Esempio: modello epidemico con vaccinazione

In una popolazione, durante un intervallo di tempo limitato, nel quale è trascurabile il numero delle nascite e dei decessi, si sviluppa un'epidemia con tassi di contagio β e di guarigione μ. Dividiamo la popolazione in tre sottogruppi: i suscettibili, gli infetti e i "rimossi", cioè i guariti (i quali non sono più attaccabili dalla malattia). Se denotiamo con $I(t)$, $S(t)$, $R(t)$ le percentuali di infetti, di suscettibili e di rimossi rispetto al totale della popolazione, avremo

$$I(t) + S(t) + R(t) = 1, \qquad I(t) \geq 0,\ S(t) \geq 0,\ R(t) \geq 0,$$

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta\, S(t) I(t) \\ I'(t) = \beta\, S(t) I(t) - \mu\, I(t) \\ R'(t) = \mu\, I(t) \end{cases} , \quad t \in [0,T],$$

e vi saranno le condizioni iniziali $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$ con $S_0 + I_0 + R_0 = 1$, $S_0 \geq 0$, $I_0 \geq 0$, $R_0 \geq 0$.

Volendo intraprendere una campagna di vaccinazione della popolazione suscettibile che renda immediatamente ogni individuo suscettibile immune dalla malattia, e quindi rimosso, è chiaro che il sistema più efficace è quello di vaccinare immediatamente tutti i suscettibili. Ma nella pratica questa strategia richiederebbe enormi risorse materiali e finanziarie. Quindi si cerca una strategia che minimizzi simultaneamente gli infetti, e insieme i costi dell'operazione. Detto allora $u(t)$ il tasso di immunizzazione tramite vaccinazione, si cercherà di minimizzare il funzionale

$$J(u) = \int_0^T \left[I(t) + \frac{A}{2} u(t)^2 \right] dt, \qquad A > 0,$$

sotto il vincolo (in cui l'effetto della vaccinazione genera il termine $-u(t)S(t)$)

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t) I(t) - u(t) S(t) \\ I'(t) = \beta S(t) I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \mu I(t) + u(t) S(t) \\ S(0) = S_0, \ I(0) = I_0, \ R(0) = R_0. \end{cases}$$

Dato che $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, la terza equazione è conseguenza delle altre due. In definitiva il sistema differenziale è

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t) I(t) - u(t) S(t) \\ I'(t) = \beta S(t) I(t) - \mu I(t) \\ S(0) = S_0, \ I(0) = I_0, \qquad S_0 + I_0 \leq 1, \end{cases}$$

ove $u(t)$ è il nostro controllo: si richiede che $0 \leq u(t) \leq 1$. La costante A in J misura l'influenza che l'aspetto economico ha nella scelta della campagna di vaccinazione.

Alcuni aspetti qualitativi delle funzioni $S(t)$, $I(t)$ si ricavano dalla risoluzione delle due equazioni:

$$I(t) = I_0 \, e^{\int_0^t [\beta S(\tau) - \mu] d\tau}, \qquad S(t) = S_0 \, e^{-\int_0^t [\beta I(\tau) + u(\tau)] d\tau}.$$

- Poiché $I_0 \geq 0$, $S_0 \geq 0$, si ha $I(t) \geq 0$ e $S(t) \geq 0$.
- Poiché $I' + S' = -uS - \mu I \leq 0$, si ha $I(t) + S(t) \leq I_0 + S_0 \leq 1$.

- Poichè $u(t) \in [0,1]$, $I(t) \geq 0$, la funzione $S(t)$ è decrescente.
- Se $S_0 \leq \frac{\mu}{\beta}$, siccome $S(t)$ decresce, si ha $S(t) \leq \frac{\mu}{\beta}$ in $[0,T]$ e quindi $I(t)$ decresce.
- Se $S_0 > \frac{\mu}{\beta}$, $I(t)$ cresce fintanto che $S(t) \geq \frac{\mu}{\beta}$, poi decresce.

Il numero $\frac{\beta}{\mu}$ è chiamato numero riproduttivo di base o anche valore di soglia critica e riveste un ruolo chiave in questo genere di modelli: sostanzialmente dice se la malattia è sufficientemente virulenta da riuscire a diffondersi nella popolazione, o se invece il numero di contagi diminuisce da subito, riducendone la pericolosità.

Scegliamo gli spazi di Banach in cui ambientare il teorema di Pontrjagin. Abbiamo visto che, nelle ipotesi fatte,

$$0 \leq I(t) + S(t) \leq 1, \qquad 0 \leq u(t) \leq 1;$$

ma mentre la condizione su I e S è implicata dal sistema, il vincolo sul controllo, dal punto di vista matematico, non è conseguenza delle ipotesi e quindi va imposto a priori.

Poichè gli spazi di Hilbert sono i più comodi per lavorare, scegliamo per le variabili di stato (S, I) lo spazio $[L^2(0,T)]^2$ e per la variabile di controllo lo spazio $L^2(0,T)$.

Abbiamo allora, scrivendo il sistema in forma integrale,

$$J = J(S, I, u) = \int_0^T \left[I(t) + \frac{A}{2} u(t)^2 \right] dt, \quad J : [L^2(0,T)]^3 \to \mathbb{R},$$

$$[\Phi(S,I,u)](t) = \begin{pmatrix} S(t) - S_0 + \int_0^t [\beta S(\tau) I(\tau) + u(\tau) S(\tau)]\, d\tau \\ I(t) - I_0 - \int_0^t [\beta S(\tau) I(\tau) - \mu I(\tau)]\, d\tau \\ u(t) \end{pmatrix}$$

$$K = \{ (S,I,u) \in [L^2(0,T)]^3 : \Phi(S,I,u) \in \{0\} \times \{0\} \times H \},$$

ove

$$H = \{ u \in L^2(0,T) : \ 0 \le u(t) \le 1 \ \text{q.o. in } [0,T] \}.$$

Calcoliamo i differenziali di J e Φ:

$$\langle J'(S,I,u), (\sigma, j, v) \rangle = \int_0^T [j(t) + A u(t) v(t)]\, dt \quad \forall (\sigma,j,v) \in [L^2(0,T)]^3,$$

$$\langle \Phi'(S,I,u), (\sigma,j,v) \rangle = \begin{pmatrix} \sigma(\cdot) + \int_0^{\cdot} [[\beta I(\tau) + u(\tau)]\sigma(\tau) + \beta S(\tau) j(\tau) + S(\tau) v(\tau)]\, d\tau \\ j(\cdot) - \int_0^{\cdot} [\beta I(\tau)\sigma(\tau) + [\beta S(\tau) - \mu] j(\tau)]\, d\tau \\ v(\cdot) \end{pmatrix}$$

$$\forall (\sigma,j,v) \in [L^2(0,T)]^3$$

Verifichiamo che $\Phi'(S,I,u) : [L^2(0,T)]^3 \to [L^2(0,T)]^3$ è surgettiva: si noti che $\Phi'(S,I,u)$ ha la forma $I + K$, ove K è un operatore integrale con nucleo in $L^2(0,T)$, dunque K è compatto; dal teorema dell'alternativa di Fredholm segue che $\Phi'(S,I,u)$ è surgettiva se e solo se è iniettiva: questo accade se e solo se il sistema

$$\begin{cases} \sigma(t) + \int_0^t \left[[\beta I(\tau) + u(\tau)]\sigma(\tau) + \beta S(\tau) j(\tau) + S(\tau) v(\tau) \right] d\tau = 0 \\ j(t) - \int_0^t \left[\beta I(\tau)\sigma(\tau) + [\beta S(\tau) - \mu]\, j(\tau) \right] d\tau = 0 \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla. Ma ciò è vero perché questo sistema equivale a un sistema differenziale <u>lineare</u> in σ e j, con le condizioni $\sigma(0)=0$, $j(0)=0$.

Il problema che stiamo esaminando non è un problema di Bolza, per la presenza del vincolo $0 \le u(t) \le 1$, né rientra nelle ipotesi in cui ci siamo messi per dimostrare il teorema di Pontrjagin: al posto della condizione scalare $g(S,I,u) \in [a,b]$, vi è una condizione puntuale, $0 \le u(t) \le 1$, che si traduce dicendo che $u \in H$, ove $H = \{v \in L^2(0,T) : 0 \le v(t) \le 1 \text{ q.o.}\}$ è un convesso chiuso.

Tuttavia, possiamo ripercorrere la dimostrazione del Teorema di Pontrjagin sotto le nostre attuali ipotesi: il punto di partenza è che, se $(\bar S, \bar I, \bar u)$ è punto di minimo vincolato per J su K, allora per la proposizione 21(ii)

$$-J'(\bar S, \bar I, \bar u) \in N(K, (\bar S, \bar I, \bar u)) = N(\phi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times H)) =$$

$$= \phi'(\bar S, \bar I, \bar u)^* (L^2(0,T) \times L^2(0,T) \times N(H, \bar u)).$$

Ora si ha, per la proposizione 16,

$$u \in N(H, \bar u) \implies \int_0^T u(t) v(t)\, dt \le 0 \quad \forall v \in T(H, \bar u).$$

D'altra parte,

$$T(H,\bar{u}) = \{v \in L^2(0,T) : \exists \{v_n\}, \{t_n\} : t_n \to 0^+, v_n \to v \text{ in } L^2(0,T),$$
$$0 \le \bar{u}(t) + t_n v_n(t) \le 1 \text{ q.o. in } [0,T]\}.$$

Si può supporre, passando a sottosuccessioni, che $v_n(t) \to v(t)$ puntualmente q.o. in $[0,T]$. Allora sull'insieme

$$E_1 = \{t \in [0,T] : \bar{u}(t) = 1\}$$

deve essere $v_n(t) \le 0$ q.o., e quindi sarà $v(t) \le 0$ q.o.; sull'insieme

$$E_0 = \{t \in [0,T] : \bar{u}(t) = 0\}$$

deve essere $v_n(t) \ge 0$ q.o., e quindi sarà $v(t) \ge 0$ q.o.; sull'insieme

$$E = \{t \in [0,T] : 0 < \bar{u}(t) < 1\}$$

sarà $v_n(t)$ arbitraria per n grande, e quindi $v(t)$ arbitraria.

Dunque

$$v \in T(H,\bar{u}) \iff v \in L^2(0,T),\ v \le 0 \text{ q.o. in } E_1,\ v \ge 0 \text{ q.o. in } E_0.$$

Perciò, se $u \in N(H,\bar{u})$ possiamo scrivere per ogni $v \in T(H,\bar{u})$

$$0 \ge \int_0^T u(t)v(t)\,dt = \int_{E_1} u(t)v(t)\,dt + \int_E u(t)v(t)\,dt + \int_{E_0} u(t)v(t)\,dt.$$

Scegliendo v nulla in $E_0 \cup E_1$, deduciamo (utilizzando v e $-v$)

$$0 = \int_E u(t)v(t)\,dt \quad \forall v \in L^2(E),$$

da cui $u = 0$ q.o. in E; scegliendo v nulla in E_1 e $v \ge 0$ in E_0,

otteniamo
$$0 \geq \int_{E_0} u(t)\,v(t)\,dt \qquad \forall v \geq 0,$$
e dunque $u \leq 0$ q.o. in E_0; scegliendo v nulla in E_0 e $v \leq 0$ in E_1, otteniamo
$$0 \geq \int_{E_1} u(t)\,v(t)\,dt \qquad \forall v \leq 0,$$
da cui $u \geq 0$ q.o. in E_1. In definitiva
$$u \in N(H,\bar{u}) \implies u \in M,$$
ove
$$M = \{u \in L^2(0,T) : u=0 \text{ q.o. in } E,\ u \leq 0 \text{ q.o. in } E_0,\ u \geq 0 \text{ q.o. in } E_1\}.$$
Perciò si conclude che
$$-J'(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) \in \phi'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})^* (L^2(0,T) \times L^2(0,T) \times M),$$
e per il teorema di Pontrjagin troviamo tre moltiplicatori $\Lambda_1 \in L^2(0,T)$, $\Lambda_2 \in L^2(0,T)$, $m \in M$ tali che
$$J'(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) + \phi'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})^* (\Lambda_1,\Lambda_2,m) = 0,$$
cioè, per ogni $(\sigma,j,v) \in L^2(0,T)^3$,
$$J'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})(\sigma,j,v) + (\Lambda_1,\Lambda_2,m)\left(\phi'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})(\sigma,j,v)\right) = 0.$$
Scrivendo esplicitamente queste condizioni si arriva, dopo noiosi calcoli, alla relazione seguente:
$$\int_0^T \Big\{ [j(t) + A\bar{u}(t)v(t)] + \Lambda_1(t)\Big[\sigma(t) + \int_0^t \big[[\beta\bar{I}(\tau)+\bar{u}(\tau)]\sigma(\tau) + \beta\bar{S}(\tau)j(\tau) + \bar{S}(\tau)v(\tau)\big]d\tau\Big] +$$
$$+ \Lambda_2(t)\Big[j(t) - \int_0^t \big[\beta\bar{I}(\tau)\sigma(\tau) + [\beta\bar{S}(\tau)-\mu]\,j(\tau)\big]d\tau\Big] + m(t)v(t)\Big\}dt = 0,$$

ovvero, con l'uso del teorema di Fubini-Tonelli,

$$\int_0^T \Big\{ \sigma(\tau)\Big[\Lambda_1(\tau) + [\beta \bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)] \int_\tau^T \Lambda_1(t)\,dt - \beta \bar{I}(\tau) \int_\tau^T \Lambda_2(t)\,dt\Big] +$$

$$+ j(\tau)\Big[1 + \beta \bar{S}(\tau) \int_\tau^T \Lambda_1(t)\,dt + \Lambda_2(\tau) - [\beta \bar{S}(\tau) - \mu] \int_\tau^T \Lambda_2(t)\,dt\Big] +$$

$$+ v(\tau)\Big[A \bar{u}(\tau) + \bar{S}(\tau) \int_\tau^T \Lambda_1(t)\,dt + m(\tau)\Big]\Big\} d\tau = 0 .$$

Ponendo $\lambda_1(\tau) = -\int_\tau^T \Lambda_1(t)\,dt$, $\lambda_2(\tau) = -\int_\tau^T \Lambda_2(t)\,dt$, per l'arbitrarietà di σ, j e v si ricava il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) - [\beta \bar{I}(t) + \bar{u}(t)]\lambda_1(t) + \beta \bar{I}(t)\lambda_2(t) = 0 & \text{q.o. in } [0,T], \\ \lambda_2'(t) - \beta \bar{S}(t)\lambda_1(t) + [\beta \bar{S}(t) - \mu]\lambda_2(t) + 1 = 0 & \text{q.o. in } [0,T], \\ A\bar{u}(t) - \bar{S}(t)\lambda_1(t) + m(t) = 0 & \text{q.o. in } [0,T]. \end{cases}$$

Dunque λ_1 e λ_2 sono soluzioni del sistema retrogrado

$$\begin{cases} (\lambda_1'(t) \;\; \lambda_2'(t)) = -(\lambda_1(t) \;\; \lambda_2(t)) \begin{pmatrix} -[\beta \bar{I}(t) + \bar{u}(t)] & -\beta \bar{S}(t) \\ +\beta \bar{I}(t) & +[\beta \bar{S}(t) - \mu] \end{pmatrix} + (0 \;\; -1) \\ (\lambda_1(T) \;\; \lambda_2(T)) = (0 \;\; 0), \end{cases}$$

mentre, tenuto conto che $m \in M$, la relazione

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{A}\Big[\bar{S}(t)\lambda_1(t) - m(t)\Big]$$

implica

$$1 \doteq \frac{\bar S(t)\lambda_1(t) - m(t)}{A} \leq \frac{\bar S(t)\lambda_1(t)}{A} \quad \text{q.o. in } E_1,$$

$$0 \doteq \frac{\bar S(t)\lambda_1(t) - m(t)}{A} \geq \frac{\bar S(t)\lambda_1(t)}{A} \quad \text{q.o. in } E_0,$$

$$\bar u(t) = \frac{\bar S(t)\lambda_1(t)}{A} \quad \text{q.o. in } E,$$

da cui

$$\bar u(t) = \min\left\{ \max\left\{ \frac{\bar S(t)\lambda_1(t)}{A}, 0 \right\}, 1 \right\} \text{ q.o. in } [0,T].$$

In particolare, se esiste il controllo ottimale, esso è continuo in $[0,T]$, perché $\bar S$ è continua e $\lambda_1' \in L^2(0,T)$.

Si noti che, nel nostro esempio,

$$g(S,I,u) = I + \frac{A}{2}u^2, \quad f(S,I,u) = \begin{pmatrix} -\beta IS - uS \\ \beta IS - \mu I \end{pmatrix},$$

quindi, con $(S,I) = y$,

$$g_y(S,I,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_u(S,I,u) = Au,$$

$$f_y(S,I,u) = \begin{pmatrix} -\beta I - u & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \mu \end{pmatrix}, \quad f_u(S,I,u) = \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si riconosce allora che le condizioni necessarie di ottimalità sono in questo caso, posto $\psi(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$,

$$\begin{cases} \psi'(t) = -\psi(t)\cdot f_y(\bar S(t), \bar I(t), \bar u(t)) - g_y(\bar S(t), \bar I(t), \bar u(t)) \\ g_u(\bar S(t), \bar I(t), \bar u(t)) + \psi(t)\cdot f_u(\bar S(t), \bar I(t), \bar u(t)) + m(t) = 0. \end{cases}$$

Sono le stesse trovate nel caso del problema di Bolza, con una differenza di segno per g_y e g_u e con il moltiplicatore $m(t)$ in più, che nel caso precedente non compariva, non essendovi vincoli sul controllo. Ma il segno del moltiplicatore è irrilevante (bastava denominarlo $-\psi$ invece di ψ), e quindi le equazioni sono le stesse.

Conclusione: se il controllo ottimale $\bar u$ esiste, esso è continuo. Quindi, risolvendo il sistema nelle incognite I, S, lo stato ottimale $(\bar S, \bar I)$ è continuo, anzi C^1.

Ma esiste il controllo ottimale? Prima di fissare una successione minimizzante $\{(I_n, u_n)\}$, cioè tale che $J(I_n, u_n) \to \inf J$, occorre sapere che, dato un controllo u, esiste lo stato (S, I) corrispondente: cioè, occorre saper risolvere un problema di Cauchy 2-dimensionale della forma

$$\begin{cases} y' = F(t, y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$$

ove $F(t, y(t)) := f(y(t), u(t))$ è una funzione misurabile nella prima variabile e continua nella seconda. Qui il teorema di esistenza di Cauchy-Lipschitz non è applicabile.

Fortunatamente, abbiamo a disposizione il seguente teorema, che costituisce anche il punto di partenza per la dimostrazione del teorema di Filippov-Cesari che garantirà l'esistenza della coppia ottimale per una classe molto vasta di problemi n-dimensionali.

<u>Teorema 25</u>. Sia $f: [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione tale che:

(i) $f(\cdot, y)$ è misurabile per ogni $y\in\mathbb{R}^n$;

(ii) $f(x,\cdot)$ è continua per ogni $x\in[a,b]$;

(iii) esistono $S\in L^1(a,b)$, $\varphi:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ continua, positiva e <u>non</u> sommabile in $[0,\infty[$, tali che

$$|f(x,y)| \le \frac{S(x)}{\varphi(|y|)} \quad \forall x\in[a,b],\ \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Allora, per ogni $\xi\in[a,b]$ e per ogni $\eta\in\mathbb{R}^n$ esiste una funzione $y:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, assolutamente continua, tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)) & \text{q.o. in } [a,b], \\ y(\xi) = \eta. \end{cases}$$

Se inoltre esistono $M\in L^1(a,b)$ e $w:]0,\infty[\to\mathbb{R}^+$ continua, tali che

$$|f(x,y+\eta) - f(x,y)| \le M(x)\,w(|\eta|) \quad \forall x\in[a,b],\ \forall \eta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

e se $\int_0^1 \frac{1}{w(t)}\,dt = \infty$, allora la soluzione è unica.

dim. Proviamo anzitutto che

$$y(\cdot) \in C[a,b] \implies f(x,y(x)) \text{ misurabile su } [a,b].$$

Infatti, se $y \in C[a,b]$ esiste una successione $\{y_n\}$ di funzioni costanti a tratti in $[a,b]$, tale che $y_n(x) \to y(x)$ puntualmente in $[a,b]$. Sarà

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_{jn} \, I_{J_{jn}}(x),$$

ove $c_{jn} \in \mathbb{R}$ e gli J_{jn} sono intervalli adiacenti la cui unione è $[a,b]$. Allora possiamo scrivere

$$f(x, y_n(x)) = \sum_{j=1}^{k_n} f(x, c_{jn}) \, I_{J_{jn}}(x),$$

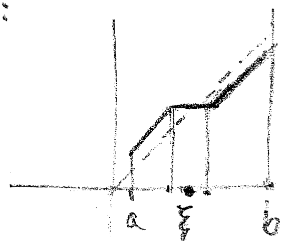
e siccome $x \mapsto f(x, c_{jn})$ è misurabile, tale è anche $f(x, y_n(x))$. Dato che $f(x,y(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x))$, anche $f(x,y(x))$ è misurabile.

Ciò premesso, supponiamo dapprima $\varphi \equiv 1$, cosicché $|f(x,y)| \le S(x)$ in $[a,b] \times \mathbb{R}^n$. Allora, in particolare,

$$y(\cdot) \in C[a,b] \implies f(x,y(x)) \in L^1[a,b].$$

Fissato $\xi \in [a,b]$, poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

$$u_n(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n} & \text{se } a \le x < \xi - \frac{1}{n} \\ \xi & \text{se } \xi - \frac{1}{n} \le x \le \xi + \frac{1}{n} \\ x - \frac{1}{n} & \text{se } \xi + \frac{1}{n} < x \le b, \end{cases}$$



con ovvie modifiche quando $\xi = a$ oppure $\xi = b$.

Proviamo ora che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un'unica $q_n \in C[a,b]$ tale che

$$q_n(x) = \eta + \int_{\xi}^{u_n(x)} f(t, q_n(t))\, dt, \quad x \in [a,b].$$

L'equazione è soddisfatta in $\left[\xi-\frac{1}{n}, \xi+\frac{1}{n}\right]$ da $g_n(x) \equiv \eta$, come è immediato verificare. Supponiamo che per qualche $k \in \mathbb{N}^+$, la g_n sia definita in $\left[\xi-\frac{k-1}{n}, \xi+\frac{k-1}{n}\right]$, e risolva l'equazione in tale intervallo: allora, in particolare, g_n è necessariamente continua in tale intervallo, essendo la funzione integrale di un integrando sommabile. Ma se $x \in \left[\xi-\frac{k}{n}, \xi+\frac{k}{n}\right]$, si ha $u_n(x) \in \left[\xi-\frac{k-1}{n}, \xi+\frac{k-1}{n}\right]$; quindi il secondo membro dell'equazione è ben definito in $\left[\xi-\frac{k}{n}, \xi+\frac{k}{n}\right]$, e dunque $g_n(x)$ risulta ben definita e continua in $\left[\xi-\frac{k}{n}, \xi+\frac{k}{n}\right]$. Ne segue, per induzione su k, che g_n è ben definita e continua in $[a,b]$.

Mostriamo adesso che la successione $\{g_n\}$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà. Le g_n sono equilimitate:

$$|g_n(x)| \leq |\eta| + \left|\int_\xi^{u_n(x)} f(t, g_n(t))\,dt\right| \leq |\eta| + \int_a^b S(x)\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Le g_n sono anche equicontinue: sia $\varepsilon > 0$, e sia $\delta > 0$ tale che

$$|\beta-\alpha| < \delta \implies \left|\int_\alpha^\beta S(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Allora, essendo $|u_n(x)-u_n(x')| \leq |x-x'|$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x, x' \in [a,b]$, si ha per $|\beta-\alpha| < \delta$

$$|g_n(\beta)-g_n(\alpha)| = \left|\int_{u_n(\alpha)}^{u_n(\beta)} f(t, g_n(t))\,dt\right| \leq \left|\int_{u_n(\alpha)}^{u_n(\beta)} S(t)\,dt\right| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Pertanto esiste una sottosuccessione $\{g_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^+} \subseteq \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ tale che $g_{n_k} \to g$ uniformemente in $[a,b]$. Osservato che $|u_n(x)-x| \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in [a,b]$, passando al limite nell'equazione di g_{n_k} si ha per convergenza dominata,

$$g(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, g(t))\, dt \qquad \forall x \in [a,b],$$

ossia g risolve q.o. il problema di Cauchy.

Eliminiamo adesso l'ipotesi $\varphi \equiv 1$. Poiché $\varphi \notin L^1(0,\infty)$, e d'altra parte $\varphi \in L^1(0,A)$ per ogni $A > 0$, esiste $N > |\eta|+1$ tale che

$$\int_{|\eta|+1}^{N} \varphi(t)\, dt > \int_a^b S(x)\, dx.$$

Poniamo

$$g_N(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } x \in [a,b],\ |y| \le N \\ f\left(x, \frac{Ny}{|y|}\right) & \text{se } x \in [a,b],\ |y| > N. \end{cases}$$

È chiaro che g_N soddisfa le stesse ipotesi di f; inoltre $g_N(x,y)$ coincide con un valore assunto da f in $[a,b] \times \{|y| \le N\}$, per cui

$$|g_N(x,y)| \le S(x) \cdot \sup_{0 \le t \le N} \frac{1}{\varphi(t)} \in L^1(a,b).$$

Per quanto già provato, esiste una soluzione y di

$$\begin{cases} y' = g_N(x,y) & \text{q.o. in } [a,b], \\ y(\xi) = \eta. \end{cases}$$

Dimostriamo che $|y(x)| \le N$ in $[a,b]$: ciò implicherà

$$y'(x) = g_N(x, y(x)) = f(x, y(x)) \quad \text{q.o. in } [a,b],$$

e dunque y risolverà il nostro problema.

Supponiamo per assurdo che $\sup_{x \in [a,b]} |y(x)| > N$: allora sarà ad esempio

$$\sup_{x\in[\xi,b]} |y(x)| > N$$

(il discorso è del tutto analogo nel caso $\sup_{x\in[a,\xi]} |y(x)|>N$).

Poniamo

$$\beta = \inf\{x>\xi : |y(x)|=N\}, \quad \alpha = \sup\{x\in[\xi,\beta[: |y(x)| = |\eta|+1\}.$$

Allora si ha

$$|\eta|+1 = |y(\alpha)| \le |y(x)| \le |y(\beta)| = N \quad \forall x\in[\alpha,\beta],$$

cosicché

$$g_N(x, y(x)) = f(x, y(x)) \quad \text{in } [\alpha,\beta].$$

Dunque

$$y(x)\cdot y'(x) = y(x)\cdot f(x,y(x)) \le \frac{|y(x)|\, S(x)}{\varphi(|y(x)|)} \quad \text{q.o. in } [\alpha,\beta],$$

ovvero

$$\varphi(|y(x)|)\,\frac{y(x)}{|y(x)|}\cdot y'(x) \le S(x) \quad \text{q.o. in } [\alpha,\beta].$$

Integrando su $[\alpha,\beta]$, e cambiando variabile ($t=|y(x)|$), si trova

$$\int_{|\eta|+1}^{N} \varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi(|y(x)|)\,\frac{y(x)}{|y(x)|}\cdot y'(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta S(x)\,dx \le \int_a^b S(x)\,dx,$$

il che è assurdo.

Proviamo l'unicità. Siano y_1 e y_2 due soluzioni distinte: quindi, supponendo per esempio che $\sup_{x\in[\xi,b]} |y_1(x)-y_2(x)|>0$, poniamo

$$\gamma = \sup\{x>\xi : y_1(t) = y_2(t)\ \forall t\in[\xi,x]\}.$$

Esiste una successione $\{\gamma_n\}\subseteq\,]\xi,b]$ tale che $\gamma_n \searrow \gamma$, e

$$Y_1(\gamma_n) \neq Y_2(\gamma_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fissiamo n; esiste un intervallo $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$, contenente γ_n, tale che $\gamma \leq \alpha_n < \beta_n \leq b$, con $Y_1(\alpha_n) = Y_2(\alpha_n)$, mentre $|Y_1 - Y_2| > 0$ in I_n.
Si ha allora per ogni $x \in I_n$

$$[Y_1(x) - Y_2(x)] \cdot \frac{d}{dx}[Y_1(x) - Y_2(x)] = [Y_1(x) - Y_2(x)] \cdot [f(x, Y_1(x)) - f(x, Y_2(x))] \leq$$

$$\leq |Y_1(x) - Y_2(x)| \; M(x) \; \omega(|Y_1(x) - Y_2(x)|),$$

da cui

$$\frac{\frac{d}{dx}|Y_1(x) - Y_2(x)|}{\omega(|Y_1(x) - Y_2(x)|)} = \frac{Y_1(x) - Y_2(x)}{|Y_1(x) - Y_2(x)|} \, \frac{1}{\omega(|Y_1(x) - Y_2(x)|)} \, \frac{d}{dx}[Y_1(x) - Y_2(x)] \leq M(x),$$

e integrando su I_n

$$\int_0^{|Y_1(\beta_n) - Y_2(\beta_n)|} \frac{dt}{\omega(t)} = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\frac{d}{dx}|Y_1(x) - Y_2(x)|}{\omega(|Y_1(x) - Y_2(x)|)} \, dx \leq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} M(x)\, dx \leq \int_a^b M(x)\, dx,$$

il che è assurdo, essendo $\frac{1}{\omega}$ non sommabile in ogni intorno destro di 0.
Perciò deve essere $\gamma = b$, ossia $Y_1 = Y_2$ in $[\xi, b]$. Similmente si ottiene $Y_1 = Y_2$ in $[a, \xi]$. $\square$

<u>Osservazione</u> Del teorema 25 esiste anche una versione locale, per la quale si rimanda al libro "Integration" di E. J. McShane, Chapter 9.

Utilizzando il teorema 25, proviamo il seguente risultato:

<u>Teorema 26</u> Sia $H = \{u \in L^2(0,T) : 0 \le u(t) \le 1 \text{ q.o.}\}$. Per ogni $u \in H$ esiste un'unica coppia (S, I) di funzioni assolutamente continue in $[0,T]$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t) I(t) - u(t) S(t), \\ I'(t) = \beta S(t) I(t) - \mu I(t), \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \end{cases} \qquad \text{q.o. in } [0,T],$$

ove $I_0 \ge 0$, $S_0 \ge 0$, $I_0 + S_0 \le 1$.

<u>dim</u>. Notiamo che

$$f(t, S, I) = \begin{pmatrix} -\beta S I - u(t) S \\ \beta S I - \mu I \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T], \ (S, I) \in \mathbb{R}^2$$

è misurabile in t per ogni $(S, I) \in \mathbb{R}^2$ e C^1 in (S, I) per ogni $t \in [0,T]$; però non valgono le ipotesi del teorema 25 perché

$$|f(t, S, I)| \le [2\beta |I| + |u(t)| + \mu] [|S| + |I|],$$

$$|f(t, S, I) - f(t, \tilde{S}, \tilde{I})| \le [2\beta |I| + |u(t)| + 2\beta |\tilde{S}| + \mu] \cdot [|S - \tilde{S}| + |I - \tilde{I}|].$$

Sia allora $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $0 \le \theta(S, I) \le 1$, $\theta(S, I) \equiv 1$ in $\{|S| \le 1, |I| \le 1\}$ e $\theta(S, I) \equiv 0$ in $\{|S| \le 2, |I| \le 2\}^c$.

Posto $\tilde{f}(t,S,I) = f(t,S,I)\,\theta(S,I)$, la funzione $\tilde{f}$ verifica le ipotesi del teorema 25, essendo C^1 a supporto compatto. Quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}' = \tilde{f}(t,S,I) & \text{q.o. in } [0,T], \\ \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ha soluzione unica $(\bar{S},\bar{I})$. Per questa soluzione si ha

$$\bar{I}(t) = I_0\, e^{\int_0^t [\beta S(\tau) - \mu]\,\theta(S(\tau),I(\tau))\,d\tau} \geq 0,$$

$$\bar{S}(t) = S_0\, e^{-\int_0^t [\beta I(\tau) + u(\tau)]\,\theta(S(\tau),I(\tau))\,d\tau} \in [0,S_0],$$

$$\bar{I}'(t) + \bar{S}'(t) = -[u(t)\bar{S}(t) + \mu \bar{I}(t)]\,\theta(\bar{S}(t),\bar{I}(t)) \leq 0,$$

quindi

$$0 \leq \bar{I}(t) + \bar{S}(t) \leq I_0 + S_0 \leq 1 \quad \forall t \in [0,T].$$

Perciò

$$\tilde{f}(t,\bar{S}(t),\bar{I}(t)) = f(t,\bar{S}(t),\bar{I}(t)) \quad \forall t \in [0,T],$$

cosicché $(\bar{S},\bar{I})$ è soluzione del problema che ci interessa. Se $(\tilde{S},\tilde{I})$ è un'altra soluzione dello stesso problema, allora

$$0 \leq \tilde{S}(t) + \tilde{I}(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0,T],$$

da cui $f(t,\tilde{S}(t),\tilde{I}(t)) = \tilde{f}(t,\tilde{S}(t),\tilde{I}(t))$ $\forall t\in[0,T]$;

dunque $(\tilde{S},\tilde{I})$ e $(\bar{S},\bar{I})$ risolvono entrambe il problema che ha per secondo membro $\tilde{f}$. Ne segue $(\tilde{S},\tilde{I})=(\bar{S},\bar{I})$,

e questo conclude la dimostrazione. □

Abbiamo verificato che per ogni controllo $u\in H$ esiste un unico stato (S,I) associato a u.

A questo punto, possiamo risolvere univocamente il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = [\beta I(t) + u(t)]\,\lambda_1(t) - \beta I(t)\,\lambda_2(t), \\ \lambda_2'(t) = \beta S(t)\,\lambda_1(t) - [\beta S(t) - \mu]\,\lambda_2(t) - 1 \\ \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0, \end{cases}$$

ancora grazie al teorema 25.

Proviamo ora che esiste un unico controllo ottimale per il nostro problema epidemico con vaccinazione.

Sia $\{u_n\}\subseteq H$ una successione, sia $\{(S_n,I_n)\}$ la corrispondente successione di stati, e supponiamo che

$$J(I_n,u_n) = \int_0^T \left[I_n(t) + \frac{A}{2}u_n(t)^2\right]dt \to \inf_K J.$$

Allora $\{u_n\}$, essendo limitata in $L^2(0,T)$, ha una sottosuccessione che converge debolmente in L^2 a una funzione $\bar{u}\in H$ (infatti H è un convesso chiuso, dunque debolmente chiuso, di $L^2(0,T)$).

Pertanto

$$\frac{A}{2}\int_0^T \bar{u}(t)^2\,dt \le \liminf_{n\to\infty} \frac{A}{2}\int_0^T u_n(t)^2\,dt.$$

D'altra parte, $\{I_n\}$ e $\{S_n\}$ sono successioni equilimitate $(0 \le I_n + S_n \le 1)$ ed equicontinue (I_n' e S_n' sono limitate). Quindi per il teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di ulteriori sottosuccessioni si ha $S_n \to \bar{S}$, $I_n \to \bar{I}$ uniformemente, e in particolare $\int_0^T I_n(t)\,dt \to \int_0^T \bar{I}(t)\,dt$.

Ne segue

$$J(\bar{I},\bar{u}) \le \lim_{n\to\infty}\int_0^T I_n(t)\,dt + \liminf_{n\to\infty}\frac{A}{2}\int_0^T u_n(t)^2\,dt = \liminf_{n\to\infty} J(I_n,u_n) = \inf J,$$

e dunque $((\bar{S},\bar{I}),\bar{u})$ è ottimale.

Per problemi di controllo più complicati, tuttavia, è necessario un teorema di esistenza del controllo ottimale più generale. Esporremo il teorema di Filippov-Cesari, il quale, pur non essendo esaustivo, è di fondamentale importanza.