<u>Teorema 8</u> Sono fatti equivalenti:

(i) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $y(t) \to 0$ esponenzialmente per $t \to \infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $\omega(A) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$;

(iv) $\int_0^\infty |y(t)|^2 dt < \infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>dim</u> Se vale (i), oppure (iv), supponiamo per assurdo $\omega(A) \geq 0$, osservando che $\omega(A)$ è un massimo perché ci troviamo in dimensione finita. Quindi esiste un autovalore λ di A, con $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Se v è un autovettore, scelto $x = v$ si ha, posto $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \geq 0$,

$$y(t) = e^{\lambda t} v = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t) v,$$

quindi $y(t)$ non è infinitesima a $t \to \infty$ (assurdo), dato che

- se $\beta = 0$, $\quad |y(t)| = e^{\alpha t}|v| \geq |v|$,
- se $\beta > 0$, $\quad |y(t)| \geq e^{\alpha t}\frac{|v|}{2} \geq \frac{|v|}{2} \quad \forall t \in \left[\frac{1}{\beta}\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right), \frac{1}{\beta}\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$, $k \in \mathbb{N}$.

Le stesse maggiorazioni provano che $\int_0^\infty |y(t)|^2 dt = +\infty$, assurdo. Dunque da (i) o (iv) segue (iii).

Se vale (iii), allora ogni autovalore λ_j verifica $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, la soluzione $y(t)$ è combinazione lineare di $e^{\lambda_j t}$ o di $P_h(t)e^{\lambda_j t}$, con P_h polinomio di grado $< n$.

Quindi, ogni soluzione $y(t)$ decade esponenzialmente per $t \to \infty$, cioè vale (ii).

Se vale (ii), ovviamente valgono (i) e (iv). $\square$

Un legame fra osservabilità e stabilità è dato dal seguente teorema:

<u>Teorema 9</u> (i) Sia (A, C) osservabile; se esiste una matrice $Q \geq 0$, tale che
$$A^*Q + QA = -C^*C \qquad \text{(equazione di Lyapunov)}$$
allora A è stabile.
(ii) Se A è stabile, allora per ogni matrice $R = R^*$ l'equazione $A^*Q + QA = -R$ ha una e una sola soluzione $Q = Q^*$; inoltre $R \geq 0$ implica $Q \geq 0$, mentre $R > 0$ implica $Q > 0$ e $(A, \sqrt{R})$ osservabile

<u>dim.</u> (i) Se Q risolve l'equazione di Lyapunov, allora
$$\frac{d}{dt} e^{tA^*} Q e^{tA} = A^* e^{tA^*} Q e^{tA} + e^{tA^*} QA e^{tA} = -e^{tA^*} C^*C e^{tA}.$$
Dunque integrando fra 0 e T
$$e^{TA^*} Q e^{TA} - Q = -\int_0^T e^{tA^*} C^*C e^{tA}\, dt = -R_T,$$
cioè
$$Q = e^{TA^*} Q e^{TA} + R_T.$$
Poiché (A, C) è osservabile, sappiamo che $R_T > 0$, e a maggior ragione, per $x \neq 0$,
$$\langle Qx, x \rangle = \langle Q e^{TA} x, e^{TA} x \rangle + \langle R_T x, x \rangle \geq \langle R_T x, x \rangle > 0.$$
Per $x \neq 0$ sia $v(t) = \langle Q y(t), y(t) \rangle$; allora
$$v'(t) = \langle QA\, y(t), y(t) \rangle + \langle Q y(t), A y(t) \rangle = -\langle (QA + A^*Q) y(t), y(t) \rangle =$$
$$= \langle -C^*C\, y(t), y(t) \rangle = -|C y(t)|^2 \leq 0;$$

Quindi v è limitata superiormente in $[0,\infty[$, per ogni $x \neq 0$. Ne segue, essendo Q definita positiva, che anche $y(t)=e^{tA}x$ è limitata superiormente in $[0,\infty[$ per ogni $x \neq 0$. Ciò significa che ogni autovalore di A ha parte reale ≤ 0.

Se esiste $\lambda = i\omega \in \sigma(A)$, i casi sono due:

I) se $\omega = 0$, esiste $v \neq 0$ tale che $Av = 0$; ma allora

$$0 = \langle (A^*Q + QA)v, v \rangle = -\langle C^*Cv, v \rangle = -|Cv|^2$$

e anche $A^k v = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Ciò implica però

$$\langle v, C^*u_0 + A^*C^*u_1 + \dots + A^{*n-1}C^*u_{n-1} \rangle = 0 \quad \forall u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^p,$$

e quindi $v \perp R(C^*|A^*C^*|\dots|A^{*n-1}C^*)$; ma per il teorema 6 (v) questo implicherebbe $v=0$, assurdo.

II) se $\omega \neq 0$, esiste $w \neq 0$ tale che

$$i\omega w = Aw.$$

Ne segue che la funzione

$$y(t) = e^{i\omega t} w$$

risolve $y' = Ay$, $y(0) = w$; quindi $y(t) = e^{tA}w$. D'altra parte

$$\frac{d}{dt}\langle Qy(t), y(t) \rangle = -|Cy(t)|^2 \leq 0,$$

quindi, per periodicità, esiste $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$\langle Qy(t), y(t) \rangle = \gamma \quad \forall t \geq 0,$$

e quindi $|Cy(t)|^2 = |Ce^{tA}w|^2 = 0$ per ogni $t \geq 0$; ciò contraddice la controllabilità di (A,C).

In definitiva, i casi I e II sono impossibili e quindi gli autovalori di A hanno parte reale negativa: pertanto A è stabile.

(ii) Sia A stabile e sia $R=R^*$ fissata. Allora la matrice

$$Q=\int_0^\infty e^{tA^*}R\,e^{tA}\,dt$$

è ben definita, e

$$A^*Q+QA=\int_0^\infty \left(A^*e^{tA^*}Re^{tA}+e^{tA^*}RAe^{tA}\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty \frac{d}{dt}e^{tA^*}Re^{tA}\,dt=\left[e^{tA^*}Re^{tA}\right]_0^\infty=-R.$$

Inoltre, per definizione di Q, si ha $R\geq 0 \Rightarrow Q\geq 0$, e $R>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q>0$; in questo caso $\exists\, C=\sqrt{R}$ e (A,C) è osservabile essendo $R_T>0$.

Infine proviamo che Q è l'unica soluzione dell'equazione di Lyapunov. Se $\overline{Q}=\overline{Q}^*$ è un'altra soluzione, è immediato verificare che

$$\frac{d}{dt}e^{tA^*}(\overline{Q}-Q)e^{tA}=0 \quad \forall t\geq 0;$$

quindi

$$e^{tA^*}(\hat{Q}-Q)e^{tA}=\tilde{Q}-Q \quad \forall t\geq 0,$$

e per $t\to+\infty$ deduciamo $\tilde{Q}-Q=0$. $\square$

<u>Osservazione</u> Poiché (A,I) è sempre osservabile, se esiste $Q\geq 0$ che risolve $A^*Q+QA=-I$ si ottiene che A è stabile.

Concludiamo con un altro criterio di stabilità.

<u>Corollario</u> 10. Se (A, C) è osservabile e se

$$\lim_{t\to+\infty} Cy(t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

allora A è stabile.

<u>dim</u>. Fissato $\beta > 0$, la matrice

$$Q_\beta = \int_0^\infty e^{-2\beta t} e^{tA^*} C^* C e^{tA}\, dt$$

è ben definita e risolve l'equazione

$$(A-\beta I)^* Q_\beta + Q_\beta (A - \beta I) = -C^* C.$$

Se $\beta > 0$ è sufficientemente piccolo, la coppia $(A-\beta I, C)$ è ancora osservabile in virtù del Teorema 6 (v). Quindi, ripetendo la dimostrazione del teorema 9, si trova che $A-\beta I$ ha autovalori con parte reale negativa, ossia

$$\omega(A) < \beta \quad \text{per } \beta > 0 \text{ sufficientemente piccolo.}$$

Dunque $\omega(A) \le 0$. Si elimina però la possibilità di autovalori con parte reale nulla, ripetendo l'argomentazione già usata, e si conclude quindi che $\omega(A) < 0$, ossia la tesi. □

Veniamo ora alla stabilizzabilità. Il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ovvero la coppia (A,B), è <u>stabilizzabile</u> se esiste una matrice K, $m \times n$, tale che $A+BK$ sia stabile. In altre parole, la stabilizzabilità equivale all'esistenza di un controllo <u>feedback stabilizzante</u> $u(t) = Ky(t)$, tale che ogni soluzione del sistema $y' = (A+BK)y$ sia infinitesima per $t \to +\infty$.

Il sistema è completamente stabilizzabile se per ogni $\omega > 0$ esistono una matrice $m \times n$ K e una costante positiva M tali che ogni soluzione del sistema $y' = (A+BK)y$, $y(0) = x$, verifichi

$$|y(t)| \leq M e^{-\omega t} |x|.$$

Si ha il seguente teorema:

<u>Teorema 11</u> Sono fatti equivalenti:

(i) (A,B) è completamente stabilizzabile;

(ii) (A,B) è controllabile;

(iii) per ogni polinomio $p(\lambda)$ di grado n, monico e a coefficienti reali esiste una matrice K, $m \times n$, tale che $p(\lambda)$ coincide col polinomio caratteristico di $A+BK$.

Per provare questo teorema ci occorrono alcuni argomenti collaterali.

A. Sistemi dinamici equivalenti.

Due sistemi

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t)+Bu(t) \\ y(0)=x \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} z'(t)=\tilde{A}z(t)+\tilde{B}v(t) \\ z(0)=\xi \end{cases}$$

si dicono equivalenti se esistono due matrici non singolari P $(n\times n)$ e S $(m\times m)$ tali che

$$z=Py, \quad v=Su, \quad \xi=Px, \quad \tilde{A}=PAP^{-1}, \quad \tilde{B}=PBS^{-1}.$$

In particolare, le matrici A e $\tilde{A}$ sono simili. Si noti che (A,B) è controllabile se e solo se $(\tilde{A},\tilde{B})$ è controllabile: infatti le due matrici

$$(B|AB|\dots|A^{n-1}B) \quad , \quad (\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\dots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B})$$

hanno lo stesso rango, poiché nella seconda compaiono in più P e P^{-1}, che hanno rango n.

Vale la seguente proposizione nel caso in cui la dimensione dello spazio dei controlli è $m=1$:

Proposizione 12 Siano A $n\times n$, b $n\times 1$. Supponiamo che il sistema

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t)+bu(t), & t\geq 0 \\ y(0)=x \end{cases}$$

sia controllabile. Allora esso è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \eta'(t)=\tilde{A}\eta(t)+\tilde{b}u(t), & t\geq 0 \\ \eta(0)=\eta^0 \end{cases}$$

ove

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\tilde{A}$ è la cosiddetta <u>matrice compagna</u> di A. I numeri $a_1, \dots a_n$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico p_A di A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

mentre η^0 è un vettore opportuno.

<u>dim</u>. Osserviamo che $\tilde{A}$ e $\tilde{b}u(\cdot)$ sono la matrice e il termine noto del sistema che si ottiene dall'equazione differenziale di ordine n

$$\begin{cases} z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + a_n z(t) = u(t) \\ z(0) = \eta_1^0 \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = \eta_n^0. \end{cases}$$

Per cominciare, dal teorema di Cayley-Hamilton si ha

$$0 = p_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n,$$

e in particolare

$$A^n b = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{n-k} b.$$

Poiché, per ipotesi, $R(b|Ab|\cdots|A^{n-1}b)=n$, i vettori

$$v_k = A^{k-1}b, \quad k=1,\dots,n,$$

sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^n$.

Sia $y(t)$ la soluzione del sistema con $u(\cdot)$ e x fissati. Nella base $v_1 \dots v_n$ si avrà

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) v_i \quad , \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^0 v_i \, ;$$

$\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ è la condizione iniziale per il sistema che stiamo costruendo. Deriviamo $y(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i'(t) v_i = y'(t) = Ay(t) + bu(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) Av_i + bu(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(t) v_{i+1} - \xi_n(t) \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{n-k} b + bu(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(t) v_{i+1} - \xi_n(t) \sum_{k=1}^{n-1} a_k v_{n-k+1} + b\,u(t) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \xi_{i-1}(t) v_i - \xi_n(t) \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} v_i + u(t) v_1 .$$

Perciò

$$\begin{cases} \xi_1'(t) = -a_n \xi_n(t) + u(t) , \\ \xi_i'(t) = \xi_{i-1}(t) - a_{n-i+1} \xi_n(t) , \quad i=2,\dots,n \\ \xi(0) = \xi^0 , \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \xi'(t) = \bar{A}\,\xi(t) + \bar{b}\,u(t) \\ \xi(0) = \xi^0 , \end{cases}$$

ove

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I sistemi (A, b) e $(\bar{A}, \bar{b})$ sono equivalenti, con

$$P = (b | Ab | \cdots | A^{n-1} b)^{-1}$$

e in particolare $\bar{b} = e_1 = Pb$ e $p_A(\lambda) = p_{\bar{A}}(\lambda)$.

Adesso osserviamo che $\tilde{A} = \bar{A}^t$; inoltre, poiché $p_{\bar{A}}$ ha coefficienti reali, $\bar{A}$ e $\tilde{A}$ hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità, e in definitiva hanno la stessa forma di Jordan. Dunque $\bar{A}$ e $\tilde{A}$ sono simili, ossia esiste Q $n \times n$, invertibile, tale che

$$Q \tilde{A} Q^{-1} = \bar{A}.$$

Noi però vogliamo anche che risulti $Q\tilde{b} = \bar{b}$, cioè $Qe_n = e_1$. Ebbene, si può verificare che le due condizioni $Q\tilde{A}Q^{-1} = \bar{A}$, $Qe_n = e_1$ caratterizzano completamente Q.

Infatti, analizzando $\tilde{A}$ e $\bar{A}$ si verifica successivamente che

- $e_{n-1} - a_1 e_n = \tilde{A} e_n = Q^{-1} \bar{A} Q e_n = Q^{-1} \bar{A} e_1 = e_2,$

  da cui

  $$Q e_{n-1} = e_2 + a_1 Q e_n = e_2 + a_1 e_1 ;$$

- $e_{n-2} - a_2 e_n = \tilde{A} e_{n-1} = Q^{-1} \bar{A} Q e_{n-1} = Q^{-1} \bar{A}(e_2 + a_1 e_1) = Q^{-1}(e_3 + a_1 e_2),$

  da cui

  $$Q e_{n-2} = e_3 + a_1 e_2 + a_2 Q e_n = e_3 + a_1 e_2 + a_2 e_1 ;$$

- similmente, per induzione, si ha per $j = 1, 2, \dots, n-1$

  $$Q e_{n-j} = e_{j+1} + a_1 e_j + a_2 e_{j-1} + \dots + a_j e_1 = e_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} a_{j+1-k} e_k .$$

In particolare

$$Q e_1 = e_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} e_k .$$

Dunque se $Q \tilde{A} Q^{-1} = \bar{A}$ e $Q e_n = e_1$ si ha

$$Q = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Viceversa, non è difficile verificare che questa Q verifica ovviamente $Q e_n = e_1$, e inoltre

$$Q\check{A}=\bar{A}Q=\begin{pmatrix} -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & a_1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui $Q\hat{A}Q^{-1}=\bar{A}$. $\square$

B. Decomposizione di Kalman

Consideriamo un sistema non controllabile

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t)+Bu(t), & t\geq 0, \\ y(0)=x \ ; \end{cases}$$

dunque

$$\dim R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B)<n.$$

Proposizione 13 Sia $R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B)=l<n$. Allora esiste una matrice P, $n\times n$, non singolare, tale che

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad PB=\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ove A_{11} è $l\times l$, A_{12} è $l\times(n-l)$, A_{22} è $(n-l)\times(n-l)$, B_1 è $(l\times m)$; inoltre il sistema (A_{11},B_1) è controllabile.

Il senso di questo enunciato è che, nella nuova base, il sistema si decompone in una parte controllabile $\xi_1'=A_{11}\xi_1+A_{12}\xi_2+B_1u$ ed una incontrollabile $\xi_2'=A_{22}\xi_2$.

dim. Poniamo

$$E_0 = R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) =$$
$$= \{ Bu_1 + ABu_2 + \cdots + A^{n-1}Bu_n : u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m \};$$

E_0 ha dimensione ℓ, contiene $R(B)$, ed è invariante per A in virtù del Teorema di Cayley-Hamilton. Sia E_1 un sottospazio di dimensione $n-\ell$ tale che $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^n$; sia $v_1 \ldots v_\ell$ una base in E_0 e sia $v_{\ell+1}, \ldots, v_n$ una base in E_1. Se P è la matrice di transizione fra le basi $\{v_1 \ldots v_n\}$ e $\{e_1 \ldots e_n\}$, allora, posto $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = Py$,

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}u = \begin{pmatrix} B_1 u \\ B_2 u \end{pmatrix};$$

ma E_0 è invariante per A, e dunque

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\xi_1 \\ A_{21}\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall \xi_1 \in E_0,$$

ossia $A_{12} = 0$; inoltre $E_0 \supseteq R(B)$, da cui

$$\tilde{B}u = \begin{pmatrix} B_1 u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

ovvero $B_2 = 0$. Dunque essendo $\dim R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = \ell$, la relazione

$$R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = R(P(B|AB|\cdots|A^{n-1}B)) = R(\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\cdots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) =$$
$$= R\begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = R(B_1|A_{11}B_1|\cdots|A_{11}^{n-1}B_1),$$

prova che (A_{11}, B_1) è controllabile. □

dim del teorema 11:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supponiamo che il sistema non sia controllabile: allora

$$R(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = \ell < n;$$

quindi per la proposizione 13 esiste P non singolare tale che

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e (A_{11}, B_1) è controllabile. Allora, sia $p(\lambda)$ un arbitrario polinomio e sia K una matrice $m \times n$ tale che $p_{A+BK} = p$. Si ha

$$p_{A+BK}(\lambda) = \det(\lambda I - (A+BK)) = \det(\lambda I - (PAP^{-1} + PBKP^{-1})) =$$

$$= \det\left(\lambda I - \left(\tilde{A} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} KP^{-1}\right)\right) = \quad [\text{posto } K_1 = KP^{-1}]$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda I - (A_{11} + B_1K_1) & -A_{12} \\ 0 & \lambda I - A_{22} \end{pmatrix} = \det(\lambda I - (A_{11} + B_1K_1)) \det(\lambda I - A_{22}).$$

Quindi $\sigma(A_{22}) \subseteq \sigma(A+BK)$ e pertanto

$$\omega_2 := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A_{22})\} \le \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A+BK)\} =: \omega_K.$$

Ma, per ipotesi, esistono una matrice K, $m \times n$, e un numero $M > 0$ tali che $|y(t)| \le Me^{-\omega t}|x|$ per ogni soluzione del sistema $y'(t) = (A+BK)y(t)$, $y(0) = x$. Sia λ_0 un autovalore di $A+BK$ con $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = \omega_K$ e sia $v_0 \in \mathbb{R}^n$ un autovettore relativo a λ_0: allora $y(t) = e^{\lambda_0 t}v$ verifica

$$|y(t)| = e^{\mathrm{Re}\,\lambda_0 t}|v| \le Me^{-\omega t}|x|,$$

da cui $\omega_2 \le \omega_K = \mathrm{Re}\,\lambda_0 \le -\omega < -|\omega_2|$, assurdo. Ciò prova (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\omega > 0$ e poniamo

$$p(\lambda) = (\lambda + \omega + \varepsilon)^n,$$

cosicché l'unica radice di p è reale e minore di $-\omega$.
Per ipotesi esiste una matrice K, $m \times n$, tale che $p_{A+BK} = p$.
Quindi

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A+BK)\} < -\omega;$$

ne segue che (A, B) è completamente stabilizzabile.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Per provare questa implicazione ci occorrono 3 passi.

<u>Passo 1</u> ($m=1$). Supponiamo che il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases}$$

con b $n \times 1$, sia controllabile. Allora per la proposizione 12 anche il sistema

$$\begin{cases} z'(t) = \hat{A}z(t) + \tilde{b}u(t), & t \geq 0 \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

ove $\hat{A}$ è la matrice compagna di A, $\tilde{b} = e_n$ e z_0 è il trasformato di x, è controllabile, e in particolare

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = p_A(\lambda).$$

Sia $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ un generico polinomio di grado n, monico, a coefficienti reali. Consideriamo la matrice $1\times n$

$$\tilde{K} = (a_n - \alpha_n, \dots, a_1 - \alpha_1);$$

si ha allora

$$\tilde{b}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ a_n - \alpha_n & & a_1 - \alpha_1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & & -\alpha_1 \end{pmatrix};$$

in particolare

$$\det(\lambda I - \tilde{A} - \tilde{b}\tilde{K}) = p(\lambda).$$

Detta M la matrice invertibile tale che $MAM^{-1} = \tilde{A}$ e $Mb = \tilde{b}$, posto $K = \tilde{K}M$ si ha

$$M^{-1}(\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K})M = M^{-1}\tilde{A}M + M^{-1}\tilde{b}\tilde{K}M = A + bK,$$

e pertanto

$$p(\lambda) = p_{\tilde{A}+\tilde{b}\tilde{K}}(\lambda) = p_{A+bK}(\lambda).$$

Ciò conclude il passo 1.

<u>Passo 2</u> (riduzione al caso $m=1$). Dimostriamo che se (A,B) è controllabile, allora esistono una matrice L, $m\times n$, e un vettore $v\in\mathbb{R}^m$ tali che $(A+BL, Bv)$ sia controllabile.

In virtù della controllabilità, esiste $v\in\mathbb{R}^m$ tale che $Bv\neq 0$.

<u>Lemma 14</u> Esistono $u_1,\dots,u_{n-1}\in\mathbb{R}^m$ tali che, posto
$$e_1=Bv,\quad e_{i+1}=Ae_i+Bu_i\ ,\quad 1\le i\le n-1,$$
la famiglia $\{e_1\dots e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

<u>dim</u> Ragionando per assurdo, si ha

$$k:=\max\{h\in\{1,\dots n\}:\exists\, u_1,\dots,u_{h-1}\in\mathbb{R}^m \text{ per i quali } e_1\dots e_h \text{ sono linearmente indipendenti}\}<n.$$

Sia $E_0=\operatorname{span}[e_1\dots e_k]$; per definizione di k, si ha $\dim E_0=k$ e $Ae_k+Bu\in E_0$ per ogni $u\in\mathbb{R}^m$. Scelto $u=0$ si ricava $Ae_k\in E_0$, e di conseguenza $Bu\in E_0$ $\forall u\in\mathbb{R}^m$; ne segue $e_1\in E_0$ e $Ae_i\in E_0$ per $i=1,\dots,k$. Pertanto, E_0 è invariante per A e contiene $R(B)$. Ma allora, per la controllabilità di (A,B), deve essere $E_0=\mathbb{R}^n$, assurdo. $\square$

Sia dunque $\{e_1\dots e_n\}$ la base di $\mathbb{R}^n$ fornita dal lemma e sia u_n un arbitrario elemento di $\mathbb{R}^m$. Poniamo
$$L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\qquad Le_i=u_i \text{ per } i=1\dots n.$$

Allora
$$e_{i+1} = Ae_i + Bu_i = (A+BL)e_i \quad , \ i = 1, \dots, n-1,$$
da cui
$$e_{i+1} = (A+BL)^i e_1 = (A+BL)^i Bv, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$
Perciò
$$\left(Bv \,|\, (A+BL)Bv \,|\, \dots \,|\, (A+BL)^{n-1}Bv\right) = \left(e_1 \,|\, e_2 \,|\, \dots \,|\, e_n\right)$$
ha rango n, ossia $(A+BL, Bv)$ è controllabile. Ciò conclude il passo 2.

Passo 3 (conclusione). Sia $p(\lambda)$ un polinomio monico, a coefficienti reali, di grado n. Siano L e v dati dal passo 2: allora il sistema
$$\begin{cases} y'(t) = (A+BL)y(t) + (Bv)u(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$
ove $u(\cdot)$ è un controllo uni-dimensionale è controllabile. Dal passo 1 ricaviamo che esiste k, matrice $1 \times n$, tale che

$P_{A+BL+Bvk}(\lambda) = p(\lambda)$. La tesi di (iii) segue ponendo
$$K = L + vk.$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema 11. $\square$