Università di Pisa

Corso di laurea magistrale in Matematica

Equazioni ellittiche e disuguaglianze di Sobolev ottimali

Tesi di laurea magistrale

Candidato:
Biagio Simone Micieli

Relatore:
Prof. Paolo Acquistapace

Controrelatore:
Prof. Antonio Tarsia

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

Negli anni '30, Sergei L'vovič Sobolev introdusse quegli spazi funzionali che oggi si chiamano *spazi di Sobolev*, che sono di fondamentale importanza per l'analisi funzionale moderna, soprattutto per lo studio di equazioni alle derivate parziali e delle loro applicazioni ai più svariati problemi che scaturiscono in fisica e nelle scienze applicate.
Questi spazi vengono caratterizzati in termini degli spazi di Lebesgue L^p: le funzioni che appartengono agli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, sono particolari elementi di L^p le cui derivate deboli, fino all'ordine k, esistono e sono in $L^p(\Omega)$.

In particolare, l'opera di Sobolev e Morrey, ha prodotto due disuguaglianze di cruciale importanza.

(1) Se $1 < p < n$, esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che per ogni funzione regolare u a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza di Sobolev

$$\|u\|_{p^*} \leq C \, \|\mathrm{D}\, u\|_p, \tag{1}$$

dove $p^* = np/(n-p)$ è detto esponente critico relativo a p: la criticità di p^* deriva dal fatto che la disuguaglianza precedente non vale per alcun $q > p^*$. In particolare, da (1) segue che se Ω è un aperto limitato con frontiera di classe C^1, lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge con continuità in $L^{p^*}(\Omega)$.

(2) Se $p > n \geq 1$, esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che per ogni funzione regolare u a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza di Morrey

$$|u(x) - u(y)| \leq C \, |x-y|^{1-n/p} \, \|\mathrm{D}\, u\|_p, \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n; \tag{2}$$

anche questa disuguaglianza è ottimale, nel senso che non vale per alcun $\alpha > 1 - n/p$. Da (2) segue che se Ω è un aperto limitato con frontiera di classe

C^1, lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge con continuità nello spazio di Hölder $C^{0,1-n/p}(\overline{\Omega})$.

In seguito si è cominciato ad analizzare il problema di ottimizzare le disuguaglianze (1) e (2), cercando la miglior costante possibile e vedendo in quali casi esistono funzioni che realizzano l'uguaglianza dei due membri. Negli anni '70 G. Talenti [Ta1] e, indipendentemente, T. Aubin [Au] calcolarono la costante ottimale per (1) e, nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, determinarono le funzioni che realizzano l'uguaglianza dei due membri. Inoltre, lo stesso G. Talenti, nel 1994 [Ta2], calcolò la costante ottimale per (2) e le funzioni che, nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, realizzano l'uguaglianza in (2).

In entrambi i casi, se $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, le costanti di Talenti restano ottimali, ma non è più possibile trovare alcuna funzione che realizzi l'uguaglianza. Questo importante risultato è stato interpretato da H. Brezis e L. Nirenberg in [Br-Ni]. Essi, nel caso $p = 2$, hanno stimato dal basso la differenza tra i due membri della (1), mostrando l'esistenza di un termine di resto che spiega l'assenza di funzioni ottimali. Ha così avuto inizio lo studio dei termini di resto nelle disuguaglianze di Sobolev e in altre disuguaglianze integrali.

In questa tesi ripercorreremo il lavoro svolto da G. Talenti e da H .Brezis e L. Nirenberg.
Nel primo capitolo, di tipo introduttivo, richiamiamo alcuni risultati classici di analisi funzionale e si presentano gli strumenti fondamentali per la trattazione e lo sviluppo degli argomenti successivi: più in dettaglio, dopo una breve descrizione degli spazi di Sobolev e delle disuguaglianze di Sobolev e Morrey, si analizzano le proprietà basilari dell'operatore di Laplace, si dimostra un'utile identità dovuta a Pohozaev e si introducono gli spazi L^p-deboli.
Il secondo capitolo è dedicato alla descrizione dei riordinamenti di funzioni e delle loro fini proprietà, con particolare riguardo al riordinamento decrescente, analizzato in tutti i suoi aspetti, e al riordinamento di Schwarz. Questo strumento è estremamente utile in analisi: esso permette, ad esempio, di stabilire che le funzioni ottimali per le disuguaglianze (1) e (2) sono a simmetria sferica, restringendo notevolmente il campo di ricerca. Analogamente, per mezzo dei riordinamenti si può dimostrare che nella disuguaglianza isoperimetrica vale l'uguaglianza se e solo sel'insieme considerato è una palla.
Nel terzo capitolo viene riportato parte del lavoro svolto da H.Brezis e L.Nirenberg

in [Br-Ni]. Si mostra l'esistenza di soluzioni positive per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

quando f è un infinito per $u \to \infty$ di ordine inferiore a u^p. Si analizza in particolare il legame che intercorre tra l'esistenza di soluzioni per il problema (3) e l'esistenza di un termine di resto per la (1).
Infine, nel quarto finale, seguendo i lavori di G. Talenti [Ta1] e [Ta2], si mostra dettagliatamente come ricavare la costante ottimale per le disuguaglianze (1) e (2), e le funzioni a simmetria radiale che realizzano l'uguaglianza nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

1 | Risultati preliminari

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $C_0^\infty(\Omega)$ l'insieme delle funzioni di classe $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto. Tali funzioni verranno spesso chiamate *funzioni test*. Introduciamo innanzitutto il concetto di derivata debole.

Definizione 1.1. Siano $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiindice. Diciamo che v è la α-esima derivata debole di u se

$$\int_\Omega u(\mathrm{D}^\alpha \varphi)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x$$

per ogni funzione test φ. In tal caso scriveremo

$$\mathrm{D}^\alpha u = v.$$

Spieghiamo brevemente tale scrittura: se α è un multiindice allora $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; in tal caso

$$\mathrm{D}^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Osservazione 1.2. La derivata debole viene introdotta per generalizzare la nozione di derivata classica. In un certo senso essa viene definita per far funzionare la formula di integrazione per parti. Inoltre se u possiede due derivate deboli relative allo stesso multiindice, queste differiscono al più su un insieme di misura nulla.

Definizione 1.3. Fissati $1 \leq p \leq \infty$ e k intero non negativo, definiamo

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\, :\, \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \ \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Tali spazi di funzioni vengono detti *spazi di Sobolev*.

Su tale insieme è possibile definire una norma (detta norma di Sobolev).
Sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Se $p < \infty$

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Se invece $p = \infty$

$$\|u\|_{k,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_\infty .$$

In questo modo è possibile stabilire quando una successione converge in $W^{k,p}(\Omega)$. Più precisamente, se $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ e se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ diciamo che $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{k,p} = 0.$$

Definizione 1.4. Indichiamo con $W_0^{k,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

In particolare, una funzione $u \in W^{k,p}(\Omega)$ appartiene allo spazio $W_0^{k,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $\{u_m\}$ di funzioni test che converge a u in $W^{k,p}(\Omega)$.

Osservazione 1.5. Ricordiamo infine che gli spazi di Sobolev, muniti della norma di Sobolev, sono spazi di Banach. Inoltre, quando $p = 2$, questi diventano spazi di Hilbert. Per enfatizzare questa proprietà, in questo caso si pone $H^k = W^{k,2}$ e $H_0^k = W_0^{k,2}$. Inoltre tacitamente si identificano tutte le funzioni che differiscono al più su un insieme di misura nulla.

Il nostro obiettivo è capire in quali spazi di funzioni è possibile immergere gli spazi di Sobolev. A tale scopo ricordiamo che le funzioni *lisce* (ovvero di classe $C^\infty(\Omega)$) che hanno norma di Sobolev finita sono dense in $W^{k,p}(\Omega)$.
Per prima cosa consideriamo lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$. Ci domandiamo se l'appartenere a un tale spazio di funzioni implichi l'appartenenza ad uno spazio più ampio oppure no. Chiaramente la risposta dipenderà sia da p che da n. Per questo motivo distingueremo tre casi:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 1 \leq p < n, \\ &(2) \quad p = n, \\ &(3) \quad n < p \leq \infty. \end{aligned}$$

Tutti i teoremi che presenteremo sono risultati classici di analisi funzionale. Ometteremo pertanto le loro dimostrazioni rimandando a [Ev] per tutti i dettagli.

1.1 La disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Consideriamo il caso $1 \leq p < n$. Ci chiediamo se e quando possiamo ottenere una stima del tipo

$$\|u\|_q \leq C \ \|\mathrm{D}\, u\|_p \,, \tag{1.1}$$

con $C > 0$, $1 \leq q < \infty$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Chiaramente la costanti C e q non devono dipendere da u.
Prima di dimostrare la validità di una tale stima mostriamo come q debba avere un'espressione abbastanza particolare e non possa essere del tutto arbitrario. Supponiamo dunque che (1.1) valga. Sia u una funzione test non identicamente nulla. Poniamo

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \qquad \text{per ogni } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Applicando la (1.1) alla funzione u_λ otteniamo

$$\|u_\lambda\|_q \leq C \ \|\mathrm{D}\, u_\lambda\|_p \,. \tag{1.2}$$

A questo punto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \,\mathrm{d}y,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{D}\, u_\lambda|^p \,\mathrm{d}x = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{D}\, u(\lambda x)|^p \,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{D}\, u(y)|^q \,\mathrm{d}y.$$

Inserendo tali espressioni nella (1.2) scopriamo che

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_q \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \ \|\mathrm{D}\, u\|_p \,,$$

ovvero

$$\|u\|_q \leq C \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \ \|\mathrm{D}\, u\|_p \,. \tag{1.3}$$

Quindi se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$ possiamo mandare λ a 0 oppure a infinito ottenendo un assurdo. Perciò l'espressione (1.1) può valere soltanto quando $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$, ovvero quando

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Definizione 1.6. Se $1 \leq p < n$ la quantità $p^* = \frac{np}{n-p}$ viene chiamata *esponente critico di Sobolev relativo a* p.

Osserviamo che $p^* > p$.

Teorema 1.7 (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e se $1 \le p < n$, esiste una costante C (dipendente solo da p e da n) tale che

$$\|u\|_{p^*} \le C \; \|\mathrm{D}\, u\|_p \, . \tag{1.4}$$

Valgono pertanto i seguenti importanti risultati.

Teorema 1.8. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1. Supponiamo $1 \le p < n$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e vale

$$\|u\|_{p^*} \le C \, \|u\|_{1,p} \, . \tag{1.5}$$

La costante C dipende solo da p, n, Ω.

Teorema 1.9. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1. Supponiamo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per qualche $1 \le p < n$. Allora

$$\|u\|_q \le C \, \|\mathrm{D}\, u\|_p \tag{1.6}$$

per qualche $q \in [1, p^*]$. La costante C dipende solo da p, q, n, Ω.

Quest'ultima stima viene chiamata, a volte, *disuguaglianza di Poincaré*.

Consideriamo adesso il caso limite $p = n$. In questo caso $p^* \to \infty$. Ci si potrebbe aspettare che se $u \in W^{1,n}(\Omega)$, in virtù del teorema 1.8, $u \in L^\infty(\Omega)$. Ma questo è falso se $n > 1$. Infatti basta considerare $\Omega = B_1(0)$ (la palla di centro 0 e raggio 1) e $u = \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$. In tal caso $u \in W^{1,n}(\Omega)$ ma $u \notin L^\infty(\Omega)$. Affronteremo in seguito questa situazione limite.

1.2 La disuguaglianza di Morrey

Studiamo adesso il caso in cui $n < p \le \infty$. Proviamo che se $u \in W^{1,n}(\Omega)$ allora u è γ-hölderiana per un opportuno valore di γ.

Teorema 1.10 (Disuguaglianza di Morrey)**.** Sia $n < p \le \infty$. Esiste allora una costante C (dipendente solo da n e da p) tale che

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C \; \|u\|_{1,p} \tag{1.7}$$

per ogni $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre

$$\gamma = 1 - \frac{n}{p}.$$

Teorema 1.11. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1. Supponiamo $n < p \leq \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Poniamo $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Allora esistono $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e una costante C (che dipende solo da p, n, Ω) tali che

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \ \|u\|_{1,p} .$$

Inoltre u^* coincide con u quasi ovunque.

Come conseguenza di questo teorema, possiamo supporre d'ora in avanti che se $p > n$ allora una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ è continua.

1.3 Risultati generali

Per completezza enunciamo un teorema che generalizza quanto visto fino ad ora per funzioni in $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.12. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1. Sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$.
Se $k < \frac{n}{p}$ allora $u \in L^q(\Omega)$, dove

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Inoltre

$$\|u\|_q \leq C \ \|u\|_{k,p} ,$$

dove la costante C dipende solo da k, p, n, Ω. Se $k > \frac{n}{p}$ allora $u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, dove

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, \text{ se } \frac{n}{p} \text{ non è un intero;} \\ \varepsilon < 1, \text{ se } \frac{n}{p} \text{ è un intero.} \end{cases}$$

Inoltre

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \ \|u\|_{k,p} ,$$

dove la costante C dipende solo da k, p, n, γ, Ω.

1.4 La chain rule

In questa sezione vogliamo capire quando, data u in uno spazio di Sobolev, la sua composizione con una qualche altra funzione opportuna sta ancora in uno spazio di Sobolev.

Proposizione 1.13. Siano $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in H^1(\Omega)$. Allora

$$f \circ u \in H^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{D}(f \circ u) = f'(u)\,\mathrm{D}\,u.$$

Dimostrazione. Sia $\{u_m\}_m$ una successione in $C^1(\Omega)$ tale che

(i) $u_m \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$;

(ii) $\mathrm{D}\,u_m \to \mathrm{D}\,u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Sia $\Omega' \subset \Omega$. Si ha

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)|\,\mathrm{d}x \leq \sup|f'| \int_{\Omega'} |u_m - u|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando } m \to \infty,$$

$$\int_{\Omega'} \left|f'(u_m)\,\mathrm{D}\,u_m - f'(u)\,\mathrm{D}\,u\right|\,\mathrm{d}x \leq \sup|f'| \int_{\Omega'} |\mathrm{D}\,u_m - \mathrm{D}\,u|\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega'} \left|f'(u_m) - f'(u)\right|\,\mathrm{d}x.$$

Una sottosuccessione di $\{u_m\}$ (che continueremo a chiamare $\{u_m\}$) deve convergere quasi ovunque a u in Ω'. Poiché f' è continua, anche $\{f'(u_m)\}$ converge quasi ovunque a $f'(u)$ in Ω'. Quindi l'ultimo integrale tende a 0 per il teorema di Lebesgue della convergenza dominata. Di conseguenza

$$f(u_m) \longrightarrow f(u) \qquad \text{e} \qquad f'(u_m)\,\mathrm{D}\,u_m \longrightarrow f'(u)\,\mathrm{D}\,u.$$

Ma allora $\mathrm{D}\,f(u) = f'(u)\,\mathrm{D}\,u$. □

Ricordiamo la definizione di parte positiva e parte negativa di una funzione.

$$u^+ = \max\{u, 0\} \qquad u^- = \min\{u, 0\}.$$

Chiaramente $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$.

Proposizione 1.14. Sia $u \in H^1(\Omega)$. Allora $u^+, u^-, |u| \in H^1(\Omega)$ e

$$\begin{gathered}
\mathrm{D}\,u^+ = \begin{cases} \mathrm{D}\,u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0, \end{cases} \\
\mathrm{D}\,u^- = \begin{cases} 0 & \text{se } u \geq 0 \\ \mathrm{D}\,u & \text{se } u < 0, \end{cases} \\
\mathrm{D}\,|u| = \begin{cases} \mathrm{D}\,u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -\mathrm{D}\,u & \text{se } u < 0. \end{cases}
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ definiamo

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0. \end{cases}$$

Applichiamo il lemma precedente. Per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u) \operatorname{D}\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_{u>0} \varphi \frac{u \operatorname{D} u}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}} \, \mathrm{d}x.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\int_\Omega u^+ \operatorname{D}\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_{u>0} \varphi \operatorname{D} u \, \mathrm{d}x.$$

Allora la (1.8) è dimostrata per u^+.
Poiché $u^- = -(-u)^+$ la (1.8) è dimostrata anche per u^-. Infine, dato che $|u| = u^+ - u^-$, la tesi è provata. □

Infine mostriamo un ultimo risultato.

Proposizione 1.15. Sia $u \in H^1(\Omega)$. Allora $\operatorname{D} u = 0$ quasi ovunque su ogni insieme (di misura positiva) dove u è costante.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che la costante sia 0. Poiché $\operatorname{D} u = \operatorname{D} u^+ + \operatorname{D} u^-$, possiamo applicare le relazioni (1.8). E questo ci permette di concludere. □

1.5 Compattezza

Dalla disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (teorema 1.4) segue che $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in $L^{p^*}(\Omega)$ quando $1 \leq p < n$. Proveremo adesso che questa immersione è *compatta*, nozione che però dobbiamo prima definire.

Definizione 1.16. Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. T di dice *operatore compatto* se trasforma insiemi limitati di X in insiemi relativamente compatti di Y.

Osserviamo che ogni operatore compatto è necessariamente limitato, e quindi continuo.
Se $X \subset Y$, $T : X \to Y$ è l'identità e T è compatto scriveremo $X \subset\subset Y$.

Teorema 1.17 (di compattezza di Rellich-Kondrachov)**.** Sia Ω un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1. Supponiamo che $1 \leq p < n$. Allora l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$, data dal teorema 1.4, è compatta per ogni $1 \leq q < p^*$.

Anche per la dimostrazione di questo risultato si rimanda a [Ev].

1.6 L'operatore di Laplace

Vogliamo trovare le soluzioni non banali del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

dove λ è una costante reale.

Una soluzione debole di (1.9) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$(\mathrm{D}\, u, \mathrm{D}\, v)_0 = \lambda(u, v)_0, \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega).$$

Osserviamo che, poiché Ω è limitato, l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta.

Teorema 1.18. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$. Allora in $L^2(\Omega)$ esiste una base ortonormale $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ di autofunzioni di Dirichlet per l'operatore di Laplace.
Inoltre i corrispondenti autovalori $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ sono tutti positivi e possono essere ordinati in modo che

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \ldots,$$

con $\lambda_k \to \infty$. Infine ogni autospazio ha dimensione finita.

Il primo autovalore λ_1 può essere caratterizzato in termini del quoziente di Rayleigh:

$$\lambda_1 = R(\varphi_1) = \min\{R(v) \,:\, v \in H_0^1(\Omega),\, v \neq 0\},$$

dove $R(v)$ è il quoziente di Rayleigh definito da

$$R(v) = \frac{\int_\Omega |\mathrm{D}\, v|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Per maggiori dettagli su questo argomento si rimanda a [Sa].

1.6.1 Il principio del massimo

Consideriamo in questa sezione una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$, definita sulla chiusura di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.19. Diciamo che u è una *funzione armonica* se

$$\Delta u = 0$$

in ogni punto di Ω.

Supponiamo che u abbia un massimo locale $x_0 \in \Omega$. Allora, banalmente,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \leq 0 \qquad \text{per ogni } i = 1, ..., n.$$

Dunque deve valere la condizione

$$\Delta u(x_0) \leq 0.$$

Possiamo allora concludere che se $\Delta u > 0$ in ogni punto di Ω, u non può raggiungere il suo massimo nella parte interna di Ω.

Concentriamoci adesso sul caso $n = 2$ (la generalizzazione è abbastanza immediata). Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sia B_r la palla di centro $(\overline{x}, \overline{y})$ e raggio r. Denotiamo con S_r la frontiera di B_r. Sappiamo che vale la relazione

$$\Delta u = \text{div } (\mathrm{D}\, u). \tag{1.10}$$

Ricordiamo il seguente risultato classico.

Teorema 1.20 (Teorema della divergenza)**.** Sia W un aperto limitato con frontiera di classe C^1 e sia $u \in C^1(\overline{W})$. Allora

$$\int_W \text{div } u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial W} (u\,,\, \nu)\, \mathrm{d}\sigma,$$

dove ν è il versore normale a ∂W diretto verso l'esterno di W.

Applichiamo il teorema della divergenza, considerando $W = B_r$. Si ha

$$\int_{B_r} \Delta u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{B_r} \text{div } (\mathrm{D}\, u)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r}\, \mathrm{d}\sigma,$$

dove $\partial u/\partial r$ è la derivata direzionale lungo la normale al bordo S_r di B_r. Passando in coordinate polari, ponendo $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}\theta$,

$$\int_{B_r} \Delta u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \,\mathrm{d}\theta.$$

Segue che, se $\Delta u \geq 0$ in Ω allora

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta \geq 0. \tag{1.11}$$

A questo punto fissiamo R in modo che B_R sia contenuto interamente in Ω e facciamo variare r tra 0 e R. Integrando la (1.11) otteniamo

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} u(R,\theta)\,\mathrm{d}\theta - 2\pi u(\overline{x},\overline{y}) \geq 0,$$

ovvero

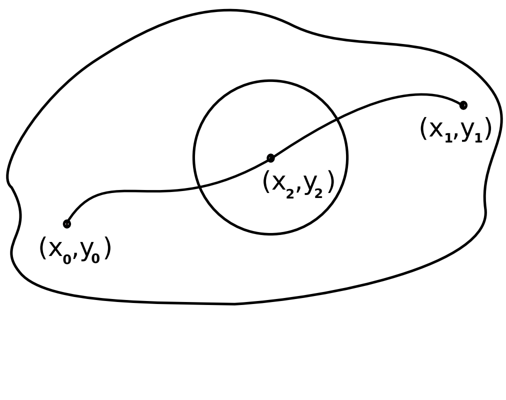
$$u(\overline{x},\overline{y}) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(R,\theta)R\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} u\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.12}$$

Il secondo membro della (1.12) è la *media* di u su S_R. Allora la (1.12) afferma che il valore di u in un punto $(\overline{x},\overline{y})$ di Ω è limitato dalla sua media su una qualsiasi circonferenza contenuta in Ω e centrata in $(\overline{x},\overline{y})$. Se, inoltre, $\Delta u = 0$, questa disuguaglianza viene soddisfatta sia da u che da $-u$.

Teorema 1.21 (Teorema della media)**.** Sia u una funzione armonica in Ω. Allora

$$u(\overline{x},\overline{y}) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} u\,\mathrm{d}\sigma.$$

Supponiamo adesso che $\Delta u \geq 0$ in Ω e che u raggiunga il suo massimo M nel punto $(x_0,y_0) \in \Omega$. Poiché $u \leq M$ e $u(x_0,y_0) = M$, la (1.12) implica che u deve coincidere con M su ogni palla centrata in (x_0,y_0) e interamente contenuta in Ω. Supponiamo che esista un punto $(x_1,y_1) \in \Omega$ tale che $u(x_1,y_1) < M$; il ragionamento appena fatto risulta essere vero in un intorno di (x_1,y_1). Colleghiamo (x_1,y_1) a (x_0,y_0) con una curva contenuta in Ω e denotiamo con (x_2,y_2) il primo punto sulla curva in cui $u(x_2,y_2) = M$. Allora u non è identicamente uguale a M su una palla sufficientemente piccola centrata in (x_2,y_2). E questo contraddice la (1.12).



Teorema 1.22 (Principio del massimo)**.** Supponiamo che $\Delta u \geq 0$ in Ω, aperto limitato e connesso. Se u raggiunge il suo massimo M in un punto interno di Ω allora

$$u \equiv M \qquad \text{in } \Omega.$$

Osservazione 1.23. Nel caso in cui $\Delta u \leq 0$, possiamo applicare il teorema 1.22 alla funzione $-u$. Quindi se $-u$ raggiunge il suo massimo M in un punto interno di Ω allora

$$-u \equiv M \qquad \text{in } \Omega.$$

In particolare $-M$ è il minimo di u.

Osservazione 1.24. Una funzione armonica non costante non può raggiungere né il suo massimo né il suo minimo nella parte interna di Ω.

1.6.2 La disuguaglianza di Harnack

Teorema 1.25 (Disuguaglianza di Harnack)**.** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega' \subset \Omega$ due aperti. Esiste una costante $C = C(n, \Omega, \Omega') > 0$ tale che per ogni funzione armonica non negativa definita su Ω vale

$$\sup_{x \in \Omega'} u(x) \leq C \inf_{x \in \Omega'} u(x). \tag{1.13}$$

Questo importante risultato è conseguenza del prossimo teorema, che consiste nella formulazione classica della disuguaglianza di Harnack, che Harnack stesso dimostrò solo nel caso $n = 2$, [Ha].

Denotiamo con $B_R(x_0)$ la palla contenuta in $\mathbb{R}^n$ di centro x_0 e raggio R, e supponiamo $n \geq 2$.
Richiamiamo brevemente la *formula di Poisson*. Sia u una funzione armonica e siano $x \in B_R(0) = B_R$, $y \in \partial B_R$. Vale la seguente identità:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}\sigma. \tag{1.14}$$

La formula di Poisson è conseguenza diretta delle formule di Green. Per tutti i dettagli su come questa formula possa essere ricavata si rimanda a [Pr-We].

Teorema 1.26. Sia u una funzione armonica, definita su $B_R(x_0)$, che sia non negativa o non positiva. Sia y un qualsiasi punto di $B_R(x_0)$. allora

$$u(x_0)\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \leq u(y) \leq u(x_0)\left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}. \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Supponiamo che u sia non negativa. Poniamo $\rho = |x - x_0|$ e scegliamo $R' \in (r, R)$. Dato che u è continua su $\overline{B_{R'}(x_0)}$, possiamo applicare la formula di Poisson (1.14), ottenendo

$$u(x) = \frac{R'^2 - \rho^2}{R'\omega_n} \int_{\partial B_{R'}(x_0)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.16}$$

Osserviamo che

$$\frac{R'^2 - \rho^2}{(R'+\rho)^n} \leq \frac{R'^2 - \rho^2}{|x-y|^n} \leq \frac{R'^2 - \rho^2}{(R'-\rho)^n}. \tag{1.17}$$

Applicando il teorema 1.21 della media, otteniamo

$$u(x_0)\left(\frac{R'}{R'+\rho}\right)^{n-2} \frac{R'-\rho}{R'+\rho} \leq u(x) \leq u(x_0)\left(\frac{R'}{R'-\rho}\right)^{n-2} \frac{R'+\rho}{R'-\rho}. \tag{1.18}$$

La tesi segue passando al limite per $R' \to R$ e osservando che le limitazioni date sono monotone rispetto a ρ. □

Enunciamo brevemente alcune importanti conseguenze della disuguaglianza di Harnack.

(i) Se u è una funzione armonica e limitata dal basso o dall'alto allora è costante. (Teorema di Liouville)

(ii) Se u è definita su $B_R \subset \mathbb{R}^3$ ed è armonica e se soddisfa la relazione $u(x) = o\left(|x|^{2-n}\right)$ per $|x| \to 0$, allora $u(0)$ può essere definita in modo che u sia armonica su tutta la palla B_R. (Teorema delle singolarità eliminabili)

(iii) Sia $\{g_m\}$ una successione limitata di funzioni definite su $\partial\Omega$. Sia $\{u_m\}$ la successione delle corrispondenti funzioni armoniche su Ω. Se g_m converge uniformemente a g allora u_m converge uniformemente a u. La funzione u è armonica in Ω e coincide con g su $\partial\Omega$. (Primo teorema di convergenza di Harnack)

(iv) Sia $\{u_m\}$ una successione monotona decrescente di funzioni armoniche. Supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $|u_m(x_0)| \leq K$ per ogni m. Allora u_m converge uniformemente su ogni aperto $\Omega' \subset \Omega$ a una funzione armonica u. (Secondo teorema di convergenza di Harnack)

1.7 L'identità di Pohozaev

Quello che proponiamo di seguito è un risultato classico, dovuto a S.I. Pohozaev. Per meggiori dettagli rimandiamo a [Po].

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.19}$$

dove g è una funzione continua su $\mathbb{R}$. Poniamo

$$G(u) = \int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vogliamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 1.27 (Identità di Pohozaev)**.** Nelle ipotesi precedenti, vale la seguente identità:

$$\left(1 - \frac{1}{2}n\right) \int_\Omega g(u) \cdot u\,\mathrm{d}x + n \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}\sigma. \tag{1.20}$$

ν denota la normale esterna a $\partial\Omega$.

Prima, però, abbiamo bisogno di un risultato preparatorio.

Lemma 1.28. Nelle ipotesi precedenti, vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \left(\frac{|\,\mathrm{D}\,u|^2}{2} - G(u) \right) - (x\,,\,\mathrm{D}\,u)\,D_i u - \frac{n-2}{2} u D_i u \right) \\ = -nG(u) + \frac{n-2}{2} u g(u). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Svolgiamo le derivate, ricordando che $g(u) + \Delta u = 0$.

$$
\begin{aligned}
&n\left(\frac{|\mathrm{D}\, u|^2}{2} - G(u)\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} D_j u D_i D_j u - g(u) D_i u\right) + \\
&\qquad - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} D_j u D_i u + x_j D_i D_j u D_i u + (x\,,\,\mathrm{D}\, u)\Delta u\right) - \frac{n-2}{2}\left(|\mathrm{D}\, u|^2 + u\Delta u\right) \\
&= \frac{n}{2}|\mathrm{D}\, u|^2 - nG(u) + \sum_{i,j=1}^{n} x_i D_j u D_i D_j u - g(u)(x\,,\,\mathrm{D}\, u) - |\mathrm{D}\, u|^2 + \\
&\qquad\qquad - \sum_{i,j=1}^{n} x_j D_i u D_i D_j u - (x\,,\,\mathrm{D}\, u)\Delta u - \frac{n-2}{2}|\mathrm{D}\, u|^2 - \frac{n-2}{2} u\Delta u \\
&= 0 \cdot |\mathrm{D}\, u|^2 - nG(u) - (x\,,\,\mathrm{D}\, u)(g(u) + \Delta u) - \frac{n-2}{2} u\Delta u \\
&= -nG(u) - (x\,,\,\mathrm{D}\, u)\cdot 0 + \frac{n-2}{2} u g(u) = -nG(u) + \frac{n-2}{2} u g(u).
\end{aligned}
$$

□

Siamo pronti per dimostrare l'identità di Pohozaev.

Dimostrazione del teorema 1.27. Integriamo l'identità (1.21) in Ω, utilizzando le formule di Green.
Dato che $u = 0$ su $\partial\Omega$, $G(u) = 0$ su $\partial\Omega$. Il primo membro della (1.27) diventa

$$
\int_{\partial\Omega} \nu_i \left(x_i \frac{|\mathrm{D}\, u|^2}{2} - (x\,,\,\mathrm{D}\, u) D_i u\right) \mathrm{d}\sigma = -n \int_{\Omega} G(u)\, \mathrm{d}x + \frac{n-2}{2}\int_{\Omega} u g(u)\, \mathrm{d}x.
$$

Osserviamo che su $\partial\Omega$ si ha

$$
\mathrm{D}\, u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu.
$$

Infatti $\mathrm{D}\, u = (\mathrm{D}\, u\,,\,\nu)\,\nu + (\mathrm{D}\, u)^{\perp}$, dove $(\mathrm{D}\, u)^{\perp}$ è un vettore tangente a $\partial\Omega$; essendo $u = 0$ su $\partial\Omega$, anche $(\mathrm{D}\, u)^{\perp} = 0$ su $\partial\Omega$. In particolare

$$
|\mathrm{D}\, u| = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \qquad \text{su } \partial\Omega.
$$

Detto questo, il primo membro della (1.21) verifica

$$
\int_{\partial\Omega} \left((x,\nu)\frac{|\mathrm{D}\, u|^2}{2} - (x,\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\right) \mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x,\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \mathrm{d}\sigma.
$$

Dunque

$$
-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x,\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \mathrm{d}\sigma = -n\int_{\Omega} G(u)\, \mathrm{d}x + \frac{n-2}{2}\int_{\Omega} u g(u)\, \mathrm{d}x,
$$

che è proprio l'identità di Pohozaev. □

1.8 Gli spazi L^p-deboli

Diamo una breve introduzione degli spazi L^p-deboli e mostriamo alcune loro proprietà basilari.

Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $1 \leq p < \infty$. Denotiamo con $\mathcal{L}_n$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.29. Una funzione misurabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartiene allo spazio $L^p(\Omega)$-debole se esiste una costante positiva A tale che

$$\mathcal{L}_n(\{|f| > t\}) \leq \frac{A^p}{t^p} \qquad \text{per ogni } t > 0. \tag{1.22}$$

Denotiamo con $L^p_w(\Omega)$ lo spazio $L^p(\Omega)$-debole e con

$$[f]_{p,w} = \inf\{A : \text{vale la (1.22)}\}.$$

Inoltre definiamo $L^\infty_w(\Omega) = L^\infty(\Omega)$.

Sia $f \in L^p(\Omega)$. Per ogni $t > 0$ si ha

$$\mu_n(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t^p}\|f\|_p^p.$$

Quindi $L^p(\Omega) \subset L^p_w(\Omega)$ e $\|f\|_p = [f]_{p,w}$. Il viceversa è però falso. Ad esempio la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^n} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Sta in $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ ma non in $L^1(\mathbb{R}^n)$. A partire da questa si riescono esempi di funzioni che stanno in L^p_w ma non in L^p.

Come curiosità, osserviamo che lo spazio $L^p_w(\Omega)$ è uno spazio quasi-normato, cioè la quantità $[f]_{p,w}$ non è una norma, ma una quasi-norma. In altre parole non vale la disuguaglianza triangolare, ma

$$[f+g]_{p,w} \leq K([f]_{p,w} + [g]_{p,w}), \qquad K > 1.$$

Inoltre, quando $p > 1$ è possibile definire sugli spazi $L^p_w(\Omega)$ una norma equivalente alla quasi norma $[\cdot]_{p,w}$, cosa che però non si può fare quando $p = 1$.
Per maggiori dettagli su questi argomenti si rimanda a [Be-Lo], [DiB], [Gr].

2 | Riordinamenti

In questo capitolo introduciamo il *riordinamento* di funzioni reali, esibendo alcune proprietà basilari che verranno ampiamente utilizzate nei capitoli seguenti. Vediamo formalmente di cosa si tratta.

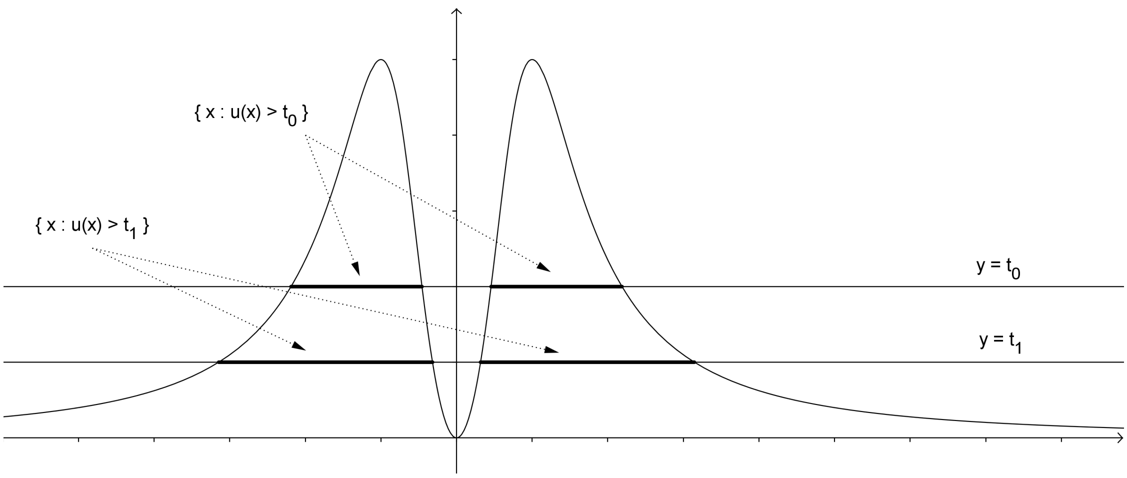
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia u una funzione misurabile definita su Ω a valori reali. Denotiamo con $\mathcal{L}_n$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1. Per ogni $t \geq 0$, definiamo la seguente quantità:

$$\mu_u(t) = \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > t\}\right). \tag{2.1}$$

μ_u è detta *distribuzione* di u.

Definizione 2.2. Diciamo che u si annulla all'infinito se $\mu_u(t) < \infty$ per ogni $t > 0$.



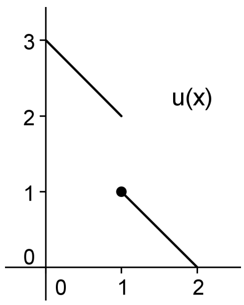
In questo esempio si vede che gli insiemi $\{x \,:\, u(x) > t\}$ hanno sempre misura finita.

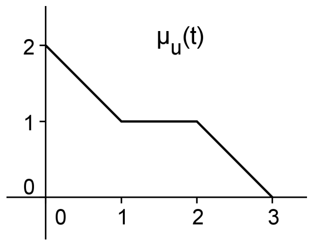
Osservazione 2.3. Nella definizione abbiamo considerato valori di t strettamente positivi. Questo esempio mostra infatti che la funzione 4u4 si annulla all'infinito ma $\mu_u(0) = \infty$.

La funzione μ_u ha molte interessanti proprietà.

(i) μ_u è una funzione decrescente definita sulla semiretta $[0, \infty)$.
In generale μ_u non è strettamente decrescente, come mostra il seguente esempio:

$$\text{se } u(x) = \begin{cases} 3-x & \text{se } x \in (0,1) \\ 2-x & \text{se } x \in [1,2), \end{cases} \qquad \text{allora } \mu_u(t) = \begin{cases} 2-t & \text{se } t \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t \in [1,2] \\ 3-t & \text{se } t \in (2,3]. \end{cases}$$





(ii) μ_u è continua a destra.
Se $t_k \searrow t$ allora

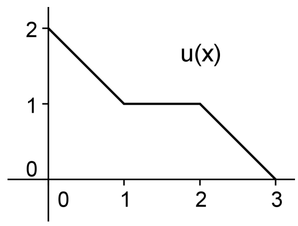
$$\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > t\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > t_k\}.$$

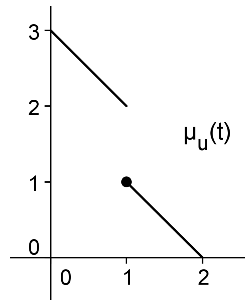
Quindi

$$\mu_u(t_k) \to \mu_u(t).$$

Il seguente esempio mostra che μ_u, in generale, non è continua a sinistra.

$$\text{se } u(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t \in [1,2] \\ 3-x & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases} \qquad \text{allora } \mu_u(t) = \begin{cases} 3-t & \text{se } x \in [0,1) \\ 2-t & \text{se } x \in [1,2], \end{cases}$$





Quindi $\lim_{t \to 1^-} \mu_u(t) = 2$ mentre $\mu_u(1) = 1$.

(iii) Se il supporto di u ha misura finita allora

$$\mu_u(0) = \mathcal{L}_n(\text{supp}\,(u)).$$

(iv) $\text{supp}\,(\mu_u) = [0, \|u\|_\infty]$.

(v) Se definiamo $\mu_u(t-) = \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) \geq t\}\right)$, allora per ogni $t \geq 0$

$$\mu_u(t-) - \mu_u(t) = \mathcal{L}_n(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| = t\}).$$

Definizione 2.4. Il *riordinamento radiale* di una funzione u, indicato con u^*, è la funzione

$$u^*(s) = \inf\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) \leq s\}.$$

Osservazione 2.5. Poiché μ_u è decrescente e continua a destra si ha

$$u^*(s) = \min\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) \leq s\}.$$

Consideriamo adesso un insieme misurabile $A \subset \Omega$ e consideriamo $u = \chi_A$.

$$\begin{aligned}\{t \geq 0 \,:\, \mu_{\chi_A}(t) \leq s\} &= \{t \geq 0 \,:\, \mathcal{L}_n(\{x \in \Omega \,:\, \chi_A(x) > t\}) \leq s\} \\ &= [1, \infty) \cup \{t \in [0,1) \,:\, \mathcal{L}_n(A) \leq s\}.\end{aligned}$$

Quindi

$$u^*(s) = (\chi_A)^* = \inf\{t \geq 0 \,:\, \mu_{\chi_A}(t) \leq s\} = \begin{cases} 1 & \text{se } s < \mathcal{L}_n(A) \\ 0 & \text{se } s \geq \mathcal{L}_n(A), \end{cases}$$

ovvero

$$(\chi_A)^* = \chi_{[0, \mathcal{L}_n(A))}.$$

Detto allora A^* l'intervallo $[0, \mathcal{L}_n(A))$ si ha

$$\mathcal{L}_1(A^*) = \mathcal{L}_n(A) \qquad \text{e} \qquad (\chi_A)^* = \chi_{A^*}.$$

Proposizione 2.6. Per ogni $s \in [0, \mathcal{L}_n(\Omega)] = [0, \mathcal{L}_1(\Omega^*)]$ si ha

$$u^*(s) = \mathcal{L}_1(\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) > s\}).$$

Dimostrazione. Se $\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) > s\}$ è vuoto allora $\mu_u(t) \leq s$ per ogni $t \geq 0$. Quindi

$$u^*(s) = \inf[0, \infty) = 0 = \mathcal{L}_1(\emptyset),$$

e la tesi è provata.
Se invece $\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) > s\}$ è non vuoto, per la decrescenza di μ_u l'insieme $\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) > s\}$ è un intervallo della forma $[0, t_0)$ oppure $[0, t_0]$. In entrambi i casi si ha

$$t < t_0 \Rightarrow \mu_u(t) > s, \qquad t > t_0 \Rightarrow \mu_u(t) \leq s.$$

Perciò

$$\inf\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) \leq s\} \geq t_0 \qquad \text{e} \qquad \inf\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) \leq s\} \leq t_0.$$

Ma allora $u^*(s) = t_0 = \mathcal{L}_1(\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) > s\})$. □

Osservazione 2.7. Dalla proposizione precedente segue che

$$\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) \leq s\} = [u^*(s), \infty). \tag{2.2}$$

Proposizione 2.8. Le funzioni u e u^* sono *equidistribuite*. Più precisamente

$$\mu_{u^*}(t) = \mu_u(t) \qquad \text{per ogni } t \in [0, \|u\|_\infty].$$

Dimostrazione. Dalla relazione (2.2) segue che

$$u^*(s) > t \text{ se e solo se } \mu_u(t) > s.$$

Quindi

$$\mu_{u^*}(t) = \mathcal{L}_1(\{s > 0 \,:\, u^*(s) > t\}) = \mathcal{L}_1([0, \mu_u(t))) = \mu_u(t).$$

□

Conseguenze immediate di questi ultimi risultati sono le seguenti proprietà:

(i) La (2.2) implica che per ogni $s \geq 0$ si ha $\mu_u(u^*(s)) \leq s$.

(ii) Per ogni $0 \le s \le \mathcal{L}_n(\mathrm{supp}\,(u))$ si ha $\mu_u((u^*(s))-) \ge s$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo $u^*(s+\varepsilon)$ (che tende a $u^*(s)$ se $\varepsilon \to 0^+$): se $u^*(s+\varepsilon) < u^*(s)$ per ogni $\varepsilon > 0$ allora, dalla (2.2),

$$\mu_u(u^*(s+\varepsilon)) > s;$$

quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, si ha $\mu_u((u^*(s))-) \ge s$. Se, invece, $u^*(s+\varepsilon) \equiv u^*(s)$ per ogni $\varepsilon \in (\varepsilon_0]$ e $u^*(s+\varepsilon) < u^*(s)$ per ogni $\varepsilon > \varepsilon_0$, allora

$$\mu_u((u^*(s+\varepsilon_0))-) \ge s + \varepsilon_0.$$

Quindi

$$\mu_u((u^*(s))-) \ge s + \varepsilon_0 > s.$$

Osservazione 2.9. Se u e v sono due funzioni non negative che si annullano all'infinito e se $u(x) \le v(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora $u^*(s) \le v^*(s)$ per ogni $s \ge 0$. Infatti

$$\{x \in \Omega \,:\, v(x) > t\} \subseteq \{x \in \Omega \,:\, u(x) > t\};$$

quindi $\mu_v(t) \le \mu_u(t)$. Ma allora

$$\{t \ge 0 \,:\, \mu_u(t) \le s\} \subseteq \{t \ge 0 \,:\, \mu_v(t) \le s\}$$

e dunque $u^*(s) \le v^*(s)$.

Proposizione 2.10. Sia u una funzione misurabile non negativa. Per ogni $t \ge 0$

$$\mathcal{L}_1\left(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) > t\}\right) = \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) > t\}\right). \tag{2.3}$$

In particolare, se u si annulla all'infinito, anche u^* si annulla all'infinito.

Dimostrazione. Per ogni $t \ge 0$ si ha $u^*(s) > t$ per ogni $s \ge 0$ se e solo se $\mu_u(t) > s$. Allora

$$\{s \ge 0 \,:\, u^*(s) > t\} = \{s \ge 0 \,:\, \mu_u(t) > s\} = [0, \mu_u(t)). \tag{2.4}$$

Quindi, dalla definizione di μ_u,

$$\mathcal{L}_1\left(\{s \ge 0 \,:\, u^*(s) > t\}\right) = \mu_u(t) = \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) > t\}\right). \tag{2.5}$$

□

Proposizione 2.11. Sia u una funzione misurabile non negativa. Si ha

$$\mathcal{L}_1\left(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\}\right) \le \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}\right);$$

se inoltre
$$\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\} \neq \emptyset,$$
allora $\mathcal{L}_n \left(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > 0\}\right) < \infty$ e vale
$$\mathcal{L}_1 \left(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\}\right) = \mathcal{L}_n \left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}\right).$$

Dimostrazione. Supponiamo $\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\} \neq \emptyset$. Allora esiste $s_0 \in \Omega^*$ tale che $u^*(s_0) = 0$. Quindi
$$\mathcal{L}_1(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) > 0\}) = \mathcal{L}_n(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > 0\}) = \mu_u(0) = \mu_u(u^*(s_0)) \leq s_0,$$
da cui si può scrivere
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\}) &= \mathcal{L}_1(\Omega^*) - \mathcal{L}_1(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) > 0\}) \\ &= \mathcal{L}_n(\Omega) - \mathcal{L}_n(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > 0\}) \\ &= \mathcal{L}_n(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)|, 0\}).\end{aligned}$$

Se invece $\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\} = \emptyset$ è chiaro che vale la disuguaglianza, ma il seguente esempio mostra che in generale non vale l'uguaglianza.
Sia $\Omega = \mathbb{R}$ e $u(x) = \chi_{(-\infty,0)}(x)$. In tal caso $\mu_u(t) = \infty$ quando $t < 1$ e $\mu_u(t) = 0$ quando $t \geq 1$. Quindi
$$\mu_u(t) > s \qquad \text{per ogni } s \geq 0,\ t < 1.$$

Ma allora $u^*(s) > t$ per ogni $s \geq 0$ e per ogni $t < 1$. Scelto allora $t = \frac{1}{2}$ si ha $u^*(s) \geq \frac{1}{2} > 0$ per ogni $s \geq 0$; quindi $\{s \geq 0 \,:\, u^*(s) = 0\}$ è vuoto mentre $\mathcal{L}_1(\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}) = \infty$. □

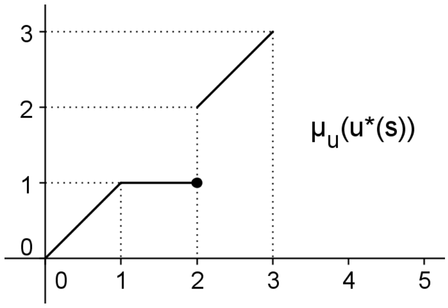
Riprendiamo gli esempi iniziali.
Sia u la funzione definita da
$$u(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \\ 3 - x & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$

In tal caso
$$\mu_u(t) = \begin{cases} 3 - t & \text{se } t \in [0,1) \\ 2 - t & \text{se } t \in [1,2]. \end{cases} \quad \text{e} \quad u^*(s) = \begin{cases} 2 - s & \text{se } s \in [0,1] \\ 1 & \text{se } s \in (1,2] \\ 3 - s & \text{se } s \in (2,3]. \end{cases}$$

Allora

$$\mu_u(u^*(s)) = \begin{cases} 2 - u^*(s) & \text{se } s \in [0,2] \\ 3 - u^*(s) & \text{se } s \in (2,3], \end{cases} = \begin{cases} s & \text{se } s \in [0,1] \\ 1 & \text{se } s \in (1,2] \\ s & \text{se } s \in (2,3] \end{cases}$$

Graficamente



Sia u la funzione definita da

$$u(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x \in (0,1) \\ 2 - x & \text{se } x \in [1,2). \end{cases}$$

In tal caso

$$\mu_u(t) = \begin{cases} 2 - t & \text{se } t \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t \in [1,2] \\ 3 - t & \text{se } t \in (2,3]. \end{cases} \quad \text{e} \quad u^*(s) = \begin{cases} 3 - s & \text{se } s \in [0,1) \\ 2 - s & \text{se } s \in [1,2]. \end{cases}$$

Allora

$$\mu_u(u^*(s)) = \begin{cases} 2 - u^*(s) & \text{se } s \in [0,1) \\ 1 & \text{se } s \in [1,2] \\ 3 - u^*(s) & \text{se } s \in (2,3]. \end{cases} = \begin{cases} s & \text{se } s \in [0,1) \\ 1 & \text{se } s = 1 \\ s & \text{se } s \in (1,2] \end{cases} = s.$$

Mostriamo adesso un'interessante proprietà locale dei riordinamenti.

Proposizione 2.12. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana che si annulla all'infinito. Allora u^* è localmente assolutamente continua in $(0,\infty)$, ovvero è assolutamente continua su tutti gli intervalli $[a,b] \subseteq (0,\infty)$.

La dimostrazione di questa proprietà, che utilizzeremo in seguito, si basa su alcuni risultati noti che richiamiamo per completezza.
Denotiamo con $\mathcal{H}_k$ la misura di Hausdorff $k-$dimensionale. Vale la seguente formula, detta *formula di coarea*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,|\,\mathrm{D}\,u(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{|u|=t\}} f(x)\ \mathcal{H}_{n-1}(\mathrm{d}x) \right) \mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Questa uguaglianza si applica a funzioni u lipschitziane e a funzioni f integrabili.

Vale la seguente disuguaglianza, detta *disuguaglianza isoperimetrica*: per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e di misura finita si ha

$$n\,\omega_n^{1/n}(\mathcal{L}_n(E))^{1-1/n} \le \mathcal{H}_{n-1}(\partial E). \tag{2.7}$$

Infine utilizzeremo la *disuguaglianza di Jensen*. Se Ψ è una funzione convessa, f una funzione integrabile e $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e di misura finita, allora

$$\Psi\left(\frac{1}{\mathcal{L}_n(E)}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{\mathcal{L}_n(E)}\int_E \Psi(f(x))\,\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Dimostrazione della proposizione (2.12). Indichiamo con α la misura del supporto di u. Introduciamo la seguente notazione:

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^*(b) < |u(x)| < u^*(a)\}.$$

Mostreremo che per ogni $0 < a < b < \alpha$, valgono le seguenti disuguaglianze

$$\int_{H_{a,b}} |\operatorname{D} u(x)|\,\mathrm{d}x \ge n\,\omega_n^{1/n} a^{1-1/n}(u^*(a) - u^*(b)), \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}_n(H_{a,b}) \le b - a. \tag{2.10}$$

Cominciamo col dimostrare la (2.9). Applichiamo la formula di coarea, ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_{H_{a,b}} |\operatorname{D} u(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_{a,b}} |\operatorname{D} u(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{|u|=t\}} \chi_{H_{a,b}}\, \mathcal{H}_{n-1}(\mathrm{d}x)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u^*(b)}^{u^*(a)} \mathcal{H}_{n-1}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| = t\}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u^*(b)}^{u^*(a)} \mathcal{H}_{n-1}\left(\partial E_t\right)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

dove $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| \ge t\}$. Quindi possiamo applicare la disuguaglianza isoperimetrica. Infatti l'insieme E ha misura finita, dato che la funzione u si annulla all'infinito. Allora otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{u^*(b)}^{u^*(a)} \mathcal{H}_{n-1}(\partial E_t)\, \mathrm{d}t &\geq \int_{u^*(b)}^{u^*(a)} n\,\omega_n^{1/n} (\mathcal{L}_n(E_t))^{1-1/n}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{u^*(b)}^{u^*(a)} n\,\omega_n^{1/n} (\mathcal{L}_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| \geq t\}))^{1-1/n}\, \mathrm{d}t \\ &\geq n\,\omega_n^{1/n} (\mathcal{L}_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| \geq u^*(a)\}))^{1-1/n} (u^*(a) - u^*(b)) \\ &\geq n\,\omega_n^{1/n} a^{1-1/n} (u^*(a) - u^*(b)),\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| \geq u^*(a)\}) &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| > u^*(a) - \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu_u\left(u^*(a) - \frac{1}{k}\right) = \mu_u((u^*(a))-) \geq a.\end{aligned}$$

Dimostriamo adesso la (2.10).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(H_{a,b}) &= \mathcal{L}_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| > u^*(b)\}) - \mathcal{L}_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| \geq u^*(a)\}) \\ &\leq \mathcal{L}_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| > u^*(b)\}) - \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| > u^*(a) - \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &= \mu_u(u^*(b)) - \mu_u((u^*(a))-) \leq b - a.\end{aligned}$$

Proviamo adesso che u^* è assolutamente continua su ogni intervallo della forma $[a, b]$.

Consideriamo una partizione $0 < a \leq t_0 < t_1 < \ldots t_k \leq b$. Si ha, applicando la (2.9) e la (2.10),

$$\begin{aligned}n\,\omega_n^{1/n} {t_i}^{1-1/n} (u^*(t_i) - u^*(t_{i+1})) &\leq \int_{H_{t_i,t_i+1}} |\,\mathrm{D}\,u(x)|\, \mathrm{d}x \\ &\leq \sup|\,\mathrm{D}\,u|\ \mathcal{L}_n(H_{t_i,t_i+1}) \leq \sup|\,\mathrm{D}\,u|\,(t_{i+1} - t_i).\end{aligned}$$

In particolare, $t_i > a$ per ogni i, quindi

$$n\,\omega_n^{1/n} a^{1-1/n} (u^*(t_i) - u^*(t_{i+1})) \leq n\,\omega_n^{1/n} {t_i}^{1-1/n} (u^*(t_i) - u^*(t_{i+1})).$$

Sommando su i

$$n\,\omega_n^{1/n}\, a^{1-1/n} \sum_i (u^*(t_i) - u^*(t_{i+1})) \leq \sup|\,\mathrm{D}\,u| \sum_i (t_{i+1} - t_i).$$

In conclusione, esiste una costante c tale che

$$\sum_i (u^*(t_i) - u^*(t_{i+1})) \leq c \sum_i (t_{i+1} - t_i).$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{c}$ tale che se

$$\sum_i (t_{i+1} - t_i) < \delta$$

allora

$$\sum_i (u^*(t_i) - u^*(t_{i+1})) < \varepsilon.$$

$\square$

Dimostriamo adesso un fondamentale risultato che stabilisce un legame tra la norma di u in $L^p_w(\Omega)$ e la norma di u^*. Più precisamente, per ogni $p \geq 1$

$$\|u\|_p = \|u^*\|_p.$$

Teorema 2.13. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}$ e u una funzione misurabile non negativa che si annulla all'infinito. Sia $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione boreliana. Allora

$$\int_{\Omega^*} F(u^*(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_\Omega F(u(x))\,\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

L'uguaglianza vale se $F(0) = 0$ oppure se

$$\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) = 0\} \neq \emptyset.$$

L'enunciato è in dimensione 1, ma può essere generalizzato a dimensioni superiori.

Dimostrazione. La dimostrazione è suddivisa in tre passi

Passo 1: Proveremo che

$$\mathcal{L}_1\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) \in B\}\right) = \mathcal{L}_1\left(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) \in B\}\right) \tag{2.12}$$

per ogni boreliano $B \subset (0, \infty)$.

Passo 2: Proveremo che

$$\int_{\{u>0\}} F(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\{u^*>0\}} F(u^*(t))\,\mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Passo 3: Concludiamo utilizzando i punti precedenti.

Passo 1: Per ogni $B \in \mathcal{B}(0,\infty)$, $\sigma-$algebra di Borel, definiamo

$$\mu(B) = \mathcal{L}_1\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) \in B\}\right),$$
$$\nu(B) = \mathcal{L}_1\left(\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) \in B\}\right).$$

Poiché

$$\{x \in \Omega \,:\, u(x) \in (0,\infty)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \Omega \,:\, u(x) > \frac{1}{n}\right\},$$
$$\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) \in (0,\infty)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) > \frac{1}{n}\right\},$$

e poiché u e u^* si annullano all'infinito, possiamo concludere che le misure μ e ν sono $\sigma-$finite. Per la proposizione 2.10, μ e ν coincidono su tutti gli intervalli del tipo (a,∞) con $a > 0$. Poiché la famiglia di questi intervalli genera la $\sigma-$algebra di Borel, possiamo concludere che $\mu(B) = \nu(B)$ per ogni $B \in \mathcal{B}((0,\infty))$.

Passo 2: Sia $\tilde{F}$ la restrizione di F alla semiretta $(0,\infty)$. Esiste una successione di funzioni boreliane semplici $\{f_n\}_n$ che convergono puntualmente a $\tilde{F}$ e tali che $0 \le f_n(t) \le F(t)$ per ogni $t \ge 0$. Gli elementi della successione possono essere scritti nel seguente modo:

$$f_n = \sum_{i=0}^{k_n} c_i^{(n)} \, \chi_{B_i^{(n)}},$$

dove $c_i^{(n)} \neq c_j^{(n)}$ se $i \neq j$ e gli insieme $B_i^{(n)} \in \mathcal{B}(0,\infty)$ sono a due a due disgiunti. Per quanto dimostrato al passo precedente

$$\begin{aligned}\int_{\{u>0\}} f_n((u(x))\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{k_n} c_i^{(n)} \;\mathcal{L}_1\left(\left\{x \in \Omega \,:\, u(x) \in B_i^{(n)}\right\}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k_n} c_i^{(n)} \;\mathcal{L}_1\left(\left\{s \in \Omega^* \,:\, u^*(s) \in B_i^{(n)}\right\}\right)\\ &= \int_{\{u^*>0\}} f_n\left((u^*(t)\right)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La tesi segue applicando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Passo 3: Si ha

$$\int_{\Omega} F(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\{u>0\}} F(u(x))\,\mathrm{d}x + F(0)\;\mathcal{L}_1\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}\right), \tag{2.14}$$

con la convenzione che $F(0)\ \mathcal{L}_1(\{x \in \Omega\ :\ u(x) = 0\}) = 0$ se $F(0) = 0$, indipendentemente dal valore di $\mathcal{L}_1(\{x \in \Omega\ :\ u(x) = 0\})$. Analogamente

$$\int_\Omega F(u^*(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\{u^*>0\}} F(u^*(t))\,\mathrm{d}t + F(0)\ \mathcal{L}_1(\{s \in \Omega^*\ :\ u(s) = 0\})\,. \tag{2.15}$$

Per quanto dimostrato nel passo precedente, tenendo conto delle relazioni (2.14) e (2.15) e della proposizione 2.11, possiamo concludere che la (2.11) è verificata. Inoltre, se $F(0) = 0$ oppure $F(0) > 0$ e

$$\mathcal{L}_1(\{s \in \Omega^*\ :\ u^*(s) = 0\}) = \mathcal{L}_1(\{x \in \Omega\ :\ u(x) = 0\})\,.$$

allora

$$\int_\Omega F(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega^*} F(u^*(t))\,\mathrm{d}t, \tag{2.16}$$

e la tesi segue ancora dalla proposizione 2.11. □

Siamo finalmente riusciti a trovare una relazione tra tra la norma di u e la norma del riordinamento u^*. Adesso vogliamo studiare la relazione tra $\mathrm{D}\,u$ e $\mathrm{D}\,u^*$. Quello che otterremo è il seguente fondamentale risultato:

$$\|\mathrm{D}\,u^*\|_p \leq \|\mathrm{D}\,u\|_p.$$

Anche in questo caso dimostreremo tutto in dimensione 1. Le generalizzazioni sono semplici ma laboriose. Rimandiamo pertanto a [Kaw], [Le].

D'ora in avanti, a meno di traslazioni, supporremo che $\Omega = (0, a)$, con $a > 0$. In tal caso $\Omega^* = \Omega$. Diamo alcune definizioni preliminari.

- Diciamo che $u \in \mathcal{N}_1$ se u è continua su $\overline{\Omega}$ e se u è lineare a tratti.
- Diciamo che $u \in \mathcal{N}_2$ se $u \in \mathcal{N}_1$ e $u' \neq 0$ in ogni sottointervallo in cui u è lineare.
- Diciamo che $u \in \mathcal{N}_3$ se $u \in C^1(\overline{\Omega})$ se $u'(x) = 0$ in un numero finito di punti e se, inoltre, l'insieme $\{x \in \Omega\ :\ u(x) = c\}$ è finito per ogni $c \in (\min u, \max u)$.

Osservazione 2.14. Cominciamo con l'osservare che $\mathcal{N}_2$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$, così come $C^\infty(\Omega)$. In particolare ogni funzione di classe C^∞ può essere approssimata con una funzione lineare a tratti (cioè in $\mathcal{N}_1$). Infine, ogni funzione lineare a tratti può essere approssimata con funzioni in $\mathcal{N}_2$ nel seguente modo.
Si definisce

$$\varepsilon_0 = \min\left\{|u'(y)|\ :\ y \in \overline{\Omega},\ u'(y) \text{ esiste ed è diverso da } 0\right\}.$$

Per $\varepsilon < \varepsilon_0$ consideriamo la funzione ausiliaria

$$v_\varepsilon(y) = \varepsilon \left(1 - \frac{|y|}{a}\right),$$

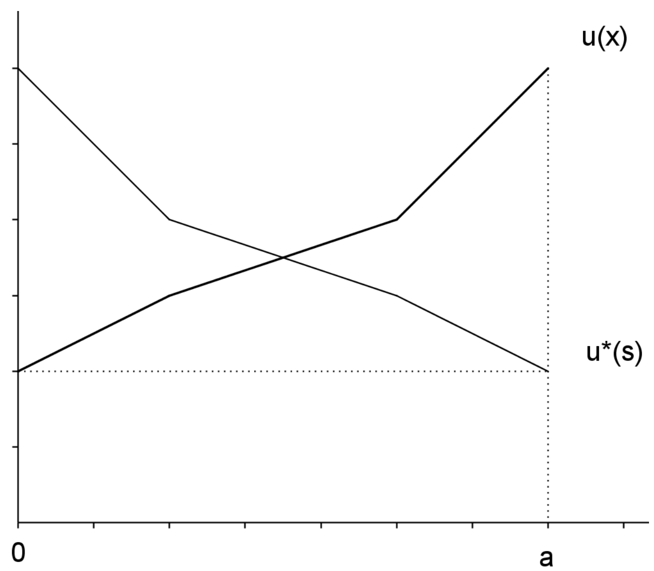
definita su $\overline{\Omega}$. Allora $u_\varepsilon(y) = u(y) + v_\varepsilon(y) \in \mathcal{N}_2$ e u_ε converge a u in $W^{1,p}(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$.

Teorema 2.15. Sia $u \in \mathcal{N}_2$. Supponiamo che $u(0) = u(a)$. Denotiamo con $I(u)$ l'intervallo $[\min u, \max u]$. Sia $F : I(u) \to [0, \infty)$ una funzione continua e $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e convessa. Allora

$$\int_{\Omega^*} F(u^*(s))G(|u^{*\prime}(s)|)\,\mathrm{d}s \leq \int_\Omega F(u(x))G(|u'(x)|)\,\mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

Se inoltre $F > 0$ e G è strettamente crescente e strettamente convessa allora nella (2.17) vale l'uguaglianza se e solo se $u = u^*$ (a meno di riflessioni).
Se, invece, $u(0) = u(a) = 0$, nella (2.17) vale l'uguaglianza se e solo se $u = u^*$.

Vediamo brevemente un esempio.

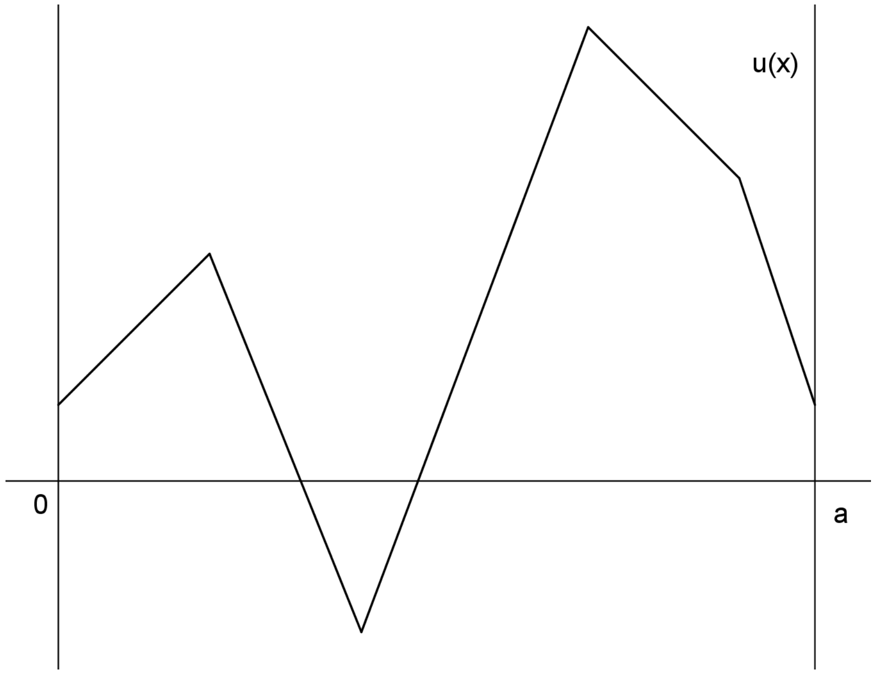


In questo caso, se $x, s \in (0, a) = \Omega = \Omega^*$, $u^*(s) = u(a - s)$. Ovvero le funzioni u e u^* coincidono a meno di riflessioni.

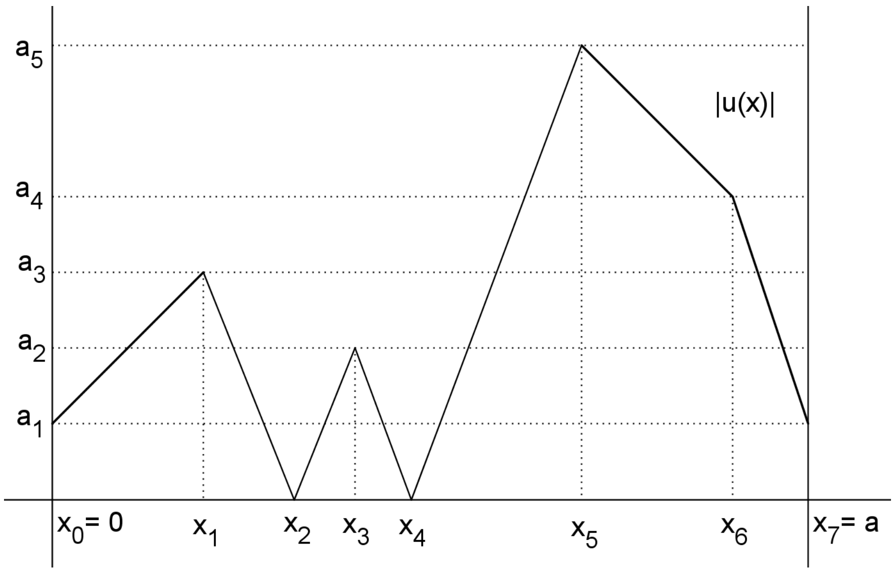
Dimostrazione del teorema 2.15. Se $u \in \mathcal{N}_2$, gli M estremi dei sottointervalli in cui u è lineare formano una partizione di $\overline{\Omega}$. Possiamo scrivere

$$0 \leq x_0 < x_2 \cdots < x_M \leq a.$$

Siano $a_i = u(x_i)$. A meno di riordinare gli a_i possiamo supporre $a_i \leq a_{i+1}$. per $i = 1, \ldots, M-1$.
Se, ad esempio, u è di questo tipo



allora i punti x_i e a_i sono mostrati in figura:



Definiamo

$$D_i = \{x \in \Omega \,:\, a_i < |u(x)| < a_{i+1}\} \quad \text{e} \quad D_i^* = \{s \in \Omega \,:\, a_i < u^*(s) < a_{i+1}\}.$$

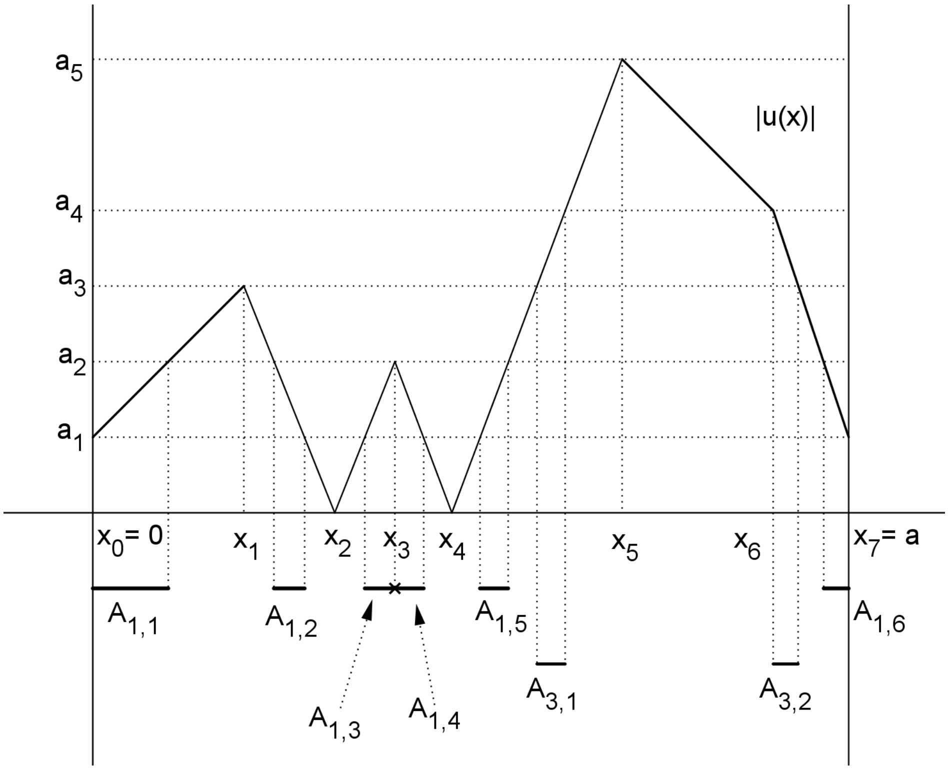


Figura 2.1: Gli insieme D_1 e D_3.

Fissiamo i e decomponiamo D_i in un numero finito di intervalli $A_{i,j}$, $j = 1, \dots, N(i)$, in ognuno dei quali u è monotona. Osserviamo che dalla condizione $u(0) = u(a)$ segue che $N(i)$ è pari per ogni i.

Facendo riferimento al solito esempio, in figura 2.1 sono mostrati gli insiemi $A_{i,j}$ per $i = 1, 3$.

Per ogni $\lambda \in (a_i, a_{i+1})$, per ogni $j \in \{1, \dots, N(i)\}$, esiste un unico $x_{i,j}(\lambda) \in A_{i,j}$ tale che

$$\lambda = u(x_{i,j}(\lambda)) = \left(u\big|_{A_{i,j}}\right)(x_{i,j}(\lambda)).$$

Inoltre esiste un unico valore $s_i(\lambda) \in \Omega^*$ tale che

$$\lambda = u^*(s_i(\lambda)).$$

In figura 2.2 si mostra come costruire i punti $x_{i,j}(\lambda)$.

A questo punto fissiamo l'indice i (e quindi l'intervallo (a_i, a_{i+1})).

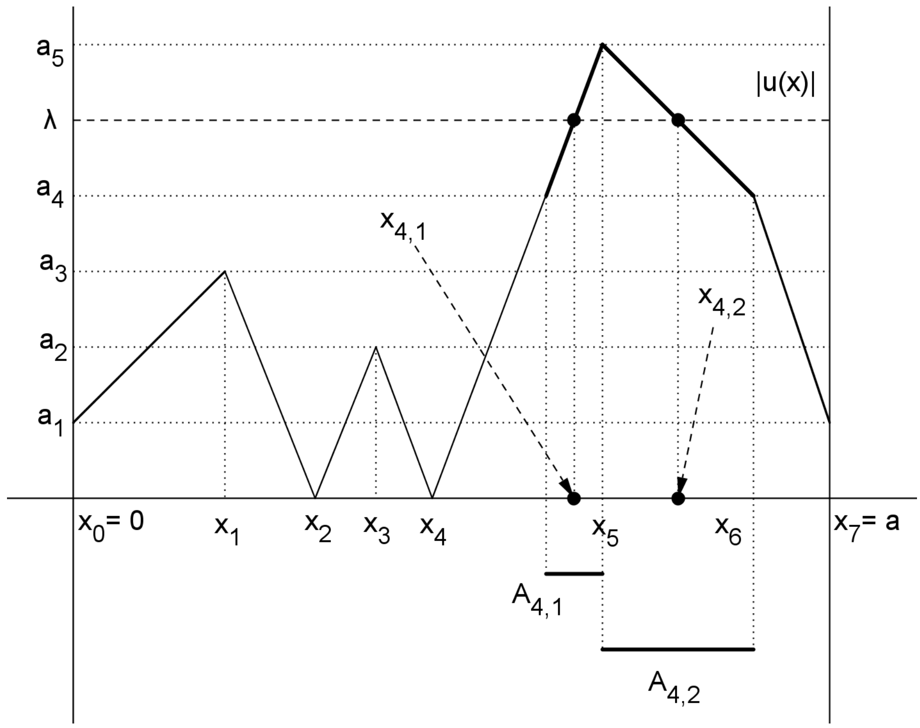


Figura 2.2: I punti $x_{4,1}$ e $x_{4,2}$.

Il valore $s_i(\lambda)$ può essere caratterizzato come segue:

$$s_i(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^j \, x_{i,j}(\lambda) & \text{se } \operatorname{sign} u'(x_{i,1}(\lambda)) = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \, x_{i,j}(\lambda) + a & \text{se } \operatorname{sign} u'(x_{i,1}(\lambda)) = -1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Osserviamo che, in ogni caso,

$$s_i'(\lambda) = \sum_{j=1}^{N(i)} \left(-|x_{i,j}(\lambda)|' \right).$$

Quindi

$$(u^*)'(s) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{1}{s'(\lambda)_{\big|\lambda=u^*(s)}} = -\frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(i)} \left(|x_{i,j}'(\lambda)| \right)_{\big|\lambda=u^*(s)}} \quad \text{in } (a_i, a_{i+1}),$$

e

$$u'(x) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{x'(\lambda)_{\big|\lambda=u^*(s)}} = \frac{1}{x_{i,j}'(\lambda)_{\big|\lambda=u^*(s)}} \quad \text{in } A_{i,j}.$$

Inoltre

$$\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right| = \sum_{j=1}^{N(i)} |x'_{i,j}(\lambda)|.$$

Dimostriamo adesso la seguente stima:

$$\int_{D_i^*} F(u^*(s))\, G\left(|u^{*\prime}(s)|\right)\, \mathrm{d}s \leq \int_{D_i} F(u(x))\, G\left(|u'(x)|\right)\, \mathrm{d}x, \tag{2.19}$$

per $i = 1, \ldots, M$. Cominciamo cambiando variabile, ponendo $\lambda = u^*(s)$. Il primo membro della (2.19) diventa

$$\int_{D_i^*} F(u^*(s))\, G\left(|u^{*\prime}(s)|\right)\, \mathrm{d}s = \int_{a_i}^{a_{i+1}} F(\lambda)\, G\left(\left(\sum_{j=1}^{N(i)} |x'_{i,j}(\lambda)|\right)^{-1}\right) \sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.20}$$

Posto

$$a_{i,j} = \frac{|x'_{i,j}(\lambda)|}{\displaystyle\sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|},$$

si ha

$$\sum_{j=1}^{N(i)} a_{i,j} = 1, \qquad \text{e} \qquad 0 \leq a_{i,j} \leq 1.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(i)} a_{i,j}\, G\left(\frac{1}{|x'_{i,j}(\lambda)|}\right) &\geq G\left(\sum_{j=1}^{N(i)} \frac{a_{i,j}}{|x'_{i,j}(\lambda)|}\right) \\ &= G\left(\sum_{j=1}^{N(i)} \frac{1}{\sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|}\right) \\ &= G\left(N(i) \left(\sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|\right)^{-1}\right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Applicando allora la (2.21), il secondo membro della (2.20) diventa

$$
\begin{aligned}
\int_{a_i}^{a_{i+1}} F(\lambda)\, G\left(\left(\sum_{j=1}^{N(i)} |x'_{i,j}(\lambda)|\right)^{-1}\right) \sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda \\
\leq \sum_{j=1}^{N(i)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} F(\lambda)\, \frac{|x'_{i,j}(\lambda)|}{\sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|}\, G\left(\frac{1}{x'_{i,j}(\lambda)}\right) \sum_{h=1}^{N(i)} |x'_{i,h}(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda \\
\leq \sum_{j=1}^{N(i)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} F(\lambda)\, |x'_{i,j}(\lambda)|\, G\left(\frac{1}{x'_{i,j}(\lambda)}\right) \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}
$$

Possiamo adesso concludere effettuando un ultimo cambio di variabile. Ponendo $\lambda = u(x)\,\chi_{A_{i,j}}(x)$ otteniamo

$$
\sum_{j=1}^{N(i)} \int_{A_{i,j}} F(u(x))\, |x'_{i,j}(u(x))|\, G(|u'(x)|)\, \frac{1}{|x'_{i,j}(u(x))|}\,\mathrm{d}x = \int_{D_i} F(u(x))\, G(|u'(x)|)\,\mathrm{d}x.
$$

Infine, sommando per $i = 1, \ldots, M$ ambo i membri della (2.19) si ha la tesi. $\square$

Poiché $\mathcal{N}_2$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$, la prima parte del teorema (2.15) può essere estesa a funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre se $\Omega = \Omega^*$ e $u \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa, allora

$$
\int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega^*} f^*(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.22}
$$

Lemma 2.16. Siano $f, g \in L^1(\Omega)$ quasi ovunque non negative. Sono fatti equivalenti:

(a) Se $f \leq g$ in Ω allora $f^* \leq g^*$ in Ω^*;

(b) $\displaystyle\int_{\Omega^*} \big[f^*(s) - g^*(s)\big]^+\,\mathrm{d}s \leq \int_{\Omega} \big[f(x) - g(x)\big]^+\,\mathrm{d}s$;

(c) $\displaystyle\int_{\Omega^*} |f^*(s) - g^*(s)|\,\mathrm{d}s \leq \int_{\Omega} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Dimostrazione. $\big[(a) \Rightarrow (b)\big]$ Poiché

$$
\max\{f, g\} = g + \big[f - g\big]^+ \geq g,
$$

per la condizione (a) si ha

$$
(\max\{f, g\})^* \geq g^* \quad \text{quasi ovunque in } \Omega^*.
$$

Inoltre, essendo $f \leq \max\{f, g\}$

$$f^* - g^* \leq (\max\{f, g\})^* - g^*.$$

Dunque, dalla (2.22),

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} \left[f^*(s) - g^*(s)\right]^+ \mathrm{d}s &\leq \int_{\Omega^*} \left[(\max\{f, g\})^*(s) - g^*(s)\right]^+ \mathrm{d}s \\
&= \int_{\Omega} \left[(\max\{f, g\})(x) - g(x)\right]^+ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \left[f(x) - g(x)\right]^+ \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

$\left[(b) \Rightarrow (c)\right]$ Si ha $|f| = f^+ + \left[-f\right]^+$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} |f^*(s) - g^*(s)| \,\mathrm{d}s &= \int_{\Omega^*} \left[f^*(s) - g^*(s)\right]^+ \mathrm{d}s + \int_{\Omega^*} \left[g^*(s) - f^*(s)\right]^+ \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\Omega} \left[f(x) - g(x)\right]^+ \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \left[g(x) - f(x)\right]^+ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$\left[(c) \Rightarrow (a)\right]$ Siano f, g tali che $0 \leq f \leq g$ quasi ovunque in Ω. Essendo $2f^+ = |f| - f$, applicando la (2.22) si ha

$$\begin{aligned}
2\int_{\Omega^*} \left[f^*(s) - g^*(s)\right]^+ \mathrm{d}s &= \int_{\Omega^*} |f^*(s) - g^*(s)| \,\mathrm{d}s - \int_{\Omega^*} (f^*(s) - g^*(s)), \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\Omega} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega} (f(x) - g(x)) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} (f(x) - g(x) - f(x) + g(x)) \,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Allora $\max\{f^* - g^*, 0\} = 0$, ovvero $f^* - g^* \leq 0$. $\square$

Conseguenza di questo ultimo lemma è il seguente.

Proposizione 2.17. Sia $J : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una funzione convessa, non negativa e semicontinua inferiormente tale che $J(0) = 0$. Allora, per ogni $f, g \in Ł^1(\Omega)$, $f, g \geq 0$, si ha

$$\int_{\Omega^*} J\left(f^*(s) - g^*(s)\right) \,\mathrm{d}s \leq \int_{\Omega} J\left(f(x) - g(x)\right) \,\mathrm{d}x. \tag{2.23}$$

Dimostrazione. Fissato $t \geq 0$ poniamo

$$y(x) = \min\{f(x), g(x) + t\}.$$

Chiaramente $0 \leq y(x) \leq g(x)+t$ per quasi ogni $x \in \Omega$; quindi $y^*(s) \leq (g+t)^*(s) = g^*(s) + t$ per quasi ogni $s \in \Omega^*$. Dunque

$$f^*(s) - g^*(s) - t \leq f^*(s) - y^*(s)$$

per quasi ogni $s \in \Omega^*$. Pertanto, essendo $f^* - y^* \geq 0$,

$$\left[f^*(s) - g^*(s) - t\right]^+ \leq \left[f^*(s) - y^*(s)\right]^+ = f^*(s) - y^*(s).$$

Dunque, per ogni $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \left[f^*(s) - g^*(s) - t\right]^+ \mathrm{d}s &\leq \int_{\Omega^*} (f^*(s) - y^*(s))\, \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Omega} (f(x) - y(x))\, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \left[f(x) - g(x) - t\right]^+. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Se $t' = -t \leq 0$, scambiando f con g si ha anche

$$\int_{\Omega^*} \left[g^*(s) - f^*(s) + t'\right]^+ \mathrm{d}s \leq \int_{w} \left[g(x) - f(x) + t'\right]^+ \mathrm{d}x, \tag{2.25}$$

per ogni $t' \leq 0$. Dalle (2.24) e (2.25) si ricava

$$\int_{\Omega^*} \left[t\left(f^*(s) - g^*(s) - t\right)\right]^+ \mathrm{d}s \leq \int_{\Omega} \left[t\left(f(x) - g(x) - t\right)\right]^+ \mathrm{d}x \tag{2.26}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti, se $t = 0$ la (2.26) è ovvia; se $t > 0$ si semplifica il fattore t e si ricava la (2.24); se $t < 0$ si semplifica $-t$, si cambiano i segni di ambo i membri e si ricava la (2.25).
Sia ora $J : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ di classe C^2 con J'' limitata. Vale la seguente relazione:

$$J(r) = \int_{\mathbb{R}} \frac{J''(t)}{|t|} \left[t(r-t)\right]^+ \mathrm{d}t. \tag{2.27}$$

Infatti, se $r \geq 0$ l'integrando è non nullo solo sull'intervallo $[0, r]$, mentre se $r < 0$ solo sull'intervallo $[r, 0]$. In entrambi casi, una semplice integrazione per parti porta alla conclusione.
Dalla (2.26), moltiplicando per $J''(t)/|t|$ e integrando su $\mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} J\left(f^*(s) - g^*(s)\right)\, \mathrm{d}s &= \int_{\Omega^*} \int_{\mathbb{R}} \frac{J''(t)}{|t|} \left[t\left(f^*(s) - g^*(s) - t\right)\right]^+ \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{J''(t)}{|t|} \left[t\left(f(x) - g(x) - t\right)\right]^+ \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega} J\left(f(x) - g(x)\right)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Sia adesso J come nelle ipotesi. Definiamo

$$J_\lambda(r) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |r-t|^2 + J(t) \right\}.$$

Per il teorema di Beppo Levi,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} J\left(f^*(s) - g^*(s)\right) \mathrm{d}s &= \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\Omega^*} J_\lambda\left(f^*(s) - g^*(s)\right) \mathrm{d}s \\ &\leq \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\Omega} J_\lambda\left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega} J\left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Corollario 2.18. Se $f, g \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, allora

$$\int_{\Omega^*} \left|f^*(s) - g^*(s)\right|^p \mathrm{d}s \leq \int_{\Omega} \left|f(x) - g(x)\right|^p \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 2.17 a $|f|, |g|$ e $J(t) = |t|^p$. □

Teorema 2.19. Nelle ipotesi del teorema (2.15), per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\|\mathrm{D}\, u^*\|_p \leq \|\mathrm{D}\, u\|_p.$$

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ una successione in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{N}_2$ che converge a u in $W^{1,p}(\Omega)$. Poiché $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_2$, si ha

$$\|u_n^*\|_p = \|u_n\|_p \qquad \text{e} \qquad \|\mathrm{D}\, u_n^*\|_p = \|\mathrm{D}\, u_n\|_p.$$

Quindi la successione $\{u_m^*\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega^*)$. Esiste allora una sottosuccessione (che continueremo a indicare con $\{u_n^*\}$) tale che

$$u_n^* \rightharpoonup v \in W^{1,p}(\Omega^*) \qquad \text{e} \qquad u_n^* \to v \in L^p(\Omega^*).$$

Per il corollario precedente, allora,

$$\|u^* - u_n^*\|_p \leq \|u - u_n\|_p \to 0.$$

Quindi $v = u^*$ in $L^p(\Omega^*)$. Ma $v \in W^{1,p}(\Omega^*)$, quindi anche $u^* \in W^{1,p}(\Omega^*)$. Ma allora

$$u_n^* \rightharpoonup u^*$$

in $W^{1,p}(\Omega^*)$.
Per la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole,

$$\|u^*\|_{1,p} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n^*\|_{1,p} \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p} = \|u\|_{1,p}\,;$$

ma essendo

$$\|u^*\|_p = \|u\|_p$$

si ricava

$$\|\mathrm{D}\, u^*\|_p \leq \|\mathrm{D}\, u\|_p.$$

□

Enunciamo, infine, due importanti risultati sui riordinamenti. Le dimostrazioni sono omesse, in quanto lunghe e laboriose. Tuttavia, trattandosi di risultati classici, rimandiamo a [Li-Lo] e [Le] per tutti i dettagli.

Teorema 2.20 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood)**.** Siano u e v funzioni misurabili, definite su Ω, che si annullano all'infinito. Allora

$$\int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega^*} u^*(t)v^*(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.28}$$

Teorema 2.21 (Riordinamento di Riesz)**.** Siano u, v, w funzioni non negative su $\mathbb{R}^n$. Utilizziamo la seguente notazione:

$$I(u,v,w) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x-y)w(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Allora

$$I(u,v,w) \leq I(u^*,v^*,w^*),$$

con la convenzione che se $I(u,v,w)=\infty$ allora anche $I(u^*,v^*,w^*)=\infty$.

2.1 Riordinamento di Schwarz

A partire dal riordinamento radiale possiamo definire un secondo riordinamento, detto *riordinamento di Schwarz*. Più precisamente, se u è una funzione misurabile definita su Ω, definiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u^\sharp(x) = u^*\left(\omega_n |x|^n\right) = \inf\left\{t \geq 0 \,:\, \mu_u(t) \leq \omega_n |x|^n\right\}. \tag{2.29}$$

$u^\sharp$ è anche chiamato *riordinamento sferico* di u.
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme di misura finita. Consideriamo $u = \chi_A$. Denotiamo con $A^\sharp$ la palla

$$A^\sharp = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < R_A\} \qquad \text{con } R_A = \left(\frac{\mathcal{L}_n(A)}{\omega_n}\right)^{1/n}.$$

Si ha

$$(\chi_A)^\sharp(x) = \chi_{A^*}(\omega_n |x|^n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_n |x|^n < \mathcal{L}_n(A) \quad \Leftrightarrow \quad |x| < R_A.$$

Quindi $(\chi_A)^\sharp = \chi_{A^\sharp}$. Se $\mathcal{L}_n(A) = 0$ si ha, ovviamente, $A^\sharp = \emptyset$. Se $\mathcal{L}_n(A) = \infty$ si ha $A^\sharp = \mathbb{R}^n$. In particolare $A^\sharp$ è sempre un aperto, anche se A non lo è.

Anche il riordinamento di Schwarz gode di interessanti proprietà.

(i) Per ogni $t \geq 0$, $\quad \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^\sharp(x) > t\right\} = \{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > t\}^\sharp$. Infatti

$$\begin{aligned}\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > t\} &= B\left(0, \left(\frac{\mu_u(t)}{\omega_n}\right)^{1/n}\right) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \mu_u(t) > \omega_n |x|^n\} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^*(\omega_n |x|^n) > t\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u^\sharp(x)| > t\}.\end{aligned}$$

(ii) Per ogni $t \geq 0$, $\quad \mathcal{L}_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^\sharp(x) > t\right\}\right) = \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > t\}\right)$.
In particolare, se u si annulla all'infinito allora lo stesso vale per $u^\sharp$. Inoltre

$$\mathcal{L}_n\left(\left\{x \in \Omega^\sharp \,:\, u^\sharp(x) = 0\right\}\right) \leq \mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}\right).$$

Infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left(\left\{x \in \Omega^\sharp \,:\, u^\sharp(x) = 0\right\}\right) &= \mathcal{L}_1\left(\{s \in [0, \mathcal{L}_n(\Omega)) \,:\, u^*(s) = 0\}\right) \\ &\leq \mathcal{L}_n(\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Se $\{x \in \Omega^\sharp \,:\, u^\sharp(x) = 0\}$ è vuoto, allora $\mathcal{L}_n\left(\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > 0\}\right) < \infty$. Inoltre nella disuguaglianza precedente vale l'uguaglianza. Infatti se $\{x \in \Omega^\sharp \,:\, u^\sharp(x) = 0\}$ è vuoto, allora $u^\sharp(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega^\sharp$. Quindi $u^*(s) > 0$ per ogni $s \in \Omega^*$. La tesi segue allora dalla proposizione 2.11.

(iii) $u^\sharp$ è semicontinua inferiormente. Infatti, dato $x_0 \to x_0$ possiamo distinguere due casi:

- se $|x| \geq |x_0|$ allora $u^*(\omega_n |x|^n) \to u^*(\omega_n |x_0|^n)$;
- se $|x| < |x_0|$ allora $u^*(\omega_n |x|^n) \to u^*((\omega_n |x_0|^n)-) \geq u^*(\omega_n |x_0|^n)$, perché u^* è una funzione decrescente e continua a destra. Ma allora

$$u^\sharp(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} u^\sharp(x).$$

(iv) Se v è un'altra funzione misurabile e $u(x) \leq v(x)$ in Ω, allora $u^\sharp(x) \leq v^\sharp(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

Anche per i riordinamenti di Schwarz valgono risultati analoghi al teorema 2.13 e al teorema 2.15.

Teorema 2.22. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e u una funzione misurabile non negativa che si annulla all'infinito. Sia $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione boreliana. Allora

$$\int_{\Omega^\sharp} F(u^\sharp(y))\, \mathrm{d}y \leq \int_\Omega F(u(x))\, \mathrm{d}x. \tag{2.30}$$

L'uguaglianza vale se $F(0) = 0$ oppure se

$$\{x \in \Omega^\sharp \,:\, u^\sharp(x) = 0\} = \emptyset.$$

Teorema 2.23. Sia $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è non negativa allora $u^\sharp \in W^{1,p}(\Omega^\sharp)$ e

$$\left\|\mathrm{D}\, u^\sharp\right\|_p \leq \|\mathrm{D}\, u\|_p.$$

Come fatto nella dimostrazione del teorema 2.15, si approssima la u con funzioni lineari a tratti e successivamente, sfruttando argomenti di densità, si ottiene la tesi per funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.

Inoltre, vale ancora la disuguaglianza di Hardy-Littlewood.

Teorema 2.24 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood)**.** Siano u e v funzioni misurabili, definite su $\mathbb{R}^n$, che si annullano all'infinito. Allora

$$\int_\Omega u(x)v(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega^\sharp} u^\sharp(x)v^\sharp(x)\, \mathrm{d}x. \tag{2.31}$$

3 Soluzioni positive di equazioni ellittiche non lineari

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$. Sia $p = (n+2)/(n-2)$. Seguendo [Br-Ni], vogliamo studiare le soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

dove f è una perturbazione di ordine superiore a u^p, ovvero

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u^p} = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione (3.1) corrispondono ai punti critici del funzionale

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{D}\, u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

dove $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t$.
Se $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$, è un punto critico di Φ, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$0 = (\Phi'(u)\,,\varphi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (\mathrm{D}\,u\,,\,\mathrm{D}\,\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u^p\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x,$$

da cui si ricava che

$$\int_\Omega (-\Delta u - u^p - f(x,u))\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dunque u soddisfa la (3.1).
L'esponente $p+1 = 2n/(n-2)$ è l'esponente limite per cui l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{p+1}(\Omega)$ è compatta. Perciò bisogna far distinzione tra i casi $p < (n+2)/(n-2)$

e $p = (n+2)/(n-2)$: nel primo caso l'immersione è compatta, nel secondo no.

Affronteremo la ricerca di soluzioni positive per l'equazione (3.1) studiando prima il problema modello (in cui $f(x,u) = \lambda u$, con λ costante reale) e poi il problema generale.

3.1 Il problema modello

Vogliamo studiare le soluzioni dell'equazione del problema modello

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

dove $p = (n+2)/(n-2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotiamo con λ_1 il primo autovalore di Dirichlet di $-\Delta$ e con $\varphi_1 > 0$ l'autofunzione di $-\Delta$ relativa all'autovalore λ_1.
In generale, se u è un'autofunzione relativa all'autovalore minimo, u minimizza il seguente funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathrm{D}\, u|^2 \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Poiché $u \in H_0^1(\Omega)$, anche $|u| \in H_0^1(\Omega)$ e $|Du| = |D|u||$. Ovvero anche $|u|$ è un'autofunzione relativa allo stesso autovalore di u. Poiché $|u| \not\equiv 0$, dalla disuguaglianza di Harnack (teorema 1.25) segue che $|u| > 0$ in Ω, quindi $u > 0$ in Ω oppure $u < 0$ in Ω.

Osservazione 3.1. Se esistessero due autofunzioni ortogonali u e v relative all'autovalore minimo λ_1, a meno di cambiare un segno si avrebbe $u > 0$ e $v < 0$. Varrebbero allora le seguenti proprietà:

$$uv < 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = 0.$$

Ma questo non è possibile, quindi

$$\dim\ker(\Delta - \lambda_1) = 0.$$

Sia u una soluzione di (3.2). Si ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Omega u\,\varphi_1 \,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega u\,\Delta\varphi_1 \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta u)\,\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u^p\,\varphi_1 \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega u\,\varphi_1 \,\mathrm{d}x > \lambda \int_\Omega u\,\varphi_1 \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ovvero $\lambda < \lambda_1$; quindi per $\lambda \geq \lambda_1$ non esistono soluzione per la (3.2).

Se $\lambda \leq 0$ e se Ω è un aperto stellato (con frontiera liscia) non esistono soluzioni per l'equazione (3.2). Infatti, se u è soluzione, applichiamo l'identità di Pohozaev (teorema 1.27), dove $g(u) = u^p + \lambda u$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}\sigma &= \left(1-\frac{1}{2}n\right)\int_\Omega (u^p+\lambda u)\cdot u\,\mathrm{d}x + n\int_\Omega\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}\lambda u^2\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n\right)\int_\Omega \lambda u^2\,\mathrm{d}x + \left(1-\frac{1}{2}n+\frac{n}{p+1}\right)\int_\Omega u^{p+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \lambda\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Se Ω è stellato intorno all'origine si ha $x\cdot\nu > 0$ q.o. su $\partial\Omega$. Quando $\lambda < 0$, dalla (3.3) segue che $\partial u/\partial\nu = 0$ su $\partial\Omega$; allora

$$\lambda\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad u\equiv 0.$$

Quando $\lambda = 0$, invece,

$$\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\sigma = 0,$$

ovvero $u \equiv 0$.

Vedremo in seguito che la situazione cambia quando Ω non è stellato, per esempio una corona circolare. In tal caso esistono soluzioni radiali per ogni $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$.

3.1.1 Il caso $n \geq 4$

Dimostreremo che, quando $n \geq 4$, per ogni $\lambda \in (0, \lambda_1)$ esiste una soluzione dell'equazione (3.2). Cominciamo però con alcune osservazioni.

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{p+1}=1}}\left(\|\mathrm{D}\,u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2\right). \tag{3.4}$$

In particolare, la quantità

$$S = S_0 = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{p+1}=1}}\|\mathrm{D}\,u\|_2^2, \tag{3.5}$$

corrisponde alla miglior costante per l'immersione di Sobolev di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{p+1}(\Omega)$, $p+1 = 2n/(n-2)$. La costante S gode di interessanti proprietà, che mostreremo brevemente.

(i) S non dipende da Ω (cioè è invariante per omotopie) ma solo dalla dimensione n.
Detta $u_k(x) = u(kx)$, in modo analogo a quanto fatto nella sezione 1.1, si verifica che $\|\mathrm{D}\, u_k\|_2 \,/\, \|u_k\|_{p+1}$ non dipende da k.

(ii) Nell'espressione (3.5), l'inf non viene mai raggiunto se Ω è limitato.
Se così non fosse, sia u una qualche funzione che raggiunge l'inf. A meno di rimpiazzare u con $|u|$, possiamo supporre $u \geq 0$. Sia B una palla contenente Ω. Definiamo

$$\overline{u} = \begin{cases} u & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } B \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Allora S è anche raggiunta dalla funzione $\overline{u}$ su B. Inoltre $\overline{u}$, essendo punto di minimo vincolato, soddisfa la relazione $-\Delta\overline{u} = \mu\overline{u}^p$, per qualche $\mu > 0$. Ma questo contraddice l'identità di Pohozaev. Infatti la (3.3), quando $\lambda = 0$, diventa

$$0 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\cdot\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 \mathrm{d}\sigma.$$

Essendo Ω stellato, si ha $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$. Ma allora

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \Delta \mathrm{u}\,\mathrm{dx} = -\mu\int_\Omega \mathrm{u^p}\,\mathrm{dx} < 0.$$

E questo è assurdo.

(iii) Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'inf è raggiunto dalla funzione

$$\frac{U}{\|U\|_{p+1}} \qquad \text{dove } U(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-(n-2)/2}. \tag{3.7}$$

Di questo risultato, dovuto a [Ta1], daremo una dimostrazione generale per $1 < p < n$ nel capitolo 4.

Enunciamo alcuni lemmi preparatori. Per la loro dimostrazione si rimanda all'appendice A.

Lemma 3.2. $S_\lambda < S$ per ogni $\lambda > 0$.

Lemma 3.3. Se $S_\lambda < S$, nella (3.4) l'inf viene raggiunto.

Teorema 3.4. Sia $n \geq 4$. Per ogni $\lambda \in (0, \lambda_1)$, esiste una soluzione del problema modello (3.2).

Dimostrazione. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ data dal lemma 3.3, ovvero tale che

$$\|u\|_{p+1} = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathrm{D}\, u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda.$$

A meno di rimpiazzare u con $|u|$, possiamo supporre $u \geq 0$: infatti, per la *chain rule* (sezione 1.4), anche $|u| \in H_0^1(\Omega)$. Poiché u è minimizzante per la (3.4), otteniamo un moltiplicatore di Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$-\Delta u - \lambda u = \mu u^p \quad \text{su } \Omega.$$

In effetti $\mu = S_\lambda$ e $S_\lambda > 0$. Poiché $\lambda < \lambda_1$, λ non è un autovalore di $-\Delta$; allora non esistono autovettori che annullano $-\Delta u = \lambda u$ e $\|\mathrm{D}\, u\|_2^2 = \lambda \|u\|_2^2$. Se sostituiamo u con ku (dove $k = S_\lambda^{-1/(p-1)}$), una semplice verifica mostra che u soddisfa la relazione (3.2). Infine osserviamo che $u > 0$ per il principio del massimo forte. $\square$

3.1.2 Il caso $n = 3$

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$. Vogliamo trovare una funzione u che verifica

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

dove λ è una costante reale. Questo problema è più delicato e complesso del caso precedente. In effetti riusciamo a trovare una sua soluzione solo quando Ω è una palla. Per questo motivo non è restrittivo supporre che

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| < 1\}.$$

In tal caso il primo autovalore del Laplaciano è $\lambda_1 = \pi^2$ e la sua corrispondente autofunzione positiva è $|x|^{-1} \sin(\pi|x|)$, come si verifica facilmente.
Come abbiamo visto nella sezione precedente, non ci sono soluzioni se $\lambda \geq \lambda_1$ e $\lambda \leq 0$. Poniamo

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_6 = 1}} \left(\|\mathrm{D}\, u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2\right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e definiamo $S = S_0$.

Lemma 3.5. $S_\lambda < S$ per ogni $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$.

Lemma 3.6. Non esistono soluzioni della (3.8) per $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$.

Anche in questo caso si rimanda all'appendice A per tutte le dimostrazioni.

Teorema 3.7. Sia Ω una palla. L'equazione (3.8) ammette soluzione se e solo se

$$\lambda \in \left(\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right).$$

Dimostrazione. Se $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$ sappiamo che $S_\lambda < S$ (per il lemma 3.5). Come fatto nella dimostrazione del teorema 3.4, possiamo concludere che nell'espressione (3.4) l'inf viene raggiunto. Allora esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $u \geq 0$ in Ω, $\|u\|_6 = 1$ e

$$-\Delta u - \lambda u = S_\lambda u^5.$$

Se inoltre $\lambda < \lambda_1$, allora $S_\lambda > 0$ e con un'opportuna omotetia otteniamo una soluzione del problema (3.8). □

3.1.3 Un raffinamento delle disuguaglianze di Sobolev

Una conseguenza del teorema 3.7, è il seguente risultato.

Corollario 3.8. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme limitato. Esiste una costante λ^* (dipendente da Ω), $0 < \lambda^* < \lambda_1$ tale che

$$\|\mathrm{D}\, u\|_2^2 \geq S\|u\|_6^2 + \lambda^*\|u\|_2^2 \quad \text{per ogni } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Possiamo scegliere

$$\lambda^* = \frac{1}{4}\pi^2\left(\frac{3}{4\pi}\ \mathcal{L}_3(\Omega)\right)^{-2/3}.$$

Questo valore è ottimale quando Ω è una palla.

Dimostrazione. Sia Ω^* la palla centrata nell'origine tale che $\mathcal{L}_3(\Omega^*) = \mathcal{L}_3(\Omega)$. Sia u^* il riordinamento radiale di u (vedi capitolo 2). Per la proposizione 2.19, se $u \in H_0^1(\Omega)$ allora $u^* \in H_0^1(\Omega^*)$ e

$$\|\mathrm{D}\, u^*\|_2^2 \leq \|\mathrm{D}\, u\|_2^2. \tag{3.10}$$

D'altra parte, per ogni $u^* \in H_0^1(\Omega^*)$

$$\|\mathrm{D}\, u^*\|_2^2 \geq S\|u^*\|_6^2 + \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega^*)\|u^*\|_2^2. \tag{3.11}$$

Infatti la (3.11) dice che $S_\lambda \geq S$ quando $\lambda = \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega^*)$. E questo è vero, perché se fosse $S_\lambda < S$, per il lemma 3.3 esisterebbe una soluzione del problema (3.8) su Ω^* quando $\lambda = \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega^*)$. Ma questo contraddice il teorema 3.7.
Infine osserviamo che

$$\lambda_1(\Omega^*) = \frac{\pi^2}{R^2} \qquad \text{con } \frac{4}{3}\pi R^3 = \mathcal{L}_3(\Omega).$$

Combinando la (3.10) con la (3.11) e sfruttando la relazione

$$\|u^*\|_{L^q(\Omega^*)} = \|u\|_{L^q(\Omega)},$$

valida per ogni $q \geq 1$, otteniamo la tesi. □

In altre parole, il corollario 3.8 afferma che dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, esiste una costante λ^*, dipendente da Ω, tale che $0 < \lambda^* < \lambda_1$ e

$$\begin{aligned} S_\lambda < S \quad & \text{se } \lambda > \lambda^*, \\ S_\lambda = S \quad & \text{se } 0 \leq \lambda \leq \lambda^*. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Quando Ω è una palla, $\lambda^* = \frac{1}{4}\lambda_1$.

Quando $n \geq 4$, non esistono disuguaglianze del tipo

$$\|\mathrm{D}\, u\|_2^2 \geq S\|u\|_{2n/(n-2)}^2 + \lambda^*\|u\|_2^2 \quad \text{per ogni } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.13}$$

quando $\lambda^* > 0$.
Infatti, dalla (3.13) segue che $S_{\lambda^*} \geq S$, in contraddizione con il lemma 3.2. D'altra parte si ha il seguente risultato.

Proposizione 3.9. Per ogni $n \geq 3$ e per ogni $q < n/(n-2)$, esiste $\lambda_q > 0$ costante dipendente da q e da Ω tale che

$$\|\mathrm{D}\, u\|_2^2 \geq S\|u\|_{2n/(n-2)}^2 + \lambda_q\|u\|_q^2 \quad \text{per ogni } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che Ω sia una palla. Sia

$$\tilde{S}_\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2n/(n-2)}=1}} \left(\int |\mathrm{D}\, u|^2 - \lambda\|u\|_q^2 \right).$$

La (3.14) afferma che $\tilde{S}_\lambda = S$ per qualche costante positiva $\lambda = \lambda_q$.
Se così non fosse, supponiamo che

$$\tilde{S}_\lambda < S \qquad \text{per ogni } \lambda > 0.$$

Analogamente al lemma 3.3, si prova che esiste una qualche u che raggiunge $\tilde{S}_\lambda$. In particolare, u è soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)} + \lambda \frac{u^{q-1}}{\|u\|_q^{q-2}} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per l'identità di Pohozaev

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{n}{q} + 1 - \frac{1}{2}n\right)\|u\|_q^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial nu}\right)^2, \mathrm{d}\sigma \\ &\geq C\left(\int_\Omega |\Delta u|\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\geq C[u]^2_{n/(n-2),w} \geq C\|u\|_q^2. \end{aligned}$$

Allora $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, il che è assurdo. □

3.2 Il caso generale

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Supponiamo che

$$f(x,u) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

sia misurabile in x, continua in u e tale che

$$\sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq u\leq M}} |f(x,u)| < \infty$$

per ogni $M > 0$.
Sia $p = (n+2)/(n-2)$. Assumiamo che $f(x,0) = 0$ e che

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u^p} = 0.$$

Il nostro obbiettivo è mostrare l'esistenza di soluzioni per l'equazione (3.1).
Daremo ora alcune ipotesi aggiuntive che saranno fondamentali per poter proseguire.
Supponiamo che $f(x,u)$ possa essere scritta come segue

$$f(x,u) = a(x)u + g(x,u), \tag{3.15}$$

dove

$$a(x) \in L^\infty(\Omega), \tag{3.16}$$

$$g(x,u) = o(u) \quad \text{quando } u \to 0^+, \text{ uniformemente in } x, \tag{3.17}$$

$$g(x,u) = o(u^p) \quad \text{quando } u \to +\infty, \text{ uniformemente in } x. \tag{3.18}$$

Inoltre supponiamo che l'operatore $-\Delta - a(x)$ abbia autovalori positivi, ovvero

$$\int_\Omega (|\,\mathrm{D}\,\phi|^2 - a\phi^2)\,\mathrm{d}x \geq \alpha \int_\Omega \phi^2\,\mathrm{d}x \quad \text{per ogni } \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha > 0, \tag{3.19}$$

o equivalentemente, data l'equivalenza in $H_0^1(\Omega)$ tra $\|\cdot\|_{1,2}$ e $\|\mathrm{D}\cdot\|_2$,

$$\int_\Omega (|\,\mathrm{D}\,\phi|^2 - a\phi^2)\,\mathrm{d}x \geq \alpha' \int |\,\mathrm{D}\,\phi|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{per ogni } \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha' > 0. \tag{3.20}$$

I valori di $f(x,u)$ per valori negativi di u sono irrilevanti, per questo possiamo supporre che $f(x,u) = 0$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $u \leq 0$. Inoltre definiamo

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{per } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R},$$

e

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\,\mathrm{D}\,u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} - F(x,u)\right)\mathrm{d}x \quad \text{per } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.21}$$

Quello che vogliamo dimostrare è il seguente risultato.

Teorema 3.10. Supponiamo valide le condizioni (3.15)-(3.19) e supponiamo che esista $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $v_0 \geq 0$ in Ω, $v_0 \not\equiv 0$, tale che

$$\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_0) < \frac{1}{n} S^{n/2}. \tag{3.22}$$

Allora il problema (3.1) ammette soluzione.

Osservazione 3.11. Nel caso in cui $f(x,u) = \lambda u$, l'ipotesi (3.19) corrisponde a $\lambda < \lambda_1$ mentre la (3.22) è equivalente a $S_\lambda < S$.

Infatti, se definiamo $A = \|\mathrm{D}\,v_0\|_2^2 - \lambda\|v_0\|_2^2$ e $B = \|v_0\|_{p+1}^{p+1}$ si ha

$$\Psi(tv_0) = \frac{1}{2}At^2 - \frac{B}{p+1}t^{p+1},$$

quindi

$$\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_0) = \frac{1}{n}\left[\frac{A}{B^{2/(p+1)}}\right]^{n/2}.$$

La dimostrazione del teorema 3.10 si basa su una variante del teorema del passo di montagna, dimostrato in [Am-Ra].

Teorema 3.12. Sia Φ una funzione di classe C^1 su uno spazio di Banach E. Supponiamo che:

(i) esistano un intorno U di 0 in E e una costante ρ tali che $\Phi(u) \geq \rho$ per ogni u sulla frontiera di U;

(ii) $\Phi(0) < \rho \quad$ e $\quad \Phi(v) < \rho \quad$ per qualche $v \notin U$.

Poniamo

$$c = \inf_{P \in \mathscr{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \geq \rho, \tag{3.23}$$

dove $\mathscr{P}$ denota la classe di tutti i cammini continui da 0 a v.
Allora esiste una successione $\{u_j\}$ in E tale che

$$\Phi(u_j) \to c \quad \text{e} \quad \Phi'(u_j) \to 0 \quad \text{in } E^*. \tag{3.24}$$

Dimostrazione del teorema 3.10. Utilizzando le relazioni (3.15)-(3.18), possiamo fissare una costante $\mu \geq 0$ abbastanza grande tale che

$$-f(x,u) \leq \mu u + u^p \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0. \tag{3.25}$$

(Se fosse $f(x,u) \geq 0$ per ogni $u \geq 0$ basta scegliere $\mu = 0$).
Su $E = H_0^1(\Omega)$ definiamo

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\operatorname{D} u|^2 + \frac{1}{2}\mu u^2 - \frac{1}{p+1}(u^+)^{p+1} - F(x,u^+) - \frac{1}{2}\mu (u^+)^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Chiaramente Φ è di classe C^1 su E, grazie alla continuità della mappa

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto u^+. \end{aligned}$$

Proviamo che siano verificate le ipotesi del teorema 3.12.

Verifichiamo la (i).
Per la (3.17), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$g(x,u) \leq \varepsilon u \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } 0 \leq u \leq \delta;$$

allora, dalla (3.18) otteniamo

$$g(x,u) \leq \varepsilon u + C u^p \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0$$

(per qualche costante C dipendente da ε). Quindi

$$F(x,u) \leq \frac{1}{2}a(x)u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon u^2 + \frac{C}{p+1}u^{p+1}, \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0. \tag{3.26}$$

Quindi, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$, otteniamo

$$\Phi(u) \geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\operatorname{D} u|^2 - \frac{1}{2}a(x)(u^+)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon(u^+)^2 - \frac{C+1}{p+1}(u^+)^{p+1} \right) \mathrm{d}x.$$

Ricordiamo che $\int_\Omega |\operatorname{D} u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\operatorname{D} u^+|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\operatorname{D} u^-|^2 \,\mathrm{d}x$. Utilizzando questo fatto e la (3.20), se ε è abbastanza piccolo possiamo trovare due costanti $k > 0$ e C' tali che

$$\Phi(u) \geq k\|u\|_{1,2}^2 - C'\|u\|_{1,2}^{p+1} \quad \text{per ogni } u \in H_0^1(\Omega);$$

per qualche $\rho > 0$ la condizione (i) è verificata scegliendo come U una piccola palla in $H_0^1(\Omega)$.

Verifichiamo la (ii).
Per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$, dalla (3.18) ricaviamo

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(tu) = -\infty.$$

Per questo motivo esistono molte v che verificano la condizione (ii). Scegliamo $v = t_0 v_0$, dove v_0 è data dalla (3.22) e $t_0 > 0$ è scelto abbastanza grande in modo che $v \notin U$ e $\Phi(v) \leq 0$. Dalla (3.22) si ha

$$\sup_{t \geq 0} \Phi(tv) < \frac{1}{n}S^{n/2}$$

e quindi

$$c < \frac{1}{n}S^{n/2}. \tag{3.27}$$

Applicando il teorema 3.12, possiamo trovare una successione $\{u_j\}$ in $H_0^1(\Omega)$ tale che $\Phi(u_j) \to c$ e $\Phi'(u_j) \to 0$ in $H^{-1}(\Omega)$, ovvero

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\operatorname{D} u_j|^2 + \frac{1}{2}\mu {u_j}^2 - \frac{1}{p+1}(u_j^+)^{p+1} - F(x, u_j^+) - \frac{1}{2}\mu(u_j^+)^2 \right) \mathrm{d}x = c + o(1), \tag{3.28}$$

e

$$-\Delta u_j + \mu u_j - (u_j^+)^p - f(x, {u_j}^+) - \mu {u_j}^+ = \zeta_j \tag{3.29}$$

con $\zeta_j \to 0$ in $H^{-1}(\Omega)$. Ma allora

$$\|u_j\|_{1,2} \leq C. \tag{3.30}$$

Infatti, moltiplicando la (3.29) per u_j otteniamo

$$\int_\Omega \left(|\operatorname{D} u_j|^2 + \mu u_j^2 - ({u_j}^+)^{p+1} - f(x, {u_j}^+){u_j}^+ - \mu({u_j}^+)^2 \right) \mathrm{d}x = \langle \zeta_j, u_j \rangle. \tag{3.31}$$

Sottraendo da (3.28) la (3.31) divisa per 2, otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \int_\Omega ({u_j}^+)^{p+1} \, \mathrm{d}x \\ &\quad \leq \int_\Omega \left(F(x, {u_j}^+) - \frac{1}{2} f(x, {u_j}^+){u_j}^+ \right) \mathrm{d}x + c + o(1) + \|\zeta_j\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_j\|_{1,2}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

D'altra parte, dalla (3.18) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste C tale che

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon u^p + C \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0, \tag{3.33}$$

così che

$$|F(x, u)| \leq \frac{\varepsilon}{p+1} u^{p+1} + C \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0. \tag{3.34}$$

Dalle (3.32)-(3.34), scegliendo ε abbastanza piccolo, deduciamo che

$$\int_\Omega ({u_j}^+)^{p+1} \, \mathrm{d}x \leq C + C\|u_j\|_{1,2} \|\xi_j\|_{-1,2} \leq C + \delta \|u_j\|_{1,2}, \tag{3.35}$$

per ogni $\delta > 0$, per ogni j abbastanza grande.

A questo punto, combinando la (3.28) con la (3.35) otteniamo la (3.30).
Estraiamo quindi una sottosuccessione (che continueremo a chiamare u_j) tale che

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \quad \text{debolmente in } H_0^1(\Omega), \\ u_j &\to u \quad \text{fortemente in } L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } q < p+1, \\ u_j &\to u \quad \text{q.o. in } \Omega, \\ ({u_j}^+)^p &\rightharpoonup (u^+)^p \quad \text{debolmente in } {L^{p+1}(\Omega)}^*, \\ f(x, {u_j}^+) &\rightharpoonup f(x, u^+) \quad \text{debolmente in } {L^{p+1}(\Omega)}^*. \end{aligned}$$

Passando al limite nella (3.29), essendo $-\Delta$ un operatore chiuso, otteniamo

$$-\Delta u + \mu u = (u^+)^p + f(x, u^+) + \mu u^+ \quad \text{in } H^{-1}(\Omega). \tag{3.36}$$

Deduciamo dalla (3.25), dalla (3.36) (in cui il membro destro è non negativo) e dal principio del massimo che $u \geq 0$ in Ω e che inoltre u soddisfa

$$-\Delta u = u^p + f(x, u). \tag{3.37}$$

Resta solo da verificare che $u \not\equiv 0$.
Se fosse $u \equiv 0$, proviamo che

$$\int_\Omega f(x, {u_j}^+){u_j}^+ \,\mathrm{d}x \to 0 \tag{3.38}$$

$$\int_\Omega F(x, {u_j}^+) \,\mathrm{d}x \to 0. \tag{3.39}$$

Per le (3.33) e (3.34) si ha

$$\left| \int_\Omega f(x, {u_j}^+){u_j}^+ \,\mathrm{d}x \right| \le \varepsilon \int_\Omega ({u_j}^+)^{p+1} \,\mathrm{d}x + C \int_\Omega {u_j}^+ \,\mathrm{d}x,$$

$$\left| \int_\Omega F(x, {u_j}^+) \,\mathrm{d}x \right| \le \frac{\varepsilon}{p+1} \int_\Omega ({u_j}^+)^{p+1} \,\mathrm{d}x + C \int_\Omega {u_j}^+ \,\mathrm{d}x.$$

Poiché u_j è limitata in $L^{p+1}(\Omega)$ e $u_j \to 0$ in $L^2(\Omega)$, otteniamo la (3.38) e la (3.39).
Estraendo un ulteriore sottosuccessione, possiamo supporre che

$$\int_\Omega |\,\mathrm{D}\, u_j|^2 \,\mathrm{d}x \to l \tag{3.40}$$

per qualche costante $l \ge 0$. Passando al limite nella (3.31) prima e nella (3.28) poi, otteniamo

$$\int ({u_j}^+)^{p+1} \,\mathrm{d}x \to l \tag{3.41}$$

e

$$\frac{1}{n} l = c. \tag{3.42}$$

D'altra parte si ha

$$\|\mathrm{D}\, u_j\|_2^2 \ge S \|u_j\|_{p+1}^2 \ge S \left\| {u_j}^+ \right\|_{p+1}^2$$

e, usando la (3.40) e la (3.41), troviamo, passando al limite

$$l \ge S l^{2/(p+1)}. \tag{3.43}$$

Infine, dalla (3.42) e dalla (3.43), deduciamo che

$$c \ge \frac{1}{n} S^{n/2}, \tag{3.44}$$

in contraddizione con la (3.27). E questo è assurdo. □

A questo punto vogliamo trovare delle condizioni affinché il teorema 3.10 sia applicabile. Cominciamo con il seguente risultato preliminare.

Lemma 3.13. Supponiamo che $f(x,u)$ soddisfi le condizioni (3.15)-(3.18). Sia inoltre $h(u)$ una funzione tale che

$$f(x,u) \geq h(u) \geq 0 \quad \text{per q.o. } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0, \tag{3.45}$$

dove $\omega \subset \Omega$ è un aperto non vuoto e la primitiva $H(u) = \int_0^u h(t)\,\mathrm{d}t$ è tale che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right) s^{n-1}\,\mathrm{d}s = \infty. \tag{3.46}$$

Allora vale la condizione (3.22) del teorema 3.10.

Per la dimostrazione si rimanda all'appendice A.

3.2.1 Il caso $n \geq 5$

Supponiamo $n \geq 5$ e

$$f(x,u) \geq 0 \quad \text{per q.o. } x \in \omega \quad \text{per ogni } u \geq 0, \tag{3.47}$$

$$f(x,u) \geq \mu > 0 \quad \text{per q.o. } x \in \omega \quad \text{per ogni } u \in I, \tag{3.48}$$

dove $\omega \subset \Omega$ è un aperto non vuoto, $I \subset (0, +\infty)$ è un intervallo aperto non vuoto e $\mu > 0$ è una costante.

Corollario 3.14. Supponiamo che valgano le condizioni (3.15)-(3.19), (3.47), (3.48). Allora il problema (3.1) ammette soluzione.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema 3.10 e il lemma 3.13. Le relazioni (3.47) e (3.48) implicano

$$f(x,u) \geq \mu\chi_I(u) \equiv h(u), \quad \text{per q.o. } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0$$

(χ_I indica la funzione caratteristica dell'insieme I). Si ha

$$H(u) \geq \beta > 0 \quad \text{per ogni } u \geq B,$$

con B, β costanti positive. Verifichiamo che sia rispettata la condizione (A.27) del lemma 3.13.

$$H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right) \geq \beta \quad \text{per ogni } s \text{ tale che } \frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2} \geq B^{2/(n-2)},$$

in particolare per ogni $s \leq C\varepsilon^{-1/4}$, per qualche costante C e per valori abbastanza piccoli di ε. Inoltre

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right) s^{n-1}\,\mathrm{d}s \geq \beta\varepsilon \int_0^{C\varepsilon^{-1/4}} s^{n-1}\,\mathrm{d}s = C'\varepsilon^{1-(n/4)}.$$

Poiché $n \geq 5$, il membro di destra tende all'infinito quando ε va a zero. □

Esempio 3.15. Sia $f(x,u) = f(u) \in C^1([0,+\infty))$ tale che

$$f(0) = 0, \qquad f(u) \geq 0 \text{ per ogni } u \geq 0, \qquad f \not\equiv 0,$$

$$f'(0) < \lambda_1, \qquad \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^p} = 0.$$

Allora sono verificate le ipotesi del corollario.
Si può prendere, ad esempio, $f(u) = \lambda u$, con $0 < \lambda < \lambda_1$, oppure $f(u) = \mu u^q$, con $\mu > 0$ e $1 < q < p$.

3.2.2 Il caso $n = 4$

Quando $n = 4$ supponiamo che

$$f(x,u) \geq 0 \quad \text{per q.o } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0 \tag{3.49}$$

e supponiamo che valga una tra le seguenti condizioni:

$$f(x,u) \geq \mu u \quad \text{per q.o } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \in [0,A], \tag{3.50}$$

oppure

$$f(x,u) \geq \mu u \quad \text{per q.o } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \in [A,+\infty), \tag{3.51}$$

dove $\omega \subset \Omega$ è un aperto non vuoto, $\mu, A > 0$ sono costanti.

Corollario 3.16. Supponiamo che valgano le condizioni (3.15)-(3.19), (3.49), (3.50) oppure (3.51). Allora il problema (3.1) ammette soluzione.

Dimostrazione. Applichiamo nuovamente il teorema 3.10 e il lemma 3.13. Si ha

$$f(x,u) \geq \mu u \chi_I(u) \equiv h(u) \quad \text{per q.o. } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0,$$

dove $I = [0,A]$ oppure $I = [A,+\infty)$. Allora vale

$$H(u) = \frac{1}{2}\mu u^2 \quad \text{per } 0 \leq u \leq A, \tag{3.52}$$

oppure

$$H(u) = \frac{1}{2}\mu(u^2 - A^2) \quad \text{per } u \geq A. \tag{3.53}$$

Verifichiamo che sia rispettata la condizione (A.27) del lemma 3.13.
Se vale la (3.52), per ε piccolo si ha

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right) s^3 \, \mathrm{d}s \geq \frac{1}{2}\mu\varepsilon \int_{A^{-1/2}\varepsilon^{-1/4}}^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{\varepsilon^{-1}}{(1+s^2)^2} s^3 \, \mathrm{d}s \approx C|\log\varepsilon|,$$

quando $\varepsilon \to 0$.
Se vale la (3.53), per qualche costante positiva B e per ε piccolo si ha

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right) s^3 \, \mathrm{d}s \geq \frac{1}{4}\mu\varepsilon \int_0^{B\varepsilon^{-1/4}} \frac{\varepsilon^{-1}}{(1+s^2)^2} s^3 \, \mathrm{d}s \approx C|\log\varepsilon|,$$

quando $\varepsilon \to 0$. □

Esempio 3.17. Sia $f(x,u) = f(u) \in C^1([0,+\infty))$ tale che

$$f(0) = 0, \quad f(u) \geq 0 \text{ per ogni } u \geq 0, \quad f'(0) < \lambda_1, \quad \lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u^3} = 0,$$

$$f'(0) > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{u\to\infty} \inf \frac{f(u)}{u} > 0.$$

Allora sono verificate le ipotesi del corollario.
Si può prendere, ad esempio $f(u) = \lambda u$, con $0 < \lambda < \lambda_1$, oppure $f(u) = \mu u^q$, con $\mu > 0$ e $1 < q < 3$.

3.2.3 Il caso $n = 3$

Il caso $n = 3$ è molto più delicato dei casi precedenti. Infatti ci sono due risultati distinti che dipendono dal comportamento di $f(x,u)$ quando u tende all'infinito.

Per il primo risultato supponiamo che

$$f(x,u) \geq 0 \quad \text{per q.o } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0 \tag{3.54}$$

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u^3} = +\infty \quad \text{uniformemente per } x \in \omega, \tag{3.55}$$

dove ω è un aperto non vuoto di Ω.

Corollario 3.18. Supponiamo che valgano le condizioni (3.15)-(3.19),(3.54),(3.55). Allora il problema (3.1) ammette soluzione.

Dimostrazione. Applichiamo ancora il teorema 3.10 e il lemma 3.13. Vogliamo verificare la condizione (A.27).
Poniamo

$$h(u) = \inf_{x \in \omega} f(x,u)$$

in modo che

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^3} = +\infty.$$

Per ogni $\mu > 0$ esiste una costante $A > 0$ tale che $H(u) \geq \mu u^4$ per ogni $u \geq A$. Come conseguenza, esistono una costante $B > 0$ e ε abbastanza piccolo tali che

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{-1/2}\right) s^2 \, \mathrm{d}s \geq \mu\varepsilon \int_0^{B\varepsilon^{-1/4}} \frac{\varepsilon^{-1}}{(1+s^2)^2} s^2 \, \mathrm{d}s.$$

Quindi otteniamo

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{-1/2}\right) s^2 \, \mathrm{d}s \geq \mu \int_0^{\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^2} \, \mathrm{d}s$$

per ogni $\mu > 0$; e questo implica la (A.27). □

Esempio 3.19. Sia $f(x,u) = f(u) \in C^1([0,+\infty))$ tale che

$$f(0) = 0, \quad f(u) \geq 0 \text{ per ogni } u \geq 0, \quad f'(0) < \lambda_1,$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^5} = 0, \quad \lim_{u \to \infty} \inf \frac{f(u)}{u^3} = +\infty.$$

Allora sono verificate le ipotesi del corollario.
Si può prendere, ad esempio, $f(u) = \mu u^q$ con $\mu > 0$ e $3 < q < 5$.

Discutiamo adesso un secondo risultato. Introduciamo un parametro $\mu > 0$ e consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + a(x)u + \mu g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.56}$$

Assumeremo inoltre che

$$g(x,u) \geq 0 \quad \text{per q.o. } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq 0, \tag{3.57}$$

$$g(x,u) > 0 \quad \text{per q.o. } x \in \omega, \quad \text{per ogni } u \geq I, \tag{3.58}$$

dove ω è un aperto non vuoto di Ω e I è un aperto di $(0,+\infty)$.

Corollario 3.20. Supponiamo che valgano le condizioni (3.16)-(3.19) e (3.57). Allora esiste $\mu_0 > 0$ tale che il problema (3.56) ammette soluzione per ogni $\mu \geq \mu_0$.

Dimostrazione. Applichiamo sempre il teorema 3.10, ma questa volta verifichiamo la condizione (3.22) direttamente, senza utilizzare il lemma 3.13.
Non è restrittivo supporre che $0 \in \omega$. Sia ϕ una funzione test non negativa tale che $\phi(0) = 1$. Definiamo $v_0(x) = \phi(x)|x|^{-k}$, con $0 < k < \frac{1}{2}$ tale che $\|v_0\|_6 = 1$. Si ha

$$\Psi_\mu(tv_0) = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{6}t^6 - \mu \int_\Omega G(x, tv_0)\,\mathrm{d}x, \qquad A = \int_\Omega \left(|v_0|^2 - a v_0{}^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Vogliamo provare che

$$\lim_{\mu\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \Psi_\mu(tv_0) = 0. \tag{3.59}$$

In tal caso la condizione (3.22) è verificata quando μ è abbastanza grande.
Per prima cosa osserviamo che

$$\lim_{t\to+\infty} \Psi_\mu(tv_0) = -\infty;$$

quindi $\sup_{t\geq 0} \Psi_\mu(tv_0)$ è raggiunto per qualche t_μ. In tal caso

$$t_\mu A - t_\mu{}^5 - \mu \int_\Omega g(x, t_\mu v_0) v_0\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.60}$$

e quindi $t_\mu \leq A^{1/4}$. Allora

$$\lim_{\mu\to+\infty} t_\mu = 0. \tag{3.61}$$

Infatti, se così non fosse, potremmo trovare una successione $t_{\mu_j} \to t > 0$, per $\mu_j \to +\infty$, e dalla (3.60) avremmo che $\int_\Omega g(x, v_0)v_0\,\mathrm{d}x = 0$, in contraddizione con la (3.57) e con la scelta di v_0.
Osserviamo infine che

$$\sup_{t\geq 0} \Psi_\mu(tv_0) \leq \frac{1}{2}At_\mu{}^2 - \frac{1}{6}t_\mu{}^6.$$

La (3.61) segue dalla (3.59). □

Esempio 3.21. Applichiamo il corollario 3.20 al problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + \mu u^q & \text{in } \Omega, \qquad 1 < q \leq 3 \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.62}$$

Esiste allora una costante μ_0 (che dipende solo da Ω e da q) tale che il problema (3.62) ammette soluzione per ogni $\mu \geq \mu_0$.

Particolarmente interessante il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 3.22. Sia Ω strettamente stellato rispetto all'origine. Sia u una soluzione del problema (3.62) quando $1 < q \leq 3$. Allora

$$\mu \geq \mu_0(q, \Omega) > 0.$$

4 Le costanti ottimali nelli disuguaglianzi di Sobolev

4.1 Il caso $1 < p < n$

In questa sezione vogliamo dimostrare il seguente teorema, per la prima volta affrontato e risolto in [Ta1]. Diamo per il momento un enunciato informale.

Teorema 4.1. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sufficientemente regolare. Supponiamo che u si annulli all'infinito abbastanza velocemente. Siano, inoltre, $1 < p < n$, $p^* = np/(n-p)$ l'esponente critico di Sobolev e q l'esponente coniugato di p. Allora

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p. \tag{4.1}$$

In particolare

$$C = \pi^{-1/2} n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-1/p} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{1/n}. \tag{4.2}$$

L'uguaglianza in (4.1) vale se

$$u(x) = (a + b|x|^q)^{1-n/p}, \tag{4.3}$$

con a, b costanti positive.

Osserviamo subito che la (4.1) è esattamente la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Ci concentreremo quindi sul calcolare le costanti ottimali e le funzioni che le raggiungono.

La dimostrazione si basa su due risultati ausiliari.

Proposizione 4.2. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione liscia. Supponiamo che u si annulli all'infinito abbastanza velocemente. Detto $u^\sharp$ il riordinamento di Schwarz di u, per ogni $p > 1$ valgono le seguenti relazioni:

(i) $\|u^\sharp\|_p = \|u\|_p$;

(ii) $\|\nabla u^\sharp\|_p \leq \|\nabla u\|_p$.

La dimostrazione di queste disuguaglianze è già stata esposta nel capitolo 2.

Se una funzione u è a simmetria sferica, possiamo scrivere $u(r) = u(|x|)$. Dato che il nostro obbiettivo è massimizzare la quantità

$$\frac{\|u\|_{p^*}}{\|\nabla u\|_p}, \tag{4.4}$$

possiamo considerare il seguente funzionale, ottenuto da (4.4) ponendo $r = |x|$:

$$J(u) = \frac{\left(\int_0^{+\infty} r^{n-1} |u(r)|^{p^*} \, \mathrm{d}r\right)^{1/p^*}}{\left(\int_0^{+\infty} r^{n-1} |u'(r)|^p \, \mathrm{d}r\right)^{1/p}}. \tag{4.5}$$

La (4.4) diventa allora

$$2^{-1/n} \pi^{-1/2} \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{1/n} J(u). \tag{4.6}$$

Proposizione 4.3. Siano n, p, p^*, q numeri reali tali che $1 < p < n$, $p^* = np/(n-p)$, $q = (p-1)/p$.
Sia $u(r) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} |u'(r)|^p \, \mathrm{d}r < \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{r \to \infty} u(r) = 0. \tag{4.7}$$

Allora $J(u) \leq J(\varphi)$, dove

$$\varphi(r) = (a + br^q)^{1-n/p} \tag{4.8}$$

con $a, b > 0$. Inoltre

$$J(\varphi) = n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q} \left(\frac{1}{q} B\left(\frac{m}{p}, \frac{m}{q}\right)\right)^{-1/n}, \tag{4.9}$$

dove B indica la funzione *Beta*.

Dimostrazione. Innanzitutto fissiamo il dominio del funzionale J. Considereremo le funzioni che verificano la condizione (4.7) e che, inoltre, siano positive e monotone decrescenti. Se sostituiamo $u(\cdot)$ con $\int_{(\cdot)}^{\infty} |u'(t)|\,\mathrm{d}t = v(\cdot)$ si ha $J(u) \leq J(v)$; infatti

$$u(r) = -\int_r^{\infty} u'(r)\,\mathrm{d}r \leq \int_r^{\infty} |u'(t)|\,\mathrm{d}t = v(r).$$

Quindi il dominio di J è invariante rispetto a questa sostituzione. Possiamo allora limitarci a considerare funzioni u che siano non negative e monotone decrescenti.

Cominciamo con calcolare il differenziale di Gateaux del funzionale J.
Definiamo, per semplicità,

$$\|u\|_{p^*}^{(r)} = \left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r\right)^{1/p^*} \qquad \|u'\|_p^{(r)} = \left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^{p}\,\mathrm{d}r\right)^{1/p}.$$

In tal caso

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{J(u)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(u+tv)\right]_{t=0} \\
&= \frac{\|u'\|_p^{(r)}}{\|u\|_{p^*}^{(r)}} \frac{-1}{\left(\|u'\|_p^{(r)}\right)^2} \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u+tv\|_{p^*}^{(r)}\right]_{t=0} \|u'\|_p^{(r)} - \|u\|_{p^*}^{(r)} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u'+tv'\|_p^{(r)}\right]_{t=0}\right) \\
&= -\frac{1}{\|u\|_{p^*}^{(r)}\|u'\|_p^{(r)}} \left(\frac{1}{p^*}\frac{\|u\|_{p^*}^{(r)}\|u'\|_p^{(r)}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r}\, p^* \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*-1}\,\mathrm{sign}(u)\,v(r)\,\mathrm{d}r \right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{p}\frac{\|u\|_{p^*}^{(r)}\|u'\|_p^{(r)}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^{p}\,\mathrm{d}r}\, p \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\,\mathrm{sign}(u')v'(r)\,\mathrm{d}r\right).
\end{aligned}$$

Quindi, in conclusione,

$$\frac{1}{J(u)}J'(u)(v) = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}\left(|u(r)|^{p^*-1}\right)v(r)\,\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r} - \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}\left(|u'(r)|^{p-1}\right)v'(r)\,\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^{p}\,\mathrm{d}r}.$$

Dalle ipotesi (4.7) segue che

$$u(r) = o(r^{1-n/p}) \qquad \text{quando } r \to 0, r \to +\infty \tag{4.10}$$

e

$$u'(r) = o(r^{-n/p}) \qquad \text{quando } r \to 0, r \to +\infty. \tag{4.11}$$

I dettagli di queste verifiche sono semplici ma laboriosi. Si rimanda, pertanto, al lemma B.1 e al lemma B.2 in appendice B.

Sia dunque u un estremale del funzionale J. Poniamo

$$K = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^p}{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r} < +\infty.$$

Dalla definizione di J' si ricava che, per ogni $v \in C_0^1((0,\infty))$,

$$K\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*-1}v(r)\,\mathrm{d}r + \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}v'(r)\,\mathrm{d}r = 0.$$

Integriamo per parti il secondo addendo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} & r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}v'(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \Big[v(r)r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v(r)\Big(r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\Big)'\,\mathrm{d}r \\ &= -\int_0^{+\infty} v(r)\Big(r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\Big)'\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Allora l'equazione diventa

$$\int_0^{+\infty}\left(Kr^{n-1}|u(r)|^{p^*-1} + \Big(r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\Big)'\right)v(r)\,\mathrm{d}r = 0 \quad \text{per ogni } v \in C_0^1((0,\infty)). \tag{4.12}$$

Ricordiamo il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (per la dimostrazione si rimanda a [Tr]).

Teorema 4.4 (Lemma di du Bois-Reymond)**.** Sia $h \in C([0,\infty))$ tale che

$$\int_0^{+\infty} h(t)v(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

per ogni funzione $v \in C^1([0,\infty))$ tale che $v(0) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 0$. Allora h è costante su $[0,\infty)$.

Siano inoltre $g, h \in C([0,\infty))$ tali che

$$\int_0^{+\infty}(g(t)v(t) - h(t)v'(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

per ogni funzione $v \in C^1([0,\infty))$ tale che $v(0) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 0$. Allora $h \in C^1([0,\infty))$ e $h' = g$.

Se chiamiamo
$$H(r) = Kr^{n-1}|u(r)|^{p^*-1} + \Big(r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\Big)',$$
l'equazione (4.12) diventa
$$\int_0^{+\infty} H(r)v(r)\,\mathrm{d}r = 0, \quad \text{per ogni } v \in C_0^1((0,\infty));$$
dal lemma di du Bois-Reymond segue che H è costante. Ma poiché
$$H(0) = \lim_{r\to+\infty} H(r) = 0,$$
possiamo concludere che $H \equiv 0$.
Ci siamo ricondotti allora a studiare l'equazione $H(r) = 0$. Più precisamente
$$\Big(r^{n-1}|u'|^{p-1}\Big)' + Kr^{n-1}|u|^{p^*-1} = 0. \tag{4.13}$$
Ripercorrendo a ritroso questo ragionamento, possiamo concludere che, ogni soluzione della (4.13) che soddisfi le ipotesi (4.7) e (4.10), è un estremale per J.

Fortunatamente è possibile rappresentare in modo esplicito le soluzioni della (4.13). Queste sono della forma
$$u(r) = (a + br^q)^{1-n/p},$$
con a, b costanti positive, e
$$K = n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} ab^{p-1}.$$
Infatti, derivando si ha
$$u'(r) = \left(1 - \frac{n}{p}\right)(a + br^q)^{-n/p}\, b\, q\, r^{q-1}.$$
Quindi
$$|u'(r)|^{p-1} = \left(\frac{n-p}{p}\right)^{p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}(a + br^q)^{-n/q}\, r,$$
e, inoltre,
$$-r^{n-1}|u'(r)|^{p-1} = -\frac{(n-p)^{p-1}}{(p-1)^{p-1}}\, b^{p-1}\,(a + br^q)^{-n/q}\, r^n.$$

Sostituendo nella (4.13) otteniamo

$$\begin{aligned}\left(-r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\right)' &= \frac{n}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^p\, q\,(a+br^q)^{-1-n/q}\, r^{q-1} \\ &\qquad - n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}\,(a+br^q)^{-n/q}\, r^{n-1} \\ &= S_1 + S_2,\end{aligned}$$

e

$$Kr^{n-1}\,|u(r)|^{p^*-1} = n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}\, a\,(a+br^q)^{-1-n/q}\, r^{n-1} = S_3.$$

Allora

$$\begin{aligned}\left(-r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\right)' + Kr^{n-1}\,|u(r)|^{p^*-1} &= S_1+S_2+S_3 \\ &= n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}\,(br^q)\,(a+br^q)^{-1-n/q}\, r^{n-1} \\ &\quad - n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}\,(a+br^q)^{-n/q}\, r^{n-1} \\ &\quad + n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}\, a\,(a+br^q)^{-1-n/q}\, r^{n-1} \\ &= n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} b^{p-1}\,(a+br^q)^{-n/q}\, r^{n-1}\,(1-1) = 0.\end{aligned}$$

Abbiamo perciò trovato una famiglia di soluzioni della (4.13) dipendente da due parametri. A meno di riscalare la variabile r, possiamo supporre che le soluzioni siano

$$\varphi(r) = a(1+br^q)^{1-n/p}, \tag{4.14}$$

con a, b costanti positive. L'equazione differenziale associata diventa

$$\left(r^{n-1}|\varphi'(r)|^{p-1}\right)' = n\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} a^{p-p^*} b^{p-1} r^{n-1} \varphi(r)^{p^*-1}. \tag{4.15}$$

Il nostro obbiettivo, adesso, è mostrare che gli estremali che abbiamo appena trovato danno effettivamente il massimo di J. Proviamo innanzitutto che il problema

$$\begin{gathered} J(u) = \max_D J, \\ D = \left\{ u \in C^1\left((0,\infty);\mathbb{R}\right) \,:\, u>0,\ u'<0,\ \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^p\,\mathrm{d}r < \infty \right\} \end{gathered} \tag{4.16}$$

equivale a un problema di massimo vincolato della forma

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r = \max, \\ u_2'(r) = r^{n-1}|u_1'(r)|^p, \\ u_2(0) = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} u_1(r) = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} u_2(r) = 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Sia u una soluzione di (4.16). Definiamo

$$\begin{aligned} u_1(r) &= u(r)\left(\int_0^{+\infty} t^{n-1}|u'(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{-1/p}, \\ u_2(r) &= \int_0^r t^{n-1}|u_1'(t)|^p\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r &= \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*}\left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^p\,\mathrm{d}r\right)^{-p^*/p}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r}{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^p\,\mathrm{d}r\right)^{p^*/p}} = (J(u))^{p^*}. \end{aligned}$$

Inoltre $u_2(0) = 0$, $\lim_{r\to+\infty} u_1(r) = 0$ (perché lo stesso vale per $u(r)$),

$$\lim_{r\to+\infty} u_2(r) = \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^p\left(\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u'(r)|^p\,\mathrm{d}r\right)^{-1}\mathrm{d}r = 1.$$

Viceversa, sia (u_1, u_2) una soluzione del problema (4.17). Allora $u = u_1$ è soluzione di (4.16).

Abbiamo quindi provato che un insieme di estremali è dato da

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= a(1+br^q)^{1-n/p}, \\ \varphi_2(r) &= \int_0^r t^{n-1}|\varphi_1'(t)|^p\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Più esplicitamente,

$$\varphi_2(r) = r^{n-p}\varphi_1(r)^p f\left(\frac{br^q}{1+br^q}\right), \tag{4.19}$$

dove

$$f(\xi) = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^p \int_0^1 (1-t)^{n/q}(1-\xi t)^{-n}\,\mathrm{d}t, \quad \xi \in (0,1). \tag{4.20}$$

Più precisamente,

$$|\varphi_1'(r)| = \left(\frac{n-p}{p}\right) a\, b\, q\, (1+br^q)^{-n/q}\, r^{q-1}.$$

Quindi, ponendo $C = \dfrac{(n-p)^p}{p} \dfrac{1}{(p-1)^{p-1}}\, a^p\, b^p$ e sostituendo

$$\varphi_2(r) = \int_0^r t^{n-1} |\varphi_1'(t)|^p \, \mathrm{d}t = C \int_0^r q t^{q-1} \, (1+bt^q)^{-n}\, t^n \, \mathrm{d}t.$$

Dopo aver effettuato il cambio di variabile $1 - s = \dfrac{t^q}{r^q}$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_2(r) &= C \int_0^1 r^q\, (1 + br^q(1-s))^{-n}\, (r^q(1-s))^{n/q}\, \mathrm{d}s \\
&= C \int_0^1 r^{n+q}\, (1-s)^{n/q}\, (1 + br^q - sbr^q)^{-n}\, \mathrm{d}s \\
&= C \int_0^1 (1-s)^{n/q}\, r^{n+q}\, (1+br^q)^{-n} \left(1 - \frac{sbr^q}{1+br^q}\right)^{-n} \mathrm{d}s \\
&= C\, \frac{r^{n+q}}{(1+br^q)^n} \int_0^1 (1-s)^{n/q} \left(1 - \frac{sbr^q}{1+br^q}\right)^{-n} \mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \frac{1}{q}\, \frac{a^p\, (1+br^q)^{p-n}\, b^q\, r^p q}{(1+br^q)^p\, r^{p+q}}\, r^{n+q} \int_0^1 (1-s)^{n/q} \left(1 - s\, \frac{br^q}{1+br^q}\right)^{-n} \mathrm{d}s \\
&= r^{n-p} \varphi_1(r)^p f\left(\frac{br^q}{1+br^q}\right).
\end{aligned}$$

A questo punto, chiamiamo $\mathcal{O} = \{(r, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 \;:\; r > 0, u_1 > 0, u_2 > 0\}$. Vogliamo provare che al variare di $r \in (0, +\infty)$ i cammini

$$r \longmapsto (r, \varphi_1(r), \varphi_2(r))$$

sono le traiettorie di un campo di vettori regolare X definito su $\mathcal{O}$. Allora, per ogni punto di $x \in \mathcal{O}$ passa esattamente un cammino di questa forma e, inoltre, X rappresenta la pendenza di tal cammino in x. Le componenti del campo di vettori X sono

$$\begin{cases}
X_0(r, u_1, u_2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r = 1 \\
X_1(r, u_1, u_2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \varphi_1(r) = -\dfrac{n-p}{p-1} \dfrac{u_1}{r}\, \xi_\star \\
X_2(r, u_1, u_2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \varphi_2(r) = r^{n-1} |X_1(r, u_1, u_2)|^p,
\end{cases} \tag{4.21}$$

dove $\xi_\star = \xi_\star(r, u_1, u_2)$ è l'unica radice dell'equazione

$$f(\xi_\star) = r^{p-n} u_1^{-p} u_2, \qquad 0 < \xi < 1. \tag{4.22}$$

Proviamo che la (4.22) ha esattamente un'unica soluzione in $(0, 1)$.
Innanzitutto $f(0) = 0$. Inoltre

$$\lim_{\xi \to 1} f(\xi) = C \int_0^1 (1-t)^{n/q-n} \, \mathrm{d}t = +\infty$$

perché $n/q - n < -1$. Osserviamo che possiamo scambiare il segno di limite con quello di integrale per convergenza monotona.
Un calcolo diretto mostra che la derivata di f è

$$f'(\xi) = \frac{1}{q} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \int_0^1 \frac{(1-t)^{n/q}}{(1-\xi t)^{n+1}} \xi^{p-1} (p + (n-p)\xi) \, \mathrm{d}t.$$

In particolare $f'(\xi) > 0$. Inoltre

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{f(\xi)}{\xi^p} = \frac{1}{q} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \int_0^1 (1-t)^{n/q} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+q} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p. \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} q \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p (1-\xi)^{-1+n/p} f(\xi) &= (1-\xi)^{-1+n/p} \xi^p \int_0^{+\infty} (1-t)^{n/q} (1-\xi t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \xi^{p-1-n/q} \int_0^{\xi} t^{n/q} (1-t)^{(n/p)-2} \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza nell'ultima equazione segue ponendo

$$r = \xi \, \frac{1-t}{1-\xi t}.$$

Quindi

$$\lim_{\xi \to 1} q \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p (1-\xi)^{-1+n/p} f(\xi) = B\left(-1 + \frac{n}{p}, 1 + \frac{n}{q} \right). \tag{4.24}$$

Possiamo inoltre esplicitare la soluzione della (4.22). Dalla (4.19) ricaviamo

$$f\left(\frac{br^q}{1+br^q} \right) = r^{p-n} \varphi_1(r)^{-p} \varphi_2(r).$$

Lungo il campo X, $\varphi_1(r) = u_1$ e $\varphi_2(r) = u_2$. Allora $\xi_\star(r, u_1, u_2)$ diventa funzione della sola r, ovvero

$$\xi_\star(r) = \frac{br^q}{1+br^q} \tag{4.25}$$

Vogliamo adesso dimostrare la seguente proprietà: esiste una forma differenziale esatta $\mathrm{d}W$ tale che

$$\int_\gamma \mathrm{d}W \geq \int_0^{+\infty} r^{n-1} |u_1(r)|^{p^*} \, \mathrm{d}r,$$

dove γ è un cammino della forma $r \mapsto (r, u_1(r), u_2(r))$ che soddisfa la condizione

$$u_2'(r) = r^{n-1}|u_1'(r)|^p;$$

l'uguaglianza vale quando il cammino lungo cui integriamo è un estremale appartenente al campo X.

Cerchiamo W di classe C^2, definita su $\mathcal{O}$ con la seguente proprietà: per ogni punto $(r, u_1, u_2) \in \mathcal{O}$, la mappa lineare

$$\Psi_{(r,u_1,u_2)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = r^{n-1}u_1^{p^*}\xi_0 - \frac{\partial W}{\partial r}(r, u_1, u_2)\,\xi_0 - \frac{\partial W}{\partial u_1}(r, u_1, u_2)\,\xi_1 - \frac{\partial W}{\partial u_2}(r, u_1, u_2)\,\xi_2$$

ristretta al cono definito da

$$\xi_0 > 0, \qquad \xi_0^{p-1}\xi_2 = r^{n-1}|\xi_1|^p,$$

ha un punto critico in X.

Osservazione 4.5. Per punto critico di una funzione ristretta a una varietà di codimensione uno, si intende un punto in cui il gradiente della funzione ha una componente nulla parallela alla varietà. Nel caso del cono, se la funzione è omogenea, il valore della funzione in ogni punto critico è zero, altrimenti, per omogeneità, ci sarebbe una direzione di crescita parallela alla varietà.

Costruiamo allora un moltiplicatore di Lagrange λ tale che

$$L(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \lambda) = \Psi_{(r,u_1,u_2)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) + \lambda\left(\xi_0^{p-1}\xi_2 - r^{n-1}|\xi_1|^p\right).$$

Derivando L, e imponendo che tali derivate siano nulle, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \xi_0} = r^{n-1}u_1^{p^*} - \dfrac{\partial W}{\partial r} + \lambda(p-1)\xi_0^{p-2}\xi_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \xi_1} = -\dfrac{\partial W}{\partial u_1} - \lambda p r^{n-1}|\xi_1|^{p-1}\operatorname{sign}(\xi_1) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \xi_2} = -\dfrac{\partial W}{\partial u_2} + \lambda\xi_0^{p-1} = 0, \end{cases}$$

e, dopo aver valutato lungo le componenti del campo (4.21),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial r} = r^{n-1}u_1^{p^*} + (p-1)r^{n-1}|X_1|^p\lambda, \\ \dfrac{\partial W}{\partial u_1} = p r^{n-1}|X_1|^{p-1}\lambda, \\ \dfrac{\partial W}{\partial u_2} = \lambda. \end{cases} \tag{4.26}$$

Queste relazioni implicano che

$$\frac{\partial W}{\partial X} = r^{n-1} u_1^{p^*},$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial r} + X_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + r^{n-1}|X_1|^p \frac{\partial}{\partial u_2}$$

è la derivata direzionale lungo il campo. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{\partial W}{\partial r} + X_1 \frac{\partial W}{\partial u_1} + r^{n-1}|X_1|^p \frac{\partial W}{\partial u_2} \\ &= r^{n-1} u_1^{p^*} + (p-1) r^{n-1}|X_1|^p \lambda - p r^{n-1}|X_1|^p \lambda r^{n-1}|X_1|^p \lambda = r^{n-1} u_1^{p^*}.\end{aligned}$$

Poiché stiamo cercando una funzione W che sia di classe C^2, dobbiamo imporre che le derivate seconde miste siano coincidenti. Questo ci permette di trovare delle condizioni su λ. Più esplicitamente, imponiamo

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial u_1} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial r}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial u_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial r}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_1}.$$

Vediamo nel dettaglio cosa accade:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial u_1} &= p^* r^{n-1} u_1^{p^*-1} + (p-1) r^{n-1}|X_1|^p \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + (p-1)\frac{\partial}{\partial u_1}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right)\lambda, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial r} &= p r^{n-1}|X_1|^{p-1}\frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right)\lambda, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial u_2} &= (p-1) r^{n-1}|X_1|^p \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} + (p-1)\frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right)\lambda, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial r} &= \frac{\partial \lambda}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} &= p r^{n-1}|X_1|^{p-1}\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right)\lambda, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_1} &= \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}.\end{aligned}$$

Uguagliando le espressioni ricaviamo

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \lambda}{\partial r} - (p-1)(r^{n-1}|X_1|^p)\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = (p-1)\lambda \frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right), \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} - p(r^{n-1}|X_1|^{p-1})\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = p\lambda \frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \\ &p(r^{n-1}|X_1|^{p-1})\frac{\partial \lambda}{\partial r} - (p-1)(r^{n-1}|X_1|^p)\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \\ &\qquad = p^* r^{n-1} u_1^{p^*-1} - p\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) + (p-1)\lambda \frac{\partial}{\partial u_1}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right).\end{aligned}$$

Proviamo che

$$(p-1)\frac{\partial}{\partial u_j}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right) = -pX_1\frac{\partial}{\partial u_j}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \qquad j=1,2. \tag{4.27}$$

Per prima cosa osserviamo che $-X_1 = |X_1|$. Quindi la (4.27) diventa

$$(p-1)\frac{\partial}{\partial u_j}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right) = p|X_1|\frac{\partial}{\partial u_j}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \qquad j=1,2. \tag{4.28}$$

A questo punto, lasciando indicata la derivata di $|X_1|$ otteniamo

$$\begin{aligned} p|X_1|&\frac{\partial}{\partial u_j}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) \\ &= p\,|X_1|\,(p-1)r^{n-1}|X_1|^{p-2}\operatorname{sign}(X_1)\frac{\partial}{\partial u_j}(|X_1|) \\ &= -p(p-1)r^{n-1}|X_1|^{p-1}\frac{\partial}{\partial u_j}(|X_1|), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (p-1)&\frac{\partial}{\partial u_j}\left(r^{n-1}|X_1|^p\right) \\ &= (p-1)\,p\,r^{n-1}|X_1|^{p-1}\operatorname{sign}(X_1)\frac{\partial}{\partial u_j}(|X_1|) \\ &= -p(p-1)r^{n-1}|X_1|^{p-1}\frac{\partial}{\partial u_j}(|X_1|). \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial r} - (p-1)(r^{n-1}|X_1|^p)\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} = -p\lambda X_1\frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} - p(r^{n-1}|X_1|^{p-1})\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} = p\lambda\frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \\ &p(r^{n-1}|X_1|^{p-1})\frac{\partial\lambda}{\partial r} - (p-1)(r^{n-1}|X_1|^p)\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} \\ &\qquad\qquad = p^* r^{n-1}u_1^{p^*-1} - p\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) - p\lambda X_1\frac{\partial}{\partial u_1}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \end{aligned}$$

che può essere riscritto

$$\mathcal{M}(\nabla\lambda) = \mathcal{D}, \tag{4.29}$$

dove

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(p-1)\left(r^{n-1}|X_1|^p\right) \\ 0 & 1 & -p\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) \\ p\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) & -(p-1)\left(r^{n-1}|X_1|^p\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = p^* r^{n-1} u_1^{p^*-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - p\lambda \begin{pmatrix} X_1 \dfrac{\partial}{\partial u_2} \\ -\dfrac{\partial}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} + X_1 \dfrac{\partial}{\partial u_1} \end{pmatrix} \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right).$$

Osservazione 4.6. Consideriamo un sistema lineare del tipo $Nx = b$. Se N non ha rango massimo esiste $w \neq 0$ tale che $N^T w = 0$. Se x è soluzione del sistema allora $(b, w) = 0$. Infatti

$$0 = (x, 0) = (x, N^T w) = (Nx, w) = (b, w).$$

La matrice $\mathcal{M}$ ha una struttura del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & -B \\ B & A & 0 \end{pmatrix},$$

e ha rango 2. Per trovare la soluzione del sistema (4.29) imponiamo allora l'ortogonalità tra il vettore $\mathcal{D}$ e l'autovettore w relativo a 0 della matrice $\mathcal{M}^T$. Nel nostro caso, $w = (B, A, -1)^T$. Esplicitando A e B si ricava

$$\begin{aligned} p^* r^{n-1} u_1^{p^*-1} &= p\lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} + X_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + r^{n-1} |X_1|^p \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right) \\ &= p\lambda \frac{\partial}{\partial X} \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Possiamo a questo punto esplicitare il valore di λ. Per prima cosa proviamo che

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right) = n \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} r^{n-p-1} u_1 p - 1 \xi_\star{}^{p-1} (1 - \xi_\star). \tag{4.31}$$

La (4.25) fornisce esplicitamente il valore di ξ. Quindi, derivando,

$$\frac{\partial \xi_\star}{\partial r} = \frac{q}{r} \xi_\star (1 - \xi_\star).$$

Inoltre, dalla (4.21)

$$r^{n-1} |X_1|^{p-1} = C^{p-1} r^{n-p} u_1^{p-1} \xi_\star{}^{p-1}, \qquad C = \frac{n-p}{p-1}.$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right) + X_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \left(r^{n-1} |X_1|^{p-1} \right) \\ &= C^{p-1} r^{n-p-1} u_1^{p-1} \xi_\star{}^{p-1} (n - p\, \xi_\star) - (p-1) C^p r^{n-p-1} u_1^{p-1} \xi_\star{}^p \\ &= C^{p-1} r^{n-p-1} u_1^{p-1} \xi_\star{}^{p-1} (n - p\, \xi_\star - (n-p) \xi_\star) \\ &= n C^{p-1} r^{n-p-1} u_1^{p-1} \xi_\star{}^{p-1} (1 - \xi_\star). \end{aligned}$$

Quindi la (4.30) diventa

$$\lambda(r, u_1, u_2) = \frac{(p-1)^{p-1}}{(n-p)^p} \frac{r^p\, u_1^{p^*-p}}{{\xi_\star}^{p-1}(1-\xi_\star)}. \tag{4.32}$$

Vale, in particolare, la seguente relazione:

$$\xi_\star(1-\xi_\star) f'(\xi_\star) = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p {\xi_\star}^p + (n-p)\left(\xi_\star - \frac{1}{q}\right) f(\xi_\star). \tag{4.33}$$

La verifica di questa formula è piuttosto lunga. Rimandiamo pertanto al lemma (B.3) alla fine della dimostrazione.

Proviamo adesso che la soluzione λ trovata è effettivamente una soluzione del sistema (4.29). Infatti, imporre l'ortogonalità tra il vettore $\mathcal{D}$ e il vettore w è solo una condizione necessaria. Poiché la matrice $\mathcal{M}$ del sistema ha rango 2, è sufficiente provare che vengano verificate due equazioni indipendenti. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X}\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\lambda = p\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}\,|X_1|^{p-1}\,\lambda\right). \end{cases} \tag{4.34}$$

Queste relazioni seguono facilmente ricombinando le prima due equazioni del sistema (4.29).

Sommando le prime due equazioni del sistema (4.29) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial r} + X_1\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} &= (p-1)r^{n-1}|X_1|^p\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} - p\,\lambda\, X_1\frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) \\ &\quad - p\,r^{n-1}|X_1|^p\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} + p\,\lambda\, X_1\frac{\partial}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right), \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial\lambda}{\partial X} = 0.$$

Inoltre, la seconda equazione del sistema (4.29) diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} &= p\,r^{n-1}|X_1|^{p-1}\frac{\partial\lambda}{\partial u_2}\left(r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right) \\ &= p\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\lambda\, r^{n-1}|X_1|^{p-1}\right). \end{aligned}$$

E quindi sono verificate le condizioni del sistema (4.34).

In conclusione, abbiamo trovato una funzione W che verifica il sistema (4.26) quando λ è della forma (4.32). Mostriamo adesso che la forma differenziale $\mathrm{d}W$ soddisfa la proprietà richiesta in precedenza. Consideriamo la differenza

$$\begin{aligned} E(r, u_1, &u_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2) \\ &= r^{n-1} u_1^{p^*} \xi_0 - \frac{\partial W(r, u_1, u_2)}{\partial r} \xi_0 - \frac{\partial W(r, u_1, u_2)}{\partial u_1} \xi_1 - \frac{\partial W(r, u_1, u_2)}{\partial u_2} \xi_2. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Restringiamoci al cono definito da

$$\xi_0 > 0 \qquad \text{e} \qquad \xi_0^{p-1} \xi_2 = r^{n-1} |\xi_1|^p,$$

da cui segue che

$$\xi_2 = r^{n-1} \xi_0 \left| \frac{\xi_1}{\xi_0} \right|^p.$$

Applichiamo le relazioni del sistema (4.26). Allora

$$\begin{aligned} E(r, u_1, &u_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2) \\ &= r^{n-1} u_1^{p^*} \xi_0 - r^{n-1} u_1^{p^*} \xi_0 - (p-1) r^{n-1} |X_1|^p \lambda \xi_0 - p\, r^{n-1} |X_1|^{p-1} \lambda \xi_1 - \lambda \xi_2 \\ &= -(p-1)\, r^{n-1} |X_1|^p \lambda \xi_0 - r^{n-1} \lambda \xi_0 \left| \frac{\xi_1}{\xi_0} \right|^p - p\, r^{n-1} |X_1|^{p-1} \lambda \xi_1 \\ &= -\xi_0\, r^{n-1} \lambda \left((p-1) |X_1|^p + \left| \frac{\xi_1}{\xi_0} \right|^p + p \frac{\xi_1}{\xi_0} |X_1|^{p-1} \right). \end{aligned}$$

La quantità tra parentesi è sempre non negativa. In particolare si annulla solo quando la direzione (ξ_0, ξ_1, ξ_2) è parallela al campo X. Quindi la funzione $E(r, u_1, u_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2)$ è sempre minore o uguale a zero.

Possiamo a questo punto rappresentare esplicitamente la funzione W. Questo ci serve per poter studiare il suo comportamento asintotico. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial r} = \dfrac{r^{n-1}\, u_1^{p^*}}{1 - \xi_\star}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial u_1} = \dfrac{p^*}{n} \dfrac{r^n\, u_1^{p^*-1}}{1 - \xi_\star}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial u_2} = \dfrac{(p-1)^{p-1}}{(n-p)^p} \dfrac{r^p\, u_1^{p^*-p}}{\xi_\star{}^{p-1} (1 - \xi_\star)}. \end{cases} \tag{4.36}$$

In particolare, integrando, possiamo scrivere

$$W(r, u_1, u_2) = \frac{r^n}{n} u_1^{p^*} + A(r, u_1)\, u_2 + C.$$

Allora esiste il limite di W per $u_2 \to 0^+$ e vale

$$W(r, u_1, 0^+) = \lim_{u_2 \to 0^+} W(r, u_1, u_2) = \frac{r^n}{n} u_1^{p^*} + C.$$

Quindi possiamo scrivere

$$W(r, u_1, u_2) = W(r, u_1, 0^+) + \int_0^{u_2} \frac{\partial W(r, u_1, u_2)}{\partial u_2} \, \mathrm{d}u_2.$$

Dopo aver sostituito il valore della derivata di W rispetto a u_2 e dopo aver effettuato il cambio di variabile

$$u_2 = f(\xi_\star)\, r^{n-p}\, u_1^p,$$

possiamo scrivere

$$W(r, u_1, u_2) = \frac{r^n}{n} u_1^{p^*} + \frac{(p-1)^{p-1}}{(n-p)^p} r^n u_1^{p^*} \int_0^{\xi_\star} \frac{f'(t)}{t^{p-1}\,(1-t)} \, \mathrm{d}t + C'.$$

Studiamo l'ultimo integrale. Per prima cosa integriamo per parti, ottenendo

$$\int_0^{\xi_\star} \frac{f'(t)}{t^{p-1}\,(1-t)} \, \mathrm{d}t = \frac{f(\xi_\star)}{{\xi_\star}^{p-1}\,(1-\xi_\star)} + \int_0^{\xi_\star} f(t)\, \frac{p(1-t)-1}{t^p\,(1-t)^2} \, \mathrm{d}t = I.$$

Dalla relazione (4.33) si ha

$$\begin{aligned}
\xi_\star\,(1-\xi_\star)\, f'(\xi_\star) - c\,{\xi_\star}^p &= (n-p)\left(\xi_\star \frac{1}{p} - 1\right) f(\xi_\star) = \\
&= \left(\frac{n-p}{p} - (n-p)(1-\xi_\star)\right) f(\xi_\star) \\
&= -\frac{n-p}{p}(p\,(1-\xi_\star) - 1)\, f(\xi_\star),
\end{aligned}$$

dove $c = 1/q\,((n-p)/(p-1))^p$. Sostituendo quest'ultima uguaglianza otteniamo

$$\begin{aligned}
I &= \frac{f(\xi_\star)}{{\xi_\star}^{p-1}\,(1-\xi_\star)} - \frac{p}{n-p} \int_0^{\xi_\star} \frac{t\,(1-t)\, f'(t) - c\, t^p}{t^p\,(1-t)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{f(\xi_\star)}{{\xi_\star}^{p-1}\,(1-\xi_\star)} - \frac{p}{n-p} \int_0^{\xi_\star} \frac{f'(t)}{t^{p-1}(1-t)} \, \mathrm{d}t + \int_0^{\xi_\star} \frac{p}{n-p} \frac{1}{q} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} \int_0^{\xi_\star} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2} \\
&= \frac{f(\xi_\star)}{{\xi_\star}^{p-1}\,(1-\xi_\star)} - \frac{p}{n-p} \int_0^{\xi_\star} \frac{f'(t)}{t^{p-1}(1-t)} \, \mathrm{d}t + \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} \frac{\xi_\star}{1-\xi_\star}.
\end{aligned}$$

Quindi, ricomponendo,

$$\frac{p^*}{p} \int_0^{\xi} \frac{f'(t)}{t^{p-1}\,(1-t)} \, \mathrm{d}t = \frac{f(\xi_\star)}{{\xi_\star}^{p-1}\,(1-\xi_\star)} + \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} \frac{\xi_\star}{1-\xi_\star}.$$

In conclusione, raggruppando,

$$W(r,u_1,u_2) = C' + \frac{r^n\, u_1^{p^*}}{n\,(1-\xi_\star)} + \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1} \frac{r^p\, u_1^{p^*-p}\, u_2}{n\,{\xi_\star}^{p-1}(1-\xi_\star)},$$

dove C' è una costante e $\xi_\star$ è la radice dell'equazione (4.22).

Siamo pronti per concludere. Sia (u_1,u_2) una soluzione del problema di Lagrange (4.17), che può essere riscritta come segue

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1'(r)|^p\,\mathrm{d}r = 1, \\ u_2(r) = \displaystyle\int_0^r t^{n-1}|u_1'(t)|^p\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{4.37}$$

La funzione u_1, per quanto visto all'inizio della dimostrazione, può essere considerata positiva e decrescente, mentre la funzione u_2 può essere considerata positiva e crescente. In particolare $u_2(0) = 0$ e

$$\lim_{r\to\infty} u_1(r) = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} u_2(r) = 1.$$

In questo modo $(r, u_1(r), u_2(r)) \in \mathcal{O}$.
Studiamo adesso

$$\lim_{r\to 0} W(r,u_1(r),u_2(r)) \qquad \text{e} \qquad \lim_{r\to\infty} W(r,u_1(r),u_2(r)).$$

Il primo limite è molto facile da studiare. Innanzitutto osserviamo che

$$r^n\, u_1^{p^*} = \left(r^{n/p-1}\, u_1\right)^{p^*} = o(1) \quad \text{se } r\to 0 \text{ oppure se } r\to\infty.$$

Quindi, se $r \to 0$,

$$W(r,u_1(r),u_2(r)) = C + o(1) + \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1} \frac{f(\xi_\star)}{{\xi_\star}^p}\, \frac{o(1)\,\xi_\star}{n\,(1-\xi_\star)} \longrightarrow C,$$

perchè $\xi_\star \to 0$ e, per la (4.23), ${\xi_\star}^{-p}\, f(\xi_\star)$ tende a una costante.
Il secondo limite, invece, è leggermente più laborioso.
Per prima cosa dimostriamo che il primo addendo di W tende a 0 quando $r\to\infty$.
Dalla (4.24) segue che $(1-\xi_\star)^{-1+n/p} f(\xi_\star)$ è limitata. Quindi

$$\frac{1}{1-\xi_\star} = \left(\frac{1}{(1-\xi_\star)^{-1+n/p}}\right)^{p/(n-p)} \le c\big(r^{n-p}\, u_1^p\big)^{p/(n-p)} = c\, r^p\, u_1^{p^2/(n-p)},$$

dove c è una costante. Ma allora

$$\frac{r^n\, u_1^{p^*}}{n\,(1-\xi_\star)} \le c\, r^{n+p}\, u_1^{p^*+p^2/(n-p)} = c\, o(1).$$

Studiamo adesso il secondo addendo. Per cominciare osserviamo che u_2 e ξ tendono a 1. Quindi ci limitiamo a calcolare

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1} \frac{r^p\, u_1^{p^*-p}}{1-\xi_\star}.$$

Ma

$$\begin{aligned}
\frac{r^p\, u_1^{p^*-p}}{1-\xi_\star} &= \left(\frac{r^p\, u_1^{p^*-p}}{1-\xi_\star}\right)^{(n/p^*)\cdot(p^*/n)} = \left(\frac{r^{n-p}\, u_1^p\, u_2^{-1}}{(1-\xi_\star)^{-1+n/p}}\right)^{p^*/n} u_2^{p^*/n} \\
&= \left(\frac{1}{f(\xi_\star)(1-\xi_\star)^{-1+n/p}}\right)^{p^*/n} u_2^{p^*/n}.
\end{aligned}$$

Quindi, tornando al limite,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1} \lim_{r\to\infty} \frac{r^p\, u_1^{p^*-p}}{1-\xi_\star} \\
&\quad= \frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1} \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{f(\xi_\star)(1-\xi_\star)^{-1+n/p}}\right)^{p^*/n} u_2^{p^*/n} \\
&\quad= \frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{pp^*/n} \left(\frac{1}{q} B\left(-1+\frac{n}{p}, 1+\frac{n}{q}\right)\right)^{-p^*/n}.
\end{aligned}$$

Osservazione 4.7. La funzione Beta B gode di un'interessante proprietà:

$$B(-1+x, 1+y) = \frac{y}{x-1}\, B(x,y).$$

Infatti

$$\begin{aligned}
y\, B(x,y) &= y \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1-t)^y\right)\,\mathrm{d}t \\
(x-1)\, B(-1+x, 1+y) &= (x-1)\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{x-1}\right)(1-t)^y\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

e le due quantità coincidono integrando per parti.

Nel nostro caso, $x = n/p$ e $y = n/q$. Un semplice calcolo mostra che

$$\frac{y}{x-1} = n\frac{p-1}{n-p}.$$

Ma allora

$$\frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{pp^*/n}\left(\frac{1}{q}B\left(-1+\frac{n}{p},1+\frac{n}{q}\right)\right)^{-p^*/n}$$
$$= n^{-p^*/p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p^*/q}\left(\frac{1}{q}\,B\left(\frac{n}{p},\frac{n}{q}\right)\right)^{-p^*/n}.$$

In conclusione

$$W(\infty,0,1)=\lim_{r\to\infty}W(r,u_1(r),u_2(r))=C+n^{-p^*/p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p^*/q}\left(\frac{1}{q}\,B\left(\frac{n}{p},\frac{n}{q}\right)\right)^{-p^*/n}.$$

Ricordiamo che avevamo costruito W in modo che

$$\int_\gamma \mathrm{d}W \geq \int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r,$$

dove l'integrale del primo membro viene calcolato lungo una curva $\gamma(r)=(r,u_1(r),u_2(r))$ che soddisfi la condizione

$$u_2'(r)=r^{n-1}|u_1'(r)|^p.$$

Il sistema (4.37) è del tutto equivalente al sistema (4.17). Infatti, se il massimo valore assunto dal funzionale J è 1 (cosa non restrittiva a meno di riscalamenti) allora

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1'(r)|^p\,\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r;$$

in tal caso, u_1 è la soluzione del nostro problema, ovvero $u_1=\varphi$. Ricomponendo tutti i pezzi otteniamo proprio il risultato desiderato, ovvero

$$(J(\varphi))^{p^*}=1=\int_0^{+\infty} r^{n-1}|u_1(r)|^{p^*}\,\mathrm{d}r=n^{-p^*/p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{p^*/q}\left(\frac{1}{q}\,B\left(\frac{n}{p},\frac{n}{q}\right)\right)^{-p^*/n}.$$

□

Abbiamo adesso tutti gli strumenti per dimostrare il teorema principale di questa sezione.

Dimostrazione del teorema 4.1. La formula (4.1) è esattamente la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (vedi (1.4)). Grazie alla proposizione 4.2 possiamo limitarci a considerare funzioni a simmetria sferica. Infatti la funzione u data dalla (4.3) è a simmetria sferica.
Dopo aver cambiato variabile, ponendo $r=|x|$, otteniamo

$$\frac{\|u\|_p}{\|\nabla u\|_{p^*}}=2^{-1/n}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\,J(u),$$

dove $J(u)$ è definito nella (4.5).
Grazie alla proposizione 4.3, il funzionale J raggiunge il suo massimo quando

$$u(r) = \varphi(r) = (a + br^q)^{1-n/p}.$$

Quindi, ricordando che $r = |x|$ otteniamo proprio la (4.3).
Inoltre, sempre per la proposizione 4.3, sappiamo che il massimo valore raggiunto dal funzionale J è

$$n^{-1/p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q}\left(\frac{1}{q}\,B\left(\frac{n}{p},\frac{n}{q}\right)\right)^{-1/n}.$$

Quindi la costante C della disuguaglianza (4.1) è data dal prodotto di quest'ultima quantità per $2^{-1/n}\pi^{-1/2}\Gamma(n/2)$. Più precisamente

$$\begin{aligned}
C &= \pi^{-1/2}\,\frac{1}{n^p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q}\frac{1}{2^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{1/n}B\left(\frac{n}{p},\frac{n}{q}\right)^{-1/n} \\
&= \pi^{-1/2}\,\frac{1}{n^p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q}\left(\frac{q}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{B\left(\frac{n}{p},\frac{n}{q}\right)}\right)^{1/n} \\
&= \pi^{-1/2}\,\frac{1}{n^p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q}\left(\frac{q}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n}{q}\right)}\right)^{1/n} \\
&= \pi^{-1/2}\,\frac{1}{n^p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q}\left(\frac{q}{2}\,\frac{2}{n}\,\frac{n}{q}\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{q}\right)}\right)^{1/n} \\
&= \pi^{-1/2}\,\frac{1}{n^p}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/q}\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{q}\right)}\right)^{1/n}.
\end{aligned}$$

E quindi vale anche la (4.2).
Osserviamo che abbiamo utilizzato le proprietà elementari della funzione Γ e della funzione B, ovvero

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad \text{e} \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

$\square$

4.2 Il caso $n < p < \infty$

In questa sezione vogliamo dimostrare il seguente teorema, di cui si piò trovate una generalizzazione in [Ta2].

Teorema 4.8. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(\Omega)$ con supporto di misura finita. Sia $n < p < \infty$. Allora

$$\|u\|_\infty \leq C\,\alpha^{1/n-1/p}\,\|\mathrm{D}\,u\|_p, \tag{4.38}$$

dove ω_n indica è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$,

$$C = n^{-1/p}\omega_n^{-1/n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-1/p} \qquad \text{e} \qquad \alpha = \mathcal{L}_n(\mathrm{supp}\,(u)). \tag{4.39}$$

Inoltre, nella (4.38) vale l'uguaglianza se

$$u(x) = \begin{cases} 1 - |x|^{(p-n)/(p-1)} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{4.40}$$

La dimostrazione si basa su due risultati ausiliari che permettono di stabilire un legame tra il gradiente della funzione u e la derivata del riordinamento u^*.

Lemma 4.9. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(\Omega)$ che si annulla all'infinito. Sia, inoltre, $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione crescente e convessa tale che $\Psi(0) = 0$. Denotiamo con H_s l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $|u(x)| > u^*(s)$. Allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{H_s} \Psi(|\,\mathrm{D}\,u(x)|)\,\mathrm{d}x \geq \Psi\left(-n\,\omega_n^{1/n}s^{1-1/n}\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}s}(s)\right) \tag{4.41}$$

per quasi ogni $s > 0$.

Ricordiamo che il riordinamento u^* è una funzione monotona, decrescente e continua a destra. Quindi la sua derivata esiste quasi ovunque.

Dimostrazione. Introduciamo la seguente notazione:

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^*(b) < |u(x)| < u^*(a)\}.$$

Richiamiamo due disuguaglianze già dimostrate nella proposizione 2.12. Per ogni $0 \leq a < b < \alpha = \mathcal{L}_n(\mathrm{supp}\ u)$

$$\int_{H_{a,b}} |\,\mathrm{D}\,u(x)|\,\mathrm{d}x \geq n\,\omega_n^{1/n}a^{1-1/n}(u^*(a) - u^*(b)), \tag{4.42}$$

$$\mathcal{L}_n(H_{a,b}) \le b - a. \tag{4.43}$$

Dimostriamo la seguente disuguaglianza: per quasi ogni $s > 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{H_s} |\,\mathrm{D}\, u(x)|\, \mathrm{d}x \ge -n\, \omega_n^{1/n}\, s^{1-1/n} \frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}s}(s). \tag{4.44}$$

Se $s \ge \alpha$, il termine di destra della (4.44) è nullo perché $u^* \equiv 0$ se $s \ge \alpha$. Quindi la disuguaglianza è vera. Se invece $s < \alpha$, ponendo

$$F(s) = \int_{H_s} |\,\mathrm{D}\, u(x)|\, \mathrm{d}x,$$

si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) = \lim_{h \to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_{\overline{H}_{s,s+h}} |\,\mathrm{D}\, u(x)|\, \mathrm{d}x,$$

dove $\overline{H}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^*(b) < |u(x)| \le u^*(a)\}$. Applicando la (4.42) otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\overline{H}_{s,s+h}} |\,\mathrm{D}\, u(x)|\, \mathrm{d}x &\ge n\, \omega_n^{1/n}\, s^{1-1/n} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(u^*(s) - u^*(s+h)) \\ &= -n\, \omega_n^{1/n}\, s^{1-1/n} \frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}s}(s) \end{aligned}$$

in ogni punto s in cui esiste $u^{*\prime}(s)$. Abbiamo quindi provato il lemma nel caso in cui $\Psi(t) = t$. Per dimostrare il caso generale dobbiamo distinguere due casi: dato che u^* è una funzione decrescente, per quasi ogni $s > 0$ la derivata di u^* si annulla in s oppure esiste un intorno W di s in cui u^* è strettamente decrescente. Nel primo caso la (4.41) è banalmente verificata perché $\Psi(0) = 0$ e l'integrando è una funzione non negativa. Nel secondo caso, invece, la verifica è più delicata. Cominciamo con l'osservare che se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, dalla definizione di u^* segue che

$$\varepsilon = \mathcal{L}_n \left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u^*(s+\varepsilon) < |u(x)| \le u^*(s)\} \right).$$

Allora, utilizzando la seguente notazione

$$F(s) = \int_{H_s} \Psi(|\,\mathrm{D}\, u(x)|)\, \mathrm{d}x,$$

e applicando la disuguaglianza (2.8) di Jensen, possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{H_s}\Psi(|\operatorname{D}u(x)|)\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\overline{H}_{s,s+h}}\Psi\left(|\operatorname{D}u(x)|\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \lim_{h\to 0}\Psi\left(\frac{1}{h}\int_{\overline{H}_{s,s+h}}|\operatorname{D}u(x)|\,\mathrm{d}x\right) \\
&\geq \Psi\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\overline{H}_{s,s+h}}|\operatorname{D}u(x)|\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \Psi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{H_s}|\operatorname{D}u(x)|\,\mathrm{d}x\right) \geq \Psi\left(-n\,\omega_n^{1/n}s^{1-1/n}(u^*)'(s)\right),
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza della (4.44). □

Conseguenza immediata di questo lemma è il seguente risultato.

Teorema 4.10. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare che si annulla all'infinito. Sia $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione crescente e convessa tale che $\Psi(0) = 0$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Psi\left(|\operatorname{D}u(x)|\right)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^{+\infty}\Psi\left(-n\,\omega_n^{1/n}s^{1-1/n}(u^*)'(s)\right)\,\mathrm{d}s. \tag{4.45}$$

Dimostrazione. Come in precedenza, utilizziamo la seguente notazione:

$$H_s = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| > u^*(s)\}.$$

In particolare, quando $s = \infty$ allora $H_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, u(x) \neq 0\}$, mentre quando $s = 0$ allora $H_0 = \emptyset$. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Psi\left(|\operatorname{D}u(x)|\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{H_s}\Psi\left(|\operatorname{D}u(x)|\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}s.$$

Quindi la (4.45) segue dal lemma precedente. □

Siamo adesso pronti per dimostrare il teorema 4.8.

Dimostrazione del teorema 4.8. Poiché u^* è assolutamente continua, si ha

$$\|u\|_\infty = \sup\operatorname{ess}|u| = u^*(0) = \int_0^\alpha\left(-(u^*)'(s)\right)\,\mathrm{d}s.$$

Ricordiamo che u^* è monotona decrescente, quindi

$$-(u^*)'(s) = \left|(u^*)'(s)\right|.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \left|(u^*)'(s)\right| \,\mathrm{d}s &= \int_0^\alpha s^{1-\frac{1}{n}} \left|(u^*)'(s)\right| s^{-1+\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}s \\ &\le \left(\int_0^\alpha s^{p\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|(u^*)'(s)\right|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\alpha s^{-\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{p}{p-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Dove l'ultimo passaggio segue dalla disuguaglianza di Hölder. Studiamo il secondo fattore:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\alpha s^{-\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{p}{p-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}} &= \left(\left[s^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{p}{p-1}+1}\right] \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{\alpha^{1-\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}}{1-\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\frac{\alpha^{1-A}}{1-A}\right)^{1-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con A la quantità $\dfrac{p-n}{n(p-1)}$. Applichiamo il teorema 4.10, con $\Psi(t) = |t|^p$, al primo fattore, invece,

$$\left(\int_0^\alpha s^{p\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|(u^*)'(s)\right|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{n}\,\omega_n^{-1/n} \left\|\mathrm{D}\, u\right\|_p.$$

Ricomponendo i pezzi

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \left|(u^*)'(s)\right| \,\mathrm{d}s &\le \frac{1}{n}\,\omega_n^{-1/n} \left\|\mathrm{D}\, u\right\|_p \left(\frac{\alpha^{1-A}}{1-A}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= n^{-1+1-1/p}\,\omega_n^{-1/n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-1/p} \alpha^{1/n-1/p} \left\|\mathrm{D}\, u\right\|_p \\ &= C\,\alpha^{1/n-1/p} \left\|\mathrm{D}\, u\right\|_p.\end{aligned}$$

Proviamo adesso che la funzione definita nella (4.40) verifica l'uguaglianza nella (4.38) quando C è definita dalla (4.39).

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{D}\, u\right\|_p &= \left(\int_{\{|x|<1\}} \mathrm{D}\left(1-|x|^{(p-n)/(p-1)}\right) \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &= \frac{p-n}{p-1}\left(\int_{\{|x|<1\}} |x|^{-p\,\frac{n-1}{p-1}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &= (n\,\omega_n)^{1/p}\,\frac{p-n}{p-1}\left(\int_0^{+\infty} s^{-(n-1)/(p-1)}\right)^{1/p} \\ &= (n\,\omega_n)^{1/p}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{-1+1/p}.\end{aligned}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
&C\,\alpha^{1/n-1/p}\,\|\mathrm{D}\,u\|_p \\
&\qquad = \left(n^{-1/p}\,{\omega_n}^{-1/n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)\left({\omega_n}^{1/n-1/p}\right)\left(n^{1/p}\,{\omega_n}^{1/p}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{-1+\frac{1}{p}}\right) \\
&\qquad = 1 = \|u\|_\infty .
\end{aligned}
$$

$\square$

4.3 Il caso $p = 1$

Il teorema 4.1 è valido quando $1 < p < n$. Il prossimo teorema mostra cosa accade nel caso $1 = p < n$. In tal caso

$$p^* = 1^* = \frac{n}{n-1}.$$

Teorema 4.11. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esiste una costante positiva $C = C(n,p)$ tale che

$$\|u\|_{1^*} \leq C\,\|\mathrm{D}\,u\|_1. \tag{4.46}$$

Inoltre, il più piccolo valore di C per cui vale la disuguaglianza (4.46) è dato da

$$\frac{1}{C} = n\,\omega_n^{1/n}. \tag{4.47}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $C = n^{-1}\,\omega_n^{-1/n}$ e proviamo che allora la (4.46) vale per ogni funzione u che soddisfi le ipotesi. Dato che

$$|u| = \int_0^{+\infty} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|u(x)|>t\}}\,\mathrm{d}t,$$

applicando la disuguaglianza di Minkowski

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{n/(n-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{1-1/n} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|u(x)|>t\}}\,\mathrm{d}t\right)^{n/(n-1)}\mathrm{d}x\right)^{1-1/n} \\
&\leq \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|u(x)|>t\}}\right|^{n/(n-1)}\mathrm{d}x\right)^{1-1/n}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\mathcal{L}_n\left(\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ |u(x)|>t\}\right)\right)^{1-1/n}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Applicando adesso la disuguaglianza isoperimetrica (2.7), otteniamo che per ogni $t > 0$

$$n\,\omega_n^{1/n}(\mathcal{L}_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| > t\}\right))^{1-1/n} \le \mathcal{H}_{n-1}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| = t\}\right).$$

A questo punto, applicando la formula (2.6) di coarea otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\operatorname{D} u(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_{n-1}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |u(x)| = t\}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Combinando queste ultime due relazioni si deduce la tesi.

Proviamo adesso che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme misurabile, limitato e con frontiera regolare allora

$$\left(\mathcal{L}_n(E)\right)^{1-1/n} \le C\ \mathcal{H}_{n-1}(\partial E). \tag{4.48}$$

Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\eta \ge 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Consideriamo allora

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,\chi_E(y)\,\mathrm{d}y.$$

v_ε è una mollificazione di della funzione indicatrice di E. Per le proprietà delle mollificazioni, se $\varepsilon \to 0$ allora $v_\varepsilon \to \chi_E$. Inoltre

$$\|v_\varepsilon\|_{1^*} \longrightarrow \left(\mathcal{L}_n(E)\right)^{1-1/n} \qquad\qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0.$$

Vogliamo stimare il gradiente di v_ε.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,\chi_E(y)\,\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_E \eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_E \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(x-y)\right)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial E} \eta_\varepsilon(x-y)\,\nu^{(i)}(y)\ \mathcal{H}_{n-1}(\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

dove $\nu(y) = (\nu^{(1)}(y), \ldots, \nu^{(n)}(y))$ è il versore normale alla frontiera di E centrato in y e diretto verso l'esterno. Osserviamo che l'ultima uguaglianza è esattamente la formula di Gauss-Green. Quindi

$$\operatorname{D} v_\varepsilon(x) = \int_{\partial E} \eta_\varepsilon(x-y)\cdot\nu(y)\ \mathcal{H}_{n-1}(\mathrm{d}y).$$

Possiamo allora concludere che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{D}\, v_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x \le \mathcal{H}_{n-1}(\partial E).$$

Se sostituiamo v_ε nella formula (4.46), passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo proprio la (4.48).
Quindi abbiamo provato che

$$\frac{1}{C} \le n\,\omega_n^{1/n}.$$

Infatti quando E è una palla, la disuguaglianza isoperimetrica diventa un'uguaglianza, ovvero

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial E)(\mathcal{L}_n(E))^1 - 1/n = n\,\omega_n^{1/n}.$$

□

Osservazione 4.12. Il teorema 4.11 non può essere dedotto dal teorema 4.1. Infatti, nel caso $p = 1$, non è possibile costruire una famiglia di funzioni per cui vale l'uguaglianza nella (4.46). Tuttavia la costante ottimale *passa al limite*. Più precisamente, se

$$C_p = \pi^{-1/2} n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-1/p} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{1/n}$$

è la costante ottimale (definita nella (4.2)) per il teorema 4.1, allora

$$\lim_{p\to 1^+} \pi^{-1/2} n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-1/p} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}\,\omega_n^{-1/n}.$$

Per completezza, richiamiamo brevemente la disuguaglianza di Minkowski nella sua forma più generale.

Teorema 4.13 (Disuguaglianza di Minkowski in forma integreale)**.** Siano (X, Σ, μ), (Y, Θ, ν) due spazi di misura $\sigma-$finiti. Sia $f : X \times Y \to [0, \infty]$ una funzione misurabile rispetto alla $\sigma-$algebra prodotto $\Sigma \otimes \Theta$. Sia $1 \le p < \infty$. Allora

$$\left(\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^p \mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/p} \le \int_X \left(\int_Y f(x,y)^p\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/p} \mathrm{d}\mu(x). \qquad (4.49)$$

Inoltre vale l'uguaglianza se $u(x,y) = u_1(x)\,u_2(y)$.

Dimostrazione. Per prima cosa ci riduciamo al caso in cui $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$ e f è una funzione limitata.

Poiché le misure sono $\sigma-$finite, esistono due successioni $\{X_k\} \subset \Sigma$, $\{Y_k\} \subset \Theta$ tali che

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots, \quad \mu(X_k) < \infty \text{ per ogni } k \geq 1 \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X,$$

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots, \quad \nu(Y_k) < \infty \text{ per ogni } k \geq 1 \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y.$$

Definiamo $f_k : X \times Y \to [0, \infty)$ come segue:

$$f_k(x, y) = \begin{cases} \min\{k, f(x, y)\} & \text{se } x \in X_k, y \in Y_k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\{f_k\}$ è una successione di funzioni misurabili e non negative. Inoltre la successione è non decrescente e converge puntualmente a f. Se la (4.49) vale quando applicata agli spazi X_k, Y_k, f_k, allora per convergenza dominata vale anche nella sua forma più generale.

In virtù di quanto appena provato, supponiamo $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$ e f limitata. Se $p = 1$ la disuguaglianza (4.49) si trasforma in un'uguaglianza. Supponiamo perciò $p > 1$. Inoltre possiamo supporre che f non sia identicamente nulla. Per ogni $y \in Y$ definiamo

$$H(y) = \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x);$$

per il teorema di Fubini, $H(y)$ esiste ed è una funzione misurabile. Ma allora

$$\begin{aligned}
\int_Y H(y)^p \, \mathrm{d}\nu(y) &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \right) H(y)^{p-1} \, \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, H(y)^{p-1} \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int_X \left(\left(\int_Y f(x, y)^p \, \mathrm{d}\nu(y) \right)^{1/p} \left(\int_Y H(y)^p \, \mathrm{d}\nu(y) \right)^{1-1/p} \right) \mathrm{d}\mu(x),
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla disuguaglianza di Hölder. La quantità

$$A = \left(\int_Y H(y)^p \, \mathrm{d}\nu(y) \right)^{1-1/p},$$

che è costante rispetto alla variabile x, è sia diversa da 0 che diversa da ∞, perchè integrale di una quantità limitata su un dominio limitato. Quindi, dividendo ambo i membri dell'ultima disuguaglianza per A otteniamo proprio la (4.49). $\square$

A | Appendice del capitolo 3

Riportiamo le dimostrazioni dei vari lemmi preparatori del capitolo 3.

Il problema modello

Il caso $n \geq 4$

Lemma A.1. $S_\lambda < S$ per ogni $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Possiamo suppore, senza perdità di generalità, che $0 \in \Omega$. Consideriamo la seguente quantità

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{p+1}^2}$$

con

$$u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{(n-2)/2}} \qquad \varepsilon > 0, \tag{A.1}$$

dove φ è una fissata funzione test (non negativa) identicamente uguale a 1 in un intorno di 0 fissato. Proveremo che, quando $\varepsilon \to 0$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = K_1\, \varepsilon^{-(n-2)/2} + O(1), \tag{A.2}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2 = K_2\, \varepsilon^{-(n-2)/2} + O(\varepsilon), \tag{A.3}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} K_3\, \varepsilon^{-(n-4)/2} + O(1) & \text{se } n \geq 5 \\ K_3 |\log \varepsilon| + O(1) & \text{se } n = 4, \end{cases} \tag{A.4}$$

dove K_1, K_2 e K_3 sono costanti positive, dipendenti solo da n e tali che

$$\frac{K_1}{K_2} = S.$$

Verifichiamo la (A.2).
Si ha

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{(n-2)/2}} - \frac{(n-2)\varphi(x)x}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{n/2}}.$$

Poiché $\varphi \equiv 1$ in un intorno di 0, ponendo $x = \varepsilon^{1/2}y$, segue che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x &= (n-2)^2 \int_\Omega \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x + O(1) \\
&= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x + O(1) \\
&= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon|y|^2}{\varepsilon^n\left(1 + |y|^2\right)^n} \,\mathrm{d}y + O(1) \\
&= K_1\, \varepsilon^{-(n-2)/2} + O(1),
\end{aligned}$$

dove

$$K_1 = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{\left(1 + |y|^2\right)^n} \,\mathrm{d}y = \|\nabla U\|_2^2.$$

Verifichiamo la (A.3).
Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p+1} \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{\varphi(x)^{p+1}}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\varphi(x)^{p+1} - 1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x \\
&= O(1) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x = \frac{K_2'}{\varepsilon^{n/2}} + O(1),
\end{aligned}$$

dove

$$K_2' = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |x|^2\right)^n} \,\mathrm{d}x = \|U\|_{p+1}^{p+1}.$$

La relazione (A.3) segue scegliendo $K_2 = \|U\|_{p+1}^2$. In tal caso, inoltre, una semplice verifica mostra anche che $S = \frac{K_1}{K_2}$.

Verifichiamo la (A.4).
Si ha

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\varphi(x)^2 - 1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{n-2}} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{n-2}} \,\mathrm{d}x = O(1) + \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{n-2}} \,\mathrm{d}x.$$

Quando $n \geq 5$

$$\int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{n-2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{n-2}}\,\mathrm{d}x + O(1) = \varepsilon^{-(n-4)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |y|^2\right)^{n-2}}\,\mathrm{d}y + O(1),$$

e la tesi segue ponendo

$$K_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |y|^2\right)^{n-2}}\,\mathrm{d}y.$$

Quando $n = 4$, esistono delle costanti R_1 e R_2 tali che

$$\int_{|x|\leq R_1} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_{|x|\leq R_2} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Inoltre

$$\int_{|x|\leq R} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \omega_4 \int_0^R \frac{r^3}{(\varepsilon + r^2)^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\omega_4 |\log \varepsilon| + O(1),$$

dove ω_4 è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^4$. Ma allora la (A.4) segue scegliendo $K_3 = \frac{1}{2}\omega_4$.

Combinando le relazioni (A.2), (A.3), (A.4), se $\varepsilon > 0$ è piccolo abbastanza, si ha

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < S.$$

Infatti, se $n \geq 5$

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{K_1 \varepsilon^{-(n-2)/2} - \lambda K_3 \varepsilon^{-(n-4)/2} + O(1)}{K_2 \varepsilon^{-(n-2)/2} + O(\varepsilon)} = \frac{K_1 - \lambda K_3 \varepsilon + O(\varepsilon^{(n-2)/2})}{K_2 + O(\varepsilon^{1+(n-2)/2})} \\ &= S - \lambda\varepsilon \frac{K_3}{K_2} + O(\varepsilon^{n-1}) < S + O(\varepsilon^{n-1}) \longrightarrow S. \end{aligned}$$

Se invece $n = 4$

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{K_1 \varepsilon^{-1} - \lambda K_3 |\log \varepsilon| + O(1)}{K_2 \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon)} < \frac{K_1 + O(\varepsilon)}{K_2 + O(\varepsilon^2)} \longrightarrow S.$$

□

Lemma A.2. Se $S_\lambda < S$, nella (3.4) l'inf viene raggiunto.

Dimostrazione. Sia $\{u_j\} \subset H^1_0(\Omega)$ una successione minimizzante per (3.4), cioè una successione tale che

$$\|u_j\|_{p+1} = 1; \tag{A.5}$$

$$\|\nabla u_j\|_2^2 - \lambda \|u_j\|_2^2 = S_\lambda + o(1), \qquad \text{per } j \to \infty. \tag{A.6}$$

Poiché u_j è limitata in $H_0^1(\Omega)$, possiamo estrarre una sottosuccessione (che continuiamo a chiamare u_j) tale che

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \quad \text{debolmente in } H_0^1(\Omega),\\ u_j &\to u \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega),\\ u_j &\to u \quad \text{q.o. in } \Omega; \end{aligned}$$

inoltre, per il lemma di Fatou, $\|u\|_{p+1} \le 1$. Poniamo $v_j = u_j - u$; in tal modo

$$\begin{aligned} v_j &\rightharpoonup 0 \quad \text{debolmente in } H_0^1(\Omega),\\ v_j &\to 0 \quad \text{q.o. in } \Omega. \end{aligned}$$

Per la (3.5) e la (A.5) si ha $S \le \|\nabla u_j\|_2$. Inoltre, dalla (A.6) segue che

$$\lambda \|u\|_2^2 \ge \|\nabla u\|_2^2 - S_\lambda \ge S - S_\lambda > 0,$$

ovvero $u \not\equiv 0$. Sempre dalla (A.6), e dal fatto che $v_j \rightharpoonup 0$ in $H_0^1(\Omega)$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 + \|\nabla v_j\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 + \|\nabla u_j\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 - 2\,(\nabla u_j\,,\,\nabla u)\\ &= o(1) - \lambda\|u\|_2^2 + \|\nabla u_j\|_2^2 = o(1) - \lambda\|v_j\|_2^2 + \|\nabla u_j\|_2^2 = o(1) + S_\lambda. \end{aligned} \tag{A.7}$$

poiché $v_j \rightharpoonup 0$ debolmente in $H_0^1(\Omega)$. Dato che v_j è limitata in $L^{p+1}(\Omega)$ e $v_j \to 0$ q.o.,

$$\|u + v_j\|_{p+1}^{p+1} = \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v_j\|_{p+1}^{p+1} + o(1). \tag{A.8}$$

(La dimostrazione di questa importantissima proprietà è posticipata nel prossimo lemma).
Allora, dalla (A.5) segue che

$$1 = \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v_j\|_{p+1}^{p+1} + o(1),$$

quindi

$$1 \le \|u\|_{p+1}^2 + \|v_j\|_{p+1}^2 + o(1).$$

Per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, si ha

$$1 \le \|u\|_{p+1}^2 + \frac{1}{S}\|\nabla v_j\|_2^2 + o(1). \tag{A.9}$$

Per concludere, affermiamo che

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \le S_\lambda \|u\|_{p+1}^2; \tag{A.10}$$

questo conclude la dimostrazione, perché $u \not\equiv 0$.
Distinguiamo due casi:

(i) $S_\lambda > 0$;

(ii) $S_\lambda \leq 0$.

Nel primo caso, dalla (A.9) si ha

$$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + \left(\frac{S_\lambda}{S}\right) \|\nabla v_j\|_2^2 + o(1). \tag{A.11}$$

Combinando la (A.7) con la (A.11) otteniamo

$$S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + \frac{S_\lambda}{S}(S_\lambda + \lambda \|u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2) < S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + S_\lambda + \lambda \|u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2.$$

E quindi vale la (A.10).
Nel secondo caso $S_\lambda \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2$, poiché $\|u\|_{p+1} \leq 1$. Dalla (A.7)

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v_j\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda + o(1) \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + o(1).$$

e quindi

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 - \|\nabla v_j\|_2^2 + o(1) \leq S_\lambda \|u\|_{p+1}^2 + o(1).$$

□

Infine, in quest'ultimo lemma, dimostriamo la relazione (A.8), caso particolare di un importante risultato dimostrato in [Br-Li].

Lemma A.3. Sia $f_n = f + g_n$ una successione di funzioni misurabili tale che:

(i) $g_n \to 0$ q.o.;

(ii) g_n è uniformemente limitata in $L^p(\Omega)$, ovvero esiste una costante C, che non dipende da n, tale che $\|g_n\|_p \leq C$ per ogni n;

(iii) $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f + g_n\|_p^p - \|g_n\|_p^p\right) = \|f\|_p^p.$$

Dimostrazione. Partiamo con un'osservazione preliminare. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante C_ε tale che

$$\left||x + y|^p - |x|^p\right| \leq \varepsilon |x|^p + C_\varepsilon |y|^p, \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, se $x = 0$ la tesi è banale. Se $x \neq 0$, posto $t = \frac{y}{x}$, la tesi equivale a provare che

$$\big||1+t|^p - 1\big| \leq \varepsilon + C_\varepsilon |t|^p.$$

In un intorno di 0, ossia per $|t| \leq \delta_\varepsilon$, essa è vera per continuità; per $|t| > \delta_\varepsilon$ possiamo scrivere

$$\big||1+t|^p - 1\big| \leq\leq \frac{(1+\delta_\varepsilon)^p - 1}{{\delta_\varepsilon}^p}|t|^p,$$

da cui la tesi. Fissato $\varepsilon > 0$ definiamo la seguente quantità:

$$S_{\varepsilon,n}(x) = \left(\big||f_n(x)|^p - |g_n(x)|^p - |f(x)|^p\big| - \varepsilon |g_n(x)|^p\right)_+,$$

dove $(u(x))_+ = \max\{0, u(x)\}$.
Per l'ipotesi (i), quando $n \to \infty$ si ha $S_{\varepsilon,n}(x) \to 0$ per quasi ogni x.
Vale inoltre la seguente stima:

$$\begin{aligned}\big||f_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\big| &\leq \big||f_n|^p - |g_n|^p\big| + |f|^p \\ &= \big||f+g_n|^p - |g_n|^p\big| + |f|^p \leq \varepsilon |g_n|^p + (C_\varepsilon + 1)|f|^p.\end{aligned}$$

In particolare

$$S_{\varepsilon,n}(x) \leq (C_\varepsilon + 1)|f_n|^p.$$

Allora, per il teorema di Lebesgue di convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega S_{\varepsilon,n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} S_{\varepsilon,n}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Inoltre, per quanto visto prima,

$$\big||f_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\big| \leq S_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon |g_n(x)|^p,$$

quindi

$$\int_\Omega \big||f_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\big|\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \left(S_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon |g_n(x)|^p\right)\,\mathrm{d}x.$$

Passando al limite si ottiene

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \big||f_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\big|\,\mathrm{d}x &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \left(S_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon |g_n(x)|^p\right)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega S_{\varepsilon,n}(x)\,\mathrm{d}x + \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \varepsilon |g_n(x)|^p\,\mathrm{d}x \leq 0 + \varepsilon C.\end{aligned}$$

La tesi segue quando $\varepsilon \to 0$. $\square$

Il caso $n = 3$

Lemma A.4. $S_\lambda < S$ per ogni $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$.

Dimostrazione. Vogliamo stimare

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2}{\|u\|_6^2}$$

con

$$u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}} \qquad r = |x|,\, \varepsilon > 0, \tag{A.12}$$

dove φ è una fissata funzione liscia tale che $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$. Proveremo che, quando $\varepsilon \to 0$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega_3 \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 \,\mathrm{d}r + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{A.13}$$

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{1/2}} + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{A.14}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega_3 \int_0^1 |\varphi(r)|^2 \,\mathrm{d}r + O(\varepsilon^{1/2}), \tag{A.15}$$

dove K_1, K_2 e K_3 sono costanti positive, tali che $\frac{K_1}{K_2} = S$, mentre ω_3 è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^3$.

Verifichiamo la (A.13).
Dopo aver effettuato il cambio di variabile $r = |x|$,

$$u_\varepsilon'(r) = \frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}} - \frac{r\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{3/2}}$$

e quindi

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \left[\frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)} - \frac{2r\varphi(r)\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^2} + \frac{r^2|\varphi(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\right] r^2 \,\mathrm{d}r.$$

Integrando per parti, otteniamo facilmente

$$\begin{aligned} -2\int_0^1 \frac{\varphi(r)\,\varphi'(r)\,r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} \,\mathrm{d}r &= \int_0^1 |\varphi(r)|^2 \left[\frac{3r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} - \frac{4r^4}{(\varepsilon + r^2)^3}\right] \mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 |\varphi(r)|^2 \frac{3\varepsilon - r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} \,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

e quindi, sommando,

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2 \, \mathrm{d}r + 3\omega\varepsilon \int_0^1 \frac{|\varphi(r)|^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r. \tag{A.16}$$

Poiché $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$, otteniamo $\left|\frac{\varphi'(r)}{r}\right| \leq C$. Allora

$$\int_0^1 |\varphi'(r)|^2 \left(\frac{r^2}{\varepsilon + r^2} - 1 \right) \mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2 \varepsilon}{\varepsilon + r^2} \, \mathrm{d}r \leq C \int_0^1 \frac{r^2 \varepsilon}{\varepsilon + r^2} \, \mathrm{d}r \leq C'\varepsilon.$$

Il primo addendo della (A.16) può allora essere riscritto come segue:

$$\int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} \, \mathrm{d}r = \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 \, \mathrm{d}r + O(\varepsilon), \tag{A.17}$$

Inoltre

$$\int_0^1 \frac{\left(|\varphi(r)|^2 - 1\right) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r \leq C \int_0^1 \frac{\left((1 - r^2)^2 - 1\right) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r \leq$$
$$C \int_0^1 \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r \leq C \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + r^2} \, \mathrm{d}r = O(\varepsilon^{-1/2}).$$

Il secondo addendo della (A.16), dopo aver posto $r = s\varepsilon^{1/2}$, diventa allora

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(r)|^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r + O\left(\varepsilon^{-1/2}\right); \tag{A.18}$$

in particolare

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \int_0^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} \, \mathrm{d}s + O(1). \tag{A.19}$$

Sostituendo nella (A.16) le relazioni (A.17) e (A.19), e definendo

$$K_1 = 3\omega_3 \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} \, \mathrm{d}s,$$

otteniamo la (A.13).
Notiamo ora che, detta $U(x) = 1/\left(1 + |x|^2\right)^{1/2}$, da un'integrazione per parti risulta

$$K_1 = 3\omega_3 \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} \, \mathrm{d}s = \omega_3 \int_0^\infty \frac{s^4}{(1 + s^2)^3} \, \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Ma vediamolo in dettaglio

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s &= -\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{-4s}{\left(1+s^2\right)^3}\,s^3\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\left(1+s^2\right)^2}\right)s^3\,\mathrm{d}s \\ &= -\left[\frac{1}{4}\frac{s^3}{\left(1+s^2\right)^2}\right]_0^\infty + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^2} = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{s^2\left(1+s^2\right)}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

ovvero

$$3\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s.$$

Verifichiamo la (A.14).
Dopo aver effettuato il cambio di variabile $r = |x|$, si ha

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_6^6 &= \omega\int_0^1 \frac{|\varphi(r)|^6 r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}\,\mathrm{d}r \\ &= \omega\int_0^1 \frac{\left(|\varphi(r)|^6-1\right)r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}\,\mathrm{d}r + \omega\int_0^1 \frac{r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}\,\mathrm{d}r = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Poiché $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$ otteniamo

$$|I_1| \le C\int_0^1 \frac{r^4}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}\,\mathrm{d}r = O(\varepsilon^{-1/2}).$$

Inoltre

$$I_2 = \frac{\omega}{\varepsilon^{3/2}}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}} \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\mathrm{d}s = \frac{\omega}{\varepsilon^{3/2}}\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\mathrm{d}s + O(1).$$

Infine troviamo

$$\|u_\varepsilon\|_6^6 = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left[\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s + O(\varepsilon)\right].$$

La (A.14) segue scegliendo

$$K_2 = \left[\omega\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}\,\mathrm{d}s\right]^{1/3} = \|U\|_6^2.$$

Verifichiamo la (A.15).
Abbiamo

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega\int_0^1 \frac{|\varphi(r)|^2 r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)}\,\mathrm{d}r = \omega\int_0^1 |\varphi(r)|^2\,\mathrm{d}r + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Combinando le (A.13), (A.14) e (A.15) otteniamo

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + \varepsilon^{1/2}\frac{\omega}{K_2}\left[\int_0^1 |\varphi'(r)|^2\,\mathrm{d}r - \lambda\int_0^1 |\varphi(r)|^2\,\mathrm{d}r\right] + O(\varepsilon). \tag{A.20}$$

Scegliendo $\varphi(r) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi r\right)$ abbiamo

$$\int_0^1 |\varphi'(r)|^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\pi^2\int_0^1 |\varphi(r)|^2\,\mathrm{d}r$$

e quindi

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + \left(\frac{1}{4}\pi^2 - \lambda\right)C\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)$$

per qualche costante positiva C. La tesi segue scegliendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo. □

Lemma A.5. Non esistono soluzioni della (3.8) per $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$.

Dimostrazione. Sia u una soluzione del problema (3.8), dove

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| < 1\}.$$

Come mostrato in [Gi-Ni-Ni], u deve essere a simmetria sferica. Ponendo $r = |x|$, scriveremo $u(x) = u(r)$. Poiché la u risolve la (3.8), si ha

$$-\Delta u = -u'' - \frac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u \quad \text{in } (0,1), \tag{A.21}$$

$$u'(0) = u(1) = 0. \tag{A.22}$$

La condizione su $u'(0)$ segue dal fatto che, essendo u radiale, vale

$$u'(0) = u_x(0,0)\cos\theta + u_y(0,0)\sin\theta \quad \text{per ogni } \theta \in [0,2\pi].$$

Vogliamo provare che

$$\int_0^1 u^2\left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right)r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_0^1 u^6\left(r\psi - r^2\psi'\right)\,\mathrm{d}r + \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1) \tag{A.23}$$

per qualche funzione liscia ψ tale che $\psi(0) = 0$; l'identità di Pohozaev (teorema 1.27) corrisponde al caso $\psi(r) = r$.
Per prima cosa moltiplichiamo la (A.21) per $r^2\psi u'$, ottenendo facilmente

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u'|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\,\mathrm{d}r - \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1) &= \\ = -\frac{1}{6}\int_0^1 u^6(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r - \frac{1}{2}\lambda\int_0^1 u^2(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{A.24}$$

In seguito moltiplichiamo la (A.21) per $\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)u$, ottenendo, dopo aver integrato per parti,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u'|^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi''' \,\mathrm{d}r = \\ = \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{A.25}$$

A questo punto, combinando la (A.24) con la (A.25) otteniamo proprio la (A.23). Già sappiamo che non esistono soluzioni per la (3.8) quando $\lambda \le 0$. Per questo motivo possiamo supporre che $0 < \lambda \le \frac{1}{4}\lambda_1 = \frac{1}{4}\pi^2$. Nella (A.23) scegliamo $\psi(r) = \sin\left((4\lambda)^{1/2}r\right)$. Si ha $\psi(1) \ge 0$ e

$$\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi''' = 0.$$

Inoltre

$$r\psi - r^2\psi' = r\sin\left((4\lambda)^{1/2}r\right) - r^2(4\lambda)^{1/2}\cos\left((4\lambda)^{1/2}r\right) > 0 \quad \text{in } (0,1],$$

perché $\sin\theta - \theta\cos\theta > 0$ per ogni $\theta \in (0,\pi]$. Ma questo contraddice la (A.23).

Per completezza, mostriamo nel dettaglio la validità delle (A.24) e (A.25).
Per la (A.24)

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^1 (2u''u')\,(r^2\psi)\,\mathrm{d}r &= -\frac{1}{2}\Big[|u'|^2 r^2\psi\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1) + \int_0^1 |u'|^2\left(r\psi + \frac{1}{2}r^2\psi'\right)\mathrm{d}r;\end{aligned}$$

sommando a $-2\int_0^1 |u'|^2 r\psi\,\mathrm{d}r$ otteniamo il primo membro della (A.24).

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int_0^1 (6u^5u')\,(r^2\psi)\,\mathrm{d}r &= \left[u^6r^2\psi\right]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 u^6(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{1}{6}\int_0^1 u^6(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda\int_0^1 (2uu')\,(r^2\psi)\,\mathrm{d}r &= \left[u^2r^2\psi\right]_0^1 - \frac{1}{2}\lambda\int_0^1 u^2(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{1}{2}\lambda\int_0^1 u^2(2r\psi + r^2\psi')\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Per la (A.25)

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^1 u''u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r\\
&=-\left[u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\right]_0^1+\int_0^1\left(|u'|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)+u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi''-\psi\right)\right)\,\mathrm{d}r\\
&=\int_0^1|u'|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r+\left[\frac{1}{2}u^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi''-\psi\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}u^2\left(r\psi''+\frac{1}{2}r^2\psi'''-\psi'\right)\,\mathrm{d}r\\
&=\int_0^1|u'|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r-\frac{1}{4}\int_0^1u^2r^2\psi'''\,\mathrm{d}r-\int_0^1\frac{1}{2}u^2(r\psi''-\psi')\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1\frac{2}{r}u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r&=-\int_0^1u'u(r\psi'-2\psi)\,\mathrm{d}r\\
&=-\frac{1}{2}\left[u^2(r\psi'-2\psi\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1u^2(\psi'+r\psi''-2\psi')\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Sommando queste due espressioni otteniamo

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 u''u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r-\int_0^1\frac{2}{r}u'u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r\\
=\int_0^1|u'|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r-\frac{1}{4}\int_0^1u^2r^2\psi'''.
\end{aligned}
$$

Infine

$$
\int_0^1 u^5u\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r=\int_0^1u^6\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)\,\mathrm{d}r.
$$

Ricomponendo il tutto otteniamo la (A.25). □

Il caso generale

Lemma A.6. Supponiamo che $f(x,u)$ soddisfi le condizioni (3.15)-(3.18). Sia inoltre $h(u)$ una funzione tale che

$$
f(x,u)\geq h(u)\geq 0\quad\text{per q.o. } x\in\omega,\quad\text{per ogni } u\geq 0, \tag{A.26}
$$

dove $\omega\subset\Omega$ è un aperto non vuoto e la primitiva $H(u)=\int_0^u h(t)\,\mathrm{d}t$ è tale che

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right)s^{n-1}\,\mathrm{d}s=\infty. \tag{A.27}
$$

Allora vale la condizione (3.22) del teorema 3.10.

Dimostrazione. Per cominciare, ricordiamo che, per l'osservazione 3.11, se $f(x, u) = \lambda u$, la condizione (3.22) diventa

$$\frac{\|\nabla v_0\|_2^2 - \lambda \|v_0\|_2^2}{\|v_0\|_{p+1}^2} < S.$$

Risulta quindi naturale utilizzare una funzione v_0 come quella usata nel lemma 3.2.
Supponiamo che $0 \in \omega$ e fissiamo una funzione test ϕ non negativa tale che $\phi(x) \equiv 1$ per $|x| < R$, dove R è un fissato numero positivo. Poniamo

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{A.28}$$

e

$$v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x)}{\|u_\varepsilon\|_{p+1}}. \tag{A.29}$$

Vogliamo provare che v_ε soddisfa la condizione (3.22) per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo. I calcoli fatti nelle dimostrazioni del 3.2 e del lemma 3.5 mostrano che

$$\|u_\varepsilon\|_{p+1} = \frac{K}{\varepsilon^{(n-2)/4}} + o(1), \qquad n \geq 3, \tag{A.30}$$

con K dipendente solo da n,

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = S + O(\varepsilon^{(n-2)/2}), \qquad n \geq 3, \tag{A.31}$$

$$\|v_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} O(\varepsilon) & \text{se } n \geq 5, \\ O(\varepsilon|\log \varepsilon|) & \text{se } n = 4, \\ O(\varepsilon^{1/2}) & \text{se } n = 3. \end{cases} \tag{A.32}$$

Poniamo $X_\varepsilon = \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2$; allora

$$\Psi(tv_\varepsilon) = \frac{1}{2}t^2 X_\varepsilon - \frac{t^{p+1}}{p+1} - \int_\Omega F(x, tv_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}t^2 X_\varepsilon - \frac{t^{p+1}}{p+1};$$

in particolare $\lim_{t\to+\infty} \Psi(tv_\varepsilon) = -\infty$. Inoltre $\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon)$ è raggiunto per qualche $t_\varepsilon > 0$ (se fosse $t_\varepsilon = 0$ allora $\sup_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon) = 0$ e non ci sarebbe niente da provare). Poiché la derivata della funzione $t \mapsto \Psi(tv_\varepsilon)$ si annulla in $t = t_\varepsilon$, si ha

$$t_\varepsilon X_\varepsilon - {t_\varepsilon}^p - \int_\Omega f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon\,\mathrm{d}x = 0, \tag{A.33}$$

dunque $t_\varepsilon X_\varepsilon - t_\varepsilon^p \geq 0$ e perciò

$$t_\varepsilon \leq {X_\varepsilon}^{1/(p-1)}. \tag{A.34}$$

Poniamo

$$Y_\varepsilon = \sup_{t\geq 0} \Psi(tv_\varepsilon) = \Psi(t_\varepsilon v_\varepsilon).$$

Poiché la funzione

$$t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 X_\varepsilon - \frac{t^{p+1}}{p+1}$$

è crescente sull'intervallo $[0, {X_\varepsilon}^{1/(p-1)}]$, dalla (A.34) segue che

$$Y_\varepsilon = \frac{1}{2}t^2 X_\varepsilon - \frac{{t_\varepsilon}^{p+1}}{p+1} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}{X_\varepsilon}^{(p+1)/(p-1)} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,\mathrm{d}x.$$

Utilizzando la (A.31) otteniamo

$$Y_\varepsilon \leq \frac{1}{n}S^{n/2} + O(\varepsilon^{(n-2)/2}) - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,\mathrm{d}x. \tag{A.35}$$

D'altra parte, proviamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} t_\varepsilon = S^{1/(p-1)}. \tag{A.36}$$

Infatti, per la (A.33)

$$X_\varepsilon - {t_\varepsilon}^{p-1} - \int_\Omega \frac{f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Allora è sufficiente verificare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{A.37}$$

Utilizzando (3.15)-(3.18) si vede che per ogni $\delta > 0$ esiste C tale che

$$|f(x,u)| \leq \delta u^p + Cu \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \quad \text{per ogni } u \geq 0.$$

Infine si ha

$$\left|\int_\Omega \frac{f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right| \leq \delta {t_\varepsilon}^{p-1}\|v_\varepsilon\|_{p+1}^{p+1} + C\|v_\varepsilon\|_2^2 = \delta {t_\varepsilon}^{p-1} + C\|v_\varepsilon\|_2^2,$$

il che implica la (A.37) e quindi la (A.36).

Dalle relazioni (A.36), (A.28)-(A.30), per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha, ricordando le proprietè di Φ,

$$\int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \geq \int_{|x|<R} H\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{(n-2)/2}}\right)\,\mathrm{d}x \tag{A.38}$$

per qualche costante $A > 0$. Dalla (A.35) e dalla (A.38) deduciamo che

$$Y_\varepsilon \leq \frac{1}{n} S^{n/2} + O(\varepsilon^{(n-2)/2}) - \int_{|x|<R} H\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{(n-2)/2}}\right) \mathrm{d}x. \tag{A.39}$$

Proviamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)/2}} \int_{|x|<R} H\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{(n-2)/2}}\right) \mathrm{d}x = \infty \tag{A.40}$$

(che implica, insieme alla (A.39), che $Y_\varepsilon < (1/n)S^{n/2}$ per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, e quindi la tesi).
Si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^{(n-2)/2}} \int_{|x|<R} H\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{(n-2)/2}}\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad = \frac{\omega_n}{\varepsilon^{(n-2)/2}} \int_0^R H\left(\frac{A\varepsilon^{(n-2)/4}}{(\varepsilon + r^2)^{(n-2)/2}}\right) r^{n-1}\, \mathrm{d}r \\
&\qquad = \varepsilon\omega_n \int_0^{R\varepsilon^{-1/2}} H\left(A\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right) s^{n-1}\, \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

dove ω_n è la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$ e $r = \varepsilon^{1/2}s$. Dunque, la (A.40) è equivalente a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_0^{R\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right) s^{n-1}\, \mathrm{d}s = \infty \tag{A.41}$$

Quando $R \geq 1$ la (A.41) è conseguenza della (A.27). Invece, quando $R < 1$, consideriamo

$$Z_\varepsilon = \varepsilon \int_{R\varepsilon^{-1/2}}^{\varepsilon^{-1/2}} H\left(\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{1+s^2}\right)^{(n-2)/2}\right) s^{n-1}\, \mathrm{d}s$$

e osserviamo che, per qualche costante C,

$$|Z_\varepsilon| \leq C\varepsilon H(C\varepsilon^{(n-2)/4})\varepsilon^{-n/2}$$

che è limitato quando $\varepsilon \to 0$: infatti per le condizioni (3.15)-(3.17)

$$H(u) \leq \int_0^u a(x)t + g(x,t)\, \mathrm{d}t \leq Cu^2.$$

Quindi la (A.41) è nuovamente conseguenza della (A.27). □

B | Appendice del capitolo 4

Riportiamo in questa appendice la verifica di alcune uguaglianze presentate nel capitolo 4.

Lemma B.1. Sia $u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva che verifica le ipotesi della proposizione 4.3. Allora

$$\lim_{r \to +\infty} r^{n/p-1} u(r) = 0, \qquad \lim_{r \to 0} r^{n/p-1} u(r) = 0. \tag{B.1}$$

Dimostrazione. Studiamo innanzitutto il caso $r \to +\infty$.
Fissato $N \in \mathbb{N}^+$, per $r > 0$ scriviamo

$$\begin{aligned}
r^{n/p-1} u(r) &= \sum_{k=1}^{N-1} r^{n/p-1} \left((u(kr) - u((k+1)r)) + r^{n/p-1} u(Nr) \right. \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} r^{n/p-1} \int_{kr}^{(k+1)r} |u'(s)| \, \mathrm{d}s + r^{n/p-1} u(Nr) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} r^{(n-1)/p} \, r^{1/p-1} \, \frac{k^{(n-1)/p}}{k^{(n-1)/p}} \int_{kr}^{(k+1)r} |u'(s)| \, \mathrm{d}s + r^{n/p-1} u(Nr) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{r^{1/p-1}}{k^{(n-1)/p}} \int_{kr}^{(k+1)r} s^{(n-1)/p} |u'(s)| \, \mathrm{d}s + r^{n/p-1} u(Nr) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{r^{1/p-1}}{k^{(n-1)/p}} \left(\int_{kr}^{(k+1)r} s^{(n-1)} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} + r^{n/p-1} u(Nr) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^{(n-1)/(p-1)}} \right)^{1-1/p} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \int_{kr}^{(k+1)r} s^{(n-1)} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} + r^{n/p-1} u(Nr) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^{(n-1)/(p-1)}} \right)^{1-1/p} \left(\int_{0}^{+\infty} s^{(n-1)} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Se $N \to \infty$, posto $C = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{(n-1)/(p-1)}\right)^{1-1/p}$, per ogni $r > 0$ ricaviamo

$$r^{n/p-1} u(r) \leq C \biggl(\int_0^{+\infty} s^{(n-1)} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \biggr)^{1/p}.$$

Quindi

$$\lim_{r \to +\infty} r^{n/p-1} u(r) = 0.$$

Studiamo adesso il caso $r \to 0$.
Sia $N \in \mathbb{N}^+$ e $r > 0$. Con lo stesso metodo appena utilizzato

$$\begin{aligned}
(2^{-N}r)^{n/p-1} u(r) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} \left(u(2^{k-N}r) - u(2^{k+1-N}r) \right) + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} \int_{2^{k-N}r}^{2^{k+1-N}r} |u'(s)| \, \mathrm{d}s + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} \frac{\left(2^{k-N}r\right)^{(n-1)/p}}{\left(2^{k-N}r\right)^{(n-1)/p}} \int_{2^{k-N}r}^{2^{k+1-N}r} |u'(s)| \, \mathrm{d}s + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\left(2^{-N}r\right)^{n/p-1}}{\left(2^{k-N}r\right)^{(n-1)/p}} \int_{2^{k-N}r}^{2^{k+1-N}r} s^{(n-1)/p} |u'(s)| \, \mathrm{d}s + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\left(2^{-N}r\right)^{1/p-1}}{2^{k(n-1)/p}} \left(\int_{2^{k-N}r}^{2^{k+1-N}r} s^{n-1} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} \left(2^{k-N}r\right)^{1-1/p} \\
&\qquad + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^{k-k/p}}{2^{k(n-1)/p}} \left(\int_{2^{k-N}r}^{2^{k+1-N}r} s^{n-1} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2^{k-k/p}}{2^{k(n-1)/p}} \right)^{p/(p-1)} \right)^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{2^{k-N}r}^{2^{k+1-N}r} s^{n-1} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} \\
&\qquad + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2^{-k\left(\frac{n-1}{p-1}-1\right)} \right)^{1-1/p} \left(\int_0^r s^{n-1} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p} + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r).
\end{aligned}$$

Posto $C = \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2^{-k\left(\frac{n-1}{p-1}-1\right)}\right)^{1-1/p}$, per ogni $r > 0$ e per ogni $N \in \mathbb{N}^+$

$$\left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r) \leq C \biggl(\int_0^r s^{n-1} |u'(s)|^p \, \mathrm{d}s \biggr)^{1/p} + \left(2^{-N}r\right)^{n/p-1} u(r). \tag{B.2}$$

Sia allora $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che

$$C\left(\int_0^r s^{n-1}|u'(s)|^p \,\mathrm{d}s\right)^{1/p} < \varepsilon \qquad \text{per ogni } r \in [0,\delta].$$

Scegliamo $N_\delta \in \mathbb{N}^+$ in modo che

$$(2^{-N}\delta)^{n/p-1} \sup_{r\in[\delta/2,\delta]} u(r) < \varepsilon \qquad \text{per ogni } N \geq N_\delta.$$

Sia adesso $t \in (0, 2^{-N_\delta}\delta]$. Esiste allora un unico $N \geq N_\delta$ tale che

$$2^{-N-1}\delta \leq t \leq 2^{-N}\delta.$$

Scegliamo in (B.2) $r = 2^N t \in [\delta/2, \delta]$. Allora

$$\begin{aligned} t^{n/p-1}u(t) &\leq C\left(\int_0^{2^n t} s^{n-1}|u'(s)|^p \,\mathrm{d}s\right)^{1/p} + t^{n/p-1}u(2^N t) \\ &\leq \varepsilon + (2^{-N}r^{n/p-1}u(r) \\ &\leq \varepsilon + (2^{-N_\delta}\delta^{n/p-1} \sup_{r\in[\delta/2,\delta]} u(r) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque

$$t^{n/p-1}u(t) < 2\varepsilon \qquad \text{per ogni } t \in (0, 2^{-N_\delta}\delta],$$

ovvero

$$\lim_{t\to 0} t^{n/p-1}u(t) = 0.$$

□

Lemma B.2. Sia $u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva che verifica le ipotesi della proposizione 4.3. Allora

$$\lim_{r\to+\infty} r^{n/p}u'(r) = 0, \qquad \lim_{r\to 0} r^{n/p}u'(r) = 0. \tag{B.3}$$

Dimostrazione. Studiamo il caso $r \to 0$.
Per il lemma precedente, $|u(t)| = o(t^{1-n/p})$ per $t \to 0$. Quindi

$$\int_0^r t^{n-1}|u(t)|^{p^*-1} \,\mathrm{d}t = \int_0^r t^{n-1} o\left(t^{(1-n/p)(p^*-1)}\right) \,\mathrm{d}t = \int_0^r o\left(t^{n/p-2}\right) \,\mathrm{d}t = o(r^{n/p-1}).$$

In particolare, posto

$$\Psi(r) = r^{n-1}|u'(r)|^{p-1}\,\mathrm{sign}(u'(r)),$$

si ha

$$\Psi'(r) = -C_0 r^{n-1}|u(r)|^{p^*-1}\,\mathrm{sign}(u(r)).$$

Quindi, se $0 < s < r$,

$$\Psi(r) - \Psi(s) = -C_0 \int_s^r t^{n-1}|u(t)|^{p^*-1} \operatorname{sign}(u(t)) \, \mathrm{d}t.$$

Da quanto detto segue che

$$\text{esiste } \Psi(0) = \lim_{s \to 0} \Psi(s).$$

Proviamo che $\Psi(0) = 0$.

$$\begin{aligned} |\Psi(0)| &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_0^r |\Psi(t)| \, \mathrm{d}t = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_0^r t^{n-1}|u'(t)|^{p-1} \, \mathrm{d}t \\ &\leq \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \left(\int_0^r t^{n-1}|u'(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{1-1/p} \left(\int_0^r t^{n-1} \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \, o(1) \frac{r^{n/p}}{n^{1/p}} = \lim_{r \to 0} o(r^{n/p-1}) = 0. \end{aligned}$$

Perciò

$$|\Psi(r) \leq C_0 \left| \int_0^r t^{n-1}|u(t)|^{p^*-1} \, \mathrm{d}t \right| = o(r^{n/p-1}).$$

Dunque

$$|u'(r)| = \left(\frac{|\Psi(r)|}{r^{n-1}} \right)^{1/(p-1)} = o\left(r^{\frac{n(1-p)}{p(p-1)}} \right) = o(r^{-n/p}).$$

Quindi

$$\lim_{r \to 0} r^{n/p} u'(r) = 0.$$

Studiamo il caso $r \to +\infty$.
Sia $\varepsilon > 0$. Sia $M > 0$ tale che

$$|u(t)| \leq \varepsilon t^{n/p-1} \qquad \text{per ogni } t \geq M.$$

Allora

$$\begin{aligned} |\Psi(r)| &\leq |\Psi(M) + C_0 \int_M^r t^{n-1}|u(t)|^{p^*-1} \, \mathrm{d}t \\ &\leq |\Psi(M)| + C_0 \varepsilon \int_M^r t^{n/p-2} \, \mathrm{d}t \\ &= |\Psi(M)| + C_0 \varepsilon \left(\frac{r^{n/p-1}}{n/p-1} - \frac{M^{n/p-1}}{n/p-1} \right) \\ &\leq |\Psi(M)| + C \varepsilon r^{n/p-1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} r^{n/p}|u'(r)| &= r^{n/p-(n-1)/(p-1)}|\Psi(r)|^{1/(p-1)} \\ &\leq C_p r^{n/p-(n-1)/(p-1)}|\Psi(M)|^{1/(p-1)} + (C\varepsilon)^{1/(p-1)} r^{n/p-(n-1)/(p-1)} r^{(n/p-1)/(p-1)} \\ &= o(1) C'_p \varepsilon^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\max_{r\to\infty}\lim r^{n/p}|u'(r)| \leq C'_p \varepsilon^{1/(p-1)},$$

da cui

$$\lim_{r\to+\infty} r^{n/p}u'(r) = 0.$$

□

Lemma B.3. Detta

$$f(\xi) = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^p \int_0^1 (1-t)^{n/q}\,(1-\xi t)^{-n}\,\mathrm{d}t, \quad \xi \in (0,1)$$

vale la seguente equazione differenziale (formula (4.33))

$$\xi\,(1-\xi)\,f'(\xi) = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^p + (n-p)\left(\xi - \frac{1}{q}\right) f(\xi).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$f(\xi) = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^p \int_0^1 (1-t)^{n/q}(1-\xi t)^{-n}\,\mathrm{d}t.$$

Cambiamo variabile, ponendo

$$s = \xi\,\frac{1-t}{1-\xi t}.$$

Allora

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^p \int_0^\xi \left(1 - \frac{\xi - s}{\xi(1-s)}\right)^{n/q} \left(1 - \frac{\xi - s}{1-s}\right)^{-n} \frac{1-\xi}{\xi(1-s^2)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^p \int_0^\xi \left(\frac{s(1-\xi)}{\xi(1-s)}\right)^{n/q} \left(\frac{1-\xi}{1-s}\right)^{-n} \frac{1-\xi}{\xi(1-s^2)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^{p-1-n/q}(1-\xi)^{1-n+n/q} \int_0^\xi s^{n/q}(1-s)^{n-2-n/q}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \xi^{p-1-n/q}(1-\xi)^{1-n/p} \int_0^\xi s^{n/q}(1-s)^{n/p-2}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
f'(\xi) = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \Bigg(\left(p-\frac{n}{q}-1\right)\xi^{p-n/q-2}(1-\xi)^{1-n/p}\int_0^\xi s^{n/q}(1-s)^{n/p-2}\,\mathrm{d}s+\\
-\,\xi^{p-n/q-1}\left(1-\frac{n}{p}\right)(1-\xi)^{-n/p}\int_0^\xi s^{n/q}(1-s)^{n/p-2}\,\mathrm{d}s+\\
+\,\xi^{p-n/q-1}(1-\xi)^{1-n/p}\xi^{n/q}(1-\xi)^{n/p-2}\Bigg)\\
= \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \Bigg(\xi^{p-\frac{n}{q}-2}(1-\xi)^{-\frac{n}{p}}\Bigg(\left(p-\frac{n}{q}-1\right)(1-\xi)\int_0^\xi s^{\frac{n}{q}}(1-s)^{\frac{n}{p}-2}\,\mathrm{d}s\ +\\
-\left(1-\frac{n}{p}\right)\xi\int_0^\xi s^{\frac{n}{q}}(1-s)^{\frac{n}{p}-2}\,\mathrm{d}s\Bigg)+\frac{\xi^{p-1}}{1-\xi}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\xi\,(1-\xi)\,f'(\xi)\,q\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^p &= \xi^p+\\
&+\xi^{p-n/q-1}(1-\xi)^{1-n/p}\left(p-\frac{n}{q}-1-\xi\left(p-\frac{n}{q}-\frac{n}{p}\right)\right)\int_0^\xi s^{n/q}(1-s)^{n/p-2}\,\mathrm{d}s\\
&= \xi^p+\xi^{p-n/q-1}(1-\xi)^{1-n/p}\int_0^\xi s^{n/q}(1-s)^{n/p-2}\,\mathrm{d}s\left(p-\frac{n}{q}-1+\xi(n-p)\right)\\
&= \xi^p+\left(p-\frac{n}{q}-1+\xi(n-p)\right)\,f(\xi),
\end{aligned}
$$

e infine

$$
\begin{aligned}
\xi\,(1-\xi)\,f'(\xi)-\frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p\xi^p &= f(\xi)\,\left(p-\frac{n}{q}-1+\xi(n-p)\right)\,f(\xi)\\
&= f(\xi)\,(n-p)\left(\xi-\frac{1}{q}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Bibliografia

[Au] T. AUBIN: *Problemes isoperimetriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. 11, 573-598 (1976).

[Am-Ra] A. AMBROSETTI E P.H. RABINOWITZ: *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14, 349-381 (1973).

[Be-Lo] J. BERGH E J. LÖOFSTRÖM: *Interpolation spaces, an introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 223 (1976).

[Br] H. BREZIS: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer (2011).

[Br-Li] H. BREZIS E E. H. LIEB: *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 88 (1983).

[Br-Ni] H. BREZIS E L. NIRENBERG: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36, 437-477 (1983).

[Br-St] H. BREZIS E W. A. STRAUSS: *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1*, J. Math. Soc. Japan 25, 565-590 (1973).

[Cr-Ta] M. G. CRANDALL E L. TARTAR: *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 78, 385-390 (1980).

[DiB] E. DIBENEDETTO: *Real Analysis*, Birkhäuser (2002).

[Ev] L.C. EVANS: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol.19, American Mathematical Society (1998).

[Gi-Ni-Ni] B. GIDAS, W.N. NI E L. NIRENBERG: *Simmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68, 209-243 (1979).

[Gr] L. GRAFAKOS: *Classical Fourier analysis, 2nd edition*, Graduate Texts in Mathematics, vol.249, Springer (2008).

[H-Li-Po] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA: *Inequalities*, Cambridge University Press (1934).

[Ha] C. G. A. HARNACK: *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*, Teubner, Leipzig, Germany, (1887).

[Kas] M. KASSMANN: *Harnack inequalities: an introduction*, Boundary Value Problems 2007: Article ID 81415 (2007).

[Kaw] B. KAWOHL: *Rearrangement and convexity of level sets in PDE*, Springer-Verlag (1952).

[Le] G. LEONI: *A first course in Sobolev Spaces - Graduate Studies in Mathematatics, vol. 105*, American Mathematical Society (2009).

[Li] E. H. LIEB: *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math. 57, 93-105 (1977).

[Li-Lo] E. H. LIEB E M. LOSS: *Analysis (2a edizione)*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14 (2010).

[Lio] P. L. LIONS: *The concentration-compactness principle in the Calculus of variations. The locally compact case, part 1 and 2*, Riv. Mat. Iberoamericana 1, 145-201, 45-121 (1985).

[Po] S. I. POHOZAEV: *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady 6, 1408-1411 (1965).

[Pr-We] M. H. PROTTER E H. F. WEINBERGER: *Maximum principle in differential equations*, Springer-Verlag (1984).

[Sa] S. SALSA: *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni (2a edizione)*, Springer (2001).

[St] E. STEIN: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, (1970)

[Ta1] G. TALENTI: *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. 110, 353-372 (1976).

[Ta2] G. TALENTI: *Inequalities in rearrangement invariant function spaces*, Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications vol. 5. Prometheus Publishing House, 177-230 (1994).

[Tr] J. L. TROUTMAN: *Variational calculus and optimal control: optimization with elementary convexity (2a edizione)*, Springer (1996).