UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

# IL TEOREMA DI MORSE-SARD NEGLI SPAZI DI SOBOLEV

Relatore:
Prof. PAOLO ACQUISTAPACE

Candidato:
BIAGIO SIMONE MICIELI

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

# Indice

# Introduzione

Il teorema di Morse-Sard afferma che quasi tutti i valori $c$ assunti da una funzione differenziabile sono non critici, cioè in ogni punto $x \in f^{-1}(c)$ la matrice Jacobiana di $f$ ha rango massimo. Questo risultato ha una estrema importanza in vari campi della matematica, dallo studio delle singolarità di varietà ed altri oggetti geometrici all'analisi non lineare, in particolare nella teoria del grado topologico e nella teoria di Morse.
L'enunciato originale è dovuto a Morse [9] e riguarda il caso di funzioni scalari; successivamente Sard [10] estese il risultato a funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Ulteriori estensioni ad applicazioni fra varietà differenziabili paracompatte ed a varietà infinito-dimensionali sono dovute a Smale [12].
In questa tesi ci interessiamo al risultato classico, relativo ad una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ove $\Omega$ è un aperto e $f$ è di classe $C^k$, con $k \geq (n-m+1) \vee 1$. Questo teorema è stato ulteriormente precisato da Sard [11]: egli ha dimostrato che, detto $A_r$ l'insieme dei punti $x$ nei quali il differenziale di $f$ ha rango non superiore a $r$, allora l'immagine $f(A_r)$ ha dimensione di Hausdorff al più $r$. Tuttavia noi non ci occuperemo di questo miglioramento.
Analizzeremo invece una generalizzazione dovuta a de Pascale [4], seguendo però una dimostrazione più semplice ottenuta da Figalli [7]. Questa tesi è dedicata all'esposizione del lavoro di Figalli.
Nel primo capitolo dimostriamo il teorema classico, richiamando o introducendo tutti i concetti necessari, quali la nozione di valore critico, il teorema di Heine-Cantor e alcune proprietà della misura di Lebesgue.
Il secondo capitolo è dedicato agli spazi di Sobolev. Vengono anzitutto ricordati alcuni fatti ben noti, come le nozioni di spazio di Lebesgue $L^p$ e di convoluzione, con le loro caratteristiche basilari ed altre proprietà rilevanti per il seguito; successivamente si definiscono le derivate deboli di una funzione e gli spazi di Sobolev. Si mostra che lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ può essere visto equivalentemente come completamento dello spazio $C^m(\Omega)$ rispetto alla norma di Sobolev, mostrando anche con un controesempio che lo stesso non vale per $C^m(\overline{\Omega})$.
Nel terzo capitolo si espone la dimostrazione dell'estensione agli spazi di

Sobolev del teorema di Morse-Sard classico. Strada facendo si fa uso di alcuni teoremi fondamentali (il teorema di Morrey, il teorema di ricoprimento di Vitali e il teorema di composizione di Kneser-Glaeser), necessari per passaggi cruciali. Di alcuni risultati importanti (come il teorema di Kneser-Glaeser e il teorema di differenziabilità su quasi ogni retta) non viene riportata la dimostrazione, a causa della loro complessità che comporterebbe una lunghezza eccessiva di questo elaborato.

# Capitolo 1

# Il Lemma di Sard: l'enunciato classico

Prima di enunciare e dimostrare il Lemma di Sard abbiamo bisogno di alcune nozioni preliminari.

**Definizione 1.1.** Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ una funzione di classe $C^1(\Omega)$. Un punto $x_0 \in \Omega$ è un **punto critico** per $f$ se $\mathrm{D}f(x_0)$ non ha rango massimo. Poiché questi punti giocano un importante ruolo, introduciamo l'insieme

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : \mathrm{rk}\ \mathrm{D}f(x) < M\},$$

ovvero l'insieme dei punti critici per $f$. Scriveremo $S_f$ per brevità ogniqualvolta l'insieme $\Omega$ è chiaro dal contesto.
Inoltre, un punto $y \in \mathbb{R}^M$ è detto **valore regolare** per $f$ se

$$f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$$

mentre, se ciò non accade, diremo che $y$ è un **valore critico** per $f$.

**Definizione 1.2.** Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ è detta *uniformemente continua* su $\Omega$ se

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \textit{con} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

A tale proposito richiamiamo un importante teorema:

**Teorema 1.3** (di Heine-Cantor)**.** *Sia $f : K \to \mathbb{R}^M$, con $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto. Se $f$ è continua in $K$ allora $f$ è uniformemente continua in $K$.*

A questo punto denotiamo con $\mu_N$ la misura $N$-dimensionale di Lebesgue. Sarà necesserio enunciare alcune proprietà della misura di Lebesgue per poter procedere con la nostra dimostrazione:

- Sia $P$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ della forma $\prod_{i=1}^{N}(a_i, b_i)$. Allora

$$\mu_N(P) = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{N}\mu_1((a_i, b_i)).$$

  In tal caso $P$ è detto *rettangolo $N$-dimensionale.*

- Un sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^N$ ha misura nulla se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile di rettangoli $\{P_i\}$ tale che

$$M \subset \bigcup_i P_i \qquad e \qquad \sum_i \mu_N(P_i) \leq \epsilon.$$

Passiamo ora alla dimostrazione del Lemma di Sard:

**Teorema 1.4** (Lemma di Sard)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ una funzione di classe $C^1$. Allora*

$$\mu_N(f(S_f)) = 0.$$

*Dimostrazione.* Poiché un aperto $\Omega$ può essere scritto come unione numerabile di rettangoli (e in particolare di cubi), è sufficiente mostrare che

$$\mu_N(f(S_f(Q))) = 0$$

per un qualsiasi cubo $Q \subseteq \Omega$; infatti, se $\Omega = \bigcup_i Q_i$ allora

$$f(S_f(\Omega)) = \bigcup_i f(S_f(Q_i)).$$

Sia $\rho$ il lato di $Q$. Poiché $f'$ è uniformemente continua su $Q$ (per ipotesi è continua e $Q$ è compatto, quindi possiamo applicare il teorema di Heine-Cantor), dato $\epsilon > 0$ possiamo trovare $m \in \mathbb{N}$ tale che $|f'(x) - f'(\overline{x})| < \epsilon$ per ogni $x, \overline{x} \in Q$ con $|x - \overline{x}| < \delta = \sqrt{N}\rho/m$ e quindi

$$|f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \leq \int_0^1 |f'(\overline{x} + t(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})||x - \overline{x}|dt \leq$$

$$\leq \epsilon|x - \overline{x}| \quad \forall x, \overline{x} \in Q \quad \text{adiacenti}.$$

Possiamo allora decomporre $Q$ in $r$ cubi $Q^k$ di diametro $\delta$; questi cubi avranno così il lato di lunghezza $\delta/\sqrt{N}$ e quindi $r = m^N$. Inoltre

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + R(x, \overline{x}) \quad \textit{con} \quad |R(x, \overline{x})| \leq \epsilon\delta \quad \textit{per} \quad x, \overline{x} \in Q^k.$$

Supponiamo adesso che $Q^k \cap S_f \neq \emptyset$ e prendiamo $\overline{x} \in Q^k \cap S_f$; sia $A = f'(\overline{x})$ e sia $g(y) = f(\overline{x} + y) - f(\overline{x})$ con $y \in Q^k - \{\overline{x}\}$. Si ha che

$$g(y) = Ay + \tilde{R}(y) \quad \text{con} \quad |\tilde{R}(y)| = |R(\overline{x} + y, \overline{x})| \leq \epsilon\delta \quad \textit{in} \quad Q^k - \{\overline{x}\}.$$

Poiché $A$ non ha rango massimo, sappiamo che $A(Q^k - \{\overline{x}\})$ è contenuto in un sottospazio di $\mathbb{R}^M$ di dimensione $M - 1$. Quindi esiste un vettore unitario $b^1 \in \mathbb{R}^M$ tale che

$$(x, b^1) = \sum_{i=1}^{N} x_i b_i^1 = 0 \qquad \forall x \in A(Q^k - \{\overline{x}\}).$$

Estendiamo $b^1$ ad una base ortonormale $\{b^1, ..., b^M\}$ di $\mathbb{R}^M$; in questa base si ha che $g(y) = \sum_{i=1}^{N} (g(y), b^i) b^i$ e valgono le seguenti maggiorazioni:

$$|(g(y), b^1)| = |(\tilde{R}(y), b^1)| \leq |\tilde{R}(y)||b^1| = |\tilde{R}(y)| \leq \epsilon\delta$$

$$|(g(y), b^i)| \leq |A||y| + |\tilde{R}(y)| \leq |A|\delta + \epsilon\delta \qquad \textit{per} \;\; i = 2, ..., N$$

dove

$$|A| = |(a_{ij})| = \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Ma allora $f(Q^k) = f(\overline{x}) + g(\tilde{Q}^k)$ è contenuto in rettangolo $P_k$ che contiene $f(\overline{x})$ e tale che

$$\mu_N(P_k) = [2(|A|\delta + \epsilon\delta)]^{N-1} \cdot 2\epsilon\delta = 2^N \left(|A| + \epsilon\right)^{N-1} \epsilon\delta^N.$$

Poiché $f'$ è limitata sul cubo più grande $Q$, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $|f'(x)| \leq c$ per ogni $x \in Q$. In particolare $|A| \leq c$. Ma allora

$$f(S_f(Q)) \subset \bigcup_{k=1}^{r} P_k$$

e si ha

$$\sum_{k=1}^{r} \mu_N(P_k) \leq r \cdot 2^N \left(c + \epsilon\right)^{N-1} \epsilon\delta^N = 2^N \left(c + \epsilon\right)^{N-1} \left(\sqrt{N}\rho\right)^N \epsilon,$$

e, per l'arbitrarietà di $\epsilon$, $f(S_f(Q))$ ha misura nulla. $\square$

# Capitolo 2

# Gli spazi di Sobolev

## 2.1 Lo spazio $L^p(\Omega)$

**Definizione 2.1.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $p > 0$. Denotiamo con $L^p(\Omega)$ la classe di tutte le funzioni misurabili $u$, definite su $\Omega$, per le quali vale

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty.$$

In $L^p(\Omega)$ identifichiamo funzioni che coincidono quasi ovunque; gli elementi di $L^p(\Omega)$ sono allora classi di funzioni misurabili che soddisfano la relazione della definizione. Per semplicità, scriveremo che $u \in L^p(\Omega)$ se $u$ soddisfa la relazione della definizione e che $u = 0$ in $L^p(\Omega)$ se $u = 0$ quasi ovunque in $\Omega$. Si vede facilmente che $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale. Inoltre, se $1 \leq p < \infty$, sullo spazio $L^p(\Omega)$ la quantità

$$\|u\|_p = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

definisce una norma, rispetto alla quale $L^p(\Omega)$ è completo.

**Teorema 2.2** (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $p \in ]1, \infty[$ e sia $q$ l'esponente coniugato di $p$, cioè tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Allora per ogni $u \in L^p(\Omega)$ e per ogni $v \in L^q(\Omega)$ si ha $uv \in L^1(\Omega)$ e vale la seguente disuguaglianza:*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

Vediamo adesso una generalizzazione del concetto di spazio $L^p$:

**Definizione 2.3.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Definiamo

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(K) \ \ \forall K \subseteq \Omega \ \ compatto\}\,.$$

## 2.2 Lo spazio $L^\infty(\Omega)$

Una funzione $u$ definita su $\Omega$ è detta *essenzialmente limitata* su $\Omega$ se esiste una costante $K$ tale che $|u(x)| \leq K$ quasi ovunque in $\Omega$. Il più piccolo $K \in \mathbb{R}$ che soddisfa tale relazione è detto *sup essenziale* di $|u|$ su $\Omega$ e si denota con $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$.
Denotiamo con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $u$ che sono essenzialmente limitate su $\Omega$. Come fatto in precedenza, identificheremo funzioni che differiscono su $\Omega$ per un insieme di misura nulla.
Anche sullo spazio $L^\infty(\Omega)$ è definita una norma

$$\|u\|_\infty = \text{ess} \sup_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

rispetto alla quale $L^\infty(\Omega)$ è completo.

## 2.3 Convoluzioni

**Definizione 2.4.** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definiamo *prodotto di convoluzione* tra $f$ e $g$ la quantità

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

E' facile verificare che $f \star g$ è ben definita e che appartiene ancora a $L^1(\mathbb{R}^n)$; inoltre vale la seguente maggiorazione:

$$||f \star g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Una semplice verifica mostra che il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e distributivo rispetto alla somma.
Il prodotto di convoluzione ha interessanti proprietà; in particolare vale il seguente teorema di regolarità.

**Teorema 2.5.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Valgono i seguenti fatti:*

*(i)* *se* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, *allora* $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$||f \star g||_p \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1;$$

*(ii)* *se* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *allora la funzione* $f \star g$ *è uniformemente continua su* $\mathbb{R}^n$*;*

*(iii)* *se* $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *e se* $g, Dg \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *allora* $f \star g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$D^i(f \star g)(x) = f \star (D^i g)(x), \qquad i = 1, ..., n;$$

*(iv)* *se* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *detti* $K_f$, $K_g$, $K_{f\star g}$ *i supporti di* $f$, $g$, $f \star g$ *rispettivamente, vale l'inclusione* $K_{f\star g} \subseteq \overline{K_f + K_g}$.

## 2.4 Mollificatrici

Sia $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty$ definita come segue:

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$.
A questo punto, per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \cdot \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

La funzione $\eta_\epsilon$ è detta *mollificatrice standard*.
Dalla definizione segue subito che $\eta_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; inoltre $\eta_\epsilon(x) \geq 0$ e l'uguaglianza vale se $|x| \geq \epsilon$.
Sia adesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Estendiamo $u(x)$ a zero sul complementare di $\Omega$ e consideriamo il prodotto di convoluzione $\eta_\epsilon \star u$:

**Definizione 2.6.** La funzione

$$u_\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy$$

è detta *mollificazione* o *regolarizzazione* di $u$.

Osserviamo che, in realtà, l'integrale appena scritto non è calcolato su tutto $\mathbb{R}^n$, ma soltanto sull'insieme $\Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |x-y| < \epsilon\}$.
Le mollificatrici godono delle seguenti proprietà: supponiamo che $u$ sia una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ e identicamente nulla q.o. fuori da $\Omega$; allora

(i) se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la funzione $\eta_\epsilon \star u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) se $u \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, la funzione $\eta_\epsilon \star u \in L^p(\Omega)$. Inoltre

$$||\eta_\epsilon \star u||_p \leq ||u||_p \qquad \text{e} \qquad \lim_{\epsilon \to 0^+} ||\eta_\epsilon \star u - u||_p = 0.$$

Per una dimostrazione dettagliata rimandiamo a [3] (capitolo 2, teorema 29).

## 2.5 Gli spazi di Sobolev

A questo punto introduciamo gli spazi di Sobolev di ordine intero, mostrando alcune delle loro più importanti proprietà. Questi spazi sono definiti su un arbitrario aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sono sottospazi vettoriali di $L^p(\Omega)$. In alcuni casi sarà richiesta una certa regolarità per l'insieme $\Omega$; tale regolarità può essere espressa in termini di condizioni geometriche o analitiche che possono essere o non essere soddisfatte dall'aperto dato. In particolare

**Definizione 2.7.** Un aperto $\Omega$ soddisfa *la condizione del cono* se esiste un cono finito $C$ tale che ogni $x \in \Omega$ è vertice di un cono finito $C_x$ congruente a $C$, cioè ottenuto da $C$ tramite movimenti rigidi. Per cono finito di altezza $h > 0$ si intende l'insieme

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 < |x| \leq h, \ \theta(x, v) \leq k/2\},$$

dove $v \in \mathbb{R}^n$ è un vettore con componenti strettamente positive, $0 < k \leq \pi$ e $\theta(x, v)$ è l'angolo tra $x$ e $v$.

Cominciamo con alcune definizioni:

**Definizione 2.8.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si dice che $f$ è $\alpha-$*hölderiana* in $\Omega$, con parametro $\alpha \in ]0, 1]$, se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$\forall x \neq y \in \Omega \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

In particolare, se $\alpha = 1$ allora $f$ è *lipschitziana.*

### 2.5.1 Derivate deboli

Prima di definire la nozione di derivata deobole, ricordiamo che $C_0^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni di classe $C^\infty$ a supporto compatto, cioè nulle al di fuori di ogni compatto contenuto in $\Omega$; da quanto detto in precedenza, esso è denso in $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$.

**Definizione 2.9.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definiamo **derivata debole** $j-$esima di $u$ la funzione $v$ (se esiste) che soddisfa la seguente relazione

$$\int_\Omega v(x)f(x)dx = -\int_\Omega u(x)D^j f(x)dx \qquad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Come semplice conseguenza, se $u$ è derivabile in senso classico, allora la sua derivata $j-$esima $D^j u$ coincide con la derivata debole. Inoltre, con una semplice verifica, si dimostra che se esiste una derivata debole di $u$ allora questa è unica.
Chiaramente è possibile definire derivate deboli di ordine successivo al primo. Per questo motivo, se $\alpha$ è un multi-indice, denoteremo con $D^\alpha u$ la derivata $\alpha$-esima di $u$.

**Definizione 2.10** (Norme di Sobolev)**.** Sia $m$ un intero positivo e sia $p \in [1,\infty]$. Definiamo, per le funzioni $u$ dotate di derivate deboli $D^\alpha u$ (con $1 \leq |\alpha| \leq m$), la seguente norma:

- se $p \in [1,\infty[$

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

- se $p = \infty$

$$\|u\|_{m,p} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty;$$

dove $\|\cdot\|_p$ indica la norma in $L^p(\Omega)$.

**Definizione 2.11** (Spazi di Sobolev)**.** Per ogni intero positivo $m$ e per ogni $p \in [1,\infty]$ definiamo

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}$, munito della norma di Sobolev, è detto **spazio di Sobolev**.

**Osservazione 2.12.** Chiaramente, se $m = 0$, lo spazio $W^{0,p}$ coincide con lo spazio $L^p$ per ogni $p \in [1,\infty[$.

Come fatto in precedenza per gli spazi $L^p$, possiamo definire il concetto di spazio di Sobolev *locale*:

**Definizione 2.13.** Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$. Definiamo

$$W^{m,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(K) \;\; \forall K \subseteq \Omega \;\; compatto\}.$$

### 2.5.2 Derivate forti

Un'altra nozione molto importante è quella di *derivata forte* di una funzione. Scopriremo in seguito che questa nozione è del tutto equivalente a quella di derivata debole.

**Definizione 2.14.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $u \in L^p(\Omega)$. Diciamo che $u$ ha **derivate forti** $v_1, ..., v_n \in L^p(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C^1(\Omega)$ tale che $u_m \to u$ in $L^p$ e $D^i u_m \to v_i$ in $L^p$ per $i = 1, ..., n$. L'insieme delle funzioni che ammettono derivate forti si denota con $H^{m,p}(\Omega)$.

**Osservazione 2.15.** Dalla definizione segue che se una funzione ammette derivate forti, allora ammette anche derivate deboli: infatti se $u \in L^p(\Omega)$ e $v_i$ è l'$i-$esima derivata forte di $u$ allora, per ogni $f \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega u(x)D^i f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m(x)D^i f(x)dx =$$

$$= - \lim_{m\to\infty} \int_\Omega D^i u_m(x) f(x)dx = - \int_\Omega v_i(x)f(x)dx$$

e quindi $v_i$ è l'$i-$esima derivata debole di $u$.

Vogliamo adesso dimostrare che, in realtà, gli insiemi $H^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ coincidono. Per poter fare ciò dobbiamo, in primo luogo, dimostrare che l'insieme $\{\phi \in C^\infty(\Omega) \ : \ ||\phi||_{m,p} < \infty\}$ è denso in $W^{m,p}(\Omega)$. Per prima cosa enunciamo alcuni risultati.

**Teorema 2.16** (Partizioni dell'unità). *Sia $A$ un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}^n$ che ricoprono $A$. Allora esiste una famiglia $\Psi$ di funzioni $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

*(i)* *per ogni $\psi \in \Psi$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \psi(x) \le 1$;*

*(ii)* *se $K$ è un compatto contenuto in $A$, allora è diverso da $0$ in $K$ al più un numero finito di funzioni $\psi \in \Psi$;*

*(iii)* *per ogni $\psi \in \Psi$ esiste $U \in \mathcal{A}$ tale che il supporto di $\psi$ è contenuto in $U$;*

*(iv)* *per ogni $x \in A$ si ha $\sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1$.*

*La famiglia $\Psi$ è detta partizione dell'unità per $A$ subordinata a $\mathcal{A}$.*

Per una dimostrazione dettagliata rimandiamo a [3] (capitolo 3, teorema 15).

**Lemma 2.17** (Mollificazione in $W^{m,p}(\Omega)$)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, $\eta_\epsilon$ la mollificatrice standard e $u \in W^{m,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. Se $\Omega'$ è un sottoinsieme di $\Omega$ aperto e connesso con chiusura contenuta in $\Omega$ allora*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \eta_\epsilon \star u = u \quad in \quad W^{m,p}(\Omega').$$

*Dimostrazione.* Denotiamo con $\partial\Omega$ il bordo di $\Omega$ e con $d(x, A)$ la distanza di un punto $x$ da un insieme $A$.
Sia $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega)$ e sia $\tilde{u}$ l'estensione a zero di $u$ fuori da $\Omega$. Se $f \in C_0^\infty(\Omega')$,

$$\int_{\Omega'} (\eta_\epsilon \star u)(x) D^j f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x-y)\eta_\epsilon(y) D^j f(x) dx dy =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega'} D_x^j u(x-y)\eta_\epsilon(y) f(x) dx dy = -\int_{\Omega'} \eta_\epsilon \star D^j u(x) f(x) dx.$$

Allora $D^j(\eta_\epsilon \star u) = \eta_\epsilon \star (D^j u)$. Poiché $D^j u \in L^p(\Omega)$ per $1 \leq j \leq m$, per la proprietà $(ii)$ delle mollificatrici si ha

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} ||D^j(\eta_\epsilon \star u) - D^j u||_{p,\Omega'} = \lim_{\epsilon \to 0^+} ||\eta_\epsilon \star (D^j u) - D^j u||_{p,\Omega'} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} ||\eta_\epsilon \star u - u||_{m,p,\Omega'} = 0.$$

□

Siamo adesso pronti a dimostrare il seguente

**Teorema 2.18 (H=W).** *Se $1 \leq p < \infty$ allora*

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

*Dimostrazione.* Per l'osservazione 2.15 è sufficiente mostrare che $W^{m,p}(\Omega) \subseteq H^{m,p}(\Omega)$ o, equivalentemente, che l'insieme delle funzione $f \in C^m(\Omega)$ che hanno norma di Sobolev finita è denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e se $\epsilon > 0$ mostreremo che esiste una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$ che differisce da $u$ (in norma) per meno di $\epsilon$; in tal modo lo spazio $C^\infty(\Omega)$ risulta essere denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
Per ogni intero positivo $k$ definiamo

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \ : \ |x| < k \ \text{ e } \ d(x, \partial\Omega) > 1/k\},$$

con la convenzione $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$. Allora

$$\mathcal{A} = \{U_k := \Omega_{k+1} \cap \left(\overline{\Omega_{k-1}}\right)^c, \ k = 1, 2, ...\}$$

è una famiglia di sottoinsiemi aperti di $\Omega$ che ricoprono $\Omega$ stesso. Denotiamo con $\Psi$ una partizione dell'unità per $\Omega$ subordinata a $\mathcal{A}$. Sia $\psi_k$ la somma (finita) delle funzioni $\psi \in \Psi$ il cui supporto è contenuto in $U_k$. Allora

$$\psi_k \in C_0^\infty(U_k) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1 \quad \text{su} \quad \Omega.$$

Se $0 < \epsilon < 1/(k+1)(k+2)$, allora $\eta_\epsilon \star (\psi_k u)$ ha supporto contenuto in

$$\overline{V_k} = \Omega_{k+2} \cap (\Omega_{k-2})^c,$$

e $V_k$ ha chiusura compatta in $\Omega$. Poiché $\psi_k u \in W^{m,p}(\Omega)$, possiamo scegliere $\epsilon_k$ (sempre con $0 < \epsilon_k < 1/(k+1)(k+2)$) in modo che

$$\| \, \eta_{\epsilon_k} \star (\psi_k u) - \psi_k u \, \|_{m,p,\Omega} = \| \, \eta_{\epsilon_k} \star (\psi_k u) - \psi_k u \, \|_{m,p,V_k} < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Sia $f = \sum_{k=1}^\infty \eta_{\epsilon_k} \star (\psi_k u)$. Su ogni sottoinsieme $\Omega'$ a chiusura compatta in $\Omega$, solo un numero finito di addendi può essere zero. Allora $f \in C^\infty(\Omega)$. Per $x \in \Omega_k$ abbiamo

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x) u(x) \qquad \text{e} \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{k+2} (\eta_{\epsilon_j} \star (\psi_j u))(x).$$

Ma allora

$$\| \, u - f \, \|_{m,p,\Omega_k} \le \sum_{j=1}^{k+2} \| \, \eta_{\epsilon_j} \star (\psi_j u) \, \|_{m,p,\Omega} < \epsilon,$$

e per il teorema di convergenza monotona si ha

$$\| \, u - f \, \|_{m,p,\Omega} < \epsilon.$$

□

**Osservazione 2.19.** Il teorema 2.18 non può essere esteso al caso $p = \infty$. Per esempio, se $\Omega = ]-1, 1[ \subset \mathbb{R}$ e se $u(x) = |x|$, allora $u'(x) = x/|x|$ (per $x \neq 0$) e quindi $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Ma $u \notin H^{1,\infty}(\Omega)$. Infatti, se $0 < \epsilon < 1/2$, non esiste una funzione $f$ di classe $C^1(\Omega)$ tale che $\| \, f' - u' \, \|_\infty < \epsilon$; e quindi non è possibile costruire una derivata forte per $u$.

Dopo aver mostrato che un elemento $u$ di $W^{m,p}(\Omega)$ può sempre essere approssimato da funzioni *lisce* su $\Omega$, ci chiediamo se possiamo approssimare $u$ con funzioni di classe $C^k$ *su tutto* $\overline{\Omega}$ (per qualche $k \ge m$). Il seguente esempio mostra che la risposta a questo quesito può essere negativa.

**Esempio 2.20.** Sia $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid 0 < |x| < 1,\; 0 < y < 1\right\}$. Definiamo

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La funzione $u$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$. Tuttavia, fissato $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, non può esistere una funzione $f$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$ tale che $\| u - f \|_{1,p,\Omega} < \epsilon$. Infatti, supponiamo che una tale $f$ esista. Detti $L = [-1, 0] \times [0, 1]$ e $R = [0, 1] \times [0, 1]$, risulta $\overline{\Omega} = L \cup R$. Sappiamo che $\| f \|_{1,L} \leq \| f \|_{p,L} < \epsilon$ e similmente che $\| 1 - f \|_{1,R} < \epsilon$, da cui otteniamo $\| f \|_{1,R} \geq 1 - \epsilon$. Se

$$F(x) = \int_0^1 f(x, y)dy,$$

allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$ (con $-1 \leq a < 0$ e $0 < b \leq 1$) tali che $F(a) < \epsilon$ e $F(b) > 1 - \epsilon$. Se $0 < \epsilon < 1/2$ allora

$$1 - 2\epsilon < F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx \leq \int_{\overline{\Omega}} |D_x f(x, y)|dxdy \leq$$
$$\leq 2^{1/q} \| D_x f \|_{p,\Omega} < 2^{1/q}\epsilon,$$

dove $q$ è l'esponente coniugato di $p$. Ma allora $1 < \epsilon(2 + 2^{1/q})$, il che non è possibile per valori piccoli di $\epsilon$.

In questo esempio, il problema è che l'insieme $\Omega$ giace da entrambi i lati di parte del suo bordo, più precisamente del segmento $\{ 0 \} \times [0, 1]$. Per ovviare a tale problema, formuliamo una condizione sull'insieme $\Omega$ che sarà necessaria per dimostrare che per ogni $k, m$ l'insieme $C^k(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{m,p}(\Omega)$ (per $1 \leq p < \infty$):

**Definizione 2.21.** Un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ soddisfa la *condizione del segmento* se per ogni punto $x \in \partial\Omega$ esistono un intorno $U_x$ e un vettore non nullo $y_x$ tali che, se $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$, allora $z + ty_x \in \Omega$ per ogni $0 < t < 1$.

Se questa condizione è verificata, il bordo di $\Omega$ ha dimensione $n-1$ e l'insieme non può giacere da entrambe le parti del bordo stesso.

**Teorema 2.22.** *Se $\Omega$ soddisfa la condizione del segmento, allora l'insieme delle restrizioni a $\Omega$ delle funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{m,p}(\Omega)$, per $1 \leq p < \infty$.*

Omettiamo la dimostrazione di tale risultato poiché esula dallo scopo di questa tesi; per maggiori dettagli si veda [3] (capitolo 3, teorema 22).
Enunceremo ora un teorema che, pur sembrando un corollario di quanto detto finora, è in realtà un caposaldo della dimostrazione del teorema conclusivo.

**Proposizione 2.23.** *Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto a chiusura compatta e sia $Y : V \to Y(V)$ un diffeomorfismo di classe $C^m$ (denotiamo $X = Y^{-1}$). Se $u \in W^{m,p}(V)$, allora la funzione $\tilde{u}(y) := (u \circ X)(y)$ appartiene a $L^p(V)$ ed esistono le derivate deboli $D^j \tilde{u}(y)$ per $j = 1, ..., n$; in particolare*

$$D^j \tilde{u}(y) = \sum_{i=1}^{n} D^i u(X(y)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y).$$

*Dimostrazione.* Le derivate deboli di $u$ appartengono a $L^p(V)$; allora, per il teorema 2.18, esiste una successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^1(V)$ tale che

$$u_m \to u \qquad \text{e} \qquad D^j u_m \to D^j u \qquad \text{in} \;\; L^p(V)$$

per ogni $j = 1, ..., n$. Denotiamo con $\tilde{u}_m(y) = (u_m \circ X)(y)$: tale funzione è di classe $C^1$ e, per la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$D^j \tilde{u}_m(y) = \sum_{i=1}^{n} D^i u(X(y)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y).$$

Mostriamo che $\tilde{u}_m \to \tilde{u}$ in $L^p(Y(V))$.
Sia $W \subset Y(V)$ un aperto connesso; allora

$$\int_W |\tilde{u}_m(y) - \tilde{u}(y)|\, dy = \int_W |u_m(X(y)) - u(X(y))|\, dy =$$

$$= \int_{X(W)} |u_m(x) - u(x)|\, |DY(x)|\, dx,$$

che tende a zero per $m \to \infty$. In modo analogo, poiché $D^i u_m \to D^i u$ in $L^1(V)$ si ha

$$D^j \tilde{u}_m(y) = \sum_{i=1}^{n} D^i u_m(X(y)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \quad \to \quad \sum_{i=1}^{n} D^i u(X(y)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \quad \text{in} \;\; L^1(V).$$

Ma allora esistono le derivate deboli di $\tilde{u}$: infatti, per ogni $f \in C_0^\infty(V)$, si ha

$$\int_V \left[ \sum_{i=1}^{n} D^i u(X(y)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \cdot f(y) dy \right] = \lim_{m \to \infty} \int_V D^j \tilde{u}_m(y) \cdot f(y) dy =$$

$$= - \lim_{m \to \infty} \int_V \tilde{u}_m(y) \cdot D^j f(y) dy = \int_V \tilde{u}(y) \cdot f(y) dy.$$

$\square$

**Teorema 2.24.** *Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto a chiusura compatta, sia $Y : V \to Y(V)$ un diffeomorfismo di classe $C^m$ (denotiamo $X = Y^{-1}$). Se $u \in W^{m,p}(V)$, allora la funzione $\tilde{u} := u \circ X$ appartiene ancora a $W^{m,p}(V)$; inoltre*

$$c_1 ||u||_{m,p} \leq ||\tilde{u}||_{m,p} \leq c_2 ||u||_{m,p},$$

*dove $c_1$ e $c_2$ sono costanti che non dipendono da $u$, ma esclusivamente dalle norme di $Y$ e $X$ in $C^m$.*

*Dimostrazione.* Per semplicità consideriamo il caso $k = 1$ (il caso $k > 1$ si affronta per induzione).
La funzione $\tilde{u} \in L^1(Y(V))$ soddisfa le ipotesi della proposizione 2.23, perciò esistono tutte le sue derivate deboli. Mostriamo che tali derivate appartengono a $L^p(Y(V))$.
Denotando con $J(x)$ il determinante della matrice $DY(x)$, vale la seguente maggiorazione:

$$\left( \int_{Y(V)} \left| D^i \tilde{u}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} = \left( \int_V \left| \sum_{i=1}^n D^i u(X(y)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \right|^p |J(x)| \, dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left( \max_{x \in V} \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \right| |J(x)|^{1/p} \right) \cdot \left( \int_V \left| D^i u(X(y)) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c \sum_{i=1}^n \left( \int_V \left| D^i u(X(y)) \right|^p dx \right)^{1/p},$$

dove $c = \max_{i,j} \left( \max_{x \in V} \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \right| |J(x)|^{1/p} \right)$ dipende solo dalle norme di $Y$ e $X$ in $C^m$. Inoltre

$$||\tilde{u}||_{W^{m,p}(Y(V))} \leq c_2 ||u||_{W^{m,p}(V)}.$$

Scambiando il ruolo di $u$ e di $\tilde{u}$ si ottiene l'altra disuguaglianza. □

## 2.6 Punti di Lebesgue

Un'altra importante nozione è quella di *punto di Lebesgue*, da cui segue anche la definizione di *punto di densità*:

**Definizione 2.25.** Sia $f$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}^n$ (cioè $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ è finito). Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *punto di Lebesgue* per $f$ se $f(x) \in \mathbb{R}$ e se vale

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Osserviamo che se $f$ è una funzione continua, allora ogni $x \in \mathbb{R}^n$ è di Lebesgue per $f$, mentre se $f$ è una generica funzione sommabile non è detto che i punti di Lebesgue esistano. Un importante teorema, però, mostra che se $f$ è sommabile su $\mathbb{R}^n$ allora quasi ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ è di Lebesgue per $f$. La dimostrazione di questo risultato non è affatto semplice; a tal proposito si veda [6].
Una definizione simile a quella di punto di Lebesgue riguarda insiemi anziché funzioni.

**Definizione 2.26.** Sia $E$ un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice di *densità* per $E$ se

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_n(E \cap B(x,r))}{\mu_n(B(x,r))} = 1.$$

Osserviamo che, se $E$ è un insieme misurabile, allora $x$ è un punto di densità per $E$ se e solo se $x$ è un punto di Lebesgue per la funzione caratteristica di $E$.
A questo punto possiamo introdurre un'altra importante nozione:

**Definizione 2.27.** Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Allora la funzione

$$f^\star(x) = \begin{cases} \lim_{r \to 0} \frac{\int_{B(x,r)} f(y)dy}{\mu_N(B(x,r))} & \text{se tale limite esiste} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è detta *rappresentazione precisa* di $f$.

**Teorema 2.28** (di differenziabilità su q.o. retta)**.**
*(i) Se $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni $k = 1, ..., n$ le funzioni*

$$f^\star_k(x', t) = (..., x_{k-1}, t, x_{k+1}, ...)$$

*sono assolutamente continue in $t$ su ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ ($x'$ è il vettore $x$ senza la $k-$esima componente). Inoltre $(f^\star_k)' \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

*(ii) Viceversa, supponiamo $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $f = g$ q.o., dove per ogni $k = 1, .., n$ le funzioni*

$$g_k(x', t) = g(..., x_{k-1}, t, x_{k+1}, ...)$$

*sono assolutamente continue in $t$ su ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ per quasi ogni punto $x'$ definito in precedenza e $g'_k \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Allora $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Per completezza è bene richiamare la nozione di funzione assolutamente continua:

**Definizione 2.29.** Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è detta *assolutamente continua* in $[a, b]$ se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $]\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, ..., k$, contenuti in $[a, b]$ e verificanti la condizione $\sum_{i=1}^{k}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulta $\sum_{i=1}^{k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$.

# Capitolo 3

# Il teorema di Morse-Sard negli spazi di Sobolev

Prima di enunciare e dimostrare il nostro teorema abbiamo bisogno di alcuni strumenti.

**Teorema 3.1** (di Morrey)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$. Allora per ogni palla $B = B(x_0, \frac{d}{2})$ tale che la palla $B(x_0, \frac{3}{2}d)$ è contenuta in $\Omega$ e per ogni $x, y \in B$ esiste una costante $C$, dipendente solo da $n$ e da $p$, tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|\nabla u\|_{L^p(B)} |x - y|^{1-\frac{n}{p}}.$$

*Dimostrazione.* Sia $B \subseteq \Omega$ e siano $x, y \in B$. Chiamiamo $d = |x - y|$ la distanza tra $x$ e $y$ e consideriamo $B_x$ e $B_y$ due palle di raggio $d$ contenute in $\Omega$, centrate rispettivamente in $x$ e $y$. Sia $A = B_x \cap B_y$. Allora si ha

$$\mu_n(A)|u(x) - u(y)| \leq \int_{B_x} |u(x) - u(z)| dz + \int_{B_y} |u(z) - u(y)| dz.$$

Consideriamo il primo addendo (la soluzione per il secondo è del tutto analoga) ed effettuiamo un cambio di variabili passando in coordinate polari; poniamo quindi $z = x + r\omega$ con $r \in [0, d]$ e $\omega \in S^{n-1}$. Otteniamo

$$\int_{B_x} |u(x) - u(z)| dz = \int_0^d \int_{S^{n-1}} |u(x) - u(x + r\omega)| r^{n-1} d\omega dr =$$

$$= \int_0^d \int_{S^{n-1}} \left| \int_0^r \frac{d}{d\rho} u(x + \rho\omega) d\rho \right| r^{n-1} d\omega dr \leq$$

$$\leq \int_0^d \int_{S^{n-1}} \left[ \int_0^r |\nabla u(x + \rho\omega) \cdot \omega| d\rho \right] r^{n-1} d\omega dr =$$

$$= \int_0^d \int_\rho^d \left[ \int_{S^{n-1}} |\nabla u(x+\rho\omega)\cdot\omega|\, d\omega \right] r^{n-1} d\rho dr =$$

$$= \int_0^d \int_{S^{n-1}} |\nabla u(x+\rho\omega)\cdot\omega| d\omega \left( \int_\rho^d r^{n-1} dr \right) d\rho =$$

$$= \int_0^d \frac{d^n - \rho^n}{n} \int_{S^{n-1}} |\nabla u(x+\rho\omega)\cdot\omega| d\omega d\rho \leq$$

$$\leq \frac{d^n}{n} \int_0^d \int_{S^{n-1}} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-1}} |\nabla u(x+\rho\omega)\cdot\omega| d\omega d\rho = \frac{d^n}{n} \int_{B_x} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz.$$

A questo punto osserviamo che, poiché $p > n$, il suo esponente coniugato $q$ verifica la relazione $(n-1)q < n$. Applichiamo allora la disuguaglianza di Hölder dando peso $p$ al numeratore e peso $q$ al denominatore. Si ha che

$$\frac{d^n}{n} \int_{B_x} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \leq \frac{d^n}{n} \left( \int_{B_x} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_x} \frac{1}{|z-x|^{(n-1)q}} dz \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il primo integrale è la norma di $\nabla u$ in $L^p(B_x)$; vediamo invece cos'è il secondo integrale: effettuando un nuovo cambio di variabili in coordinate polari si ha che

$$\left( \int_{B_x} \frac{1}{|z-x|^{(n-1)q}} dz \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_0^d \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{r^{(n-1)q}} dr d\omega \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left( \omega_n \int_0^d r^{(n-1)(1-q)} \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\omega_n d^{\frac{1+(n-1)(1-q)}{q}}}{(n-1)(1-q)+1}$$

dove $\omega_n$ indica la misura $(n-1)-$dimensionale di $S^{n-1}$. Osserviamo che l'integrale è risolubile perché l'esponente $(n-1)(1-q) > -1$ (infatti $q < n/(n-1)$). Ricomponendo tutti i pezzi otteniamo che

$$\int_{B_x} |u(x) - u(z)| dz \leq \|\nabla u\|_{L^p(B_x)} \cdot C' \cdot d^{n+1-\frac{n}{p}}.$$

Ma allora

$$\mu_n(A)|u(x) - u(y)| \leq 2\omega_n d^{n+1-\frac{n}{p}};$$

d'altra parte si ha

$$\mu_n(A) \geq C'' d^n,$$

e possiamo allora concludere, in quanto

$$C'' d^n |u(x) - u(y)| \leq \mu_n(A)|u(x) - u(y)| \leq C' d^{n+1-\frac{n}{p}}$$

ovvero

$$|u(x) - u(y)| \leq C'' d^{1-\frac{n}{p}} \left( \|\nabla u\|_{L^p(B_x)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_y)} \right) \leq$$

$$\leq C|y - x|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B)}$$

dove $B$ è una palla contenuta in $\Omega$ che contiene $x$ e $y$. □

**Osservazione 3.2.** Questo teorema si può generalizzare nel seguente modo: se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, con $p > n$, possiamo applicare il teorema di Morrey a tutte le funzioni $D^\alpha u$ con $|\alpha| \leq k - 1$. Quello che otteniamo è che $u \in C^{k-1,1-\frac{n}{p}}$.

**Corollario 3.3.** *Sia $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, con $\alpha > 1$ e sia $k$ la parte intera inferiore di $\alpha$. Allora le funzioni $D^\beta u$ con $|\beta| = k$ sono $(\alpha - k) -$ hölderiane.*

Questa teorema fornisce, quindi, un'immersione di $W^{1,p}$ in $C^{0,\alpha(p)}$, con $\alpha(p) = 1 - \frac{n}{p}$, e più in generale un'immersione di $W^{l,p}$ in $C^{l-1,\alpha(p)}$.

**Definizione 3.4.** Siano $s, r$ due interi positivi, con $s < r$, e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Una funzione $f \in C^r(A)$ è detta $s - flat$ su $A$ se

$$D^j f(x) = 0 \ \ per \ \ j = 1, ..., s \quad \forall x \in A.$$

**Teorema 3.5** (di composizione di Kneser-Glaeser Rough)**.** *Siano $W \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti; siano $A^* \subset W$ e $A \subset V$ con $A$ chiuso in $V$; sia $f : V \to \mathbb{R}^p$ una funzione di classe $C^r(V)$ e $s - flat$ su $A$; sia $g : W \to V$ una funzione di classe $C^{r-s}(W)$ con $g(A^*) \subset A$. Allora esiste una funzione $H : W \to \mathbb{R}^p$ di classe $C^r(W)$ tale che:*

*(i) $H(x) = f(g(x))$ $\forall x \in A^*$;*

*(ii) $H$ è $s - flat$ su $A^*$.*

Per la dimostrazione di questo teorema si applica il teorema di estensione di Whitney. Differenziando l'identità $H = f \circ g$, si scrivono le derivate di $H$ in $A^*$ e si verifica che sono soddisfatte le iptesi del teorema di Whitney (per maggiori dettagli, si veda [1] teoremi 13.2 e 14.1).

**Teorema 3.6** (di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di palle chiuse non degeneri in $\mathbb{R}^N$ con*

$$\sup\{diam(B) \ : \ B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

*Allora esiste una famiglia al più numerabile $\mathcal{G}$ di palle disgiunte di $\mathcal{F}$ tale che*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \tilde{B},$$

*dove $\tilde{B}$ è la palla che ha lo stesso centro di $B$ e raggio pari a 5 volte il raggio di $B$.*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$D := \sup\{\text{diam}(B) \ : \ B \in \mathcal{F}\}$$

e poniamo

$$\mathcal{F}_j = \{B \in \mathcal{F} \ : \ D/2^j < \text{diam}(B) \leq D/2^{j-1}\} \quad \text{con} \quad j = 1, 2, ...$$

. Sia, inoltre, $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$ definito nel seguente modo:

(i) $\mathcal{G}_1$ è una collezione massimale di palle disgiunte contenute in $\mathcal{F}_1$.

(ii) Supponiamo di aver scelto $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_{k-1}$; $\mathcal{G}_k$ è allora una sottofamiglia massimale di elementi disgiunti di

$$\left\{ B \in \mathcal{F}_k \ : \ B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j \right\}.$$

Possiamo allora definire $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_j$. Una semplice verifica mostra che $\mathcal{G}$ è una famiglia di palle disgiunte contenuta in $\mathcal{F}$.
A questo punto fissiamo $B \in \mathcal{F}$. Esiste allora un indice $j$ tale che $B \in \mathcal{F}_j$. Per la massimalità di $\mathcal{G}_j$, esiste una palla $B' \in \bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{G}_k$ tale che $B \cap B' = \emptyset$. Ma $\text{diam}(B') \geq D/2^j$ e $\text{diam}(B) \leq D/2^{j-1}$; quindi $\text{diam}(B) \leq 2\text{diam}(B')$. Allora $B \subset \tilde{B}'$, e, ripetendo questo procedimento per ogni palla $B \in \mathcal{F}$, si ha la tesi. □

**Teorema 3.7** (di Morse-Sard)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione in $W^{n-m+1,p}_{loc}(\Omega)$ con $p > n > m$. Allora l'insieme dei valori critici di $f$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^m$.*

*Dimostrazione.* Per prima cosa osserviamo che, poiché è sufficiente dimostrare il teorema per funzioni $f$ ristrette ad ogni compatto di $\Omega$, possiamo assumere l'ipotesi che $\Omega$ sia limitato e che $f \in W^{n-m+1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
Cominciamo allora con la nostra dimostrazione. Per semplificare la notazione, chiamiamo $k := n - m + 1$; poiché $n > m$ si ha $k \geq 2$. Sia $C_f$ l'insieme dei punti critici per $f$; definiamo gli insiemi

$$A_s := \left\{ x \in \Omega : D^i f(x) = 0 \ \text{ per } \ 1 \leq i \leq s \right\}, \qquad 1 \leq s \leq n - m;$$

e

$$K := \{x \in \Omega : 1 \leq \text{rk}(Df(x)) \leq m - 1\}.$$

In questo modo risulta

$$C_f = K \cup ((A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup ... \cup (A_{n-m-1} \setminus A_{n-m}) \cup A_{n-m}).$$

La nostra dimostrazione si svilupperà in tre passi.

(i) Ci ridurremo al caso $K = \emptyset$ e che quindi $C_f = \{Df = 0\}$;

(ii) Dimostreremo che $\mu_m(f(A_{n-m})) = 0$.

Questo concluderà la dimostrazione nel caso $n = m + 1$ (poiché, in questo caso, $C_f = K \cup A_1$); possiamo quindi iniziare una dimostrazione per induzione su $n - m$. Infatti, assumendo $(ii)$ possiamo dimostrare che il teorema vale per funzioni in $W^{n-m,k}$ definite su un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$ e a valori in $\mathbb{R}^m$; in pratica abbiamo abbassato di 1 la dimensione dello spazio di partenza.

(iii) Grazie al teorema della funzione implicita ridurremo la dimensione del nostro problema (da $n$ a $n - 1$) e concluderemo applicando l'ipotesi induttiva.

Esaminiamo tutto nel dettaglio.
(i) *Riduzione a* $K = \emptyset$.
In questa prima parte dimostreremo che, data la funzione $f$, esiste un diffeomorfismo $X$ tale che la funzione $f \circ X$ soddisfa ancora le ipotesi del teorema, con l'aggiunta che l'insieme $K$, costruito per questa nuova funzione, è vuoto. Sia dunque $K \neq \emptyset$; allora esiste un indice $i \in \{1, ..., m-1\}$ tale che

$$K_i := \{x \in \Omega : \mathrm{rk}(Df(x)) = i\} \neq \emptyset.$$

Fissiamo $\overline{x} \in K_i$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $\det\left(\frac{\partial(f_1,...,f_i)}{\partial(x_1,...,x_i)}\right) \neq 0$ in un intorno $V$ di $\overline{x}$ a chiusura compatta. Sia ora $Y$ la funzione definita come segue:

$$(y_1, ..., y_n) = Y(x) := (f_1(x), ..., f_i(x), x_{i+1}, ..., x_n).$$

Poiché $DY$ è invertibile, possiamo definire

$$Y^{-1}(y) =: X(y) = (\phi_1(y_1, ..., y_i), ..., \phi_i(y_1, ..., y_i), y_{i+1}, ..., y_n).$$

La funzione $f \circ X$ assume così la forma:

$$f(X(y)) = (f_1(X(y)), ..., f_n(X(y))) =$$

$$= (y_1, ..., y_i, f_{i+1}(\phi(y_1, ..., y_1), y_{i+1}, ..., y_n), ..., f_n(\phi(y_1, ..., y_1), y_{i+1}, ..., y_n) =$$

$$=: (y_1, ..., y_i, g_{i+1}(y), ..., g_n(y)),$$

dove $g = (g_{i+1}, ..., g_n) \in W^{k,p}(Y(V), \mathbb{R}^{m-i})$. Ma $Y$, per costruzione, è un diffeomorfismo e, per il teorema 2.24, la composizione di $f$ con $Y^{-1} = X$

appartiene ancora a $W^{k,p}(Y(V))$.
In queste coordinate, si ha che

$$\mathrm{D}(\mathrm{f} \circ X)(y) = \begin{pmatrix} Id_i & 0 \\ * & \frac{\partial(g_{i+1},...,g_n)}{\partial(y_{i+1},...,y_n)} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha ancora rango $i$, perché se avesse rango $i+1$ esisterebbe un minore di $Df$ non nullo di ordine $i+1$. Ma allora $Df(\overline{x})$ avrebbe ancora rango $i+1$, contro l'ipotesi $x \in K_i$.
Supponiamo adesso la tesi del teorema vera per $K = \emptyset$.
Definiamo $h(y_{i+1}, ..., y_n) = g(y_1, ..., y_n)$; si ha chiaramente $Dh = 0$ e, per questo motivo, l'insieme $K$ (relativo a tale funzione) è vuoto. Posto allora $V_{(y_1,...,y_i)} = \{(x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-i} \mid (y_1, ..., y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in V\}$ (questo insieme è il dominio della funzione $g$) si ha $\mu_{m-i}(C_g) = \mu_{m-i}(C_h) = 0$. Possiamo allora dedurre che

$$\int_{f(V\cap K_i)} dx_1 \cdots dx_n = \int_{(f\circ X)(Y(V)\cap Y(K_i))} \left|\det \frac{\partial\phi(y_1,...,y_i)}{\partial(y_1,...,y_i)}\right| dy_1 \cdots dy_n =$$

$$= \int_{V\cap K_i} \left[\int_{g(Y(V)\cap K_i)} dy_{i+1} \cdots dy_n\right] dy_1 \cdots dy_n = 0,$$

ovvero $\mu_m f(V \cap K_i) = 0$. Quindi è sufficiente dimostrare il teorema per funzioni il cui insieme $K$ è vuoto.

(ii) *Dimostriamo che* $\mu_m(f(A_{n-m})) = 0$.
Poiché ci siamo ristretti al caso in cui $\Omega$ è limitato, osserviamo subito che l'insieme $A_{n-m}$ ha misura finita in $\mathbb{R}^n$. Sia $x \in A_{k-1}$ $(n-m = k-1)$ e sia $y \in B(x,r)$, con $r$ sufficientemente piccolo da far stare la palla interamente dentro $\Omega$. Poiché $D^{k-1}f \in W^{1,p}(\Omega)$, per la formula di Taylor con il resto in forma integrale e per il teorema di Morrey si ha che

$$|f(x)-f(y)| \le \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-2}}{(k-2)!}|D^{k-1}f(x+t(y-x))-D^{k-1}f(x)||y-x|^{k-1}dt \le$$

$$\le Cr^{k-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,r)} |D^k f(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1}$$

il che implica

$$|f(y)-f(x)|^m \le Cr^{m\left(k-\frac{n}{p}\right)}\left(\int_{B(x,r)} |D^k f(z)|^p dz\right)^{\frac{m}{p}}.$$

Ora, per la disuguaglianza di Young con esponenti $\frac{p}{p-m}$ e $\frac{p}{m}$, chiamando $r = |x-y|$, otteniamo

$$|f(y)-f(x)|^m \leq C|x-y|^{\frac{pm}{p-m}\left(k-\frac{n}{p}\right)} + C\left(\int_{B(x,|y-x|)} |D^k f(z)|^p dz\right).$$

Poiché $k = n-m+1$ e $m(k-1) \geq k-1$, abbiamo che $km \geq k+m-1 = n$, il che implica $\frac{pm}{p-m}\left(k-\frac{n}{p}\right) \geq n$. Allora, per $|y-x| \leq r \leq 1$, con $x \in A_{k-1}$, abbiamo la seguente stima

$$|f(y)-f(x)|^m \leq C \int_{B(x,r)} (1+|D^k f(z)|^p) dz.$$

Possiamo allora scrivere $A_{n-m} = F_1 \cup F_2$, dove

$$F_1 := \{\text{punti di densità per } A_{n-m}\} \cap \{\text{punti di Lebesgue per } |D^k f(z)|^p\}$$

mentre $F_2 := A_{n-m} \setminus F_1$. Un risultato classico di teoria della misura è che $F_2$ ha misura nulla. Mostriamo allora che anche la sua immagine ha misura nulla.

Fissiamo $\epsilon > 0$ piccolo. Poiché $\mu_n(F_2) = 0$, esiste un aperto $E_\epsilon \supset F_2$ tale che $E_\epsilon \subset \Omega$ e $\mu_m(E_\epsilon) \leq \epsilon$. Per ogni $x \in F_2$ consideriamo $B_x = B(x,r)$ tale che $B_x \subset E_\epsilon$. Definiamo adesso $\rho_x := diam(f(B_x))$ e consideriamo il ricoprimento di $f(F_2)$ dato dalla famiglia $\mathcal{F} = \{B(f(x),\rho_x)\}_{x\in F_2}$. Per il teorema del ricoprimento di Vitali, esiste $\mathcal{G} = \{B(f(x_i),\rho_{x_i})\}_{i\in I}$ famiglia al più numerabile di palle disgiunte di $\mathcal{F}$ tale che

$$F_2 \subset \bigcup_{i\in I} B(f(x_i), 5\rho_{x_i}).$$

Per come è definito $\rho_{x_i}$, si ha che

$$f(B_{x_i}) \subset B(f(x_i),\rho_{x_i}),$$

il che implica che le palle $B_{x_i}$ sono tutte disgiunte. Inoltre, per la maggiorazione vista in precedenza, si ha che

$$\mu_m(f(F_2)) \leq 5^m \sum_{i\in I} \mu_m(B(f(x_i),\rho_{x_i})) = C_m \sum_{i\in I} (diam(f(B_{x_i})))^m \leq$$

$$\leq C \sum_{i\in I} \int_{B_{x_i}} (1+|D^k f(z)|^p) dz \leq C \int_{E_\epsilon} (1+|D^k f(z)|^p) dz,$$

dove abbiamo indicato con $C_m$ la quantità $5^m \mu_m(B(0,1))$. E facendo tendere $\epsilon$ a 0 si ha la tesi.
Mostriamo adesso che la misura di $f(F_1)$ è 0. La stima fatta in precedenza non è più sufficiente. Cerchiamo di stimare la quantità $|f(y) - f(x)|$ sfruttando il fatto che $F_1$ contiene punti di densità dell'insieme $A_{n-m}$. Siano $x, y \in F_1$ e fissiamo $P \in \mathbb{N}$ abbastanza grande. Per ogni $x \in F_1$ esiste $r_x > 0$, abbastanza piccolo, tale che $B(x, 2r_x) \subset \Omega$ e che inoltre

$$\frac{\mu_n(B(x,r_x) \cap F_1)}{\mu_n(B(x,r_x))} = \frac{\mu_n(B(x,r_x) \cap A_{n-m})}{\mu_n(B(x,r_x))} \leq 1 - \frac{1}{2(2P)^n}; \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{\mu_n(B(x,2r_x))} \int_{B(x,2r_x)} (1 + |D^k f(z)|^p) dz \leq 2(1 + |D^k f(z)|^p)$$

e inoltre

$$\frac{1}{2}(1 + |D^k f(z)|^p) \leq \frac{1}{\mu_n(B(x,r_x) \cap F_1)} \int_{B(x,r_x) \cap F_1} (1 + |D^k f(z)|^p) dz;$$

questo è sempre possibile perché $x$ è sia un punto di Lebesgue della funzione integranda che un punto di densità per $F_1$. Da questa equazione si deduce che

$$\begin{aligned} \int_{B(x,2r_x)} (1 + |D^k f(z)|^p) dz &\leq 2^{n+1} \mu_n(B(x,r_x))(1 + |D^k f(z)|^p) \leq \\ &\leq 2^{n+2} \mu_n(B(x,r_x) \cap F_1)(1 + |D^k f(z)|^p) \leq \\ &\leq 2^{n+3} \int_{B(x,r_x) \cap F_1} (1 + |D^k f(z)|^p) dz. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comunque, $\forall y \in F_1 \cap B(x, r_x)$, esistono $P+1$ punti $\{x_0, ..., x_P\} \subset F_1$, con $x_0 = y$ e $x_P = x$, tali che

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \frac{2r_x}{P} \quad \forall\, 1 \leq i \leq P.$$

A questo punto prendiamo $P-1$ punti $y_1, ..., y_{P-1}$ sul segmento di estremi $x$ e $y$ in modo che la distanza tra due punti adiacenti sia esattamente $|y-x|/P$; osserviamo che, per la (3.2), $B(y_i, \frac{r_x}{2P}) \cap F_1$ è non vuota per ogni $i$, quindi possiamo prendere un punto $x_i$ in questo insieme. A causa di ciò, e per la (3.1), si ha che

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^{P} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq C\sum_{i=1}^{P}|x_i-x_{i-1}|^{k-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x_i,\frac{2r_x}{P})}|D^kf(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq C\sum_{i=1}^{P}\left(\frac{2r_x}{P}\right)^{k-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,2r_x)}|D^kf(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}$$

ogniqualvolta $y \in B(x,r_x)$. Utilizzando nuovamente la disuguaglianza di Young otteniamo

$$|f(x)-f(y)|^m \leq CP^{m(1-k+\frac{n}{p})}\int_{B(x,2r_x)}\left(1+|D^kf(z)|^p\right)dz \qquad \forall y\in B(x,r_x).$$

Ma allora, dalla (3.3), otteniamo, per ogni $x \in F_1$,

$$|f(x)-f(y)|^m \leq CP^{m(1-k+\frac{n}{p})}\int_{B(x,r_x)\cap F_1}\left(1+|D^kf(z)|^p\right)dz \qquad \forall y\in B(x,r_x). \tag{3.4}$$

Possiamo adesso concludere la nostra dimostrazione.
Per ogni $x \in F_1$ prendiamo la palla $B_x = B(x,r_x)$, con $r_x$ definito come sopra. Definiamo $\rho_x := diam(f(B_x \cap F_1))$, e consideriamo il ricoprimento di $f(F_1)$ dato da $\mathcal{F} = \{B(f(x),\rho_x)\}_{x\in F_1}$. Utilizzando ancora il teorema di Vitali troviamo un sottoricoprimento $\mathcal{G} = \{B(f(x_i),\rho_{x_i})\}$ al più numerabile di palle disgiunte in $\mathcal{F}$ tale che

$$F_1 \subset \bigcup_{i\in I} B(f(x_i),5\rho_{x_i}).$$

In questo caso, per come è definito $\rho_{x_i}$, abbiamo che

$$f(B_{x_i}\cap F_1)\subset B(f(x_i),\rho_{x_i}),$$

il che implica che gli insiemi $\{B_{x_i}\cap F_1\}$ sono disgiunti. A questo punto, grazie alla (3.4), otteniamo

$$\mu_m(f(F_1)) \leq C\sum_{i\in I}(diam(f(B_{x_i}\cap F_1)))^m \leq$$

$$\leq CP^{m(1-k+\frac{n}{p})}\sum_{i\in I}\int_{B_{x_i}\cap F_1}\left(1+|D^kf(z)|^p\right)dz\leq$$

$$\leq CP^{m(1-k+\frac{n}{p})}\int_{\Omega}\left(1+|D^kf(z)|^p\right)dz,$$

e possiamo concludere facendo tendere $P \to +\infty$, poiché $k \geq 2 > 1+\frac{n}{p}$.

(iii) Dimostriamo che $\mu_m(f(A_{s-1} \setminus A_s)) = 0$ per ogni $2 \leq s \leq k-1$.
Fissiamo $\overline{x} \in A_{s-1} \setminus A_s$. Per dimostrare ciò che vogliamo, è sufficiente mostrare che esiste un intorno aperto a chiusura compatta $V$ di $\overline{x}$ tale che $\mu_m(f(A_{s-1} \setminus A_s \cap V)) = 0$. Ricordiamo che, per quanto già detto, la nostra funzione sta in $C^{k-1,\alpha(p)}$. Ora, poiché $\overline{x} \in A_{s-1}$, $f$ è $(s-1)-flat$ in $\overline{x}$, ma qualche derivata parziale di ordine $s$ è non nulla. Possiamo allora assumere che

$$\partial_n w(\overline{x}) \neq 0, \qquad w(\overline{x}) = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{s-1}} f(\overline{x}) = 0.$$

Osserviamo che $w \in C^{k-1,\alpha(p)}$, e quindi, per il teorema della funzione implicita, esiste un intorno aperto a chiusura compatta $V$ di $\overline{x}$ tale che $V \cap \{w = 0\}$ è grafico $(n-1)-$dimensionale di una funzione in $C^{k-s,\alpha(p)}$, e quindi $V \cap A_{s-1} \subset g(W)$, dove $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ è un aperto e $g : W \to \mathbb{R}^n$ e una funzione $C^{k-s,\alpha(p)}$. Consideriamo adesso il sottoinsieme $A^* := \{x \in W : g(x) \in A_{s-1}\} \subset W$. Per il teorema di composizione di Kneser-Glaeser, esiste una funzione $F : W \to \mathbb{R}^m$ di classe $C^{k-1}$ tale che:

(i) $F(x) = f(g(x))$ per ogni $x \in A^*$;

(ii) $DF(x) = 0$ per ogni $x \in A^*$.

Ma allora $F(A_{s-1} \cap V) \subset F(C_F \cap W)$, dove $C_F$ denota l'insieme dei punti critici per $F$. Così è sufficiente provare che $\mu_m(C_F \cap W) = 0$, e questo segue dall'ipotesi induttiva in quanto

$$F \in C^{k-1}(W; \mathbb{R}^m) \hookrightarrow W^{k-1,p}_{loc}(W, \mathbb{R}^m).$$

□

Prima di concludere è doveroso osservare che si può estendere l'enunciato del teorema al caso $n = m$; in questo caso, però, la dimostrazione discende dalla formula per l'area di funzioni di Sobolev. Per maggiori dettagli si veda [8].

# Bibliografia


[1] R. Abrham and J. Robbin: *Transversal Mappings and Flows*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1967).

[2] P. Acquistapace: *Appunti di analisi funzionale*, http://www.dm.unipi.it/∼acquistp/anafun.pdf

[3] R.A. Adams and J.J.F. Fournier: *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics series, vol.140, Academic Press (2003)

[4] L. de Pascale: *The Morse-Sard teorem in Sobolev spaces*, Indiana Univ. Math. 50 (2001), 1371-1386

[5] K. Deimling: *Nonlinear functional analysis*, Springer (1985)

[6] L.C. Evans and R.F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanded Mathemtics, CRC Press, Boca Ranton, FL (1992)

[7] A. Figalli: *A simple proof of the Morse-Sard theorem in Sobolev spaces*, American Mathemaical Society, vol.136 pagg. 3675-3681 (2008)

[8] J. Maly, D. Swanson and W.P.Ziemer: *The co-area formula for Sobolev mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), no. 2, 477-492.

[9] A.P. Morse: *The behaviour of a function on its critical set*, Annals of Math. 40 (1939), 6270

[10] A. Sard: *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942)

[11] A. Sard: *Hausdorff measure of critical images on Banach manifolds*, Amer. J. Math. 87 (1965)

[12] S. Smale: *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. 87 (1965), 861866