $\mathcal{T}$ e siano $\mu, \nu : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ due misure σ-finite, tali che*

$$\mu(E) = \nu(E) < \infty \qquad \forall E \in \mathcal{E};$$

allora $\mu = \nu$.

Dimostrazione Poniamo nuovamente

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{T} : \mu(E) = \nu(E)\}.$$

Per ipotesi, esiste una successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Ci occorre la seguente variante del lemma 2.19:

Lemma 2.21 *Per ogni n-pla $A_1, \ldots, A_n$ di elementi della base $\mathcal{E}$ di $\mathcal{T}$ si ha $\bigcup_{h=1}^n A_h \in \mathcal{D}$ e $\mu\left(\bigcup_{h=1}^n A_h\right) = \nu\left(\bigcup_{h=1}^n A_h\right) < +\infty$.*

Dimostrazione Basta ripetere la dimostrazione del lemma 2.19 osservando che, per la finitezza di μ e ν su $\mathcal{E}$ e per subadditività (proposizione 2.10), si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^n A_h\right) \leq \sum_{h=1}^n \mu(A_h) < +\infty$$

e analogamente per ν. $\square$

Sulla base del lemma 2.21 possiamo costruire, utilizzando ancora una volta il lemma 2.2, una successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $F_n \subseteq F_{n+1}$, $F_n \subseteq \mathcal{D}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre $\mu(F_n) = \nu(F_n) < \infty$, e poi un'altra successione $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ costituita da elementi disgiunti di $\mathcal{D}$ e tale che $\mu(G_n) = \nu(G_n) < \infty$.
Poniamo adesso, per $n \in \mathbb{N}$ fissato,

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap G_n), \quad \nu_n(E) = \nu(E \cap G_n) \qquad \forall E \in \mathcal{T};$$

le misure μ_n e ν_n sono finite su X e verificano

$$\mu_n(E) = \nu_n(E) < \infty \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Quindi, per il teorema 2.18, risulta $\mu_n = \nu_n$ su $\mathcal{T}$. Ma allora, essendo per numerabile additività

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E \cap G_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E \cap G_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(E) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E \cap G_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E \cap G_n)\right) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{T},$$

si conclude che $\mu = \nu$ su $\mathcal{T}$. $\square$

Estensione di misure

Veniamo adesso ad un importante teorema, dovuto a Carathéodory, che, a partire da una funzione di insieme μ definita su un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X e dotata di opportune proprietà, permette di costruire un'unica misura che estende μ alla tribù $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ generata da $\mathcal{A}$.

Teorema 2.22 (di Carathéodory) *Sia X un insieme non vuoto, sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra. Sia poi $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una funzione tale che:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) *per ogni successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$, per i quali si abbia anche $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, risulta*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Allora esiste una misura $\overline{\mu}$, definita su un'opportuna tribù $\mathcal{M}$ contenente $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, tale che $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Dimostrazione Osserviamo, per cominciare, che da (ii) segue che μ è additiva sui disgiunti di $\mathcal{A}$, ossia

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A} \quad \text{con} \quad A \cap B = \emptyset;$$

quindi μ è anche subadditiva su $\mathcal{A}$, cioè

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Definiamo

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A},\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} \qquad \forall E \in \mathcal{P}(X);$$

la funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ si chiama *misura esterna*. Per definizione, è chiaro che

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \qquad \mu^* \ge 0, \qquad \mu^*(E) \le \mu^*(F) \quad \text{se} \quad E \subseteq F;$$

inoltre risulta

$$\mu^*(A) \le \mu(A) \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Lemma 2.23 *La misura esterna è numerabilmente subadditiva, ossia*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) \qquad \forall \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Dimostrazione Se la serie a secondo membro diverge, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, fissati $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, applicando la definizione di misura esterna si trova $\{B_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $E_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{nk}$ e

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_{nk}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}};$$

quindi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} B_{nk}$ e

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \mu(B_{nk}) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε. $\square$

Definiamo adesso la seguente famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{P}(X) : \ \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{P}(X)\}.$$

La famiglia $\mathcal{M}$ è formata da tutti i sottoinsiemi $B \subseteq X$ che rendono additiva la funzione μ^* su ogni $E \subseteq X$, ossia che "decompongono bene" la misura esterna di qualunque insieme $E \subseteq X$: una richiesta che, a posteriori, la misura $\overline{\mu}$ che costruiremo dovrà soddisfare. Gli elementi di $\mathcal{M}$ saranno detti *insiemi $\overline{\mu}$-misurabili.* Osserviamo che la relazione $\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c) \geq \mu^*(E)$ è sempre vera, a causa della subadditività di μ^*: quindi la disuguaglianza significativa è quella opposta. Si noti che se $B \subseteq X$ è tale che $\mu^*(B) = 0$, allora B appartiene necessariamente a $\mathcal{M}$: infatti per ogni $E \subseteq X$ si ha, per monotonia,

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(E).$$

Lemma 2.24 *La classe $\mathcal{M}$ è un'algebra.*

Dimostrazione È chiaro, per definizione, che $X \in \mathcal{M}$ e che $\mathcal{M}$ è stabile per il passaggio al complementare. Proviamo che $\mathcal{M}$ è anche stabile per

intersezione (finita): ciò proverà la tesi.
Siano $A, B \in \mathcal{M}$: allora per ogni $E \subseteq X$ si ha per subadditività

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c),$$

e d'altra parte, essendo $B, A \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \\ &\quad + \mu^*(E \cap B^c \cap A) + \mu^*(E \cap B^c \cap A^c); \end{aligned}$$

essendo $(B \cap A)^c = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A) \cup (B^c \cap A^c)$, ove l'unione è disgiunta, si ottiene

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (B \cap A)) + \mu^*(E \cap (B \cap A)^c).$$

ciò prova che $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$, ossia che $A \cap B \in \mathcal{M}$.
□

Lemma 2.25 *La classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile disgiunta e la misura esterna è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$: in altre parole, se $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ e se $B_n \cap B_m = \emptyset$ per $n \neq m$, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$ e*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n).$$

Dimostrazione Proviamo anzitutto, per induzione, che

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap B_k) \qquad \forall E \subseteq X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per $n = 0$ la relazione è evidente. Se essa vale per n, dimostriamola per $n+1$: si ha $\bigcup_{h=0}^{n} B_h \in \mathcal{M}$ per il lemma 2.24; quindi, usando l'ipotesi induttiva, ricaviamo

$$\mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{n+1}B_k\right)=$$
$$=\mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{n+1}B_k\cap\bigcup_{h=0}^{n}B_h\right)+\mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{n+1}B_k\cap\left(\bigcup_{h=0}^{n}B_h\right)^c\right)=$$
$$=\mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{n}B_k\right)+\mu^*(E\cap B_{n+1})=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\mu^*(E\cap B_k)+\mu^*(E\cap B_{n+1})=\sum_{k=0}^{n+1}\mu^*(E\cap B_k)$$

e ciò prova la relazione sopra scritta.
Ciò premesso, verifichiamo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in\mathcal{M}$: se $E\subseteq X$ si ha, per quanto già provato,

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{n}B_k\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{n}B_k\right)^c\right)=\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mu^*(E\cap B_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{n}B_k\right)^c\right)\geq\\ &\geq \sum_{k=0}^{n}\mu^*(E\cap B_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k\right)^c\right).\end{aligned}$$

Per $n\to\infty$ si ottiene, grazie alla numerabile subadditività di μ^*,

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{k=0}^{\infty}\mu^*(E\cap B_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k\right)^c\right)\geq\\ &\geq \mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k\right)^c\right),\end{aligned}$$

ossia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in\mathcal{M}$.
Per provare la numerabile additività, in virtù del lemma 2.23, si deve verificare solo la disuguaglianza $\geq$. Scegliendo $E=X$ nella relazione provata all'inizio della dimostrazione, si ha

$$\sum_{k=0}^{n}\mu(B_k)=\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{n}B_k\right)\leq\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k\right)\qquad\forall n\in\mathbb{N},$$

da cui, per $n \to \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(B_k) \leq \mu^* \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \right). \quad \square$$

Si osservi che i lemmi 2.24 e 2.25 implicano che $\mathcal{M}$ è una classe di Dynkin. Ma si ha di più:

Lemma 2.26 *La classe $\mathcal{M}$ è una tribù.*

Dimostrazione Basta provare che $\mathcal{M}$ è chiusa per unione numerabile. Sia dunque $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, e poniamo $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$: dobbiamo mostrare che $B \in \mathcal{M}$. Possiamo utilizzare il lemma 2.2 e sostituire a $\{B_n\}$ una successione $\{C_n\}$ costituita da elementi disgiunti di $\mathcal{M}$, tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = B$: ma a questo punto la tesi è conseguenza del lemma 2.25. $\square$

Lemma 2.27 *Risulta $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ e quindi $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.*

Dimostrazione Sia $A \in \mathcal{A}$: dati $\varepsilon > 0$ ed $E \subseteq X$, per definizione di misura esterna esiste $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Allora, posto $B_n = A_n \cap A$ e $C_n = A_n \cap A^c$, si ha $B_n, C_n \in \mathcal{A}$ ed inoltre $E \cap A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, $E \cap A^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Quindi, applicando nuovamente la definizione di misura esterna, nonché la finita additività di μ sui disgiunti di $\mathcal{A}$, caso particolare dell'ipotesi (ii),

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu(B_n) + \mu(C_n)] = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

da cui $A \in \mathcal{M}$. $\square$

A questo punto possiamo concludere: la funzione $\overline{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$, il quale contiene $(X, \mathcal{T}(\mathcal{A}))$: per costruzione, essa è completa, dato che, come osservato in precedenza, $\mathcal{M}$ contiene tutti i sottoinsiemi di ogni $T \in \mathcal{M}$ tale che $\mu^*(T) = 0$. Resta da far vedere che $\overline{\mu}$ è un'estensione di μ, ossia che $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$. Sappiamo già che $\mu^*|_{\mathcal{A}} \leq \mu$;

dobbiamo provare la disuguaglianza opposta. Osserviamo esplicitamente che soltanto qui utilizzeremo l'ipotesi (ii) nel caso numerabile (in precedenza essa è stata adoperata solo nel caso finito, nel corso della dimostrazione del lemma 2.27). Sia $A \in \mathcal{A}$: in particolare si ha $A \in \mathcal{M}$. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, tale che $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: scegliamo, grazie al lemma 2.2, una successione $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ costituita da elementi disgiunti, tali che $C_n \subseteq A_n$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; allora, essendo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap C_n)$, per la proprietà (ii) soddisfatta da μ possiamo scrivere

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap C_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Per l'arbitrarietà della famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ottiene allora $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. La funzione $\overline{\mu} : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ è dunque l'estensione di μ cercata e ciò conclude la dimostrazione del teorema di Carathéodory. $\square$

Esercizi 2

1. Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia contenente X e tale che $A \setminus B \in \mathcal{F}$ per ogni $A, B \in \mathcal{F}$. Si provi che $\mathcal{F}$ è un'algebra.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n$ un'algebra sull'insieme non vuoto X, con $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ è un'algebra.

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n$ una tribù sull'insieme non vuoto X, con $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che in generale $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ non è una tribù.

4. Sia X un insieme non vuoto. Posto

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq X : \ E, \text{ oppure } \ E^c \text{ è finito}\},$$

si provi che $\mathcal{F}$ è un'algebra, e che $\mathcal{F}$ è una tribù se e solo se X è un insieme finito.

5. Sia X un insieme non vuoto. Posto

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq X : \ E, \text{ oppure } \ E^c \text{ è numerabile}\},$$

si provi che $\mathcal{F}$ è una tribù, e che se X è più che numerabile allora l'inclusione $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ è propria.

6. Si dimostri che un'algebra chiusa per unioni numerabili crescenti, oppure per unioni numerabili disgiunte, è una tribù.

7. Sia $X = \{a, b, c\}$ e sia $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Si definiscano le due misure
$$\begin{cases} \mu_1(\{a\}) = 0 \\ \mu_1(\{b, c\}) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_2(\{a\}) = 1 \\ \mu_2(\{b, c\}) = 0. \end{cases}$$
Dette $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ le tribù degli insiemi $\overline{\mu}_1$-misurabili e degli insiemi $\overline{\mu}_2$-misurabili, si provi che $\mathcal{M}_1 = \mathcal{F}$ e che $\mathcal{M}_2 = \mathcal{P}(X)$.

3 La misura di Lebesgue

Per costruire la misura di Lebesgue m_N in $\mathbb{R}^N$ utilizzeremo la costruzione astratta del paragrafo precedente: sceglieremo $X = \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un'algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ ed una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ nulla sull'insieme vuoto e numerabilmente additiva sulle unioni numerabili disgiunte che stanno in $\mathcal{A}$, e poi applicheremo il teorema di Carathéodory.
I "mattoni" con i quali si costruisce la misura di Lebesgue sono i rettangoli N-dimensionali (intervalli, quando $N = 1$) e le loro unioni finite, i cosiddetti plurirettangoli.
Un *rettangolo* in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) è un insieme R della forma

$$R = \prod_{i=1}^{N} I_i = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N \,,$$

ove $I_1, \ldots, I_N$ sono intervalli di $\mathbb{R}$, limitati o no. Ricordando che la lunghezza $\ell(I)$ di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è la differenza fra i due estremi, ossia

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } \;]a, b[\subseteq I \subseteq [a, b], \\ +\infty & \text{se } \; I \text{ è illimitato}, \end{cases}$$

abbiamo subito un problema: vorremmo definire il volume N-dimensionale di un rettangolo come il prodotto delle lunghezze dei lati, ma nel prodotto cartesiano potrebbero comparire come fattori una semiretta e un singolo punto, generando un prodotto $0 \cdot \infty$. Allora è naturale introdurre la seguente *convenzione*, tipica della teoria della misura e dell'integrazione: si stabilisce che $0 \cdot \infty = 0$.
A questo punto possiamo porre la seguente

Definizione 3.1 *Il volume N-dimensionale di un rettangolo* $R = \prod_{i=1}^N I_i$ *è il numero*

$$v_N(R) = \prod_{i=1}^N \ell(I_i),$$

con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Ricordiamo che se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, la *parte interna* $\overset{\circ}{E}$ di E, la *chiusura* $\overline{E}$ di E e la *frontiera* ∂E di E sono stati introdotti nella definizione 1.5.10.

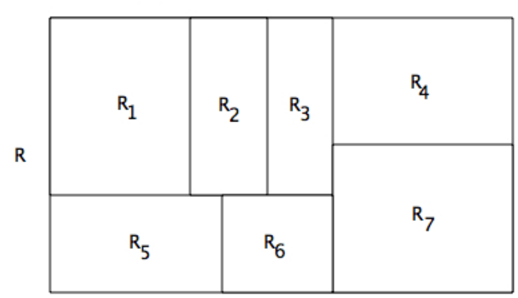
Osservazioni 3.2 (1) Dalla definizione 3.1 segue subito che per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^N$ si ha

$$v_N(R) = v_N(\overline{R}) = v_N(\overset{\circ}{R}), \qquad v_N(\partial R) = 0.$$

Si noti che la stessa proprietà è valida per la misura esterna m_N^*, in quanto per ogni rettangolo R si ha $\partial R \in \mathcal{P}$ e $m_N^*(\partial R) \leq v_N(\partial R) = 0$.

(2) Il volume v_N è *additivo* sulla famiglia dei rettangoli di $\mathbb{R}^N$: ciò significa che se un rettangolo R viene decomposto nell'unione finita di sottorettangoli $R_1, \ldots, R_n$, privi di punti interni comuni, allora si ha

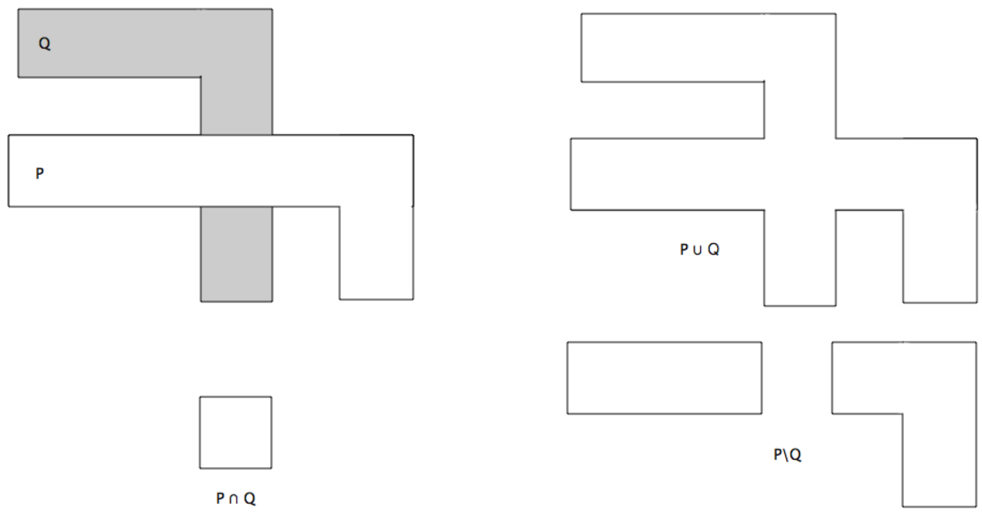
$$v_N(R) = \sum_{i=1}^n v_N(R_i).$$



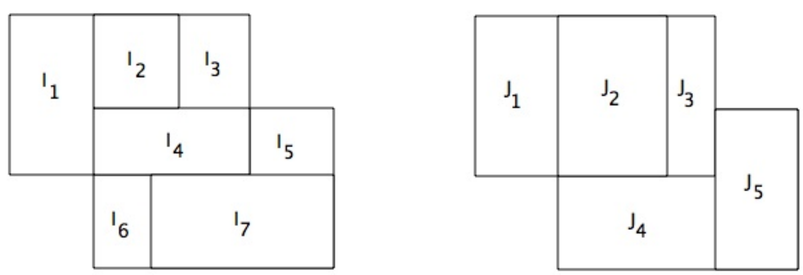
La verifica consiste in un noioso calcolo per il quale rimandiamo all'esercizio 3.2.

(3) Come ovvia conseguenza della definizione, il volume N-dimensionale è *invariante per traslazioni:* se R è un rettangolo e $Q = R + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in R\}$, allora anche Q è un rettangolo e $v_N(Q) = v_N(P)$.

Poiché la classe dei rettangoli di $\mathbb{R}^N$ è chiusa rispetto all'intersezione, ma non rispetto all'unione né alla differenza, conviene introdurre i *plurirettangoli* di $\mathbb{R}^N$, cioè gli insiemi $P \subset \mathbb{R}^N$ che sono unione finita di rettangoli (limitati o no). È facile verificare che se P, Q sono plurirettangoli, allora $P \cap Q$, $P \cup Q$, $P \setminus Q$ sono plurirettangoli: dunque la classe $\mathcal{P}$ dei plurirettangoli è un'algebra.



Osserviamo che, dato un plurirettangolo P, non è restrittivo supporre che esso sia unione finita di rettangoli *disgiunti* (naturalmente, tali rettangoli non saranno in generale tutti chiusi). Comunque, anche in questo caso, la decomposizione di un plurirettangolo in sottorettangoli disgiunti non è unica.



È naturale attribuire un volume ai plurirettangoli nel modo seguente:

Definizione 3.3 *Se $P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$ è un plurirettangolo, ove gli R_i sono rettangoli disgiunti, il volume N-dimensionale di P è*

$$v_N(P) = \sum_{i=1}^{k} v_N(R_i).$$

Occorre però verificare che questa è una buona definizione, nel senso che non dipende dal modo in cui decomponiamo il plurirettangolo P in unione di rettangoli disgiunti. In altre parole, se

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i = \bigcup_{j=1}^{h} S_j \,,$$

dove gli S_j sono rettangoli disgiunti diversi dagli R_i, bisogna controllare che risulti

$$\sum_{i=1}^{k} v_N(R_i) = \sum_{j=1}^{h} v_N(S_j).$$

Questo si può fare facilmente, "sovrapponendo" le due decomposizioni e constatando che, grazie all'additività del volume per i rettangoli (osservazione 3.2(2)), entrambe le somme coincidono con

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} v_N(R_i \cap S_j).$$

Bisogna adesso verificare che la funzione $v_N : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ è numerabilmente additiva sulle successioni di plurirettangoli disgiunti la cui unione è ancora un plurirettangolo; questo ci permetterà di applicare il teorema di Carathéodory e di ultimare così la costruzione della misura di Lebesgue. Il seguente lemma prova l'enunciato richiesto nel caso di un rettangolo.

Lemma 3.4 *Sia $R = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^N$, e supponiamo che risulti $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, ove gli R_n sono rettangoli disgiunti. Allora*

$$v_N(R) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(R_n).$$

Dimostrazione Poniamo

$$R_n = \prod_{i=1}^{N} [a_{i,n}, b_{i,n}]$$

e consideriamo *tutti* i sottorettangoli che sono delimitati da N coppie di iperpiani $(N-1)$-dimensionali di equazioni del tipo $x^i = a_{i,n}$ e $x^i = b_{i,n}$, $i = 1, \ldots, N$, e che non intersecano altri iperpiani dello stesso tipo. Possiamo denotare tali rettangoli con $R_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^N$, ove $R_{\mathbf{p}} = \prod_{i=1}^{N} [a_{i,p_i}, b_{i,p_i}]$. Si noti che $\bigcup_{\mathbf{p}\in\mathbb{N}^N} R_{\mathbf{p}} = R$ e che, per definizione degli $R_{\mathbf{p}}$, per $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ i rettangoli $R_{\mathbf{p}}$

e $R_{\mathbf{q}}$ non hanno punti interni comuni. Se allora indichiamo con $\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_N}$ le ampiezze dei lati di $R_{\mathbf{p}}$, risulta

$$\sum_{p_j=1}^{\infty} \delta_{p_j} = b_j - a_j\,, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^N} v_N(R_{\mathbf{p}}) &= \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_N=1}^{\infty} \delta_{p_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{p_N} = \\ &= \sum_{p_1=1}^{\infty} \delta_{p_1} \cdot \ldots \cdot \sum_{p_N=1}^{\infty} \delta_{p_N} = \prod_{i=1}^{N} (b_j - a_j) = v_N(R). \end{aligned}$$

D'altra parte, ponendo

$$Q_n = \{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^N : R_{\mathbf{p}} \subseteq R_n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

si ha $Q_n \cap Q_m = \emptyset$ per $n \neq m$, e quindi

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^N} v_N(R_{\mathbf{p}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\mathbf{p} \in Q_n} v_N(R_{\mathbf{p}});$$

ma, analogamente a quanto fatto in precedenza,

$$\sum_{\mathbf{p} \in Q_n} v_N(R_{\mathbf{p}}) = \sum_{\mathbf{p} \in Q_n} \delta_{p_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{p_N} = \prod_{i=1}^{N} (b_{i,n} - a_{i,n}) = v_N(R_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(R_n) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^N} v_N(R_{\mathbf{p}}) = v_N(R),$$

come richiesto. $\square$

L'estensione dell'enunciato al caso di un plurirettangolo è facile: sia $P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$ un plurirettangolo, unione finita di rettangoli R_i disgiunti. Supponiamo che risulti $P = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} P_n$, ove i P_N sono plurirettangoli disgiunti: dobbiamo provare che

$$v_N(P) = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n).$$

Ciascun P_n sarà della forma $P_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} R_{j,n}$, ove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i k_n rettangoli $R_{j,n}$ sono disgiunti. Poiché

$$R_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_i \cap P_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{k_n} R_i \cap R_{j,n}\,, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

con unione disgiunta, dal lemma 3.4 segue che

$$v_N(R_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_i \cap R_{j,n})$$

e quindi, essendo $R_{j,n} = \bigcup_{i=1}^{k}(R_{j,n} \cap R_i)$,

$$\begin{aligned} v_N(P) &= \sum_{i=1}^{k} v_N(R_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_i \cap R_{j,n}) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_{j,n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(P_n), \end{aligned}$$

il che prova l'enunciato richiesto.
Dunque, ricapitolando, siamo nelle ipotesi del teorema di Carathéodory: sull'algebra $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, è definita la funzione v_N che gode delle proprietà (i) e (ii) dell'enunciato. La tribù generata da $\mathcal{P}$ è la tribù $\mathcal{B}_N$ dei boreliani di $\mathbb{R}^N$: la minima tribù che contiene gli aperti. Dal teorema 2.22 segue che, partendo dalla misura esterna

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n) : P_n \in \mathcal{P},\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \right\} \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N,$$

resta definita una misura m_N sulla tribù

$$\mathcal{M}_N = \{B \subseteq \mathbb{R}^N :\ m_N^*(B \cap E) + m_N^*(B^c \cap E) = m_N^*(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N\},$$

data da $m_N(E) = m_N^*(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}_N$. Tale misura verifica

$$m_N(P) = v_N(P) \qquad \forall P \in \mathcal{P}$$

e si chiama *misura di Lebesgue N-dimensionale*; gli elementi di $\mathcal{M}_N$ si dicono *insiemi misurabili secondo Lebesgue.*

La misura di Lebesgue m_N, per costruzione, è completa, σ-finita e invariante per traslazioni. Notiamo che la sua restrizione alla tribù Boreliana $\mathcal{B}_N$ è univocamente determinata, in virtù del criterio di coincidenza (corollario 2.20). La misura di Lebesgue, come ogni misura, è numerabilmente subadditiva ed è numerabilmente additiva sulle successioni di insiemi misurabili disgiunti: in particolare è monotona e si comporta bene sulle successioni di insiemi misurabili monotone rispetto all'inclusione, nel senso espresso dalla proposizione 2.12.
Inoltre la misura di Lebesgue gode di una specifica proprietà di *regolarità*:

Teorema 3.5 *Per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ i seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) $E \in \mathcal{M}_N$.

(ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A tale che $A \supseteq E$ e $m_N^*(A \setminus E) < \varepsilon$.*

(iii) *Esiste un boreliano B tale che $B \supseteq E$ e $m_N(B \setminus E) = 0$.*

(iv) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C tale che $C \subseteq E$ e $m_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$.*

(v) *Esiste un boreliano D tale che $D \subseteq E$ e $m_N(E \setminus D) = 0$.*

Questo risultato ci dice che un insieme è misurabile se e solo se esso è approssimabile in misura da insiemi "buoni": anzi, un insieme E è misurabile se e solo se è della forma

$$E = D \cup T, \quad \text{ove} \quad D \in \mathcal{B}_N, \quad T \in \mathcal{M}_N, \quad D \cap T = \emptyset \quad \text{e} \quad m_N(T) = 0$$

(basta usare la proprietà (v) scegliendo $T = E \setminus D$).

Dimostrazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) Sia $E \in \mathcal{M}_N$ e supponiamo dapprima $m_N(E) < \infty$. Fissiamo $\varepsilon > 0$: poiché, come sappiamo,

$$m_N(E) = m_N^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(Q_n) : Q_n \text{ rettangoli aperti, } E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right\},$$

esiste un ricoprimento $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di E, costituito da rettangoli aperti, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(R_n) < m_N(E) + \varepsilon.$$

Posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_N$, A è un aperto contenente E tale che

$$m_N(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(R_n) < m_N(E) + \varepsilon.$$

Dato che $m_N(E) < \infty$, possiamo scrivere allora

$$m_N(A \setminus E) = m_N(A) - m_N(E) < \varepsilon.$$

Supponiamo adesso $m_N(E) = \infty$. Sia $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di rettangoli N-dimensionali disgiunti la cui unione sia $\mathbb{R}^N$ (nel caso di $\mathbb{R}^2$ potremmo prendere $\{[n, n+1[\ \times [k, k+1[\ \}_{n,k\in\mathbb{Z}}$). Posto $E_n = E \cap R_n$, gli E_n hanno misura finita, sono disgiunti e la loro unione è E. Per quanto già provato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un aperto $A_n \supseteq E_n$, tale che $m_N(A_n \setminus E_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$. Pertanto, posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, l'aperto A verifica

$$\begin{aligned} m_N(A \setminus E) &\le m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n - \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m\right) \le \\ &\le m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus E_n)\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(A_n \setminus E_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un aperto A_n contenente E, tale che $m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$; posto allora $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} A_n$, si ha $B \in \mathcal{B}_N$, $B \supseteq E$ e

$$m_N^*(B \setminus E) \le m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui $m_N^*(B \setminus E) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ **(i)** Scriviamo $E = B \setminus (B \setminus E)$. Ora, $B \in \mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_N$; siccome $m_N^*(B \setminus E) = 0$, per completezza si ha $B \setminus E \in \mathcal{M}_N$, e quindi $E \in \mathcal{M}_N$.

Le implicazioni **(i)** $\Longrightarrow$ **(iv)** $\Longrightarrow$ **(v)** $\Longrightarrow$ **(i)** seguono applicando a E^c i ragionamenti precedenti. □

Esercizi 3

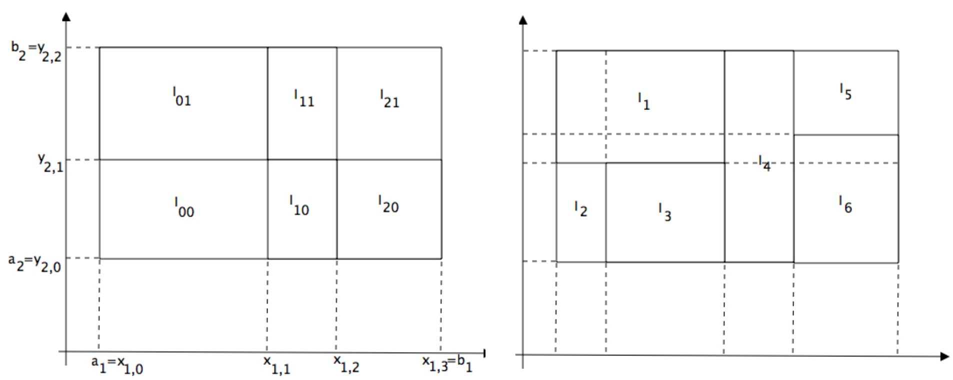
1. Se E, F sono sottoinsiemi di uno spazio metrico, si provi che

$$\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F, \quad \partial(E \cap F) \subseteq \partial E \cup \partial F, \quad \partial(E \setminus F) \subseteq \partial E \cup \partial F.$$

2. Si verifichi che se $I = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ è un rettangolo di $\mathbb{R}^N$ e si ha $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, ove gli $I_j = \prod_{i=1}^{N} [a_{ij}, b_{ij}]$ sono rettangoli privi di punti interni comuni, allora risulta

$$v_N(I) = \sum_{j=1}^{k} v_N(I_j).$$

[**Traccia:** si provi dapprima la tesi nel caso di una *decomposizione coordinata*, cioè nella situazione seguente: per $i = 1, \ldots, N$ esistono dei numeri $x_{i,0}, \ldots, x_{i,p_i}$, con $a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \ldots < x_{i,p_i} = b_i$, tali che, posto $H = \{\mathbf{h} \in \mathbb{N}^N : 0 \le h_i < p_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ e $I_\mathbf{h} = \prod_{i=1}^{N} [x_{i,h_i}, x_{i,h_i+1}]$, risulta $I = \bigcup_{\mathbf{h} \in H} I_\mathbf{h}$ e gli $I_\mathbf{h}$ non hanno punti interni in comune (figura in basso a sinistra). Si passi poi al caso generale osservando che se $I = \bigcup_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{N} [a_{ij}, b_{ij}]$, per $i = 1, \ldots, N$ possiamo mettere in ordine crescente i numeri $a_{i1}, \ldots, a_{ik}, b_{i1}, \ldots, b_{ik}$ e ridenominarli come $a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \ldots < x_{i,p_i} = b_i$; in questo modo si individua una decomposizione coordinata di intervalli $I_\mathbf{h} = \prod_{i=1}^{N} [x_{i,h_i}, x_{i,h_i+1}]$, con $0 \le h_i \le p_i$, tale che ciascun I_j è l'unione di un numero finito di intervalli della decomposizione (figura in basso a destra). Si deduca allora che $\sum_{j=1}^{k} v_N(I_j) = \sum_{\mathbf{h} \in H} v_N(I_\mathbf{h}) = v_N(I)$.]



3. Si provi che ogni aperto ha misura strettamente positiva.

4. Si provi che ogni compatto ha misura finita.

5. Si mostri che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti. Come si può generalizzare questo enunciato al caso di aperti di $\mathbb{R}^N$ con $N > 1$?

6. Si provi che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ con $m_1(\mathbb{Q}) = 0$.

7. *(Distanza fra due insiemi)* Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio metrico (X, d). La distanza fra A e B è definita nel modo seguente:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

   Si provi che:

   (i) risulta $\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf y \in B d(y, A)$;

   (ii) se $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ allora $\operatorname{dist}(A, B) = 0$, ma il viceversa è falso;

   (iii) se A e B sono chiusi disgiunti e uno dei due è compatto, allora $\operatorname{dist}(A, B) > 0$;

   (iv) la disuguaglianza triangolare

$$\operatorname{dist}(A, C) \leq \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C)$$

   è falsa in generale.

8. *(Insiemi normali)* Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, ove α e β sono assegnate funzioni continue definite su $[a, b]$, con $\alpha \leq \beta$. Si provi che E è misurabile in $\mathbb{R}^2$ e che

$$m_2(E) = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)]\, dx.$$

9. Calcolare $m_2(C)$, ove C è un cerchio di raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^2$.

10. Calcolare la misura $m_2(P_n)$, ove P_n è la regione di $\mathbb{R}^2$ delimitata da un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $r > 0$.

11. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0).$$

12. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che il grafico di f è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ di misura nulla.

13. *(Insieme di Cantor)* Dividiamo $[0,1]$ in tre parti uguali ed asportiamo l'intervallo aperto centrale di ampiezza $1/3$. Dividiamo ciascuno dei due intervalli chiusi residui in tre parti uguali e rimuoviamo i due intervalli aperti centrali di ampiezza $1/9$. Per ciascuno dei quattro intervalli residui ripetiamo la stessa procedura: al passo n-simo, avremo 2^n intervalli chiusi $I_{k,n}$ $(k = 1, \ldots, 2^n)$, di ampiezza 3^{-n}, di cui elimineremo le parti centrali aperte $J_{k,n}$ di ampiezza 3^{-n-1}. L'insieme

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{k,n}$$

si chiama *insieme ternario di Cantor*.

(i) Si dimostri che C è chiuso e privo di punti interni.

(ii) Si provi che tutti i punti di C sono punti d'accumulazione per C.

(iii) Si calcoli la misura $m_1(C)$.

14. Si ripeta la procedura dell'esercizio precedente, asportando stavolta parti centrali di ampiezza p^{-n}, ove p è un intero fissato maggiore di 3. Si calcoli la misura dell'insieme risultante C_p, e se ne deduca che esistono aperti densi in $[0,1]$ la cui misura è positiva ma arbitrariamente piccola.

15. Si consideri l'insieme ternario di Cantor C_p. Si provi che per tale insieme risulta

$$\sup\{m_N(P) : P \in \mathcal{P},\ \overline{P} \subseteq C_p\} = 0,$$

$$\inf\{m_N(P) : P \in \mathcal{P},\ \overset{\circ}{P} \supseteq C_p\} > 0.$$

16. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Si provi che se $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$ allora $m_N(E) > 0$. È vero il viceversa?

17. Si costruisca un aperto illimitato di $\mathbb{R}^N$ cha abbia misura di Lebesgue pari a λ, essendo λ un arbitrario numero positivo.

18. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme qualunque. Si provi che l'insieme

$$E' = \{(\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^{N+1} : \mathbf{x} \in E\}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ con $m_{N+1}(E') = 0$.

19. Sia E il sottoinsieme di $[0,1]$ costituito da tutti i numeri che hanno uno sviluppo decimale in cui non compare la cifra 1: ad esempio, $\frac{2}{3} = 0,\overline{6} \in E$, $\frac{1}{9} = 0.\overline{1} \notin E$, mentre $\frac{1}{10} = 0.1 = 0.0\overline{9} \in E$. Si provi che E è misurabile in $\mathbb{R}$ e se ne calcoli la misura.

20. Si calcoli l'area della regione piana definita dalle disuguaglianze
$$x^2 \leq |y| \leq x^{1/3}.$$

21. Fissato $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, poniamo
$$tE = \{t\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\} \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$
Si provi che se E è misurabile allora tE è misurabile, e si ha $m_N(tE) = |t|^N m_N(E)$.

22. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, integrabile secondo Riemann in senso improprio. Si provi che l'insieme
$$E = \{(x, y) : x \geq a,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$
è misurabile in $\mathbb{R}^2$, con
$$m_2(E) = \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

4 Un insieme non misurabile

Sia $N = 1$. La classe $\mathcal{M}_1$ dei sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue è molto vasta, ma non esaurisce la classe di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Tuttavia, per esibire un insieme non misurabile non si può fare a meno del seguente

Assioma della scelta *Per ogni insieme non vuoto X esiste una* funzione di scelta *$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tale che $f(E) \in E$ per ogni $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.*

In altre parole, l'assioma della scelta dice che è possibile selezionare, per mezzo di un'opportuna funzione f, esattamente un elemento da ciascun sottoinsieme non vuoto di X. La cosa sarebbe banale se X avesse cardinalità finita, e facile se X fosse numerabile (esercizio 4.6), ma per insiemi di cardinalità più alta questa proprietà non è dimostrabile se non si adotta questo assioma.

L'insieme che andiamo a costruire fu introdotto da Vitali. Consideriamo in $[0,1]$ la relazione di equivalenza

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi è un'infinità più che numerabile di classi di equivalenza, ognuna delle quali contiene un'infinità numerabile di elementi. Costruiamo un insieme V prendendo, grazie all'assioma della scelta, esattamente un elemento da ciascuna classe di equivalenza: V è un sottoinsieme più che numerabile di $[0,1]$, detto *insieme di Vitali*.
Sia ora $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q}\cap[-1,1]$, e sia $V_n = V + q_n$. Notiamo che $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$: infatti se $x \in V_n \cap V_m$ allora $x = a + q_n = b + q_m$ con $a, b \in V$; di qui segue $a - b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, da cui (per come è stato costruito V) $a = b$. Ne deduciamo $q_n = q_m$, ed infine $n = m$. Notiamo anche che valgono le inclusioni

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \subseteq [-1,2],$$

e quindi, per la monotonia della misura esterna,

$$1 \leq \overline{m}_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n\right) \leq 3.$$

Se V fosse misurabile secondo Lebesgue, anche i suoi traslati V_n sarebbero misurabili ed avrebbero la stessa misura; per l'additività numerabile di m_1 si ricaverebbe

$$m_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1(V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m_1(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m_1(V) > 0, \end{cases}$$

e ciò contraddice il fatto che la misura di $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ è compresa fra 1 e 3. Pertanto l'insieme V non può essere misurabile.

Esercizi 4

1. Dimostrare che per ogni $\lambda \in]0, +\infty]$ esiste un sottoinsieme $U \subset [0, \infty[$, non misurabile secondo Lebesgue, tale che $m_1^*(U) = \lambda$.

2. Dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}$ di misura positiva, si provi che esiste un sottoinsieme $W \subset E$ che non è misurabile secondo Lebesgue.

3. Sia $V_n = V + q_n$, come nella costruzione dell'insieme non misurabile di Vitali. Posto $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m$, si provi che

$$m_1^*(E_n) < \infty, \quad E_n \supset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m_1^*(E_n) > m_1^*\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

4. Siano V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non misurabili, disgiunti e tali che $V \cup W$ sia misurabile. Si provi che se $m(V \cup W) < \infty$ allora

$$m_1(V \cup W) < m_1^*(V) + m_1^*(W).$$

5. Si costruisca un sottoinsieme non misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, $N > 1$.

6. Dato un insieme numerabile X, si costruisca una funzione di scelta per X.

5 Funzioni misurabili

Ora che abbiamo costruito la misura di Lebesgue e conosciamo gli insiemi misurabili, sui quali potremo effettuare gli integrali, dobbiamo determinare la classe delle funzioni che potranno essere integrate, cioè per le quali l'integrale avrà senso. Considereremo funzioni $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, ove D è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e $\overline{\mathbb{R}}$ è la retta reale estesa, ossia $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$; ammetteremo dunque che le funzioni prendano i valori $\pm\infty$. In questo nuovo contesto sarà utile mantenere la convenzione

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0,$$

grazie alla quale potremo definire l'integrale senza ambiguità.
Cominciamo con la seguente proposizione, che introduce la proprietà caratteristica delle funzioni che ci interessano, e che riguarda gli insiemi di sopralivello e di sottolivello.

Proposizione 5.1 *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Per una qualunque funzione $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ i seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\}$ *è un insieme misurabile in* $\mathbb{R}^N$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ *è un insieme misurabile in* $\mathbb{R}^N$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < \alpha\}$ *è un insieme misurabile in* $\mathbb{R}^N$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ *è un insieme misurabile in* $\mathbb{R}^N$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Si ha per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha - 1/n\},$$

e quindi la tesi.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Si ha per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < \alpha\} = D \setminus \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \geq \alpha\},$$

e quindi la tesi.

(iii) $\Longrightarrow$ **(iv)** Si ha per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

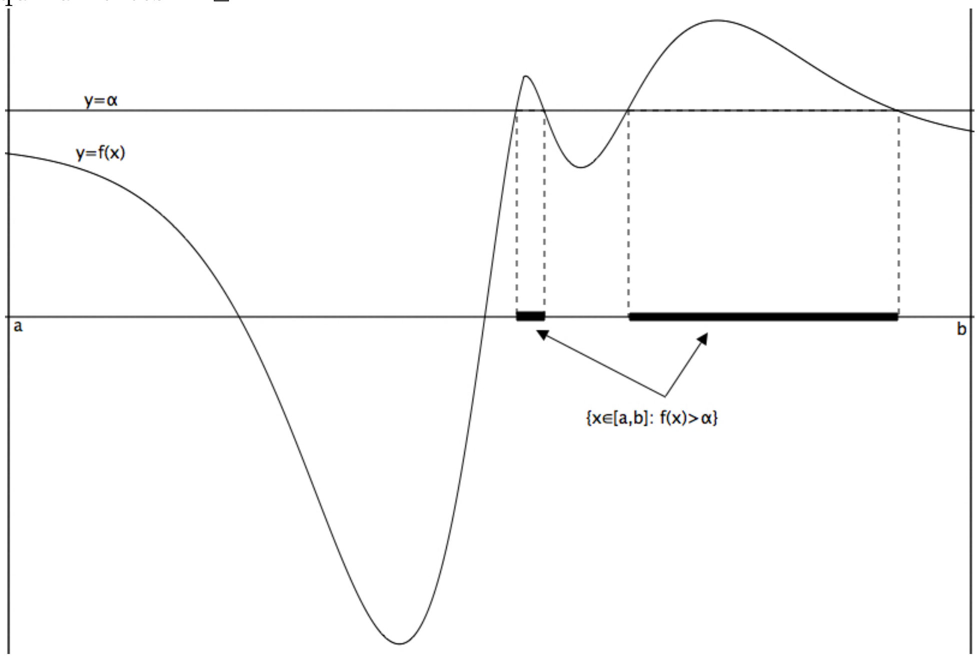
$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < \alpha + 1/n\},$$

e quindi la tesi.

(iv) $\Longrightarrow$ **(i)** Si ha per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\} = D \setminus \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\},$$

e quindi la tesi. $\square$



Definizione 5.2 *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Diciamo che una funzione $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è* misurabile (secondo Lebesgue) *se vale una delle condizioni della proposizione precedente (e quindi valgono tutte).*

Esempi 5.3 **(1)** se E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, la *funzione caratteristica*, o *indicatrice*, di E è

$$I_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin E. \end{cases}$$

Questa funzione è misurabile perché per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{\mathbf{x} \in D : I_E(\mathbf{x}) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1, \\ E & \text{se } 0 \leq \alpha < 1, \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

(2) Una *funzione semplice* in $\mathbb{R}^N$ è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$, cioè è una funzione della forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{E_i}(\mathbf{x}),$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono numeri reali ed $E_1 \ldots, E_k$ sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Queste funzioni non si rappresentano in modo unico: ad esempio, se $N = 1$,

$$I_{[0,2]}(x) = I_{[0,3]}(x) - I_{]2,3]}(x).$$

Però esse hanno una rappresentazione canonica: dato che assumono un numero finito di valori non nulli e distinti $\beta_1, \ldots, \beta_r$, ponendo

$$A_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \varphi(\mathbf{x}) = \beta_j\}, \quad j = 1 \ldots, r,$$

si può scrivere

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j I_{A_j}(\mathbf{x}),$$

ed in questo modo si ottiene la *forma canonica* della funzione semplice φ, che viene espressa come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi *disgiunti* e "massimali", nel senso che ciascun A_j è il più grande insieme dove la φ assume il corrispondente valore β_j. Osserviamo che gli insiemi A_j sono misurabili, essendo ottenuti dagli E_i con un numero finito di unioni, intersezioni e differenze; quindi, supponendo (il che non è restrittivo) che sia $\beta_1 < \ldots < \beta_{q-1} < 0 < \beta_q < \ldots < \beta_r$, e posto per comodità

$$B = \{\mathbf{x} \in D : \varphi(\mathbf{x}) = 0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{r} A_j \right)^c,$$

si ha

$$\{\mathbf{x} \in D : \varphi(\mathbf{x}) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \beta_r \\ \bigcup_{j=i}^{r} A_j & \text{se } \beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i\,,\ q < i \leq r \\ \bigcup_{j=q}^{r} A_j & \text{se } 0 \leq \alpha < \beta_q \\ \bigcup_{j=q}^{r} A_j \cup B & \text{se } \beta_{q-1} \leq \alpha < 0 \\ \bigcup_{j=i}^{r} A_j \cup B & \text{se } \beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i\,,\ 1 < i < q \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < \beta_1\,. \end{cases}$$

Ne segue che φ è misurabile.

(3) Le funzioni continue sono misurabili. Infatti in tal caso per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

l'insieme $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\}$ è un aperto, e dunque è misurabile.

(4) Se $N = 1$, le funzioni $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ monotone sono misurabili: infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ è una semiretta e quindi è misurabile.

Osservazione 5.4 Se $D \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile e $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, possiamo sempre estendere f a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendo

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in D, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin D; \end{cases}$$

l'estensione $\overline{f}$ è ancora misurabile, in quanto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{\mathbf{x} \in D : \overline{f}(\mathbf{x}) > \alpha\} = \begin{cases} \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0, \\ \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) > \alpha\} \cup D^c & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Questo ci permette di lavorare esclusivamente con funzioni misurabili definite su tutto $\mathbb{R}^N$, rimpiazzando f, quando occorre, con $\overline{f}$.

Proprietà delle funzioni misurabili

La classe delle funzioni misurabili è estremamente ampia: in effetti esibire una funzione non misurabile è equivalente a fornire un esempio di un insieme non misurabile, compito non banale, come abbiamo visto nel paragrafo precedente. Inoltre tale classe è stabile rispetto alle operazioni algebriche ed a quelle di passaggio al limite, come andremo a verificare. Utilizzeremo d'ora in avanti, per semplicità, la notazione più comoda $\{f > \alpha\}$ per denotare l'insieme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) > \alpha\}$.

Proposizione 5.5 *Siano $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili. Se f e $-g$ non valgono mai simultaneamente né $+\infty$ né $-\infty$, allora la somma $f + g$ è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{f + g > \alpha\} = \{f = +\infty\} \cup \{g = +\infty\} \cup \{\alpha < f + g < +\infty\} :$$

i primi due insiemi sono misurabili in virtù dell'esercizio 5.2; quindi basta dimostrare che il terzo insieme è misurabile. Ed infatti si può scrivere

$$\begin{aligned} \{\alpha < f + g < +\infty\} &= \{-\infty < \alpha - g < f < +\infty\} = \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[\{\alpha - r < g < +\infty\} \cap \{r < f < +\infty\}\right], \end{aligned}$$

e gli insiemi dell'ultimo membro sono misurabili, poiché

$$\{\alpha - r < g < +\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\{g < n\} \cap \{g > \alpha - r\}] \,,$$

ed analogamente

$$\{r < f < +\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\{f < n\} \cap \{f > r\}] \,.$$

Ne segue che $f + g$ è misurabile. $\square$

Il risultato che segue riguarda la misurabilità del prodotto $f \cdot g$. Ricordiamo che esso è sempre ben definito in virtù della convenzione $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Proposizione 5.6 *Siano $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili. Allora il prodotto $f \cdot g$ è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione Notiamo, per cominciare, che se f è misurabile allora, ovviamente, anche $-f$ lo è, essendo $\{-f > \alpha\} = \{f < -\alpha\}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Ciò premesso, supponiamo dapprima f e g non negative. Allora si ha

$$\{fg > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0, \\ \{f > 0\} \cap \{g > 0\} & \text{se } \alpha = 0, \\ \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} [\{f > r\} \cap \{g > \alpha/r\}] & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Ne segue che fg è misurabile quando f e g sono non negative.
Nel caso generale, poniamo

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = -\min\{f, 0\},$$

ed osserviamo che tali funzioni sono non negative e misurabili, dato che

$$\{f^+ > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0, \\ \{f > \alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0, \end{cases} \qquad \{f^- > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0, \\ \{f < -\alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0; \end{cases}$$

inoltre si ha $f = f^+ - f^-$. Analoga decomposizione si può fare per $g = g^+ - g^-$. Ma allora fg si può scrivere come

$$fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ + f^-g^- + (-f^+g^-) + (-f^-g^+),$$

e quindi è misurabile per quanto già dimostrato e per la proposizione 5.5. $\square$

Considereremo adesso *successioni* di funzioni misurabili definite su $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 5.7 *Se* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di funzioni misurabili su* $\mathbb{R}^N$*, allora le funzioni* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$*,* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$*,* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *e* $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *sono misurabili.*

Dimostrazione Infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < \alpha\}, \quad \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\},$$

il che prova la misurabilità di $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$; per le altre due basta osservare che

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geq n} f_m\right), \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} f_m\right),$$

ed applicare quanto già dimostrato. □

Corollario 5.8 *Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili che converge puntualmente ad una funzione* f *in* $\mathbb{R}^N$*. Allora* f *è misurabile.*

Dimostrazione Basta osservare che $f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ ed applicare la proposizione 5.7. □

Il corollario precedente individua una proprietà che in effetti *caratterizza* la misurabilità. Si ha infatti:

Proposizione 5.9 *Sia* $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione qualunque. Essa è misurabile su* $\mathbb{R}^N$ *se e solo se esiste una successione* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di funzioni semplici, che converge puntualmente a* f *in* $\mathbb{R}^N$*.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Segue dal corollario 5.8.

($\Longrightarrow$) Costruiamo le φ_n nel modo seguente:

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} n & \text{se } f(\mathbf{x}) > n, \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,2^n, \\ 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) = 0, \\ \frac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq f(\mathbf{x}) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 0, -1, \ldots, -n\,2^n + 1, \\ -n & \text{se } f(\mathbf{x}) < -n. \end{cases}$$

Le φ_n sono funzioni semplici, in quanto

$$\begin{aligned}\varphi_n &= nI_{\{f>n\}} + \sum_{k=1}^{n\,2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\{\frac{k-1}{2^n}<f\le\frac{k}{2^n}\}} + \\ &+ \sum_{k=-n\,2^n+1}^{0} \frac{k}{2^n} I_{\{\frac{k-1}{2^n}\le f<\frac{k}{2^n}\}} - nI_{\{f<-n\}},\end{aligned}$$

e tutti gli insiemi coinvolti sono misurabili. Proviamo che $\varphi_n \to f$ puntualmente in $\mathbb{R}^N$: se $\mathbf{x}$ è tale che $f(\mathbf{x}) = \pm\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\varphi_n(\mathbf{x}) = \pm n$, quindi $\varphi_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$; se invece $|f(\mathbf{x})| < \infty$, allora, per costruzione, per ogni $n > |f(\mathbf{x})|$ si ha $|f(\mathbf{x}) - \varphi_n(\mathbf{x})| < \frac{1}{2^n}$ e dunque, nuovamente, $\varphi_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$. Ciò prova la tesi. $\square$

Osservazione 5.10 Le funzioni φ_n costruite nella dimostrazione precedente sono, per costruzione, *dominate* da f, ossia verificano

$$|\varphi_n(\mathbf{x})| \le |\varphi_{n+1}(\mathbf{x})| \le |f(\mathbf{x})| \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Questa proprietà verrà usata nel seguito. Si noti inoltre che se f è limitata, allora la convergenza delle φ_n verso f è uniforme: infatti risulta

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \frac{1}{2^n} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n > \sup_{\mathbb{R}^N} |f|.$$

Infine notiamo che si può supporre, rimpiazzando φ_n con $\varphi_n I_{B_n}$, ove B_n è la palla di $\mathbb{R}^N$ di centro $\mathbf{0}$ e raggio n, che la successione $\{\varphi_n\}$ sia contenuta in $\mathcal{S}_0$; naturalmente con questa scelta si perde in generale la proprietà della convergenza uniforme.

Esercizi 5

1. Si verifichi che una funzione indicatrice I_E è misurabile se e solo se E è un insieme misurabile.

2. Se $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, si provi che l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = \pm\infty\}$$

   è misurabile.

3. Se f, g sono funzioni misurabili su $\mathbb{R}^N$, si provi che l'insieme
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\}$$
è misurabile.

4. Sia f una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$. Se $g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è un'altra funzione, tale che l'insieme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$ sia misurabile con misura nulla, si provi che g è misurabile.

5. Se f è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$, si provi che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = \alpha\}$$
è misurabile.

6. Sia b un intero maggiore di 1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si consideri lo sviluppo di x in base b:
$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{b^n}$$
ove $\varepsilon_n(x) \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Si osservi che tale sviluppo non è unico per certi valori di x, ma si provi che, qualunque sia lo sviluppo scelto nei casi di ambiguità, le funzioni ε_n sono tutte misurabili su $\mathbb{R}$.

7. Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile (a valori reali) e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si provi che la composizione $g \circ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile.
Traccia: si osservi che $\{t \in \mathbb{R} : g(t) > \alpha\}$ è un aperto e si ricordi l'esercizio 3.5.]

8. Si provi che se f è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$, allora anche $|f|$ è misurabile. È vero il viceversa?

9. Si provi che una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se f^2 è misurabile e se l'insieme $\{f > 0\}$ è misurabile.

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si provi che f' è una funzione misurabile su $\mathbb{R}$. Se ne deduca che, se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è differenziabile, le sue derivate parziali sono funzioni misurabili.

11. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su $\mathbb{R}^N$. Si provi che l'insieme
$$\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\right\}$$
è misurabile.

6 L'integrale di Lebesgue

Ora che abbiamo identificato la classe delle funzioni misurabili, vogliamo costruire l'integrale per queste funzioni. Il primo passo consiste nel definire l'integrale per le funzioni semplici (esempio 5.3 (2)).
Cominciamo considerando l'importante sottofamiglia $\mathcal{S}_0$ delle funzioni semplici che sono nulle fuori da un insieme di misura finita.

Definizione 6.1 *Sia $\varphi\in\mathcal{S}_0$, e supponiamo che la sua forma canonica sia*
$$\varphi=\sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i}\,,$$
*con gli α_i numeri reali non nulli e $A_i=\{\varphi=\alpha_i\}$ insiemi misurabili di misura finita. L'*integrale *di φ su $\mathbb{R}^N$ è il numero reale*
$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\,d\mathbf{x}=\sum_{i=1}^k \alpha_i m_N(A_i).$$

Si verifica facilmente che questa definizione è indipendente dal modo con cui si rappresenta la φ mediante insiemi misurabili *disgiunti* (esercizio 6.2).
Elenchiamo le principali proprietà di cui gode l'integrale di funzioni di $\mathcal{S}_0$.

Proposizione 6.2 *Siano $\varphi,\psi\in\mathcal{S}_0$. Valgono le seguenti proprietà:*

(i) (monotonia) *se $\varphi\le\psi$, allora $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\,d\mathbf{x}\le\int_{\mathbb{R}^N}\psi\,d\mathbf{x}$;*

(ii) (linearità) *si ha $\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha\varphi+\beta\psi)\,d\mathbf{x}=\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\,d\mathbf{x}+\beta\int_{\mathbb{R}^N}\psi\,d\mathbf{x}$ per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.*

Si noti che, come facile conseguenza di (i) e (ii), si ha la relazione
$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\,d\mathbf{x}\right|\le\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|\,d\mathbf{x}\qquad\forall\varphi\in\mathcal{S}_0.$$

Dimostrazione **(i)** Consideriamo le rappresentazioni canoniche di φ e ψ:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i}\,, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{h} \beta_j I_{B_j}\,.$$

Ponendo $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ e

$$A_0 = \left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right]^c, \qquad B_0 = \left[\bigcup_{j=1}^{h} B_j\right]^c,$$

si può scrivere $\varphi = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i I_{A_i}$ e $\psi = \sum_{j=0}^{h} \beta_j I_{B_j}$. Essendo $\varphi \leq \psi$, si riconosce subito che, fissati $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ e $j \in \{0, 1, \ldots, h\}$, se $A_i \cap B_j$ non è vuoto allora $\alpha_i \leq \beta_j$, in quanto per $\mathbf{x} \in A_i \cap B_j$ si ha $\alpha_i = \varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) = \beta_j$. Quindi, scrivendo

$$\varphi = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} \alpha_i I_{A_i \cap B_j}\,, \qquad \psi = \sum_{j=0}^{h} \sum_{i=0}^{k} \beta_j I_{A_i \cap B_j}\,,$$

otteniamo rappresentazioni di φ e ψ mediante insiemi disgiunti: pertanto, in virtù dell'esercizio 6.2, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} \alpha_i m_N(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} \beta_j m_N(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi \, d\mathbf{x}.$$

(ii) Rappresentando φ e ψ come in (i), si ha

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_j) I_{A_i \cap B_j}\,;$$

la tesi segue allora dalla definizione di integrale. $\square$

Integrale di funzioni misurabili

Estenderemo adesso l'integrale ad una vasta sottoclasse delle funzioni misurabili; il risultato dell'operazione di integrazione potrà anche fornire i valori $\pm\infty$.

Definizione 6.3 *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile.*

(i) *Se $f \geq 0$, l'*integrale *di f su $\mathbb{R}^N$ è la quantità (eventualmente infinita)*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mathbf{x} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\, d\mathbf{x} : \ \varphi \in \mathcal{S}_0, \ 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

(ii) *Se f assume valori negativi, posto $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = -\min\{f, 0\}$, diciamo che f è* integrabile *su $\mathbb{R}^N$ se almeno uno fra gli integrali $\int_{\mathbb{R}^N} f^+\, d\mathbf{x}$, $\int_{\mathbb{R}^N} f^-\, d\mathbf{x}$ è finito; in tal caso, l'integrale di f su $\mathbb{R}^N$ è la quantità (eventualmente uguale a $\pm\infty$)*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} f^+\, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^N} f^-\, d\mathbf{x}.$$

(iii) *Se l'integrale $\int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mathbf{x}$ è finito, diciamo che f è* sommabile *su $\mathbb{R}^N$.*

(iv) *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Diciamo che f è integrabile su D se la funzione fI_D è integrabile su $\mathbb{R}^N$; in tal caso si definisce*

$$\int_D f\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} fI_D\, d\mathbf{x},$$

e diciamo che f è sommabile su D se tale integrale è finito.

Abbiamo così ottenuto un numero, $\int_D f\, d\mathbf{x}$, che dipende da D e da f. Analizziamo separatamente le due dipendenze.

Proposizione 6.4 *Sia f una funzione integrabile definita su un insieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Se $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili e disgiunti, tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$, allora si ha*

$$\int_D f\, d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} f\, d\mathbf{x}.$$

Dimostrazione Come già osservato, possiamo supporre che f sia definita su tutto $\mathbb{R}^N$. Se $f = I_E$, con E insieme misurabile, la tesi segue dalla numerabile additività della misura di Lebesgue, in quanto

$$\begin{aligned} \int_D I_E\, d\mathbf{x} &= m_N(E \cap D) = m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap D_n) \right) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(E \cap D_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} I_E I_{D_n}\, d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} I_E\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Se f è un elemento di $\mathcal{S}_0$, $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i}$, si ha per linearità

$$\begin{aligned} \int_D f\,d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i m_N(A_i \cap D) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(A_i \cap D_n) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \alpha_i\, m_N(A_i \cap D_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} f\,d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Sia ora f misurabile e non negativa. Se f è anche sommabile, fissato $\varepsilon > 0$, dalla definizione 6.3 segue che esiste $\varphi \in \mathcal{S}_0$ tale che

$$0 \le \varphi \le f I_D, \quad \int_D \varphi\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,d\mathbf{x} > \int_D f\,d\mathbf{x} - \varepsilon.$$

Ne segue, essendo $0 \le \varphi I_{D_n} \le f I_{D_n}$ ed utilizzando quanto già provato,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} f\,d\mathbf{x} \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} \varphi\,d\mathbf{x} = \int_D \varphi\,d\mathbf{x} > \int_D f\,d\mathbf{x} - \varepsilon.$$

Dunque, per l'arbitrarietà di ε, vale la disuguaglianza $\le$:

$$\int_D f\,d\mathbf{x} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} f\,d\mathbf{x}.$$

Se invece f non è sommabile, per ogni $M > 0$ esiste $\varphi \in \mathcal{S}_0$ tale che

$$0 \le \varphi \le f I_D, \quad \int_D \varphi\,d\mathbf{x} > M,$$

e per l'arbitrarietà di M si ottiene analogamente la disuguaglianza $\le$, che in questo caso dà direttamente l'uguaglianza $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} f\,d\mathbf{x} = +\infty = \int_D f\,d\mathbf{x}$.

Proviamo, sempre per $f \ge 0$, la disuguaglianza $\ge$, in cui si può chiaramente supporre f sommabile. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\varphi_n \in \mathcal{S}_0$ tale che

$$0 \le \varphi_n \le f I_{D_n}, \quad \int_{D_n} \varphi_n\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n\,d\mathbf{x} > \int_{D_n} f\,d\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Posto $\psi_m = \sum_{n=0}^m \varphi_n$, si ha ancora $\psi_m \in \mathcal{S}_0$ ed inoltre $0 \le \psi_m \le f I_D$; quindi, utilizzando la linearità dell'integrale su $\mathcal{S}_0$ (proposizione 6.2),

$$\sum_{n=0}^m \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_m\,d\mathbf{x} \le \int_D f\,d\mathbf{x}.$$

Ne segue, a maggior ragione,
$$\sum_{n=0}^{m}\left[\int_{D_n} f\,d\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \le \int_d f\,d\mathbf{x},$$
e per $m \to \infty$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{D_n} f\,d\mathbf{x} - \varepsilon \le \int_D f\,d\mathbf{x}.$$
L'arbitrarietà di ε porta alla disuguaglianza $\ge$.
Infine, se f è una funzione misurabile di segno variabile, basta fare la sottrazione fra le due uguaglianze
$$\int_D f^+\,d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{D_n} f^+\,d\mathbf{x}, \quad \int_D f^-\,d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{D_n} f^-\,d\mathbf{x},$$
almeno una delle quali coinvolge certamente quantità finite. $\square$

Corollario 6.5 *Sia f una funzione integrabile non negativa, definita su un insieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Se $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili, tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$, allora si ha*
$$\int_D f\,d\mathbf{x} \le \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{D_n} f\,d\mathbf{x}.$$

Dimostrazione Se i D_n sono disgiunti, la tesi segue dalla proposizione 6.4. Altrimenti, poniamo
$$E_0 = D_0, \qquad E_n = D_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$
Chiaramente gli E_n sono misurabili e disgiunti, e si ha ancora $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = D$. Per la proposizione 6.4, essendo $f \ge 0$, possiamo scrivere
$$\int_D f\,d\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} f\,d\mathbf{x} \le \sum_{n=0}^{\infty}\int_{D_n} f\,d\mathbf{x},$$
che è la tesi. $\square$

Prima di esaminare come l'integrale dipende dall'integrando f, conviene fare una considerazione di carattere generale.

Osservazione 6.6 Gli insiemi di misura nulla, altrimenti detti insiemi *trascurabili*, giocano nella teoria di Lebesgue un ruolo particolarmente importante. Anzitutto, sappiamo che se C è misurabile con $m_N(C) = 0$ allora ogni sottoinsieme di C è a sua volta misurabile con misura nulla, grazie alla completezza della misura di Lebesgue. Poi, se f è integrabile su D e $C \subseteq D$ ha misura nulla, allora si ha $\int_C f \, d\mathbf{x} = 0$, come facile conseguenza della definizione di integrale (definizione 6.3). Più in generale, se g è un'altra funzione definita su D tale che $m_N(\{f \neq g\}) = 0$, allora anche g è misurabile (esercizio 5.4) e si ha $\int_E f \, d\mathbf{x} = \int_E g \, d\mathbf{x}$ per ogni sottoinsieme misurabile $E \subseteq D$: infatti, $\{f \neq g\}$ risulta misurabile con misura nulla, da cui

$$\int_E g \, d\mathbf{x} = \int_{E \setminus \{f \neq g\}} g \, d\mathbf{x} + \int_{E \cap \{f \neq g\}} g \, d\mathbf{x} = \int_{E \setminus \{f \neq g\}} f \, d\mathbf{x} + 0 = \int_E f \, d\mathbf{x}.$$

Più importante ancora, come vedremo più avanti, è il ruolo degli insiemi di misura nulla nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue: si vedano a questo proposito la definizione 8.1 e gli esempi 8.2.

Una basilare conseguenza dell'osservazione precedente è il fatto che se una funzione f è sommabile su un insieme misurabile D, allora, modificandola sull'insieme dove essa vale $\pm\infty$, che per l'esercizio 6.4 è un insieme di misura nulla, possiamo sempre supporre che f assuma solo valori finiti, senza alterare il valore dell'integrale $\int_D f \, dx$.

Proposizione 6.7 *Siano f, g funzioni integrabili definite sull'insieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Valgono i seguenti fatti:*

(i) (monotonia) *se $f \leq g$, allora $\int_D f \, d\mathbf{x} \leq \int_D g \, d\mathbf{x}$;*

(ii) (omogeneità) *se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\int_D \alpha f \, d\mathbf{x} = \alpha \int_D f \, d\mathbf{x}$;*

(iii) (additività) *se non risulta né $\int_D f \, d\mathbf{x} = -\int_D g \, d\mathbf{x} = +\infty$, né $\int_D f \, d\mathbf{x} = -\int_D g \, d\mathbf{x} = -\infty$, allora si ha*

$$\int_D (f + g) \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x} + \int_D g \, d\mathbf{x}.$$

Notiamo che l'integrale $\int_D (f+g) \, d\mathbf{x}$ ha sempre senso, anche se in effetti $f+g$ non è definita nell'insieme

$$M = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}) = \pm\infty\}.$$

Infatti l'insieme M, per le ipotesi fatte, ha misura nulla: dunque, per l'osservazione 6.6, possiamo ridefinire $f = g = 0$ su M, senza alterare i due integrali $\int_D f\,d\mathbf{x}$ e $\int_D g\,d\mathbf{x}$, e pertanto, nelle nostre ipotesi, l'integrale $\int_D (f+g)\,d\mathbf{x}$ coincide con $\int_{D\setminus M}(f+g)\,d\mathbf{x}$.

Dimostrazione **(i)** Se si ha $0 \le f \le g$, la tesi è facile conseguenza della definizione 6.3.
Nel caso generale, si osservi che se $f \le g$ allora $f^+ \le g^+$ e $f^- \ge g^-$; quindi

$$\int_D f^+\,d\mathbf{x} \le \int_D g_+\,d\mathbf{x}, \quad \int_D f^-\,d\mathbf{x} \ge \int_D g_-\,d\mathbf{x},$$

e la tesi segue per sottrazione.

(ii) Sia $\alpha \ge 0$. Se $f \ge 0$, la tesi segue dalla definizione 6.3; altrimenti, essendo $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, si deduce la tesi anche per le f non sempre positive. Sia ora $\alpha = -1$: da $(-f)^+ = f^-$ e $(-f)^- = f^+$ segue che

$$\int_D (-f)\,d\mathbf{x} = \int_D f^-\,d\mathbf{x} - \int_D f^+\,d\mathbf{x} = -\int_D f\,d\mathbf{x}.$$

Infine, se $\alpha < 0$ basta combinare i due casi precedenti.

(iii) Distinguiamo quattro casi.

I: $f, g \ge 0$.

In questo caso rimandiamo la dimostrazione al momento in cui avremo a disposizione il teorema della convergenza monotona, o di Beppo Levi (teorema 8.4).

II: $f, g \le 0$.

In questo caso basta applicare il risultato di I a $-f$ e $-g$, e poi usare l'omogeneità.

III: $f \ge 0$, $g \le 0$.

In questo caso non sappiamo a priori se $f+g$ sia integrabile. Definiamo gli insiemi misurabili seguenti:

$$S^+ = \{(f+g)I_D \ge 0\}, \quad S^- = \{(f+g)I_D < 0\};$$

gli integrali di $f+g$ su tali insiemi hanno certamente senso. Per quanto già dimostrato possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_{S^+} f\,d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^N} f I_{S^+}\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} [(f+g)I_{S^+} + (-g)I_{S^+}]\,d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (f+g)I_{S^+}\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^N} (-g)I_{S^+}\,d\mathbf{x} = \\ &= \int_{S^+} (f+g)\,d\mathbf{x} - \int_{S^+} g\,d\mathbf{x},\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\int_{S^-} g\,d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^N} g I_{S^-}\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} [(g+f)I_{S^-} + (-f)I_{S^-}]\,d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (g+f)I_{S^-}\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^N} (-f)I_{S^-}\,d\mathbf{x} = \\ &= \int_{S^-} (g+f)\,d\mathbf{x} - \int_{S^-} f\,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Ora notiamo che, per ipotesi, non si ha $\int_D f\,d\mathbf{x} = -\int_D g\,d\mathbf{x} = +\infty$, e dunque uno almeno fra gli integrali $\int_{S^+} f\,d\mathbf{x}$ e $\int_{S^+} g\,d\mathbf{x}$ è finito: se ne deduce

$$\int_{S^+} f\,d\mathbf{x} + \int_{S^+} g\,d\mathbf{x} = \int_{S^+} (f+g)\,d\mathbf{x} = \int_D (f+g)^+\,d\mathbf{x},$$

e per analogo motivo

$$\int_{S^-} f\,d\mathbf{x} + \int_{S^-} g\,d\mathbf{x} = \int_{S^-} (f+g)\,d\mathbf{x} = -\int_D (f+g)^-\,d\mathbf{x};$$

per somma si ha allora la tesi.

IV: f e g di segno qualunque.

Poniamo

$$F^+ = \{fI_D \ge 0\}, \quad F^- = \{fI_D \le 0\}, \quad G^+ = \{gI_D \ge 0\}, \quad G^- = \{gI_D \le 0\}:$$

allora $F^+ \cap G^+$, $F^+ \cap G^-$, $F^- \cap G^+$ e $F^- \cap G^-$ sono insiemi misurabili disgiunti, la cui unione è D, e su ciascuno di essi la tesi è vera in virtù di uno dei tre passi precedenti. Sommando le quattro uguaglianze (delle quali al più due sono fra quantità infinite, ma dello stesso segno) si ottiene la tesi per D. □

Esercizi 6

1. Si verifichi che se $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ allora

$$I_{A\cap B} = I_A \cdot I_B\,, \quad I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_A I_B\,, \quad I_{A\setminus B} = I_A - I_A I_B\,.$$

2. Si verifichi che se $\varphi \in \mathcal{S}_0$ e se risulta

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i} = \sum_{j=1}^{h} \beta_j I_{B_j}\,,$$

con A_i e B_j insiemi misurabili disgiunti di misura finita, allora si ha

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_N(A_i) = \sum_{j=1}^{h} \beta_j m_N(B_j).$$

3. Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ numeri reali distinti, e siano $E_1, \ldots E_n$ sottoinsiemi arbitrari di $\mathbb{R}^N$, fra loro disgiunti. Si provi che la funzione $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{E_i}$ è misurabile su $\mathbb{R}^N$ se e solo se gli insiemi E_i sono tutti misurabili.

4. Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ di misura nulla. Provare che per ogni funzione misurabile f si ha $\int_D f\,d\mathbf{x} = 0$.

5. Si considerino le funzioni $\{\varepsilon_n\}$ dell'esercizio 5.6. Si calcoli, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'integrale $\int_{[0,1]} \varepsilon_n\,dx$.

6. Si calcoli l'integrale $\int_{[0,1]} f\,dx$, ove f è definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ n & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ e la prima cifra decimale non nulla è l'}n\text{-esima.} \end{cases}$$

7. Sia f una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$. Si provi che f è sommabile su $\mathbb{R}^N$ se e solo se $|f|$ è sommabile su $\mathbb{R}^N$.

8. Sia f una funzione sommabile su $\mathbb{R}^N$. Si provi che $m_N(\{f = \pm\infty\}) = 0$.

9. Sia f una funzione misurabile su $\mathbb{R}^N$. Posto $F_n = \{|f| \geq n\}$, si provi che se f è sommabile, allora $\lim_{n\to\infty} n\, m_N(F_n) = 0$. È vero il viceversa?

10. Siano f, g funzioni integrabili o sommabili su $\mathbb{R}^N$. Si provi che $f \vee g$, $f \wedge g$ sono a loro volta rispettivamente integrabili o sommabili su $\mathbb{R}^N$.

7 Confronto con l'integrale di Riemann

Consideriamo il caso $N = 1$: vogliamo confrontare l'integrale di Lebesgue con quello di Riemann visto nel corso di Analisi 1.
Ricordiamo che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *limitata*, è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ se, posto per ogni suddivisione $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ di $[a, b]$

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} \left[\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right] (x_i - x_{i-1}), \quad S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} \left[\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right] (x_i - x_{i-1}),$$

risulta

$$\sup_{\sigma} s(f, \sigma) = \inf_{\sigma} S(f, \sigma);$$

in tal caso l'integrale di Riemann $\int_a^b f\, dx$ è definito uguale a tale numero.
Ci proponiamo di dimostrare che se f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, allora f è sommabile in $[a, b]$ e il suo integrale secondo Lebesgue coincide con quello secondo Riemann.
Cominciamo col provare che se $f \in \mathcal{R}(a, b)$ allora f è misurabile. Osserviamo che i numeri $s(f, \sigma)$ e $S(f, \sigma)$ sono gli integrali su $[a, b]$ delle due funzioni semplici

$$\varphi_\sigma = \sum_{i=1}^{k} \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) I_{[x_{i-1}, x_i]}\,, \qquad \psi_\sigma = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) I_{[x_{i-1}, x_i]}\,,$$

le quali, oltre che semplici, sono *costanti a tratti*: ciò significa che le funzioni caratteristiche coinvolte si riferiscono ad intervalli e non ad insiemi misurabili qualunque. Dunque, il fatto che $f \in \mathcal{R}(a, b)$ equivale a dire che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esistono due funzioni φ_n, ψ_n costanti a tratti, tali che

$$\varphi_n \le f \le \psi_n \text{ in } [a, b], \qquad \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\, dx < \frac{1}{n}\,.$$

Si può supporre, rimpiazzando φ_n con $\max_{1 \le k \le n} \varphi_k$ e ψ_n con $\min_{1 \le k \le n} \psi_k$, che si abbia $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ e $\psi_n \ge \psi_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque esistono i limiti puntuali

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x), \qquad \psi(x) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(x),$$

e si ha $\varphi \leq f \leq \psi$ in $[a,b]$. Le funzioni φ e ψ sono misurabili (proposizione 5.9); quindi se dimostriamo che l'insieme $N = \{\varphi < \psi\}$ ha misura nulla, otteniamo che f è misurabile: infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale la relazione

$$\{f > \alpha\} = \{x \in N : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in N^c : \psi(x) > \alpha\}$$

nella quale il secondo insieme è misurabile perché tale è N, mentre il primo è misurabile essendo incluso in N che ha misura nulla.
Per provare che $m_1(N) = 0$, osserviamo che la funzione $\psi - \varphi$ è misurabile e

$$0 \leq \psi - \varphi \leq \psi_n - \varphi_n \text{ in } [a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui, per monotonia,

$$0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi)\, dx \leq \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\, dx \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue $\int_a^b (\psi - \varphi)\, dx = 0$. Ora, scrivendo $[a,b] = N \cup N^c$ ed osservando che $\psi - \varphi = 0$ su N^c, si ha per ogni $k \in \mathbb{N}^+$

$$0 = \int_N (\psi - \varphi)\, dx \geq \int_{\{\psi - \varphi \geq 1/k\}} (\psi - \varphi)\, dx \geq \frac{1}{k} m_1(\{\psi - \varphi \geq 1/k\}) :$$

ciò implica $m_1(\{\psi - \varphi \geq 1/k\}) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Essendo poi $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \{\psi - \varphi \geq 1/k\}$, dalla proposizione 2.12 segue finalmente che $m_1(N) = 0$ e pertanto ogni funzione $f \in \mathcal{R}(a,b)$ è misurabile.
Veniamo alla dimostrazione della sommabilità di f e della coincidenza dei due integrali, che denoteremo con $\int_a^b f\, dx$ (Riemann) e con $\int_{[a,b]} f\, dx$ (Lebesgue). Supponiamo dapprima $f \geq 0$: allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f\, dx &= \sup\left\{ \int_a^b \varphi\, dx : \varphi \leq f,\ \varphi \text{ costante a tratti} \right\} \leq \\ &\leq \sup\left\{ \int_a^b \varphi\, dx : \varphi \leq f,\ \varphi \in \mathcal{S}_0 \right\} = \int_{[a,b]} f\, dx; \end{aligned}$$

d'altra parte, per ogni ψ costante a tratti tale che $\psi \geq f$ (ne esistono, essendo f limitata) si ha, per monotonia, $\int_{[a,b]} f\, dx \leq \int_{[a,b]} \psi\, dx$, da cui

$$\int_{[a,b]} f\, dx \leq \inf\left\{ \int_a^b \psi\, dx : \psi \geq f,\ \psi \text{ costante a tratti} \right\} = \int_a^b f\, dx.$$

Dunque, gli integrali $\int_{[a,b]} f\,dx$ e $\int_a^b f\,dx$ coincidono. Se poi f cambia segno, si applica quanto detto sopra a f^+ e f^-.
Dato che l'integrale di Riemann, se esiste, è uguale a quello di Lebesgue, d'ora in avanti scriveremo $\int_a^b f\,dx$ anche per indicare l'integrale secondo Lebesgue. In particolare, gli integrali di Riemann e di Lebesgue coincidono per ogni funzione continua, e pertanto continuano a valere per l'integrale di Lebesgue 1-dimensionale i teoremi sull'integrazione visti in Analisi 1, ed in particolare il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $f \in C[a,b]$ allora $F(x) = \int_{[a,x]} f\,dt = \int_a^x f\,dt$ è derivabile in $[a,b]$ con $F' = f$. Ciò implica la validità, anche nell'ambito della teoria di Lebesgue, delle formule di integrazione per parti e per sostituzione (sempre che gli integrandi verifichino le adeguate ipotesi di regolarità).

Osservazione 7.1 Le funzioni sommabili sono più di quelle integrabili secondo Riemann: ad esempio, la funzione $I_{\mathbb{Q}}$ non è integrabile secondo Riemann in alcun intervallo $[a,b]$, mentre è sommabile in ogni $[a,b]$ con $\int_a^b I_{\mathbb{Q}}\,dx = 0$.

Esercizi 7

1. Sia C_p l'insieme di Cantor di parametro $p > 3$ (esercizio 3.14). La funzione I_{C_p} è integrabile secondo Riemann su $[0,1]$?

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Si provi che f è integrabile secondo Riemann in senso improprio su $\mathbb{R}$, ma non è sommabile su $\mathbb{R}$.
[**Traccia:** Si utilizzi l'esercizio 6.7.]

8 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Una delle più importanti proprietà dell'integrale di Lebesgue è il fatto di poter scambiare fra loro, in ipotesi molto blande, le operazioni di limite e di integrazione. Prima di dare i risultati principali, conviene introdurre una comoda locuzione, strettamente legata alle proprietà degli insiemi di misura nulla citate nell'osservazione 6.6.

Definizione 8.1 *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Diciamo che una proprietà $p(\mathbf{x})$ è vera* quasi ovunque *in D (abbreviato:* q.o. *in D) se, posto $P = \{\mathbf{x} \in D : p(\mathbf{x})\}$, l'insieme $D \setminus P$ è misurabile con $m_N(D \setminus P) = 0$.*

Esempi 8.2 **(1)** Se f è misurabile su D e se $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è un'altra funzione tale che $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ q.o., allora anche g è misurabile (esercizio 5.4).

(2) Se f è sommabile e non negativa su D, e se $K \subseteq D$ è un insieme misurabile tale che $\int_K f \, d\mathbf{x} = 0$ allora $f = 0$ q.o. su K. Infatti, posto $K_n = \{f I_K \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$\frac{1}{n} m_N(K_n) \leq \int_{K_n} f \, d\mathbf{x} \leq \int_K f \, d\mathbf{x} = 0,$$

da cui $m_N(K_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Poiché $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \{f I_K > 0\}$, in virtù della subadditività della misura anche questo insieme ha misura nulla.

Osservazione 8.3 La relazione $f = g$ q.o. su D è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le funzioni misurabili su D, come è immediato verificare. Questo fatto è estremamente importante, perché ci permetterà di costruire spazi di Banach di funzioni sommabili dotati di norme integrali, a dispetto di quanto osservato nel paragrafo 1.

Veniamo ora ai teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il principale di questi, da cui discendono tutti gli altri, riguarda successioni crescenti di funzioni.

Teorema 8.4 (di Beppo Levi o della convergenza monotona) *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D, tali che $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ q.o. in D per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora il limite puntuale $f(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ esiste q.o. in D, e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x}.$$

Dimostrazione Posto $P_n = \{f_n > 0\}$ e $Q_n = \{f_{n+1} < f_n\}$, gli insiemi P_n e Q_n hanno misura nulla per ipotesi; quindi anche $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (P_n \cup Q_n)$ ha misura nulla, ed il limite puntuale f è ben definito e non negativo su $D \setminus P$. Possiamo poi estendere f a tutto D ponendola uguale a 0, il che come sappiamo preserva la misurabilità, e non altera ovviamente il valore dell'integrale, nel senso che $\int_D f \, d\mathbf{x} = \int_{D \setminus P} f \, d\mathbf{x}$.
Notiamo che il limite degli integrali su D di f_n esiste certamente, poiché

$$\int_D f_n \, d\mathbf{x} = \int_{D \setminus P} f_n \, d\mathbf{x} \le \int_{D \setminus P} f_{n+1} \, d\mathbf{x} = \int_D f_{n+1} \, d\mathbf{x},$$

ed anzi si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} \le \int_D f \, d\mathbf{x}.$$

Dobbiamo provare la disuguaglianza opposta. Sia $\beta \in]0, 1[$ e sia $\psi \in \mathcal{S}_0$ tale che $0 \le \psi \le f$. Posto $A_n = \{f_n \ge \beta\psi\}$, gli A_n sono misurabili, definitivamente non vuoti (essendo $\beta < 1$), nonché crescenti rispetto all'inclusione. Poniamo anche $B_0 = A_0$ e $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ per $n \ge 1$. Si ha allora

$$\beta \int_{A_n} \psi \, d\mathbf{x} \le \int_{A_n} f_n \, d\mathbf{x} \le \int_D f_n \, d\mathbf{x} \le \lim_{n \to \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x},$$

ovvero, essendo A_n l'unione disgiunta di $B_0, \ldots, B_n$,

$$\beta \sum_{k=0}^{n} \int_{B_k} \psi \, d\mathbf{x} \le \lim_{n \to \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da qui ricaviamo, per la proposizione 6.4,

$$\beta \int_D \psi \, d\mathbf{x} = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k} \psi \, d\mathbf{x} \le \lim_{n \to \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x}.$$

Per l'arbitrarietà di ψ, ciò implica

$$\beta \int_D f \, d\mathbf{x} \le \lim_{n \to \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x},$$

ed infine per $\beta \to 1$ si ha la tesi. $\square$

Osservazione 8.5 Il teorema precedente è falso se si sopprime qualcuna delle ipotesi: ad esempio, in $\mathbb{R}$ le funzioni $f_n = I_{[n,+\infty[}$ formano una successione crescente ma non positiva, che tende puntualmente a $f = 0$, e tuttavia risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = -\infty < 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dx$. Invece le funzioni $f_n = I_{[n,n+1]}$ sono non negative ma non formano una successione crescente: il loro limite puntuale è $f = 0$ ma, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = 1 > 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dx$.

Proviamo adesso l'additività dell'integrale (proposizione 6.7 (iii)) nel caso **I** $(f, g \geq 0)$.

Corollario 8.6 *Sia D un sottoinsieme misurabile di R^N e siano f, g funzioni integrabili e non negative su D. Allora $f + g$ è integrabile su D e*

$$\int_D (f + g) \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x} + \int_D g \, d\mathbf{x}.$$

Dimostrazione Siano $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{S}_0$ due successioni crescenti di funzioni semplici non negative, tali che $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to g$ puntualmente in D. Allora $\varphi_n + \psi_n \to f + g$ puntualmente in D, in modo crescente; inoltre, per la proposizione 6.2 (ii),

$$\int_D (\varphi_n + \psi_n) \, d\mathbf{x} = \int_D \varphi_n \, d\mathbf{x} + \int_D \psi_n \, d\mathbf{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue, per il teorema di Beppo Levi,

$$\begin{aligned} \int_D (f + g) \, d\mathbf{x} &= \lim_{n \to \infty} \int_D (\varphi_n + \psi_n) \, d\mathbf{x} = \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_D \varphi_n \, d\mathbf{x} + \lim_{n \to \infty} \int_D \psi_n \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x} + \int_D g \, d\mathbf{x}. \quad \Box \end{aligned}$$

Per successioni di funzioni non negative vale il seguente risultato molto generale:

Lemma 8.7 (di Fatou) *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D e q.o. non negative. Posto*

$$f(\mathbf{x}) = \liminf_{n \to \infty} f_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D,$$

si ha

$$\int_D f \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \to \infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x}.$$

Dimostrazione La successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita da

$$g_n = \inf_{m\geq n} f_m \,,$$

è crescente; inoltre le g_n sono q.o. non negative. Essendo, per definizione di minimo limite, $f(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} g_n(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in D$, si ha dal teorema di Beppo Levi

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n \, d\mathbf{x};$$

d'altra parte, poiché $g_n \leq f_m$ in D per ogni $m \geq n$, integrando su D troviamo

$$\int_D g_n \, d\mathbf{x} \leq \int_D f_m \, d\mathbf{x} \quad \forall m \geq n,$$

ovvero

$$\int_D g_n \, d\mathbf{x} \leq \inf_{m\geq n} \int_D f_m \, d\mathbf{x}.$$

Pertanto, ancora per definizione di minimo limite,

$$\int_D f \, d\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n \, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x}. \quad \Box$$

Il risultato che segue è il più utile fra i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 8.8 (di Lebesgue o della convergenza dominata) *Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D, tali che:*

(i) $f_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ *q.o. in D,*

(ii) $|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ *q.o. in D, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

ove g è una fissata funzione sommabile e non negativa su D. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\mathbf{x} = \int_D f \, d\mathbf{x},$$

ed anzi

$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n - f| \, d\mathbf{x} = 0.$$

Dimostrazione Consideriamo le successioni $\{g - f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g + f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entrambe costituite da funzioni q.o. non negative e convergenti puntualmente q.o in D, rispettivamente a $g - f$ e $g + f$. Applicando il lemma di Fatou a tali successioni, troviamo

$$\int_D (g - f)\, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n\to\infty} (g - f_n)\, d\mathbf{x} = \int_D g\, d\mathbf{x} - \limsup_{n\to\infty} \int_D f_n\, d\mathbf{x},$$

$$\int_D (g + f)\, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n\to\infty} (g + f_n)\, d\mathbf{x} = \int_D g\, d\mathbf{x} + \liminf_{n\to\infty} \int_D f_n\, d\mathbf{x}.$$

Essendo g sommabile su D, possiamo semplificare i termini contenenti l'integrale di g, ottenendo

$$\limsup_{n\to\infty} \int_D f_n\, d\mathbf{x} \leq \int_D f\, d\mathbf{x} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_D f_n\, d\mathbf{x},$$

cioè la prima parte della tesi.
La seconda parte della tesi segue applicando quanto già dimostrato alla successione $\{|f_n - f|\}$, il che è lecito poiché

$$|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \to 0 \text{ q.o. in } D, \quad |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq 2\, g(\mathbf{x}) \text{ q.o. in } D. \quad \square$$

Assoluta continuità dell'integrale

L'integrale di Lebesgue ha un'altra importante proprietà, vale a dire la cosiddetta *assoluta continuità*. Con ciò si intende il fatto che se f è una funzione sommabile allora l'integrale $\int_E |f|\, d\mathbf{x}$, come funzione dell'insieme E, è "piccolo" al tendere a 0 della misura di E. Precisamente, vale il seguente risultato:

Teorema 8.9 *Sia D un sottonsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Se f è una funzione sommabile su D, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per il quale risulta $\int_E |f|\, d\mathbf{x} < \varepsilon$ per ogni insieme misurabile $E \subseteq D$ con $m_N(E) < \delta$.*

Dimostrazione Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi non sia vera: dunque esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, scelto $\delta = 2^{-n}$, si può trovare un insieme misurabile $E_n \subseteq D$ per cui risulta

$$m_N(E_n) < 2^{-n}, \qquad \int_{E_n} |f|\, d\mathbf{x} \geq \varepsilon_0\, .$$

Ponendo allora

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_n \,, \qquad F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \,,$$

abbiamo, per le proposizioni 2.10 e 2.12 (ii),

$$m_N(F_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}, \qquad m_N(F) = 0.$$

Dunque $\int_F |f|\, d\mathbf{x} = 0$. D'altra parte, osservando che la successione di funzioni sommabili $\{|f| I_{F_n}\}$ converge puntualmente, in modo decrescente, a $|f| I_F$, il teorema di Lebesgue ci permette di dedurre

$$0 = \int_F |f|\, d\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} |f|\, d\mathbf{x} \ge \liminf_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mathbf{x} \ge \varepsilon_0 \,,$$

il che è assurdo. Ciò prova la tesi. $\square$

Esercizi 8

1. Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D, tali che $g \le f_n \le f_{n+1}$ q.o. in D per ogni $n \in \mathbb{N}$, ove g è una funzione sommabile su D. Si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n\, d\mathbf{x} = \int_D f\, d\mathbf{x}.$$

2. Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D, q.o. non negative. Si provi che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_D f_n\, d\mathbf{x} = \int_D \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\, d\mathbf{x}.$$

3. Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D, tali che la funzione $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ sia sommabile su D. Si provi che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_D f_n\, d\mathbf{x} = \int_D \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\, d\mathbf{x}.$$

4. Sia f una funzione sommabile sull'insieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Si provi che
$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f|^{1/n}\, d\mathbf{x} = m_N(\{f \neq 0\}).$$

5. Posto $f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n$, $x \geq 0$, si dimostri che $f_n \geq f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si determini $\lim_{n\to\infty} f_n$ e si dica se è possibile passare al limite sotto il segno di integrale nei due casi seguenti:
$$\text{(i)} \int_0^\infty f_n(x) e^{x/2}\, dx, \quad \text{(ii)} \int_0^\infty f_n(x) e^{-x/2}\, dx.$$

6. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si esibisca una successione $\{f_n\}$ tale che
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dx = \alpha.$$

7. Sia f una funzione sommabile su $\mathbb{R}^N$. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^N$ tale che $\int_{K^c} |f|\, d\mathbf{x} < \varepsilon$.

8. Esibire una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, illimitata sul complementare di ogni compatto.

9. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{x^p}{1-x} |\ln x|\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+p)^2} \quad \forall p > -1,$$

$$\text{(ii)} \int_0^1 \sin x \ln x\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n(2n)!}\,,$$

$$\text{(iii)} \int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - t}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{1+(n+1)^2} \quad \forall t \in [-1,1],$$

$$\text{(iv)} \int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x + 1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\,,$$

$$\text{(v)} \int_0^\infty e^{-x} \cos\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}\,,$$

(vi) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2}\frac{n!}{(2n+1)!}$,

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$.

10. Provare che

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq} \qquad \forall p,q>0,$$

e dedurne che

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

11. Provare che

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-ax^3}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)} \qquad \forall a\in[-1,1],$$

e dedurne che

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(6n+1)(6n+2)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3\sqrt{3}}.$$

12. Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx.$$

13. *(Continuità degli integrali dipendenti da parametro)* Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, sia $t_0\in\mathbb{R}$ e sia $f : D\times\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ una funzione tale che:

(i) $\exists \lim_{t\to t_0} f(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x})$ per q.o. $\mathbf{x}\in D$;

(ii) la funzione $\mathbf{x}\mapsto f(\mathbf{x},t)$ è misurabile su D per ogni $t\in\mathbb{R}$, ed esiste una funzione sommabile $h : D\to\overline{\mathbb{R}}$ tale che $|f(\mathbf{x},t)|\le h(\mathbf{x})$ per q.o. $\mathbf{x}\in D$ e per ogni $t\in\mathbb{R}$.

Si provi che allora

$$\exists \lim_{t\to t_0} \int_D f(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} = \int_D g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

[**Traccia:** si applichi il teorema 8.8 ad una qualunque successione $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ che converga a t_0.]

14. Sia f una funzione sommabile in $[0,\infty[$, tale che $x^\alpha f(x)$ e $x^\beta f(x)$ siano sommabili per certi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$. Si provi che se $\gamma \in [\alpha, \beta]$ anche $x^\gamma f(x)$ è sommabile e che la funzione $F(\gamma) = \int_0^\infty x^\gamma |f(x)|\, dx$ è continua.

15. *(Derivabilità degli integrali dipendenti da parametro)* Sia D un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : D \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione tale che:

   (i) $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)$ per q.o. $\mathbf{x} \in D$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$;

   (ii) la funzione $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},t)$ è sommabile su D per ogni $t \in \mathbb{R}$, ed esiste una funzione sommabile $h : D \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)\right| \le h(\mathbf{x})$ per q.o. $\mathbf{x} \in D$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   Si provi che allora

$$\exists \frac{d}{dt} \int_D f(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   [**Traccia:** si verifichi che $\frac{\partial f}{\partial t}$ è misurabile e si utilizzi il teorema 8.8.]

9 Misure prodotto

Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ due spazi misurati σ-finiti. Vogliamo fornire al prodotto cartesiano $X \times Y$ una struttura di spazio misurato: quindi dobbiamo definire una "tribù prodotto" $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ di sottoinsiemi di $X \times Y$ e una "misura prodotto" $\mu \times \nu$, definita su $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Osservazione 9.1 Prima di cominciare notiamo che, dato uno spazio misurato, si possono definire le funzioni semplici, le funzioni misurabili e l'integrale $\int_X f\, d\mu$ esattamente come si è fatto nel caso della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$: restano vere tutte le proprietà dimostrate nei paragrafi precedenti, ad eccezione del teorema 3.5, che è una caratteristica specifica della misura di Lebesgue. Valgono dunque il teorema di Beppo Levi, il lemma di Fatou ed il teorema di Lebesgue; in particolare, se $A \in \mathcal{F}$ si ha $\mu(A) = \int_X I_A \, d\mu$ e se $B \in \mathcal{G}$ si ha $\nu(B) = \int_Y I_B \, d\nu$.

Introduciamo anzitutto la famiglia dei *rettangoli misurabili*

$$\mathcal{U} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\};$$

chiaramente questi insiemi non sono veri e propri rettangoli perché in generale A e B non sono prodotti di intervalli. Se $E = A \times B \in \mathcal{U}$, definiamo

$$\lambda(E) = \mu(A)\nu(B),$$

con la solita convenzione di porre $\lambda(E) = 0$ se uno dei due fattori è nullo e l'altro è infinito.
Consideriamo poi la famiglia $\mathcal{A}$ costituita dalle unioni finite di elementi di $\mathcal{U}$: proviamo la seguente

Proposizione 9.2 *La famiglia $\mathcal{A}$ è un'algebra.*

Dimostrazione Anzitutto, $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{U} \subset \mathcal{A}$, e le unioni finite di elementi di $\mathcal{A}$ appartengono ovviamente ad $\mathcal{A}$. Verifichiamo che $\mathcal{A}$ è chiusa per passaggio al complementare: sia $E = \bigcup_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)$; per provare che $E^c = \bigcap_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)^c$ appartiene ad $\mathcal{A}$ ragioniamo per induzione su p. Se $p = 1$, la tesi è facile, essendo

$$E^c = (A_1 \times B_1)^c = (A_1^c \times Y) \cup (A_1 \times B_1^c) \in \mathcal{A}.$$

Supponiamo che la tesi valga per un certo p, ossia che

$$E = \bigcup_{i=1}^{p}(A_i \times B_i) \quad \Longrightarrow \quad E^c \in \mathcal{A},$$

e sia $F = \bigcup_{i=1}^{p+1}(A_i \times B_i)$; allora possiamo scrivere

$$F^c = \bigcap_{i=1}^{p+1}(A_i \times B_i)^c = \bigcap_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)^c \cap (A_{p+1} \times B_{p+1})^c.$$

Grazie all'ipotesi induttiva, sarà

$$\bigcap_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)\right)^c \in \mathcal{A}$$

e quindi

$$\bigcap_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)^c = \bigcup_{j=1}^{r_p}(C_j \times D_j)$$

per certi $C_j \times D_j \in \mathcal{U}$; dunque

$$F^c = \bigcup_{j=1}^{r_p}(C_j \times D_j) \cap (A_{p+1} \times B_{p+1})^c.$$

D'altra parte, per $1 \leq j \leq r_p$ si ha

$$\begin{aligned}
&(C_j \times D_j) \cap (A_{p+1} \times B_{p+1})^c = \\
&\quad = (C_j \times D_j) \cap \left[(A_{p+1}^c \times Y) \cup (A_{p+1} \times B_{p+1}^c)\right] = \\
&\quad = \left[(C_j \times D_j) \cap (A_{p+1}^c \times Y)\right] \cup \left[(C_j \times D_j) \cap (A_{p+1} \times B_{p+1}^c)\right].
\end{aligned}$$

A questo punto, ricordando che $\mathcal{U}$ è chiuso per intersezione, otteniamo che $F^c = \bigcap_{i=1}^{p+1}(A_i \times B_i)^c$ è unione finita di elementi di $\mathcal{U}$ e quindi appartiene ad $\mathcal{A}$: ciò prova il passo induttivo. Dunque $\mathcal{A}$ è un'algebra. $\square$

Per il lemma 2.2(ii), è possibile descrivere $\mathcal{A}$ come la famiglia delle unioni finite disgiunte di elementi di $\mathcal{U}$. Possiamo allora estendere la funzione λ su $\mathcal{A}$, ponendo

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)\nu(B_i) \quad \text{se} \quad E = \bigcup_{i=1}^{p}(A_i \times B_i) \quad \text{(unione disgiunta).}$$

Occorre però verificare che questa è una buona definizione. Supponiamo allora che risulti anche $E = \bigcup_{j=1}^{q}(C_j \times D_j)$, con unione disgiunta: è sufficiente mostrare che

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{q} \mu(C_j)\nu(D_j).$$

Consideriamo la funzione indicatrice I_E : possiamo scrivere

$$I_E(x,y) = \sum_{i=1}^{p} I_{A_i \times B_i}(x,y) = \sum_{i=1}^{p} I_{A_i}(x) I_{B_i}(y),$$

e similmente

$$I_E(x,y) = \sum_{j=1}^{q} I_{C_j \times D_j}(x,y) = \sum_{j=1}^{q} I_{C_j}(x) I_{D_j}(x);$$

quindi vale l'identità

$$\sum_{i=1}^{p} I_{A_i}(x) I_{B_i}(y) = \sum_{j=1}^{q} I_{C_j}(x) I_{D_j}(y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Fissato $y \in Y$, entrambi i membri di questa uguaglianza sono funzioni non negative, misurabili rispetto alla misura μ: possiamo quindi integrare su X rispetto a μ, trovando

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) I_{B_i}(y) = \sum_{j=1}^{q} \mu(C_j) I_{D_j}(y) \quad \forall y \in Y.$$

Nuovamente, entrambi i membri sono funzioni non negative, misurabili rispetto alla misura ν: integrando su Y rispetto a ν, otteniamo la relazione $\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{q} \mu(C_j)\nu(D_j)$, come richiesto.
Abbiamo dunque una funzione $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, tale che $\lambda(\emptyset) = 0$; mostriamo ora che λ verifica anche la seconda ipotesi del teorema di Carathéodory. Sia $E \in \mathcal{A}$ e sia $\{E_n\}$ una successione di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$ tali che $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E$. Dobbiamo provare che $\lambda(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(E_n)$.
Sarà $E = \bigcup_{i=1}^{p}(A_i \times B_i)$, con gli $A_i \times B_i \in \mathcal{U}$ fra loro disgiunti; analogamente, sarà $E_n = \bigcup_{j=1}^{q_n}(P_j^n \times Q_j^n)$, con i $P_j^n \times Q_j^n \in \mathcal{U}$, fra loro disgiunti. Possiamo quindi scrivere, utilizzando nuovamente le funzioni indicatrici,

$$I_E(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{E_n}(x,y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y,$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^{p} I_{A_i}(x) I_{B_i}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_n} I_{P_j^n}(x) I_{Q_j^n}(y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Come in precedenza, fissato $y \in Y$, entrambi i membri di questa uguaglianza sono funzioni non negative, misurabili rispetto alla misura μ: integrando su X rispetto a μ troviamo, grazie al teorema di Beppo Levi,

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) I_{B_i}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_n} \mu(P_j^n) I_{Q_j^n}(y) \quad \forall y \in Y.$$

Integrando poi su Y rispetto a ν, e usando ancora il teorema di Beppo Levi, si conclude che

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_n} \mu(P_j^n)\nu(Q_j^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(E_n),$$

come si voleva.
Dunque la funzione $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ verifica le ipotesi del teorema di Carathéodory: pertanto esiste una misura esterna $\lambda^* : \mathcal{P}(X \times Y) \to [0, \infty]$, data da

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(E_n) : \{E_n\} \subset \mathcal{A}, E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right\},$$

la cui restrizione $\overline{\lambda}$ alla tribù

$$\mathcal{L} = \{E \subseteq X \times Y : \lambda^*(F) = \lambda^*(E \cap F) + \lambda^*(E^c \cap F) \quad \forall F \subseteq X \times Y\}$$

è una misura σ-finita, che verifica $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$ e per ogni $B \in \mathcal{G}$.
Diamo a questo proposito la seguente

Definizione 9.3 *La minima tribù di sottoinsiemi di $X \times Y$ che contiene $\mathcal{A}$ si chiama* tribù prodotto *di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ e si denota con $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. La* misura prodotto *di μ e ν è la restrizione della misura $\overline{\lambda}$ alla tribù $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, e si denota con $\mu \times \nu$.*

Dunque, per definizione si ha $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ e $\mu \times \nu(E) = \overline{\lambda}(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.
Osserviamo che la misura prodotto è σ-finita, poichè tali sono μ e ν: infatti, se $\{X_n\} \subset \mathcal{F}$ e $\{Y_n\} \subset \mathcal{G}$ sono famiglie crescenti di insiemi tali che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X, \quad \mu(X_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n = Y, \quad \nu(Y_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N},$$

allora $\{X_n \times Y_n\} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è una famiglia crescente di insiemi tale che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times Y_n = X \times Y$ e $\mu \times \nu(X_n \times Y_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Concludiamo questo paragrafo con una utile nozione che utilizzeremo spesso nei casi concreti.

Definizione 9.4 *Sia $E \subseteq X \times Y$. Le* sezioni *lungo l'asse y e lungo l'asse x sono così definite:*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \quad \forall x \in X,$$
$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\} \quad \forall y \in Y.$$

Per gli elementi della tribù prodotto $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ vale la seguente proprietà:

Proposizione 9.5 *Se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, allora $E^y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$ e $E_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione Poniamo

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} : E^y \in \mathcal{F} \ \forall y \in Y\}.$$

Si vede facilmente che risulta

$$(E^c)^y = (E^y)^c, \qquad \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^y;$$

quindi è immediato verificare che la classe $\mathcal{E}$ è chiusa per passaggio al complementare e per unione numerabile. Poiché inoltre $(X \times Y)^y = X \in \mathcal{F}$, si ha $X \times Y \in \mathcal{E}$ e dunque $\mathcal{E}$ è una tribù. Infine, $\mathcal{E}$ contiene la classe dei rettangoli misurabili $\mathcal{U}$, dato che se $E = A \times B$ risulta

$$E^y = \begin{cases} A & \text{se } y \in B \\ \emptyset & \text{se } y \in Y \setminus B, \end{cases}$$

e pertanto $E^y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$. Per minimalità, $\mathcal{E}$ deve contenere $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, il che dà la prima parte della tesi.
La seconda parte, cioè il fatto che $E_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$ si prova in modo del tutto analogo. $\square$

Esercizi 9

1. Siano $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ spazi misurabili e siano $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ insiemi fissati. Si provi che se $A \notin \mathcal{F}$, oppure $B \notin \mathcal{G}$, allora $A \times B \notin \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

2. Poniamo $X = Y = [0, 1]$, $F = \{E \subseteq [0, 1] : E \in \mathcal{M}_1\}$ e $\mathcal{G} = \mathcal{P}[0, 1]$; siano poi $\mu = m_1$ e ν definita da

   $$\nu(E) = \text{cardinalità di } E \cap V \qquad \forall E \in \mathcal{G},$$

   ove V è un insieme non misurabile di $[0, 1]$. Si verifichi che, scelto $\Delta = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = y\}$, le funzioni

   $$x \mapsto \nu(E_x), \qquad y \mapsto \mu(E^y)$$

   non sono entrambe misurabili. Giustificare il risultato.

10 Prodotto di misure di Lebesgue

Fissati due interi positivi k, h tali che $k + h = N$, applichiamo la costruzione del paragrafo precedente agli spazi misurati $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_k, m_k)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu) = (\mathbb{R}^h, \mathcal{M}_h, m_h)$. Partendo dalla funzione

$$\lambda(A \times B) = m_k(A)m_h(B) \qquad \forall A \in \mathcal{M}_k\,, \quad \forall B \in \mathcal{M}_h\,,$$

mediante il teorema di Carathéodory otteniamo una misura esterna $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$, la cui restrizione alla tribù $\mathcal{L}$ è una misura $\overline{\lambda}$ che estende la misura prodotto $m_k \times m_h$. Che relazione c'è fra le misure $\overline{\lambda}$ e m_N?
Proveremo il seguente risultato:

Teorema 10.1 *Sia $k + h = N$ e consideriamo lo spazio misurato $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}, \overline{\lambda})$ sopra definito. Valgono i seguenti fatti:*

(i) *$\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}_N$ e $m_k \times m_h$ coincide con m_N su $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$;*

(ii) *$\mathcal{L} = \mathcal{M}_N$ e $\overline{\lambda} = m_N$.*

Dimostrazione Per cominciare, andiamo ad applicare il criterio di coincidenza (teorema 2.18) alla famiglia

$$\mathcal{I} = \{P \times Q : P \text{ rettangolo di } \mathbb{R}^k,\ Q \text{ rettangolo di } \mathbb{R}^h\}.$$

La classe $\mathcal{I}$ è una base per la tribù boreliana $\mathcal{B}_N$, poiché è inclusa in essa, è chiusa per intersezione ed inoltre contiene la successione di cubi $\{]-n, n[^N\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cui unione è $\mathbb{R}^N$. Le funzioni m_N e $m_k \times m_h$ coincidono sugli elementi di $\mathcal{I}$, che sono rettangoli, per definizione di misura di Lebesgue. Quindi, per il criterio di coincidenza, m_N e $m_k \times m_h$ coincidono sulla minima tribù $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ che contiene $\mathcal{I}$. Ora notiamo che ogni aperto di $\mathbb{R}^N$, essendo unione numerabile di rettangoli, deve appartenere a $\mathcal{T}$, e d'altronde la minima tribù che contiene gli aperti è la tribù boreliana $\mathcal{B}_N$: ne segue $\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{T}$. D'altra parte, $\mathcal{B}_N$ contiene $\mathcal{I}$ e $\mathcal{T}$ è la minima tribù contenente $\mathcal{I}$: ne segue $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}_N$ e dunque $\mathcal{T} = \mathcal{B}_N$.

Osservazione 10.2 In modo simile si verifica che $\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_K \times \mathcal{B}_h$: quest'ultima è infatti una tribù che contiene a sua volta $\mathcal{I}$ e dunque, per minimalità, $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h \supseteq \mathcal{T} = \mathcal{B}_N$. D'altra parte $B_k \times \mathcal{B}_h$ è la minima tribù che contiene la famiglia $\mathcal{W} = \{A \times B : A \in \mathcal{B}_k, B \in \mathcal{B}_h\}$; è facile d'altronde verificare che ogni tribù $\mathcal{E}$ contenente la famiglia più piccola

$$\mathcal{V} = \{A \times B : A \text{ aperto di } \mathbb{R}^k,\ B \text{ aperto di } \mathbb{R}^h\}$$

deve necessariamente contenere anche $\mathcal{W}$: infatti, chiudendo $\mathcal{V}$ rispetto alle operazioni insiemistiche relative al primo fattore si ottiene che $\mathcal{E}$ contiene i rettangoli misurabili del tipo $E \times B$, con $E \in \mathcal{B}_k$ e B aperto di $\mathbb{R}^h$; chiudendo poi rispetto alle operazioni insiemistiche relative al secondo fattore, si ricava appunto $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{W}$. Ne segue che $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h$, minima tribù che contiene $\mathcal{W}$, è anche la minima tribù che contiene $\mathcal{V}$. Ma fra le tribù contenenti $\mathcal{V}$ vi è necessariamente $\mathcal{B}_N$, e quindi per minimalità otteniamo $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{B}_N$, da cui $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h = \mathcal{B}_N$.

Sappiamo a questo punto che

$$m_N(B) = m_k \times m_h(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}_N = \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h\,.$$

Proveremo adesso l'enunciato (i) del teorema 10.1.

Proposizione 10.3 *Sia* $k+h = N$. *Se* $A \in \mathcal{M}_k$ *e* $B \in \mathcal{M}_h$, *allora* $A \times B \in \mathcal{M}_N$; *il viceversa è falso.*

Dimostrazione Per il teorema 3.5, esistono $C, C' \in \mathcal{B}_k$ e $D, D' \in \mathcal{B}_h$ tali che

$$C \subseteq A \subseteq C', \quad D \subseteq B \subseteq D', \quad m_k(C' \setminus C) = m_h(D' \setminus D) = 0.$$

Dunque $C \times D, C' \times D' \in \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h = \mathcal{B}_N$, valgono le inclusioni $C \times D \subseteq A \times B \subseteq C' \times D'$ e, per subadditività,

$$\begin{aligned} m_N((C' \times D') \setminus (C \times D)) &\leq m_N((C' \setminus C) \times D') + m_N(C' \times (D' \setminus D)) = \\ &= m_k(C' \setminus C) m_h(D') + m_k(C') m_h(D' \setminus D) = 0. \end{aligned}$$

Quindi, ancora per il teorema 3.5, $A \times B \in \mathcal{M}_N$.
Proviamo che il viceversa è falso. Sia $N = 2$, da cui $k = h = 1$. Consideriamo l'insieme non misurabile di Vitali $V \subset \mathbb{R}$, e poniamo $E = V \times \{0\}$. Allora $E \in \mathcal{M}_2$ e $m_2(E) = 0$, in quanto $E \subset [0,1] \times \{0\}$ e quest'ultimo insieme è un rettangolo di misura nulla. D'altra parte, se E appartenesse a $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1$, per la proposizione 9.5 avremmo $E^y \in \mathcal{M}_1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$: ma così non è,

perché per $y = 0$ si ha $E^0 = V \notin \mathcal{M}_1$. $\square$

La proposizione 10.3 ci dice, per minimalità, che $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}_N$. Allora il criterio di coincidenza (teorema 2.18), applicato alla classe $\mathcal{U} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}_k, B \in \mathcal{M}_h\}$, mostra che le due misure m_n e $m_k \times m_h$ coincidono su $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$, ossia vale la condizione (i) del teorema 10.1.
Per provare la condizione (ii), cominciamo a dimostrare che le misure esterne λ^* e m_N^* coincidono. Ricordiamo che

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) : \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \ \{A_n\} \subset \mathcal{A} \right\},$$

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(P_n) : \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n, \ \{P_n\} \subset \mathcal{P} \right\},$$

ove $\mathcal{A}$ è l'algebra delle unioni finite di rettangoli misurabili $A \times B$ con $A \in \mathcal{M}_k$ e $B \in \mathcal{M}_h$, mentre $\mathcal{P}$ è l'algebra dei plurirettangoli di $\mathbb{R}^N$. Dato che, ovviamente, $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$, si deduce intanto $\lambda^* \leq m_N^*$.
D'altra parte, sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$: fissato $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty A_n$ e $\sum_{n=0}^\infty \lambda(A_n) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$. Dato che ciascun A_n è unione finita di rettangoli misurabili R_i^n disgiunti, possiamo dire che esiste anche una famiglia $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di rettangoli misurabili tali che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty R_n$ e $\sum_{n=0}^\infty \lambda(R_n) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$. Siccome ciascun R_n è un elemento di $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}_N$, per ogni n esiste un aperto U_n contenente R_n e tale che $m_N(U_n \setminus R_n) \leq 2^{-n-1}\varepsilon$. Quindi

$$\sum_{n=0}^\infty m_N(U_n) \leq \sum_{n=0}^\infty \left[2^{-n-1}\varepsilon + m_N(R_n)\right] = \varepsilon + \sum_{n=0}^\infty \lambda(R_n) \leq \lambda^*(E) + 2\varepsilon,$$

da cui

$$m_N^*(E) \leq \sum_{n=0}^\infty m_N(U_n) \leq \lambda^*(E) + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene $m_N^*(E) \leq \lambda^*(E)$, ossia $m_N^* = \lambda^*$.
Da questa relazione segue subito, per definizione, che $\mathcal{L} = \mathcal{M}_N$ e dunque $\overline{\lambda} = m_N$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema 10.1. $\square$

Esercizi 10

1. Sia $F \subset [0, 1]$ un insieme misurabile ma non boreliano. Si provi che l'insieme $E = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in F\}$ appartiene a $\mathcal{M}_2$, che le sue sezioni

E_x ed E^y sono sottoinsiemi boreliani di $[0,1]$ per ogni $x, y \in [0,1]$, ma che E non è un boreliano di $\mathbb{R}^2$.

2. Sia $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $g(x, \cdot)$ sia continua in $[0,1]$ per ogni $x \in [0,1]$ e $g(\cdot, y)$ sia continua su $[0,1]$ per ogni $y \in [0,1]$. Si provi che g è una *funzione boreliana*, cioè tale che $\{(x,y) : g(x,y) > \alpha\} \in \mathcal{B}_2$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
   [**Traccia:** si approssimi la g con le seguenti funzioni g_n: posto $a_i = \frac{i}{n}$, se $(x,y) \in [a_{i-1}, a_i] \times [0,1]$ si definisca
$$g_n(x,y) = \frac{a_i - x}{a_i - a_{i-1}} f(a_{i-1}, y) + \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} f(a_i, y).\Big]$$

11 Calcolo degli integrali multipli

Vediamo adesso come, sotto opportune ipotesi, si possa ridurre il calcolo di un integrale N-dimensionale a N integrazioni semplici successive.
Cominciamo con la seguente proposizione, che estende e precisa il risultato della proposizione 9.5.

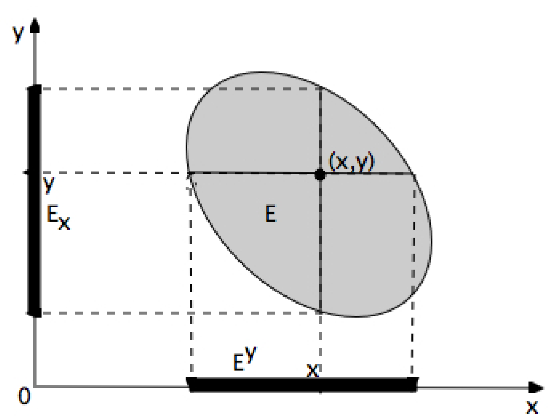
Proposizione 11.1 *Siano $k, h \in \mathbb{N}^+$ con $k+h = N$ e sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) *$E_{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_h$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ed $E^{\mathbf{y}} \in \mathcal{M}_k$ per q.o. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$;*

(ii) *$\mathbf{x} \mapsto m_h(E_{\mathbf{x}})$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$ e $\mathbf{y} \mapsto m_k(E^{\mathbf{y}})$ è misurabile in $\mathbb{R}^h$;*

(iii) *$m_N(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E^{\mathbf{y}})\, d\mathbf{y}$.*

Dimostrazione La proprietà (i) è vera per ogni $E \in \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$ in virtù della proposizione 9.5; in particolare, i rettangoli misurabili di $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$, cioè gli insiemi della forma $E = A \times B$, con $A \in \mathcal{M}_k$ e $B \in \mathcal{M}_h$, godono anche delle proprietà (ii) e (iii). Infatti se E è di questa forma si ha



$$m_h(E_{\mathbf{x}}) = m_h(B)\, I_A(\mathbf{x}), \quad m_k(E^{\mathbf{y}}) = m_k(A)\, I_B(\mathbf{y}),$$

quindi si tratta di funzioni misurabili, ed inoltre

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^k} m_h(B)\, I_A(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \\ &= m_h(B) \int_{\mathbb{R}^k} I_A(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = m_h(B) m_k(A) = m_N(E),\end{aligned}$$

e similmente $\int_{\mathbb{R}^h} m_k(E^{\mathbf{y}})\, d\mathbf{y} = m_N(E)$.
Dato che ogni aperto E di $\mathbb{R}^N$ è unione numerabile di rettangoli R_n privi di punti interni comuni, la relazione $E_{\mathbf{x}} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} (R_n)_{\mathbf{x}}$ implica $m_h(E_{\mathbf{x}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_h((R_n)_{\mathbf{x}})$ e dunque $\mathbf{x} \mapsto m_h(E_{\mathbf{x}})$ è misurabile; il teorema di B. Levi mostra poi che

$$\int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((R_n)\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(R_n) = m_N(E).$$

In modo analogo si provano le stesse relazioni per $E^{\mathbf{y}}$. Ciò prova che ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ gode delle proprietà (i)-(ii)-(iii).
Sia ora $E \in \mathcal{M}_N$. In virtù della proposizione 3.5, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esistono un aperto $A_n \supseteq E$ ed un chiuso $B_n \subseteq E$ tali che $m_N(A_n \setminus B_n) < 1/n$. Definiamo $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$: allora $A, B \in \mathcal{B}_N \subset \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$, $B \subseteq E \subseteq A$ e $m_N(A \setminus B) = 0$, ossia $m_N(A) = m_N(E) = m_N(B)$. Notiamo ora che

$$\begin{gathered}(B_n)_{\mathbf{x}} \subseteq B_{\mathbf{x}} \subseteq E_{\mathbf{x}} \subseteq A_{\mathbf{x}} \subseteq (A_n)_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \\ (A_n)_{\mathbf{x}} = (A_n \setminus B_n)_{\mathbf{x}} \cup (B_n)_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \\ (A \setminus B)_{\mathbf{x}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k.\end{gathered}$$

Poiché gli $A_n \setminus B_n$ sono aperti, si ha $\int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_1 \setminus B_1)_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = m_N(A_1 \setminus B_1) < 1$, e dunque $m_h((A_1 \setminus B_1)_{\mathbf{x}})$ è finita per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Ne segue

$$\lim_{n\to\infty} m_h((A_n \setminus B_n)_{\mathbf{x}}) = m_h((A \setminus B)_{\mathbf{x}}) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^k,$$

da cui per il lemma di Fatou

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} m_h((A \setminus B)_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_n \setminus B_n)_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = \\ &= \lim_{n\to\infty} m_N(A_n \setminus B_n) = 0,\end{aligned}$$

e pertanto $\int_{\mathbb{R}^k} m_h((A \setminus B)_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = 0$, da cui $m_h((A \setminus B)_{\mathbf{x}}) = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^k$. Ciò implica

$$m_h(A_{\mathbf{x}}) = m_h(E_{\mathbf{x}}) = m_h(B_{\mathbf{x}}) = \lim_{n\to\infty} m_h((B_n)_{\mathbf{x}}) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^k,$$

il che ci dice che $\mathbf{x} \mapsto m_h(E_{\mathbf{x}})$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$. A questo punto si può concludere che

$$\begin{aligned} m_N(E) &= m_N(B) = \lim_{n\to\infty} m_N(B_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((B_n)_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(B_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

In modo analogo si provano gli enunciati relativi a $E^{\mathbf{y}}$. Ciò completa la dimostrazione. □

Si noti che la tesi della proposizione 11.1 si può scrivere nel modo seguente: per ogni insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^{k+h}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{k+h}} I_E(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^h} I_E(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \left[\int_{\mathbb{R}^k} I_E(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y}.$$

Nei teoremi che seguono generalizzeremo questa formula al caso di una qualunque funzione integrabile su $\mathbb{R}^{k+h}$.

Teorema 11.2 (di Tonelli) *Sia $f : \mathbb{R}^{k+h} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e non negativa. Allora si ha:*

(i) *la funzione $f(\cdot,\mathbf{y})$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$ per q.o. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$ e la funzione $f(\mathbf{x},\cdot)$ è misurabile in $\mathbb{R}^h$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$;*

(ii) *la funzione $\int_{\mathbb{R}^h} f(\cdot,\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$ e la funzione $\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x},\cdot)\, d\mathbf{x}$ è misurabile in $\mathbb{R}^h$;*

(iii) *risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^{k+h}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y}.$$

Dimostrazione Se $f = I_E$, con $E \subseteq \mathbb{R}^{k+h}$ misurabile, la tesi è fornita dalla proposizione 11.1. Se f è una funzione semplice, la tesi segue per linearità. Nel caso generale, grazie alla non negatività di f esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge puntualmente a f in modo crescente (ad esempio, quelle costruite nella dimostrazione della proposizione 5.9). La proprietà (i) è vera perché $f(\cdot, \mathbf{y})$ e $f(\mathbf{x}, \cdot)$ sono limiti puntuali di funzioni misurabili; le parti (ii) e (iii) si ottengono applicando il teorema di B. Levi. □

Un risultato analogo vale per le funzioni di segno variabile, purché integrabili (e non solo misurabili): basta scrivere il risultato per f^+ e f^- e pi sottrarre, il che è sempre lecito perché almeno uno fra i due termini della sottrazione è finito.
Per le funzioni sommabili il risultato del teorema di Tonelli si può precisare:

Teorema 11.3 (di Fubini) *Sia $f : \mathbb{R}^{k+h} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione sommabile. Allora si ha:*

(i) *la funzione $f(\cdot, \mathbf{y})$ è sommabile su $\mathbb{R}^k$ per q.o. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^h$ e la funzione $f(\mathbf{x}, \cdot)$ è sommabile su $\mathbb{R}^h$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$;*

(ii) *la funzione $\int_{\mathbb{R}^h} f(\cdot, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ è sommabile su $\mathbb{R}^k$ e la funzione $\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \cdot)\, d\mathbf{x}$ è sommabile su $\mathbb{R}^h$;*

(iii) *risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^{k+h}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y}.$$

Dimostrazione La tesi è vera, grazie al teorema di Tonelli, per le funzioni non negative f^+ e f^-; gli integrali risultanti sono tutti finiti in quanto $f^+ \le |f|$, $f^- \le |f|$ e $|f|$ è sommabile. Il risultato segue allora per differenza. □

Osservazione 11.4 Spesso viene usata la notazione $\int_{\mathbb{R}^k} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$, lievemente imprecisa, in luogo di $\int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^h} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x}$, ed analogamente si usa $\int_{\mathbb{R}^h} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}$ in luogo di $\int_{\mathbb{R}^h} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y}$.

Esempi 11.5 (1) *(Insiemi normali piani)* Poniamo

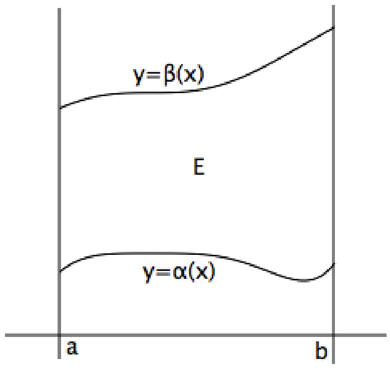
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\},$$

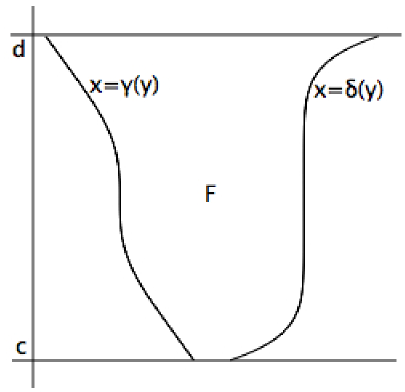
ove $\alpha, \beta \in C[a, b]$ con $\alpha \le \beta$. Un insieme di questo genere si chiama *insieme normale rispetto all'asse x* (essendo l'unione di segmenti verticali). L'insieme E è chiuso, quindi misurabile in $\mathbb{R}^2$; inoltre

$$E_x = \begin{cases} [\alpha(x), \beta(x)] & \text{se } x \in [a, b] \\ \emptyset & \text{se } x \notin [a, b], \end{cases} \qquad m_1(E_x) = \begin{cases} \beta(x) - \alpha(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Pertanto

$$m_2(E) = \int_{\mathbb{R}} m_1(E_x)\, dx = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)]\, dx.$$





Similmente, per l'insieme

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(x)\},$$

con $\gamma, \delta \in C[c,d]$ e $\gamma \le \delta$ *(insieme normale rispetto all'asse y),* si ha

$$F^y = \begin{cases} [\gamma(y), \delta(y)] & \text{se } y \in [c,d] \\ \emptyset & \text{se } y \notin [c,d], \end{cases} \qquad m_1(F^y) = \begin{cases} \delta(y) - \gamma(y) & \text{se } y \in [c,d] \\ 0 & \text{se } y \notin [c,d]. \end{cases}$$

Pertanto

$$m_2(F) = \int_{\mathbb{R}} m_1(E_y)\, dy = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)]\, dy.$$

(2) *(Integrali su insiemi normali piani)* Sia F un insieme normale rispetto all'asse y, dunque della forma

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\},$$

con $\gamma, \delta \in C[c,d]$ e $\gamma \le \delta$. Se f è una funzione sommabile, o integrabile, su E, si ha

$$\begin{aligned} \int_F f\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} f I_F\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f I_F\, dx \right] dy = \\ &= \int_c^d \left[\int_{\mathbb{R}} f I_F\, dx \right] dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right] dy. \end{aligned}$$

Analogamente, se g è una funzione sommabile od integrabile sull'insieme (normale rispetto all'asse x)

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

ove $\alpha, \beta \in C[a, b]$ con $\alpha \leq \beta$, allora

$$\int_E g\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, y)\, dx\right] dy.$$

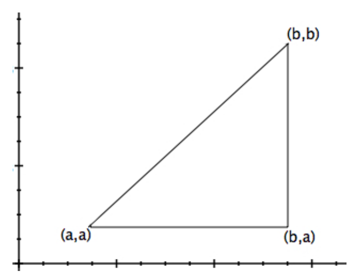
Osservazione 11.6 Se il dominio su cui si deve integrare è normale rispetto ad entrambi gli assi, si possono combinare i due casi esposti nell'esempio precedente, ottenendo uno *scambio dell'ordine di integrazione* che spesso aiuta a semplificare il calcolo. Se ad esempio E è un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, si ha per ogni f integrabile su E

$$\int_E f\, dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy,$$

e converrà scegliere la formula più semplice per i calcoli.

Esempi 11.7 **(1)** Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia T il triangolo di vertici (a, a), (b, b) e (b, a): vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_T e^{(b-y)^2}\, dxdy.$$



L'insieme T è normale rispetto all'asse x, quindi si ha

$$\int_T e^{(b-y)^2}\, dxdy = \int_a^b \left[\int_a^x e^{(b-y)^2}\, dy\right] dx,$$

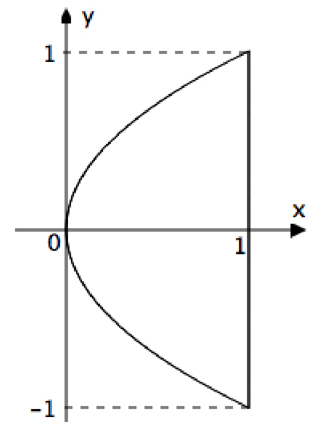
ma l'integrale a secondo membro non è calcolabile esplicitamente. Però, essendo T normale anche rispetto all'asse y, possiamo scrivere

$$\int_T e^{(b-y)^2}\, dxdy = \int_a^b \left[\int_y^b e^{(b-y)^2}\, dx\right] dy,$$

e poiché l'integrando non dipende da x, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_T e^{(b-y)^2}\, dxdy &= \int_a^b e^{(b-y)^2} \left[\int_y^b 1\, dx\right] dy = \\ &= \int_a^b (b-y) e^{(b-y)^2}\, dy = \frac{1}{2}\left(e^{(b-a)^2} - 1\right).\end{aligned}$$

(2) Calcoliamo l'integrale $\int_D y^2\,dxdy$, ove D è la regione delimitata dalla parabola $x = y^2$ e dalla retta $x = 1$. Il dominio D è normale rispetto ad entrambi gli assi: tenuto conto della forma dell'integrando, conviene vederlo come insieme normale rispetto all'asse y. Scriviamo quindi



$$\int_D y^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{y^2}^{1} y^2\,dx\right]dy =$$
$$= \int_{-1}^{1} y^2(1-y^2)\,dy =$$
$$= 2\int_0^1 (y^2 - y^4)\,dy = \frac{4}{15}\,.$$

(3) *(Insiemi normali di $\mathbb{R}^3$)* Un insieme della forma

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\},$$

ove D è un chiuso di $\mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in C(D)$ con $\alpha \le \beta$, si chiama *insieme normale rispetto al piano xy*; analogamente si possono avere insiemi normali rispetto ai piani xz o yz. Se f è una funzione integrabile su E, vale la formula

$$\int_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy.$$

Se, in particolare, D è a sua volta normale rispetto (ad esempio) all'asse x, cosicché

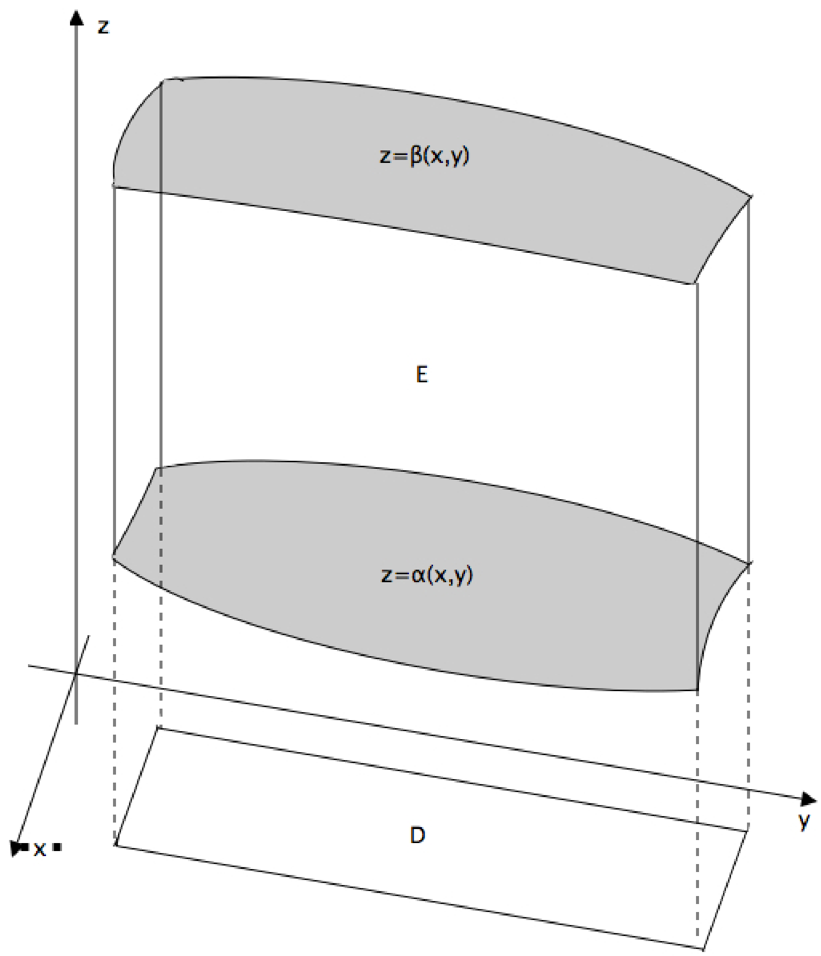
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}$$

con $p, q \in C[a,b]$ e $p \le q$, allora l'integrale triplo si decompone in tre integrali semplici:

$$\int_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx.$$

Se poi consideriamo, per ogni $x \in [a,b]$, le sezioni di E lungo piani ortogonali all'asse x, cioè

$$C_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : p(x) \le y \le q(x),\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\},$$



si vede che ciascun C_x è misurabile, essendo un insieme normale rispetto all'asse y, e inoltre

$$\int_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{C_x} f(x,y,z)\,dydz\right] dx.$$

Questa formula esprime una "integrazione per fette", che è utile in svariate situazioni: particolarmente importante è il caso dei *solidi di rotazione.* Se $f(z)$ è una funzione continua e non negativa definita per $z \in [a,b]$, e se

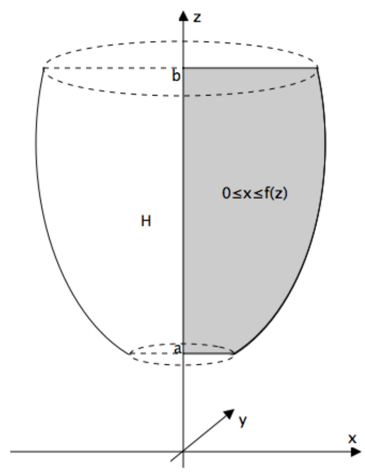
$$G = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : a \le z \le b,\ 0 \le x \le f(z)\},$$

l'insieme H, ottenuto ruotando G attorno all'asse z, è un esempio di solido di rotazione. Si ha

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z)\};$$

H è chiuso, quindi misurabile, e si trova, integrando per fette,

$$m_3(H) = \int_{\mathbb{R}} m_2(H^z)\, dz.$$



Le sezioni orizzontali H^z, per $z \in [a, b]$, sono cerchi di centro $(0, 0)$ e raggio $f(z)$, mentre sono vuote per $z \notin [a, b]$. Quindi

$$m_3(H) = \int_a^b \pi f(z)^2\, dz.$$

(4) Calcoliamo il volume del paraboloide solido

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} :$$

si ha, affettando perpendicolarmente all'asse z,

$$H^z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z\},$$

cosicché la sezione H^z è un cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{z}$. Perciò

$$\begin{aligned} m_3(H) &= \int_H 1\, dxdydz = \int_0^1 \left[\int_{H^z} dxdy\right] dz = \int_0^1 m_2(H^z)\, dz = \\ &= \int_0^1 \pi z\, dz = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che anche negli integrali tripli si possono avere scambi dell'ordine di integrazione quando, come spesso accade, si integra su un dominio normale rispetto a due o addirittura a tutti e tre i piani coordinati.

(5) Calcoliamo l'integrale di Riemann improprio $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Fissato $a > 0$, osserviamo che

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^a \left[\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dy\right] dx.$$

La funzione $(x,y) \mapsto e^{-xy}\,\sin x$ è sommabile su $[0,a]\times[0,\infty[$ poiché, in virtù del teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{[0,a]\times[0,\infty[} e^{-xy}\,|\sin x|\,dxdy &= \int_0^a \left[\int_0^\infty e^{-xy}\,|\sin x|\,dy\right] dx = \\ &= \int_0^a \frac{|\sin x|}{x}\,dx < \infty.\end{aligned}$$

Quindi possiamo scambiare l'ordine di integrazione nell'integrale di $e^{-xy}\,\sin x$, ottenendo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^a \left[\int_0^\infty e^{-xy}\,\sin x\,dy\right] dx = \int_0^\infty \left[\int_0^a e^{-xy}\,\sin x\,dx\right] dy.$$

Quest'ultimo integrale si può calcolare: integrando per parti due volte si verifica facilmente che

$$\int_0^\infty \left[\int_0^a e^{-xy}\,\sin x\,dx\right] dy = \frac{1}{1+y^2}\,\left(1-e^{-ay}(y\,\sin a+\cos a)\right),$$

da cui

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,\left(1-e^{-ay}(y\,\sin a+\cos a)\right)\,dy.$$

Dato che per $a\to\infty$ si ha $e^{-ay}(y\,\sin a+\cos a)\to 0$ puntualmente, e che

$$\frac{e^{-ay}|y\,\sin a+\cos a|}{1+y^2} \le \frac{K}{1+y^2} \quad \forall a,y>0,$$

in virtù del teorema di Lebesgue si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,.$$

Esercizi 11

1. La funzione $f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$ è integrabile, o sommabile, in $[0,1]\times[0,1]$?

2. La funzione $f(x,y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)$ è integrabile, o sommabile, in $[0,2]\times[0,2]$?

3. Determinare il volume dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

   (i) $E = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0,\ 0 < x + y + z < 1\}$;

   (ii) E = regione delimitata dai vincoli $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$;

   (iii) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2 + z^2\}$;

   (iv) E = insieme ottenuto ruotando attorno all'asse y l'insieme piano $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 3],\ 0 \leq x \leq g(y)\}$, ove

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y/2} & \text{se } y \in [0, 2], \\ \sqrt{-y^2 + (9/2)y - 4} & \text{se } y \in [2, 3]. \end{cases}$$

4. Calcolare i seguenti integrali:

   (i) $\displaystyle\int_A \frac{z(1 - |x|)}{\sqrt{4 - z^2}}\, dxdydz$, ove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq 1,\ 0 \leq y \leq 4,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}(1 - |x|)\};$$

   (ii) $\displaystyle\int_B \frac{x + y}{x^2 + y^2}\, dxdy$, ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1/2,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\};$$

   (iii) $\displaystyle\int_C y\, dxdy$, ove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^3(1 - x^3) \leq 0\}$;

   (iv) $\displaystyle\int_D \frac{\cos y}{x^2}\, dxdy$, ove $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{2}{\pi},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\big\}$;

   (v) $\displaystyle\int_E \sqrt{x + y}\, dxdy$, ove E è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$;

   (vi) $\displaystyle\int_F \max\{x, y\}\, dxdy$, ove

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0,\ a < \max\{x, y\} < b\}, \quad \text{con } b > a > 0;$$

   (vii) $\displaystyle\int_G \ln(xy)\, dxdy$, ove

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1,\ x \geq -1,\ 0 \geq y \geq 4x\};$$

(viii) $\displaystyle\int_H \frac{dxdy}{x+1}$, ove $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2,\ x \leq y+2\}$;

(ix) $\displaystyle\int_I \frac{1+2x}{x+y}\,dxdy$, ove $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2,\ 1 \leq x \leq 2\}$;

(x) $\displaystyle\int_J (x-1)\,dxdy$, ove $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ |x|y \leq 1,\ |x| \leq 2\}$;

(xi) $\displaystyle\int_K y\cos(x+z)\,dxdydz$, ove

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+z \leq \pi/2,\ y \leq \sqrt{x}\}.$$

5. Sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ nel piano $z = 0$. Da ogni punto di Γ si tracci la perpendicolare alla retta $\{x = 0,\ z = h\}$; la superficie risultante, insieme al piano $z = 0$, delimita un solido E, detto *cono a cuneo*. Se ne determini il volume.

6. Calcolare la misura dell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2^{5-x} + x - 6,\ 2^y + y^2 \leq x \leq 4\}.$$

7. Poniamo $F(a) = \int_0^\pi \ln(1 + a\cos x)\,dx$, $|a| < 1$. Dimostrare che:

(i) F è ben definita e continua anche per $|a| = 1$;

(ii) F è derivabile in $]-1,1[$, con

$$F'(a) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right) & \text{se } |a| < 1,\ a \neq 0, \\ 0 & \text{se } a = 0; \end{cases}$$

(iii) risulta $F(a) = \pi \ln \dfrac{1 + \sqrt{1-a^2}}{2}$ per ogni $a \in [-1,1]$.

8. Fissati $a, b > 0$, si provi che:

(i) la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ è sommabile su $[0,\infty[$;

(ii) risulta

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-xy}\,dydx = \ln\frac{b}{a}\,.$$

9. *(Teorema di Schwarz)* Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f \in C^2(A)$; si provi che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in A.

   [**Traccia:** se in un punto (x_0, y_0) di A fosse, ad esempio, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, si determini un rettangolo R sul quale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, e si trovi l'assurdo calcolando $\int_R \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] dxdy$.]

10. Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ di misura positiva. Il *baricentro* di E è il punto $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$ di coordinate $\overline{x}^i = \frac{1}{m_N(E)} \int_E x^i \, d\mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, N$, mentre il *momento di inerzia* di E rispetto ad una retta r è il numero $I_r = \int_E d(\mathbf{x})^2 \, d\mathbf{x}$, ove $d(\mathbf{x})$ è la distanza del punto $\mathbf{x}$ dalla retta r. Si calcolino il baricentro ed il momento di inerzia rispetto agli assi x e y dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

    (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], \ 0 \leq y \leq \sin x\}$;

    (ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$;

    (iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$;

    (iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

11. Sia f una funzione integrabile sull'insieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Si provi la seguente formula di "integrazione per fette":

    $$\int_D |f| \, d\mathbf{x} = \int_0^\infty m_N(\{\mathbf{x} \in D : |f(\mathbf{x})| > t\}) \, dt.$$

    [**Traccia:** si tratti dapprima il caso $f \in \mathcal{S}_0$, scrivendo f nella forma $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{E_i}$, con i numeri $|\alpha_i|$ ordinati in modo crescente e con $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$; poi si usi il teorema di B. Levi.]