$$= \int_s^T \left[\langle g'(Y^*_{s,x}(t)), G(t-s)(x'-x) + \int_s^t G(t-r) B [u^*_{s,x'}(r) - u^*_{s,x}(r)]\, dr \rangle_X + \langle h'(u^*_{s,x}(t)), u^*_{s,x'}(t) - u^*_{s,x}(t) \rangle_U \right] dt +$$

$$+ \langle \phi'(Y^*_{s,x}(T)), G(T-s)(x'-x) + \int_s^T G(T-r) B [u^*_{s,x'}(r) - u^*_{s,x}(r)]\, dr \rangle_X =$$

$$= \langle \int_s^T G(t-s)^* g'(Y^*_{s,x}(t))\, dt + G(T-s)^* \phi'(Y^*_{s,x}(T)), x'-x \rangle_X +$$

$$+ \int_s^T \langle \int_r^T B^* G(t-r)^* g'(Y^*_{s,x}(t))\, dt + h'(u^*_{s,x}(r)) + B^* G(T-r)^* \phi'(Y^*_{s,x}(T)), u^*_{s,x'}(r) - u^*_{s,x}(r) \rangle_U dr$$

ricordando la formula esplicita di $p^*_{s,x}(t)$, si ottiene

$$V(s,x') - V(s,x) \geq \langle p^*_{s,x}(s), x'-x \rangle_X + \int_s^T \langle B^* p^*_{s,x}(r) + h'(u^*_{s,x}(r)), u^*_{s,x'}(r) - u^*_{s,x}(r) \rangle_U dr =$$

$$= \langle p^*_{s,x}(s), x'-x \rangle + 0$$

in quanto $B^* p^*_{s,x} + h'(u^*_{s,x}) = 0$. Dunque

$$p^*_{s,x}(s) \in \partial_x V(s,x) \qquad \forall x \in X.$$

Rimpiazzando x con $Y^*_{0,x}(s)$, si ha

$$p^*_{0,x}(s) = p_{s, Y^*_{0,x}(s)}(s) \in \partial_x V(s, Y^*_{s,x}(s)). \quad \square$$

<u>Corollario 4.9</u> La funzione valore $V(s,x)$ è convessa rispetto a x.

<u>dim</u>. $V(s,\cdot)$ ha in ogni punto x sottodifferenziale non vuoto, per la proposizione precedente; negando la tesi si trova facilmente un assurdo. $\square$

<u>Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman</u>

Come nel caso lineare-quadratico, anche nel caso lineare-convesso la funzione valore risolve un'equazione differenziale (in un senso opportuno), la quale, nella nostra situazione, è ovviamente più complicata.

Anzitutto, per determinare di che equazione si tratti, facciamo delle ipotesi di comodo.

Proposizione 49 Supponiamo che $(h')^{-1}_{|_U}$ sia continua. Sia $x \in D(A)$, e assumiamo che in un punto $(s,x) \in [0,T[\times X$ esistano $V_s(s,x) \in \mathbb{R}$ e $V_x(s,x) \in X$. Allora

$$V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)) = 0 .$$

dim. Partiamo dalla relazione (Proposizione 44(iii))

$$0 \le V(s,x) = \inf_{u \in L^2(s,t,U)} \left\{ \int_s^t [g(y(\sigma)) + h(u(\sigma))]\, d\sigma + V(t, y(t)) \right\}, \quad t \in [s,T[,$$

ove naturalmente $y(r) = G(r-s)x + \int_s^r G(r-\sigma) Bu(\sigma)\, d\sigma$, $r \in [s,t]$.

Scegliamo $u(r) \equiv \bar{u} \in U$. Si ha, usando la formula di Taylor al 1° ordine,

$$0 \le V(t,y(t)) - V(s,x) + \int_s^t [g(y(r)) + h(\bar{u})]\, dr =$$

$$= V_s(s,x)(t-s) + \langle V_x(s,x), y(t) - x \rangle_X + \int_s^t [g(y(r)) - g(x)]\, dr + [g(x) + h(\bar{u})](t-s) +$$

$$+ o(t-s) + o(\|y(t) - x\|_X).$$

Notiamo che $\dfrac{y(t)-x}{t-s} = \dfrac{G(t-s)x - x}{t-s} + \dfrac{1}{t-s}\displaystyle\int_s^t G(t-\sigma) B\bar{u}\, d\sigma \longrightarrow Ax + B\bar{u}$ per $t \to s^+$;

dunque

$$y(t) - x = (t-s)[Ax + B\bar{u}] + o(t-s), \quad o(\|y(t) - x\|_X) = o(t-s),$$

$$\int_s^t [g(y(r)) - g(x)]\, dr = \int_s^t \langle g'(A), y(r) - x \rangle_X\, dr = o(t-s);$$

ne segue

$$0 \le (t-s)\left[V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax + B\bar{u} \rangle_X + g(x) + h(\bar{u}) \right] + o(t-s).$$

Dividendo per $t-s$ e mandando $t \to s^+$, si ottiene

$$0 \le V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax + B\bar{u} \rangle_X + g(x) + h(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in U,$$

ovvero

$$0 \le V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + \inf_{\bar{u} \in U} \{ \langle B^* V_x(s,x), \bar{u} \rangle_X + h(\bar{u}) \} + g(x) =$$

$$= V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)).$$

Per provare la disuguaglianza opposta, partiamo dalla relazione (Proposizione 6.6 (ii))

$$V(s,x) = \int_s^t [g(y^*_{s,x}(r)) + h(u^*_{s,x}(r))]\,dr + V(t, y^*_{s,x}(t)), \quad t \in [s,T],$$

e dalla formula

$$u^*_{s,x}(t) = (h^*)'_G(-B^* p^*_{s,x}(t)), \quad t \in [s,T].$$

Osserviamo che $p^*_{s,x}$ è una funzione continua, e che anche $(h^*)'_G$ è continua. Infatti, ricordiamo che per $v,z \in U$ si ha

$$z = (h^*)'_G(v) \iff v = h'_G(z)$$

vale a dire $(h^*)'_G = [h'_G]^{-1}$, e questa funzione è continua per ipotesi.

Dalla continuità di $u^*_{s,x}$ segue

$$\frac{y^*_{s,x}(t) - x}{t-s} = \frac{G(t-s)x - x}{t-s} + \frac{1}{t-s}\int_s^t G(t-\sigma) B u^*_{s,x}(\sigma)\,d\sigma \to Ax + B u^*_{s,x}(s).$$

Possiamo allora scrivere, usando la formula di Taylor e la convessità di g e h,

$$0 = V(t, y^*_{s,x}(t)) - V(s,x) + \int_s^t [g(y^*_{s,x}(\sigma)) + h(u^*_{s,x}(\sigma))]\,d\sigma =$$

$$= V_s(s,x)(t-s) + \langle V_x(s,x), y^*_{s,x}(t) - x \rangle_X + \int_s^t [g(y^*_{s,x}(\sigma)) - g(x) + h(u^*_{s,x}(\sigma)) - h(u^*_{s,x}(s))]\,d\sigma +$$

$$+ [g(x) + h(u^*_{s,x}(s))](t-s) + o(t-s) \ge$$

$$\ge [V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax + B u^*_{s,x}(s) \rangle_X + g(x) + h(u^*_{s,x}(s))](t-s) + \int_s^t \langle g'(x), y^*_{s,x}(\sigma) - x \rangle_X\,d\sigma +$$

$$+ \int_s^t \langle h'(u^*_{s,x}(s)), u^*_{s,x}(\sigma) - u^*_{s,x}(s) \rangle_U\,d\sigma + o(t-s);$$

essendo poi per $t \to s^+$

$$\int_s^t \langle g'(x), y^*_{s,x}(r) - x \rangle_X \, dr = o(t-s),$$

$$\int_s^t \langle h'(u^*_{s,x}(s)), u^*_{s,x}(r) - u^*_{s,x}(s) \rangle_U \, dr = o(t-s),$$

Si conclude che

$$0 \geq (t-s) \left[V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) + \langle B^* V_x(s,x), u^*_{s,x}(s) \rangle_U + h(u^*_{s,x}(s)) \right] + o(t-s),$$

e dunque, dividendo per $t-s$ e mandando $t \to s^+$,

$$0 \geq V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) + \langle B^* V_x(s,x), u^*_{s,x}(s) \rangle_U + h(u^*_{s,x}(s)) \geq$$

$$\geq V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) + \inf_{u \in U} \left\{ \langle B^* V_x(s,x), u \rangle_U + h(u) \right\} =$$

$$= V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)). \quad \square$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman è dunque

$$V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)) = 0, \quad x \in D(A), \ s \in [0,T].$$

<u>Osservazione</u> Il conto precedente è lo stesso che si applica in problemi molto più generali, in cui

$$J_s(x,u) = \int_s^T L(t, y(t), u(t)) \, dt + \phi(y(T)),$$

con

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), & t \in [s,T] \\ y(s) = x; \end{cases}$$

in questo caso si definisce l'Hamiltoniana

$$H(t,x,p) = \inf_{u\in U} \left\{ \langle p, f(t,x,u)\rangle_X + L(t,x,u) \right\}$$

e l'equazione di HJB diventa

$$V_s(s,x) + H(s,x,V_x(s,x)) = 0, \quad s\in [0,T[\,;$$

in tutte e due le situazioni (caso convesso e caso generale) si ha la condizione finale

$$V(T,x) = \phi(x).$$

È chiaro che, nel caso convesso, in cui $f(t,y,u) = Ay+Bu$ e $L(t,y,u) = g(y)+h(u)$, si ritrova

$$H(s,x,V_x(s,x)) = \inf_{u\in U} \left\{ \langle V_x(s,x), Ax+Bu\rangle_X + g(x) + h(u) \right\} =$$

$$= \langle V_x(s,x), Ax\rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)).$$

In che senso, nel caso lineare-convesso, la funzione valore risolve HJB? Nel senso delle soluzioni di viscosità, che andiamo a introdurre nel caso generale di una equazione della forma

$$F(x,u,u') = 0, \qquad x\in\Omega \text{ aperto di } X$$

ove $F: X\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un'assegnata funzione continua.

Come vedremo, le soluzioni di viscosità sono associate alla dinamica F, più che all'equazione $F=0$. Infatti una soluzione di viscosità di $F=0$ può non essere soluzione di viscosità di $-F=0$!!

Definizione Sia $u \in C^0(\Omega)$. Diciamo che u è soluzione di viscosità dell'equazione $F(x,u,u')=0$ se:

(i) per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che x_0 sia punto di massimo locale per $u-\varphi$, si ha $F(x_0, u(x_0), \varphi'(x_0)) \leq 0$;

(ii) per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che x_0 sia punto di minimo locale per $u-\varphi$, si ha $F(x_0, u(x_0), \varphi'(x_0)) \geq 0$.

Se u soddisfa solo (i), diciamo che u è subsoluzione di viscosità e vale $F(x,u,u') \leq 0$; se u soddisfa solo (ii), diciamo che u è supersoluzione di viscosità e vale $F(x,u,u') \geq 0$.

Osserviamo che ogni soluzione $u \in C^1(\Omega)$ di $F(x,u,u')=0$ è anche soluzione di viscosità, come si verifica subito prendendo nella definizione $\varphi = u$; viceversa, ogni soluzione di viscosità u, che sia di classe C^1, verifica l'equazione in senso classico: basta osservare che in entrambi i casi (i) e (ii) si ha $u'(x_0)=\varphi'(x_0)$, da cui $0 \geq F(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \geq 0$ in ogni punto x_0.

Dunque la nozione di soluzione di viscosità è una buona estensione della definizione classica di soluzione.

Esempio 50 Consideriamo il caso $F(x,u,u') = -|u'(x)| + 1$, $x \in]-1,1[$.

Si può verificare che $\bar{u}(x) = |x|$ è soluzione di viscosità dell'equazione

$$-|u'(x)|+1=0.$$

Infatti, se $x\in\,]-1,1[\setminus\{0\}$, esiste $\bar{u}'(x)$ e $|\bar{u}'(x)|=1$, quindi $\bar{u}$ verifica (i) e (ii) in virtù di quanto osservato poco fa. Se $x=0$, sia $\varphi\in C^1(-1,1)$ tale che $\bar{u}-\varphi$ abbia massimo locale in 0: allora esiste $\delta>0$ tale che

$$|x|-\varphi(x)\leq-\varphi(0)\quad\text{per } |x|<\delta,$$

per cui

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\geq 1 \text{ per } x\in\,]0,\delta[,\quad \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\leq -1 \text{ per } x\in\,]-\delta,0[,$$

il che significa che tale φ non esiste, dovendo verificare

$$\varphi'(0)\geq 1 \quad e \quad \varphi'(0)\leq -1,$$

cioè (i) è verificata. Se $\varphi\in C^1(-1,1)$ è tale che $\bar{u}-\varphi$ abbia minimo locale in 0, allora esiste $\delta>0$ tale che

$$|x|-\varphi(x)\geq-\varphi(0)\quad\text{per } |x|<\delta,$$

da cui

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\leq 1 \text{ per } x\in\,]0,\delta],\quad \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\geq -1 \text{ per } x\in\,]-\delta,0[,$$

e pertanto

$$-|\varphi'(0)|+1\geq 0,$$

cioè (ii) è verificata.

Notiamo che $\bar{u}(x)=|x|$, invece non è soluzione di viscosità di

$$|u'(x)|-1=0.$$

Infatti, se $\varphi\in C^1(-1,1)$ è tale che $\bar{u}-\varphi$ abbia massimo locale in 0, come prima si trova che tale φ non esiste, e quindi (i) è vero: quindi $\bar{u}$ è subsoluzione, ossia $|u'(x)|-1\leq 0$. Però, esistono funzioni $\varphi\in C^1(-1,1)$, tali che $u-\varphi$ ha minimo locale in 0, per le quali la relazione

$$|\varphi'(0)|-1\geq 0$$

è falsa: basta prendere $\varphi(x)=cx^n$, $n\geq 2$. Dunque $\bar u$ non è supersoluzione e quindi non è soluzione di viscosità di $|u'(x)|-1=0$.

Torniamo al caso lineare-convesso. Vale questo teorema:

<u>Teorema 51</u> Supponiamo che $(h_G')^{-1}$ sia continua. Allora la funzione valore $V(s,x)$ è soluzione di viscosità in $[0,T[\times X$ dell'equazione di HJB

$$-V_s(s,x)-\langle V_x(s,x),Ax\rangle_X-g(x)+h^*(-B^*V_x(s,x))=0,\ x\in D(A).$$

<u>dim</u>. Per ogni $x\in D(A)$ dobbiamo provare i due fatti seguenti:

(i) se (s,x) è punto di massimo locale per $V-\varphi$, con $\varphi\in C^1([0,T]\times X)$ allora

$$-\varphi_s(s,x)-\langle\varphi_x(s,x),Ax\rangle_X-g(x)+h^*(-B^*\varphi_x(s,x))\leq 0;$$

(ii) se (s,x) è punto di minimo locale per $V-\varphi$, con $\varphi\in C^1([0,T]\times X)$, allora

$$-\varphi_s(s,x)-\langle\varphi_x(s,x),Ax\rangle_X-g(x)+h^*(-B^*\varphi_x(s,x))\geq 0.$$

Il calcolo è simile a quello della dimostrazione della Proposizione 49.

Dimostriamo (i). Se $x\in D(A)$ e se (s,x) è punto di massimo locale per $V-\varphi$, allora se $|t-s|+\|y-x\|_X<\delta$, con δ opportuno, si ha

$$V(t,y)-\varphi(t,y)\leq V(s,x)-\varphi(s,x).$$

Fissiamo ora $\bar{u} \in U$ e poniamo $\bar{y}(r) = G(r-s)x + \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma$, $r \in [s,T]$:

Lemma 52 Risulta $\bar{y}(r) \in D(A)$ per ogni $r \in [s,T]$, con

$$A\bar{y}(r) = G(r-s)Ax + [G(r-s) - I]\,B\bar{u}.$$

dim. Poichè $x \in D(A)$, si ha $G(r-s)x \in D(A)$ con $AG(r-s)x = G(r-s)Ax$. Inoltre se λ è un fissato elemento di $\rho(A)$ si ha

$$\int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma = \int_s^r (\lambda I - A)R(\lambda,A)G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma = \int_s^r (\lambda I - A)G(r-\sigma)R(\lambda,A)B\bar{u}\,d\sigma =$$

$$= \lambda R(\lambda,A)\int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma + \int_s^r \frac{d}{d\sigma}G(r-\sigma)R(\lambda,A)B\bar{u}\,d\sigma =$$

$$= \lambda R(\lambda,A)\int_r^s G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma + R(\lambda,A)[I - G(r-s)]B\bar{u};$$

quindi

$$\int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma \in D(A),$$

$$(\lambda I - A)\int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma = \lambda\int_r^s G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma + [I - G(r-s)]B\bar{u},$$

ovvero

$$A\int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u}\,d\sigma = [G(r-s) - I]B\bar{u}. \quad \square$$

Notiamo che, in conseguenza di questo Lemma, che ha interesse in sé, si ha $\bar{y} \in C([s,T], D(A))$.

In particolare, si ha $\|\bar{y}(t) - x\|_X < \delta$ per $t \in [s, s+\eta]$ per un opportuno $\eta > 0$. Possiamo quindi scrivere, per la Proposizione 44(iii):

$$\varphi(t,\bar{y}(t)) - \varphi(s,x) \geq V(t,\bar{y}(t)) - V(s,x) \geq -\int_s^t [g(\bar{y}(\sigma)) + h(\bar{u})]\,d\sigma.$$

Dividendo per $t-s$ e mandando $t \to s^+$, troviamo

$$\left[\frac{d}{dt}\varphi(t,\bar{y}(t))\right]_{t=s} \geq -g(x)-h(\bar{u}),$$

ovvero

$$g(x)+h(\bar{u}) \geq -\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), \bar{y}'(s)\rangle_X =$$

$$= -\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax+B\bar{u}\rangle_X.$$

Ne segue, per ogni $\bar{u}\in U$,

$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax\rangle_X - g(x) \leq \langle \varphi_x(s,x), B\bar{u}\rangle_X + h(\bar{u}),$$

vale a dire

$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax\rangle_X - g(x) + h^*(-B^*\varphi_x(s,x)) \leq 0.$$

Ciò prova (i).

Dimostriamo (ii). Sia (s,x) un punto di minimo locale per $V-\varphi$, con $\varphi\in C^1([0,T]\times X)$: allora per $|t-s|+\|y-x\|_{D(A)}<\delta$, con δ opportuno, si ha

$$V(t,y)-\varphi(t,y) \geq V(s,x)-\varphi(s,x).$$

Consideriamo il controllo ottimale $u^*_{s,x}$, che è continuo in $[s,T]$ (essendo $(h')^{-1}$ continua) ed il corrispondente stato ottimale $y^*_{s,x}$.

Per continuità, esiste $\eta\in]0,\delta]$ tale che

$$\|y^*_{s,x}(t)-x\|_Y < \delta \quad \forall t\in[s,s+\eta].$$

Dunque, per $t\in[s,s+\eta]$, si ha, grazie alla Proposizione 6.6 (ii),

$$\varphi(s,x) - \varphi(t, Y^*_{s,x}(t)) \geq V(s,x) - V(t, Y^*_{s,x}(t)) =$$

$$= \int_s^t \left[g(Y^*_{s,x}(r)) + h(u^*_{s,x}(r)) \right] dr .$$

Dividendo per $t-s$, e osservando che, essendo $u^*_{s,x}$ continuo,

$$\lim_{t\to s^+} \frac{Y^*_{s,x}(t)-x}{t-s} = \lim_{t\to s^+} \frac{1}{t-s}\left[G(t-s)x + \int_s^t G(t-\sigma) B u^*_{s,x}(\sigma)\, d\sigma \right] =$$

$$= Ax + Bu^*_{s,x}(s) .$$

Si ottiene per $t \to s^+$

$$-\left[\frac{d}{dt} \varphi(t, Y^*_{s,x}(t)) \right]_{t=s} \geq g(x) + h(u^*_{s,x}(s)) .$$

ossia

$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax + Bu^*_{s,x}(s) \rangle_X - g(x) - h(u^*_{s,x}(s)) \geq 0 ;$$

ne segue, a maggior ragione,

$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^*\varphi_x(s,x)) \geq 0 .$$

Ciò prova (ii) e conclude la dimostrazione del Teorema 51. □

Osservazione Nel caso lineare-quadratico, l'equazione di HJB si riduce alla DRE. Infatti si ha

$$V(s,x) = \langle Q(s)x, x\rangle_X, \quad g(y) = \langle My, y\rangle_X, \quad h(u) = \langle Nu, u\rangle_U;$$

quindi

$$h^*(z) = \sup_{u\in U}\{\langle z,u\rangle_U - h(u)\} = \sup_{u\in U}\{\langle z,u\rangle_U - \langle Nu,u\rangle_U\} =$$

$$= \sup_{u\in U}\left\{2\left\langle \frac{N^{-1/2}z}{2}, N^{1/2}u\right\rangle_U - \|N^{1/2}u\|_U^2\right\} =$$

$$= \sup_{u\in U}\left\{-\left\|\frac{N^{-1/2}z}{2} - N^{1/2}u\right\|_U^2 + \frac{1}{4}\|N^{-1/2}z\|_U^2\right\} = \frac{1}{4}\langle N^{-1}z, z\rangle_U.$$

Perciò la HJB diventa

$$\frac{d}{ds}\langle Q(s)x,x\rangle_X + 2\langle Q(s)x, Ax\rangle_X + \langle Mx,x\rangle_X - \frac{1}{4}\langle N^{-1}B^*2Q(s)x, B^*2Q(s)x\rangle_U = 0,$$

ovvero

$$\frac{d}{ds}\langle Q(s)x,x\rangle_X + \langle Q(s)x, Ax\rangle_X + \langle Ax, Q(s)x\rangle_X + \langle Mx,x\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Q(s)x, B^*Q(s)x\rangle_U = 0,$$

che è la DRE.

Esempio Un caso particolare importante della HJB si ha quando $U = X$, $B = I$, $h(u) = \frac{1}{2}\|u\|_U^2$; in questo caso si ha $h^*(z) = \frac{1}{2}\|z\|_U^2$ e la HJB diventa

$$V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax\rangle_X - \frac{1}{2}\|V_x(s,x)\|_U^2 + g(x) = 0.$$