Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Esercizi sul passaggio al limite sotto il segno di integrale

Avvertenza: questo è tutto il materiale che ho, radunato dai miei appunti e da vecchie prove scritte per vari corsi di laurea. Tutta roba che si trova sparsa nel mio sito web. La difficoltà degli esercizi è variabile, alcuni forse li troverete troppo difficili. Per le vostre future prove scritte, ne inventerò degli altri, sperabilmente più facili.

1. Sia f una funzione sommabile sull'insieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Si provi che
$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f|^{1/n}\, dx = m_N(\{f \neq 0\}).$$

2. Posto $f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n$, $x \geq 0$, si dimostri che $f_n \geq f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si determini $\lim_{n\to\infty} f_n$ e si dica se è possibile passare al limite sotto il segno di integrale nei due casi seguenti:
$$\text{(i)} \int_0^\infty f_n(x)e^{x/2}\, dx, \quad \text{(ii)} \int_0^\infty f_n(x)e^{-x/2}\, dx.$$

3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si esibisca una successione $\{f_n\}$ tale che
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dx = \alpha.$$

4. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}|\ln x|\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+p)^2} \quad \forall p > -1,$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \sin x \ln x\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n(2n)!}\,,$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - t}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{1+(n+1)^2} \quad \forall t \in [-1,1],$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x + 1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\,,$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cos\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}\,,$

(vi) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \sin x\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2} \frac{n!}{(2n+1)!}\,,$

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}\,.$

5. Provare che
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq} \qquad \forall p,q>0,$$
e dedurne che
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

6. Provare che
$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-ax^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)} \qquad \forall a\in[-1,1],$$
e dedurne che
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(6n+2)}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{\ln 2}{3\sqrt{3}}\,.$$

7. Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx.$$

8. Sia f una funzione sommabile in $[0,\infty[$, tale che $x^\alpha f(x)$ e $x^\beta f(x)$ siano sommabili per certi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ con $\alpha<\beta$. Si provi che se $\gamma\in[\alpha,\beta]$ anche $x^\gamma f(x)$ è sommabile e che la funzione $F(\gamma)=\int_0^\infty x^\gamma |f(x)|\,dx$ è continua.

9. Stabilire se le funzioni
$$G(x)=\int_{-|x|}^{|x|}\cos\sin tx\,dt, \qquad H(x)=\int_{-|x|}^{|x|}\sin\sin tx\,dt$$
sono derivabili su $\mathbb{R}$, e in tal caso calcolarne la derivata.

10. Si provi questa generalizzazione del teorema di B. Levi: se le funzioni f_n sono misurabili e verificano $f_{n+1}\ge f_n\ge g$, ove g è una funzione sommabile su X, allora posto $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, si ha
$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

11. Esibire una successione $\{f_n\}$ di funzioni misurabili tale che
$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx < \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,dx < \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,dx < \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx.$$
[**Traccia:** per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ponga $f_{2n+1}=\chi_{[1/3,1]}$, $f_{2n+2}=\chi_{[0,1/3]}$.]

12. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili su E, tale che:

 (i) $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in E per $n \to \infty$;

 (ii) $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ q.o. in E per ogni $n \in \mathbb{N}$;

 (iii) $g_n(x) \to g(x)$ q.o. in E per $n \to \infty$;

 (iv) g_n e g sono sommabili su E e $\int_E g_n\,dx \to \int_E g\,dx$ per $n \to \infty$.

 Si provi che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx.$$

13. Determinare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1+x^n}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n \frac{nx^3 + \sin ny}{\frac{n}{y^3} + 2 - \cos nx}\, e^{-x^4-y^4}\,dxdy.$$

14. Si consideri l'insieme E costituito dai punti $x \in [0,1]$ nel cui sviluppo decimale la cifra 7 compare solo un numero finito di volte. Si dimostri che E è misurabile secondo Lebesgue e si calcoli $m_1(E)$.

15. Fissato $\alpha > 1$, si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^n \frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}\,dx.$$

16. Determinare, se esiste, il limite seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx\,e^x - e^{2x}}{x^2\,e^x + n\,e^{3x}}\,dx.$$

17. Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx;$$

 si verifichi poi che la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

 converge puntualmente q.o. in $\mathbb{R}$ ad una funzione misurabile g, la quale non è sommabile su $\mathbb{R}$.

18. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\arctan nx}{1+(n-x)^2}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{x + n\sin x}{n + \sin x}\,dx.$$

19. Per ogni $x \in]0,1]$ sia $0.q_1q_2q_3q_4\ldots$ lo sviluppo decimale di x. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = q_n \text{se } q_n \text{è la prima cifra decimale non nulla di } x.$$

Provare che f è misurabile e calcolare

$$\int_0^1 f\,dx.$$

20. Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \sqrt[n]{n+x^2}\, e^{-\frac{n}{n+1}}\,dx.$$

21. Si consideri la successione di funzioni così definita:

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = f_n(x)^x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad x \in\ .]0,1].$$

Si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

22. Determinare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{e^n + x^n}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1+x^n}\,dx.$$

23. Provare che per ogni $p > 0$ risulta:

$$\int_0^\infty \frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}-1}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(pn+1)^2}\,, \qquad \int_0^\infty \frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}+1}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(pn+1)^2}\,.$$

24. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \frac{n^2xy}{n^2(y-x)+nx+y} \sqrt{\frac{n(y+x)^2 - 4nxy + 2}{n+y+3}}\, e^{-\frac{n(x^2+y^2)}{n-x-y}}\,dxdy,$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y\}$.

25. Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{(2x)^n\,2^{-x}}{1+(2x)^n}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{nx + 3\sqrt{n}\,x^2}{(nx+2)\sqrt{|x-1|}}\,.$$

26. Per ogni $a \in [-\infty, +\infty[$ si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} \frac{x\, e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\, dx.$$

27. Determinare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln|x||^{3n}}{1+x^{2n}+|\ln|x||^{3n}}\, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{n^2x^2+2nx+y}{(1+nx)(1+ny)}\, e^{-x^2-y^2}\, dxdy.$$

28. Determinare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n \frac{nx^3+\sin ny}{\frac{n}{y^3}+2-\cos nx}\, e^{-x^4-y^4}\, dxdy, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3-n^2\sin 2x}{2n^2+x^2}\, e^{-\frac{n}{n+1}\sin x}\, dx.$$

29. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1+x^{\frac{n+1}{n}}+\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}}\, dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{4-\frac{1}{n}} e^{\frac{t^2}{n}} \frac{t^n(4-t)^n}{1+t^n(4-t)^n}\, dt.$$

30. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(n+x^n)}{1+nx^2}\, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}\, dx.$$

31. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{n\to infty} \int_0^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}\, \ln(1+nx)}{1+n^2x^3}\, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx..$$

32. Provare che la funzione

$$g(s,x) = \frac{e^{-s\sqrt{x}}}{1+x^2}$$

è sommabile su $[0,\infty[\times[0,\infty[$; poi, definite per $s>0$ le funzioni

$$f_n(s) = \int_0^n g(s,x)\, dx, \qquad f(s) = \int_0^{\infty} g(s,x)\, dx,$$

si provi che la successione $\{f_n\}$ converge a f puntualmente in $[0,\infty[$, e che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (f(x)-f_n(x))\, ds = 0.$$

33. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \frac{nxyz+n^2}{x^2+y^2+z^2+n^2}\, dxdydz,$$

ove $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.